



INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Podpora talentovaných žáků v Plzeňském kraji

Reg. č. CZ.1.07/1.2.03/02.0001

SBORNÍK

MATEMATICKÝ KEMP
24. – 28. SRPEN 2015

FYZIKÁLNÍ KEMP
31. SRPEN – 4. ZÁŘÍ 2015

Středisko služeb školám, Plzeň, Částkova 78
Podpora talentovaných žáků v Plzeňském kraji
CZ.1.07/1.2.03/02.0001

Tento projekt je v letech 2012-15 financován z rozpočtu Plzeňského kraje

MATEMATICKÝ KEMP

Dělitelnost a jedna úloha J. J. Sylvestera	4
Funkcionální rovnice	6
Soustavy lineárních rovnic	9
Úlohy o polynomech	11
Úlohy z časopisu Kvant.....	13
Vytvořující funkce.....	17
Cifry a číselné soustavy.....	20
Invarianty v úlohách.....	22
Určovací geometrické úlohy	25
Důkazové techniky v geometrii a teorii čísel, kombinatorika.....	29
Celá část reálného čísla, absolutní hodnota reálného čísla I	33
Celá část reálného čísla, absolutní hodnota reálného čísla II	35
Důkazové techniky – nerovnosti	37
Kruhová inverze, Apolloniovy úlohy.....	39
Fraktální geometrie I	41
Fraktální geometrie II.....	44
Matematika hrou	49
Příklady na rovnice a nerovnice z mezinárodních matematických olympiád	54

FYZIKÁLNÍ KEMP

Pokusy s astronomickou tematikou.....	65
Záludné výběrové efekty a zářivé vyhlídky astronomie	66
Astronomické příklady řešené pomocí Stellaria	69
Jak fotografovat atmosférické a astronomické objekty.....	73
Pokusy s vývěvou.....	77
Zajímavé experimenty.....	78
Pravděpodobnostní rozdělení používaná ve fyzice	79
Řešení úloh – skládání a rozkládání sil	80
Řešení úloh z kinematiky	81
Úlohy z termiky – kalorimetrická rovnice	84
Řešení úloh z termodynamiky.....	84
Řešení obtížnějších úloh – ohmův zákon.....	86
Zajímavé experimenty.....	88
Základy zpracování fyzikálního měření.....	88
Mezinárodní olympiáda v astronomii a astrofyzice	90
Coulombův zákon	91
Kirchhoffovy zákony.....	91
Řešení obtížnějších úloh z elektřiny a magnetismu	92



INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Řešení vybraných úloh školních kol FO	93
Využití matematiky ve fyzice 1	97
Využití matematiky ve fyzice 2	102
Využití matematiky ve fyzice 3	107
Fyzika ve vědecko fantastické literatuře	112
Geometrická optika v příkladech	115
Některé jevy atmosférické optiky	116
Vlnová optika v příkladech	118
Fyzika kapalin a plynů I – za co můžou molekuly.....	119
Fyzika kapalin a plynů II – za co můžou ionty	121
Keplerovy zákony	122
Newtonův gravitační zákon.....	123
Sunce - zajímavý objekt na pozorování	125
Vodíkové palivové články a jejich perspektivy	127
Současné otázky a problémy astronomie	129
Základní charakteristiky hvězd	134
Archimédův zákon	139
Složitější úlohy z dynamiky	142
Složitější úlohy z kinematiky	145
Šumava	148

Středisko služeb školám, Plzeň, Částkova 78
Podpora talentovaných žáků v Plzeňském kraji
CZ.1.07/1.2.03/02.0001

Tento projekt je v letech 2012-15 financován z rozpočtu Plzeňského kraje

DĚLITELNOST A JEDNA ÚLOHA J. J. SYLVESTERA

Jaroslav HORA

1 Jedna úloha IMO 1997

Účast v mezinárodní matematické olympiádě je jistě prestižní záležitostí. Obdobně prestižní je, když mezinárodní porota vybere mezi řešené úlohy některou, navrženou Českou republikou. To se stalo např. v roce 1997, když na IMO v byla zadána i následující úloha:

Najděte všechna přirozená čísla a, b , pro která platí $a^{b^2} = b^a$.

Snad by stálo za pokus tento příklad zkusit vyřešit. Dnes si lze snadno stáhnout i řešení úlohy, jedno je na http://www.oma.org.ar/imo97/index_en.html.

2 Euklidův algoritmus a lineární diofantovská rovnice o dvou neznámých

K tomu, abychom zvládli řešení lineární diofantovské rovnice $ax + by = c$ se dvěma neznámými x, y , je třeba připomenout, že největší společný dělitel d přirozených čísel a, b je možno spočítat Euklidovým algoritmem opakovaného dělení, přičemž tímto dělitelem je poslední nenulový zbytek.

Dále, metodou „návratu“ provedeným Euklidovým algoritmem lze získat celá čísla x, y , taková, že $d = ax + by$.

Nyní platí: pokud d nedělí c , pak lineární diofantovská rovnice $ax + by = c$ nemá řešení. Pokud ale d dělí c , pak je snadné najít jedno řešení diofantovské rovnice $ax + by = c$: pro jistá celá čísla x, y , platí, že $d = ax + by$. Jestliže d dělí c , je $c = dk$ pro vhodné celé číslo k a vynásobením vztahu $d = ax + by$ číslem k zřejmě nalezneme jednu dvojici celých čísel x_0, y_0 takovou, že $ax_0 + by_0 = c$.

Toto řešení není jediné. Je dobře známo, že v daném případě má lineární diofantovská rovnice $ax + by = c$ dokonce nekonečně mnoho řešení, která je obvyklé zapisovat pomocí celočíselného parametru t ve tvaru $x = x_0 + \frac{b}{d}t, y = y_0 - \frac{a}{d}t, t \in \mathbb{Z}$.

2.1 Běžné příklady a jeden drobný problém

Nyní jsme schopni řešit řadu úloh, které se vyskytují v mnoha školních učebnicích, různých kvízech atd. Zamysleme se ale nad následující otázkou. Jsme schopni pomocí dvoukorun a pětikorun zaplatit částku 1 Kč?

Ale ano, jen to chce spolupracující pokladní. Dáme jí pětikorunu a ona nám vrátí dvě dvoukoruny. Diofantovská rovnice $5x + 2y = 1$ má, jak již víme, nekonečně mnoho řešení, jedno je $x_0 = 1, y_0 = -2$. Co když ale budeme na dopis vylepovat dvoukorunové a pětikorunové

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

známky a žádná „spolupracující pokladní“ nebude? Nejsme první, kdo se nad podobným problémem zamyslel.

3 problém z r. 1884

Anglický matematik J. J. Sylvester poslal v roce 1884 do časopisu Educational Times následující úlohu: Jestliže jsou p, q nesoudělná přirozená čísla větší než 1, pak dokaž, že počet přirozených čísel menších než p, q , která nemohou být zapsána jako součet sčítanců, které jsou násobkem p , resp. q (nulový sčítanec povolen), je $\frac{1}{2}(p-1)(q-1)$.

(Jestliže $p = 4, q = 7$, máme $\frac{1}{2}(p-1)(q-1) = 9$ a 1, 2, 3, 5, 6, 9, 10, 13, 17 jsou veškerá přirozená čísla menší než 28, která nejsou ani násobky čísel 4 a 7, ani nemohou být vytvořena sečtením násobků 4 a 7).

3.1 ... a velice vtipné řešení

Vtipné řešení poslal W. J. Curran Sharp. Autor tohoto textu je přeložil a zapsal poněkud obsírněji.

Uvažujme součin $(1 + x^p + x^{2p} + \dots + x^{pq})(1 + x^q + x^{2q} + \dots + x^{pq})$, jehož každý člen mezi 1 a x^{pq} odpovídá číslu menšímu než pq a majícímu tvar $mp + nq$ (sleduj exponenty v roznásobeném výrazu). Prostřední člen v roznásobeném výrazu je $2x^{pq}$ a koeficienty v roznásobeném výrazu jsou stejné, ať je čteme zleva doprava či naopak. Proto je dvojnásobek čísel tvaru $mp + nq$ a menších než pq roven hodnotě uvažovaného součinu pro $x = 1$, z něhož je odečteno číslo 4, protože členy obsahující x^1, x^{pq} a x^{2pq} nejsou zahrnuty. Tento dvojnásobek je $(p+1)(q+1) - 4$ a proto počet čísel tvaru $mp + nq$ a menších než pq je $\frac{1}{2}(p+1)(q+1) - 2$. Počet čísel, která nemohou být vyjádřena v uvedeném tvaru, je $pq - 1 - \left[\frac{1}{2}(p+1)(q+1) - 2 \right] = \frac{1}{2}[pq - p - q + 1] = \frac{1}{2}(p-1)(q-1)$.

4 Použitá literatura

<http://www.cut-the-knot.org/blue/Sylvester.shtml>

Mathematical Questions with Their Solutions, from the "Educational Times". Dostupné z adresy webové adresy

<https://archive.org/stream/mathematicalque10millgoog#page/n4/mode/2up>

5 Kontakt na autora

Doc. RNDr. Jaroslav Hora, CSc.

katedra matematiky, fyziky a technické výchovy FPE ZČU, Klatovská 51, Plzeň

horajar@kmt.zcu.cz

Středisko služeb školám, Plzeň, Částkova 78
Podpora talentovaných žáků v Plzeňském kraji
CZ.1.07/1.2.03/02.0001

Tento projekt je v letech 2012-15 financován z rozpočtu Plzeňského kraje

FUNKCIONÁLNÍ ROVNICE

Jaroslav HORA

1 Substituční metoda

Jednou ze základních metod pro řešení funkcionálních rovnic je substituční metoda. Vycházíme přitom z předpokladu, že daná rovnice má nějaké řešení. Toto řešení se snažíme určit vhodnými volbami proměnných a jejich dosazováním do zadané funkcionální rovnice. V případě úspěchu je nakonec třeba zkouškou ověřit správnost řešení.

2 Příklad

Najděte všechna řešení rovnice (1), která jsou definována na celé číselné ose:

$$f(x+y) + 2f(x-y) - 4f(x) + xf(y) = 3y^2 - x^2 - 2xy + xy^2. \quad (1)$$

2.1 Řešení

Předpokládejme, že jistá funkce $y = f(x)$ je řešením (1) a označme $f(0) = c$. Dosadíme do (1) $y = 0$, x ponecháme:

$f(x) + 2f(x) - 4f(x) + xc = -x^2$. Odtud se již nahlédne, že $f(x) = x^2 + xc$. Teď by bylo zapotřebí určit hodnotu c . Dosadíme –li však námi objevenou informaci, že $f(x) = x^2 + xc$ do (1) a provedeme –li trpělivě zřejmé početní úpravy, bude nám odměnou zjištění, že pro všechna reálná čísla x, y má platit

$$-c(x+y) + xy = 0. \quad (2)$$

Jenže snadno rozmyslíme, že pro libovolné x, y reálné bude vztah (2) platit pouze pro $c = 0$. Tím jsme zjistili, že případným řešením rovnice (1) může být jediná funkce $f(x) = x^2$, pokud vyhovuje zkoušce. Její provedení však již přenecháme čtenáři.

3 Speciální funkcionální rovnice, skládání funkcí a grupy

Existuje jedna zajímavá třída funkcionálních rovnic, při jejich řešení se využije jeden důležitý pojem moderní algebry, totiž pojem grupy. Připomeneme si rovněž skládání funkcí. Je –li kupř. dána funkce $y = \ln(x-5)$, je ihned patrné, že jde o složenou funkci. Vnitřní funkcí je funkce $f_1: z = x-5$, vnější $f_2: y = \ln z$. Lehko zjistíme, že definiční obor této složené funkce ke $(5, \infty)$.

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Při skládání funkcí ovšem záleží na pořadí. Volte kupř. $f_1(x) = \frac{x-3}{2x+1}$, $f_2(x) = \frac{3x-1}{x-1}$ a nalezněte funkce $g(x) = f_1(f_2(x))$, $h(x) = f_2(f_1(x))$.

Byly doby, kdy algebra byla jen „teorií rovnic“. Pak se ale ukázalo, že algebra bude muset studovat i nečekané objekty, kterým dnes říkáme algebraické struktury. Ty mají nosič, tj. jakousi množinu a na ní jsou definovány jisté algebraické operace. Kupř. množina celých čísel s operací sčítání je ukázkou jisté algebraické struktury, a to právě grupy. V její definici se vyžaduje splnění několika axiomů. Grupová operace má být neomezeně definovaná, tj. v našem případě má pro všechny dvojice celých čísel x, y existovat součet $x + y \in \mathbb{Z}$. To je jistě splněno. Dále, grupová operace má být asociativní a to sčítání na \mathbb{Z} je. Má existovat neutrální prvek a v našem případě je neutrálním prvkem na \mathbb{Z} vzhledem ke sčítání 0. Nakonec má ke každému prvku existovat prvek inverzní a v daném případě ke každému $y \in \mathbb{Z}$ je inverzním prvkem vzhledem ke sčítání prvek $-y \in \mathbb{Z}$.

Čtenář si jistě na internetu nalezne spousty příkladů klasických grup, a to konečných i nekonečných. Jednu ukázkou dvouprvkové grupy tvoří množina G tvořená dvojicí funkcí $f_1 : x \mapsto x$, $f_2 : x \mapsto \frac{-1}{x}$ s operací skládání funkcí připomenutou výše. Požádáme laskavého čtenáře, aby sám sestavil operační tabulku této grupy.

To, že jsme si vědomi, že některé množiny funkcí spolu s operací skládání tvoří grupu, se nám vyplatí při řešení závěrečné funkcionální rovnice.

4 Příklad

Najděte všechna řešení rovnice (3), která jsou definována na celé číselné ose:

$$x f(x) + 2 f\left(\frac{-1}{x}\right) = 3. \quad (3)$$

4.1 Řešení

Protože víme, že dvě funkce $f_1 : x \mapsto x$, $f_2 : x \mapsto \frac{-1}{x}$ tvoří grupu vzhledem k operaci skládání

funkcí, provedeme ve (3) substituci $x \rightarrow \frac{-1}{x}$. Máme pak

$$\frac{-1}{x} f\left(\frac{-1}{x}\right) + 2 f(x) = 3. \quad (4)$$

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Úpravou rovnic (3) a (4) se dostaneme k vyjádření $f(x)$. Rovnici (3) vynásobíme $\frac{1}{x}$, rovnicí (4) dvěma:

$$f(x) + \frac{2}{x} f\left(\frac{-1}{x}\right) = \frac{3}{x}$$

$$4f(x) - \frac{2}{x} f\left(\frac{-1}{x}\right) = 6. \text{ Odtud } f(x) = \frac{6x+3}{5x}. \text{ Snadno již dopočteme}$$

$$f\left(\frac{-1}{x}\right) = \frac{6-3x}{5} \text{ a kontrolu správnosti řešení provedeme snadno dosazením do (3).}$$

4.2 Příklad pro samostatnou práci

Najděte všechna řešení rovnice (5), která jsou definována na celé číselné ose:

$$xf(x) + 2f\left(\frac{x-1}{x}\right) = 1 - x. \quad (5)$$

Návod: Postačí si povšimnout, že tříprvková množina funkcí $f_1 : x = x$, $f_2 : x = \frac{x-1}{x}$ a $f_3 : x = \frac{1}{1-x}$ je nosičem tříprvkové grupy vzhledem k operaci skládání funkcí. Je pak možné napsat její operační tabulku a výpočet zcela analogický jako ve 4.1 nás přivede k výsledku

$$f(x) = \frac{-x^3 + 3x^2 - 3x + 2}{2x^2 - 2}.$$

5 Použitá literatura

BRODSKIJ, J.S., SLIPENKO,A.K: Funkcionalnyje uravnenija i grupy, Kvant, 1975, č. 1, str.28-32.

6 Kontakt na autora

Doc. RNDr. Jaroslav Hora, CSc.

katedra matematiky, fyziky a technické výchovy FPE ZČU, Klatovská 51, Plzeň.

horajar@kmt.zcu.cz

SOUSTAVY LINEÁRNÍCH ROVNIC

Jaroslav HORA

1 Jedna úloha s ošklivými koeficienty

$$\begin{aligned} \text{Řešte soustavu } & 5732x + 2134y + 2134z = 7886, \\ & 2134x + 5732y + 2134z = 670, \\ & 2134x + 2134y + 5732z = 11464. \end{aligned}$$

Koeficienty této soustavy pěkné nejsou a my máme povinnost vymyslet nějakou úpravu, která by nás přivedla k „hezčí“ rovnici. Sečteme –li všechny rovnice a koeficienty vydělíme číslem 10 000, máme $x + y + z = 2$ a nyní již vcelku snadno nalezneme jedno řešení $x = 1, y = -1, z = 2$.

2 Trocha triků přímo vysokoškolských ...

$$\begin{aligned} \text{Řešte soustavu } & x + 2y + 3z - t = 0, \\ & x - y + z + 2t = 4, \\ & x + 5y + 5z - 4t = -4, \\ & x + 8y + 7z - 7t = -8. \end{aligned}$$

Napíšeme tzv. matici soustavy tvořenou koeficienty u neznámých a hned připojíme sloupec pravých stran, čímž vznikne tzv. rozšířená matice soustavy:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 2 & 4 \\ 1 & 5 & 5 & -4 & -4 \\ 1 & 8 & 7 & -7 & -8 \end{array} \right) \quad \text{Teď bychom se měli domluvit, jaký postup dále volit. Do}$$

přehazování sloupců se nám asi nebude moc chtít, při zápisu jsme „ušetřili“ neznámé, ale kupř. s prvním sloupcem je svázána neznámá x a to bychom nemuseli měnit. Raději vylepšit řádky a toho lze dosáhnout násobením každého řádku nenulovým číslem, resp. přičítáním násobky některého řádku k jinému, resp. výměnou řádků. Mohli bychom ponechat první řádek a pak jeho -1 násobek přičíst ke všem dalším řádkům. Dostaneme sice novou rozšířenou matici soustavy, ale ekvivalentní s maticí výchozí, protože zřejmě mají obě stejnou množinu řešení. Nebudeme proto mezi matice psát rovnítko, ale znak \sim pro ekvivalenci matic.

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 2 & 4 \\ 1 & 5 & 5 & -4 & -4 \\ 1 & 8 & 7 & -7 & -8 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & -3 & -2 & 3 & 4 \\ 0 & 3 & 2 & -3 & -4 \\ 0 & 6 & 4 & -6 & -8 \end{array} \right). \text{ Nyní bychom byli spokojeni s prvními}$$

dvěma řádky (vektory), ale v tvorbě „odstupňované“ matice bychom pokračovali zřejmým způsobem. Druhý řádek bychom přičetli ke třetímu a pak ještě dvojnásobek druhého řádku k řádku čtvrtému.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & -3 & -2 & 3 & 4 \\ 0 & 3 & 2 & -3 & -4 \\ 0 & 6 & 4 & -6 & -8 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & -3 & -2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right).$$

Teď vidíme, jak veliký podvod na nás uchystali autoři příkladu. Na začátku se tvářili, že nám dávají soustavu čtyř rovnic o čtyřech neznámých, ale teď je zřejmé, že jde jen o dvě „pořádné“, netriviální rovnice pro čtyři neznámé.

Ty rovnice můžeme znovu obnovit:

$$\begin{aligned} x + 2y + 3z - t &= 0, \\ -3y - 2z + 3t &= 4. \end{aligned}$$

Jenže ze dvou rovnic čtyři neznámé nevypočteme. Za dvě z neznámých v poslední rovnici musíme dát parametry. Volme je šikovně, aby nám pokud možno dále nevyšly zlomky. Nechť $t = 2v$, $y = 2u$, kde $u, v \in \mathbb{R}$. Pak

$$-2z = 4 + 6u - 6v \quad \text{a} \quad z = -2 - 3u + 3v.$$

Z první rovnice soustavy pak vypočteme $x = 5u - 7v + 6$.

Tudíž $P = \{[5u - 7v + 6, 2u, -2 - 3u + 3v, 2v]\}$, $u, v \in \mathbb{R}$. Seznámili jsme se s případem, kdy daná rovnice má nekonečně mnoho řešení. Protože jsme měli jen dvě rovnice pro čtyři neznámé, bylo nutné volit dva reálné parametry.

Kdyby nám při úpravách rozšířené matice soustavy vznikl nějaký řádek nikoli jen ze samých nul, ale měl čtyři nuly a v sloupci pravých stran nenulové číslo, byl by to okamžitě signál pro něco zcela jiného. Tímto řádkem popsaná rovnice nemá žádné řešení a tedy ani původní soustava rovnic není řešitelná.

4 Použitá literatura

BEČVÁŘ, J.: Lineární algebra, Matfyzpress, Praha, 2010.

5 Kontakt na autora

Doc. RNDr. Jaroslav Hora, CSc.

katedra matematiky, fyziky a technické výchovy FPE ZČU, Klatovská 51, Plzeň

horajar@kmt.zcu.cz

ÚLOHY O POLYNOMECH

Jaroslav HORA

1 Polynomy jedné neurčité a algoritmus dělení

Záležitost ze základní školy.

2 Euklidův algoritmus

Stále funguje. Kdo jej umí použít pro přirozená čísla, dokáže jej zvládnout i pro polynomy jedné neurčité. V případě přirozených či dokonce celých čísel hlídáme, aby postupně nacházené zbytky byly v absolutní hodnotě stále menší. Nyní bude tzv. eukleidovskou normou stupeň polynomu.

Je dobře známo, že k výpočtu největšího společného dělitele dvou polynomů $f(x)$ a $g(x)$ s reálnými koeficienty lze použít Euklidův algoritmus. Je-li $\text{st } f \geq \text{st } g$, získáme největší společný dělitel z posloupnosti dělení mnohočlenů

$$f = g q_1 + r_1,$$

$$g = r_1 q_2 + r_2,$$

$$r_1 = r_2 q_3 + r_3,$$

.....,

$$r_{m-1} = r_m q_{m+1},$$

kde $\text{st } g > \text{st } r_1 > \dots > \text{st } r_m$.

Je dobře známo, že z posledního řádku, v němž poprvé proběhlo dělení beze zbytku, se získá největší společný dělitel polynomů f, g . Je $D(f, g) = r_m$.

2.1 Běžné příklady

Číslo 2 je kořenem polynomu $P(x) = x^2 + 2x - 8$. Proč? Je $P(2) = 0$! Jak se definuje obecně „kořen polynomu“? Co je to „kořenový činitel“? A co „vícenásobný kořen“?

Jestliže α je kořenem polynomu $P(x)$, pak při dělení $P(x)$ polynomem $x - \alpha$ dostáváme $P(x) = (x - \alpha) \cdot S(x) + R(x)$, kde $R(x)$ nulový polynom, nebo $\text{st } R(x) < \text{st } Q(x)$, tj. $\text{st } R(x) = 0$. Po dosazení $x = \alpha$ máme $P(\alpha) = R(\alpha) = 0$. To znamená, že $x - \alpha$ dělí $P(x)$.

Věta: Číslo $\alpha \in \mathbb{C}$ je kořenem polynomu $P(x)$ právě tehdy, když $x - \alpha$ dělí $P(x)$, tj. $P(x) = (x - \alpha) \cdot S(x)$.

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Definice: Řekneme, že číslo $\alpha \in \mathbb{C}$ je k – násobným kořenem polynomu $P(x)$, jestliže $P(x) = (x - \alpha)^k \cdot S(x)$, kde $S(x)$ je polynom, $S(x) \neq 0$.

3 Hornerovo schéma

(= zkrácený zápis dělení polynomu $P(x)$ lineárním dvojklenem $x - \alpha$. Vyjde (algoritmus dělení) $P(x) = (x - \alpha) S(x) + P(\alpha)$, kde

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0,$$

$$S(x) = b_{n-1} x^{n-1} + b_{n-2} x^{n-2} + \dots + b_1 x + b_0,$$

$$a_n = b_{n-1},$$

$$a_{n-1} = b_{n-2} - \alpha b_{n-1}$$

...

$$a_i = b_{i-1} - \alpha b_i,$$

...

$$a_1 = b_0 - \alpha b_1,$$

$$a_0 = P(\alpha) - \alpha b_0.$$

Odtud postupně vypočteme $b_{n-1} = a_n$, $b_{n-2} = a_{n-1} + \alpha b_{n-1}$, ..., $b_{i-1} = a_i + \alpha b_i$, ..., $b_0 = a_1 + \alpha b_1$, $P(\alpha) = a_0 + \alpha b_0$. To znamená, že koeficienty b_i polynomu $S(x)$ můžeme rekurentně vyjádřit pomocí koeficientů polynomu $P(x)$. Celý postup se zapisuje pomocí tzv. Hornerova schématu:

$$\begin{array}{cccccc} a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \dots & a_1 & a_0 \\ \alpha & \underline{\alpha b_{n-1}} & \underline{\alpha b_{n-2}} & \dots & \underline{\alpha b_1} & \underline{\alpha b_0} \\ b_{n-1} & b_{n-2} & b_{n-3} & \dots & b_0 & P(\alpha) \end{array}$$

3.1 Příklad: $P(x) = x^5 - 2x^4 - 8x^3 + x - 7$, $Q(x) = x - 4$

$$\begin{array}{cccccc} 1 & -2 & -8 & 0 & 1 & -7 \\ 4 & \underline{4} & \underline{8} & \underline{0} & \underline{0} & \underline{4} \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 1 & -3 \end{array} \quad P(4) = -3, \quad S(x) = x^4 + 2x^3 + 1.$$

Zjistili jsme, že číslo 4 není kořenem polynomu $P(x)$, protože $P(4) \neq 0$. Dělení polynomu $P(x)$ lineárním dvojklenem $x - 4$ tudíž poskytuje neúplný podíl $S(x)$, jehož koeficienty jsme rovněž získali z Hornerova schématu. Zbytek přitom tomto dělení je -3 , zapíšeme

$$P(x) = (x - 4)(x^4 + 2x^3 + 1) + (-3).$$

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Nyní lze uvést věty o hledání příp. celočíselných či racionálních kořenů polynomu s celočíselnými kořeny a mít prostředek k rychlému otestování, zda nějaký kandidát ořenem je či není.

4 Použitá literatura

DRÁBEK, J., HORA, J.: Polynomy a rovnice. Skriptum ZČU Plzeň, 2001.

5 Kontakt na autora

Doc. RNDr. Jaroslav Hora, CSc.

katedra matematiky, fyziky a technické výchovy FPE ZČU, Klatovská 51, Plzeň

horajar@kmt.zcu.cz

ÚLOHY Z ČASOPISU KVANT

Jaroslav HORA

1 Úlohy k přijímacím zkouškám na vysoké školy/matematika

V ruském časopise Kvant, jehož elektronický archiv je dostupný na síti na <http://kvant.mccme.ru/>, se publikují mezi jiným i zadání písemných přijímacích zkoušek na matematické a technické fakulty v někdejší SSSR či nynějším Rusku. Příklady vyskytující se v těchto zkouškách jsou zajímavé. Dotkneme se úloh na nerovnice, soustavy rovnic, rovnice logaritmické, exponenciální či goniometrické. U nás jsme často zvyklí řešit tyto úlohy jen v „čistém“ tvaru, tj. např. příklad na goniometrickou rovnici již nic dalšího neobsahuje. Tady se často setkáme s „kombinací“ různých úloh.

2 Příklad

Řešte soustavu rovnic $6^x - 2 \cdot 3^y = 2$

$$6^x \cdot 3^y = 12.$$

2.1 Řešení

Začínáme lehkým příkladem. Je vhodné označit $u = 6^x$, $v = 3^y$. Píli čtenáře již lze přenechat řešení nové soustavy, vyjde $u_1 = 6$, $v_1 = 2$ a $u_1 = -4$, $v_1 = -3$. Původní soustava má jediné řešení $P = \{[1, \log_3 2]\}$.

3 Příklad

Řešte soustavu rovnic $3^y = x$

$$2 \sin x + \sin 2x = 2 \cos^2 \frac{x}{2}.$$

Středisko služeb školám, Plzeň, Částkova 78
Podpora talentovaných žáků v Plzeňském kraji
CZ.1.07/1.2.03/02.0001

Tento projekt je v letech 2012-15 financován z rozpočtu Plzeňského kraje

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

3.1 Řešení

Ve druhé rovnici je $\sin 2x = 2 \sin x \cos x$, $2 \cos^2 \frac{x}{2} = 1 + \cos x$, proto lze psát

$$2 \sin x + 2 \sin x \cos x = 1 + \cos x,$$

$$(2 \sin x - 1)(1 + \cos x) = 0.$$

Obor pravdivosti této goniometrické rovnice je sjednocením oborů pravdivosti rovnic $\sin x = \frac{1}{2}$ a $\cos x = -1$. První rovnice má řešení $x_1 = \frac{\pi}{6} + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$, resp. $x_2 = \frac{5\pi}{6} + 2\pi l$, $l \in \mathbb{Z}$, druhá $x_3 = \pi + 2\pi m$, $m \in \mathbb{Z}$.

4 Příklad

Řešte soustavu rovnic $6^x - 2 \cdot 3^y = 2$

$$6^x \cdot 3^y = 12.$$

4.1 Řešení

Začínáme lehkým příkladem. Je vhodné označit $u = 6^x$, $v = 3^y$. Při čtenáře již lze přenechat řešení nové soustavy, vyjde $u_1 = 6$, $v_1 = 2$ a $u_1 = -4$, $v_1 = -3$. Původní soustava má jediné řešení $P = \{[1, \log_3 2]\}$.

5 Příklad

Řešte soustavu rovnic $6^x - 2 \cdot 3^y = 2$

$$6^x \cdot 3^y = 12.$$

5.1 Řešení

Začínáme lehkým příkladem. Je vhodné označit $u = 6^x$, $v = 3^y$. Při čtenáře již lze přenechat řešení nové soustavy, vyjde $u_1 = 6$, $v_1 = 2$ a $u_1 = -4$, $v_1 = -3$. Původní soustava má jediné řešení $P = \{[1, \log_3 2]\}$.

Jenže snadno rozmyslíme, že pro libovolné x, y reálné bude vztah (2) platit pouze pro $c = 0$. Tím jsme zjistili, že případným řešením rovnice (1) může být jediné funkce $f(x) = x^2$, pokud vyhovuje zkoušce. Její provedení však již přenecháme čtenáři.

6 Speciální funkcionální rovnice, skládání funkcí a grupy

Existuje jedna zajímavá třída funkcionálních rovnic, při jejich řešení se využije jeden důležitý pojem moderní algebry, totiž pojem grupy. Připomeneme si rovněž skládání funkcí. Je-li kupř. dána funkce $y = \ln(x - 5)$, je ihned patrné, že jde o složenou funkci. Vnitřní funkcí je funkce $f_1: z = x - 5$, vnější $f_2: y = \ln z$. Lehko zjistíme, že definiční obor této složené funkce je $(5, \infty)$.

Při skládání funkcí ovšem záleží na pořadí. Volte kupř. $f_1(x) = \frac{x-3}{2x+1}$, $f_2(x) = \frac{3x-1}{x-1}$ a nalezněte funkce $g(x) = f_1(f_2(x))$, $h(x) = f_2(f_1(x))$.

Byly doby, kdy algebra byla jen „teorií rovnic“. Pak se ale ukázalo, že algebra bude muset studovat i nečekané objekty, kterým dnes říkáme algebraické struktury. Ty mají nosič, tj. jakousi množinu a na ní jsou definovány jisté algebraické operace. Kupř. množina celých čísel s operací sčítání je ukázkou jisté algebraické struktury, a to právě grupy. V její definici se vyžaduje splnění několika axiomů. Grupová operace má být neomezeně definovaná, tj. v našem případě má pro všechny dvojice celých čísel x, y existovat součet $x + y \in \mathbb{Z}$. To je jistě splněno. Dále, grupová operace má být asociativní a to sčítání na \mathbb{Z} je. Má existovat neutrální prvek a v našem případě je neutrálním prvkem na \mathbb{Z} vzhledem ke sčítání 0. Nakonec má ke každému prvku existovat prvek inverzní a v daném případě ke každému $y \in \mathbb{Z}$ je inverzním prvkem vzhledem ke sčítání prvek $-y \in \mathbb{Z}$.

Čtenář si zajisté na internetu nalezne spousty příkladů klasických grup, a to konečných i nekonečných. Jednu ukázkou dvouprvkové grupy tvoří množina G tvořená dvojicí funkcí $f_1: x = x$, $f_2: x = \frac{-1}{x}$ s operací skládání funkcí připomenutou výše. Požádáme laskavého čtenáře, aby sám sestavil operační tabulku této grupy.

To, že jsme si vědomi, že některé množiny funkcí spolu s operací skládání tvoří grupu, se nám vyplatí při řešení závěrečné funkcionální rovnice.

7 Příklad

Najděte všechna řešení rovnice (3), která jsou definována na celé číselné ose:

Středisko služeb školám, Plzeň, Částkova 78
Podpora talentovaných žáků v Plzeňském kraji
CZ.1.07/1.2.03/02.0001

Tento projekt je v letech 2012-15 financován z rozpočtu Plzeňského kraje

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

$$xf(x) + 2f\left(\frac{-1}{x}\right) = 3. \quad (3)$$

7.1 Řešení

Protože víme, že dvě funkce $f_1 : x = x$, $f_2 : x = \frac{-1}{x}$ tvoří grupu vzhledem k operaci skládání

funkcí, provedeme ve (3) substituci $x \rightarrow \frac{-1}{x}$. Máme pak

$$\frac{-1}{x} f\left(\frac{-1}{x}\right) + 2f(x) = 3. \quad (4)$$

Úpravou rovnic (3) a (4) se dostaneme k vyjádření $f(x)$. Rovnici (3) vynásobíme $\frac{1}{x}$, rovnicí (4) dvěma:

$$f(x) + \frac{2}{x} f\left(\frac{-1}{x}\right) = \frac{3}{x}$$

$$4f(x) - \frac{2}{x} f\left(\frac{-1}{x}\right) = 6. \text{ Odtud } f(x) = \frac{6x+3}{5x}.$$

$f\left(\frac{-1}{x}\right) = \frac{6-3x}{5}$ a kontrolu správnosti řešení provedeme snadno dosazením do (3).

7.2 Příklad pro samostatnou práci

Najděte všechna řešení rovnice (5), která jsou definována na celé číselné ose:

$$xf(x) + 2f\left(\frac{x-1}{x}\right) = 1 - x. \quad (5)$$

Návod: Postačí si povšimnout, že tříprvková množina funkcí $f_1 : x = x$, $f_2 : x = \frac{x-1}{x}$ a $f_3 : x = \frac{1}{1-x}$ je nosičem tříprvkové grupy vzhledem k operaci skládání funkcí. Je pak možné napsat její operační tabulku a výpočet zcela analogický jako ve 4.1 nás přivede k výsledku

$$f(x) = \frac{-x^3 + 3x^2 - 3x + 2}{2x^2 - 2}.$$

8 Použitá literatura

BRODSKIJ, J.S., SLIPENKO,A.K: Funkcionalnyje uravnenija i grupy, Kvant, 1975, č. 1, str.28-32.

9 Kontakt na autora

Doc. RNDr. Jaroslav Hora, CSc.

katedra matematiky, fyziky a technické výchovy FPE ZČU, Klatovská 51, Plzeň.

horajar@kmt.zcu.cz

VYTVOŘUJÍCÍ FUNKCE

Jaroslav HORA

1 Sylvesterova úloha

James Joseph Sylvester (1814 - 1897) byl vedoucí anglický matematik viktoriánské éry, byl ale i prvním profesorem matematiky v rozvíjejících se Spojených státech a založil některé významné americké matematické časopisy. Více lze nalézt např. na <http://www-history.mcs.st-and.ac.uk/history/Biographies/Sylvester.html>. Tam je uvedena i následující úloha, kterou Sylvester zaslal do časopisu Educational Times v r. 1884:

Muž má velký počet známek v hodnotách 5 a 17 centů. Jaká je největší (konečná) hodnota v centech, kterou nemůže zaplatit žádnou kombinací těchto známek?

Úlohu lze zobecnit následovně. Buďte p, q dvě nesoudělná celá čísla větší než 1. Jaké je největší přirozené číslo, které nemůže být vyjádřeno jakožto lineární kombinace $a, p + b, q$ s nezápornými celočíselnými koeficienty a, b ?

2 Řešení aneb jak by mohly pomoci vytvořující funkce

Je jasné, že onen muž se známkami v hodnotách 5 a 17 centů nějaké hodnoty nevyplatí, např. 6 centů. Nápad vypadající jako přitažený za vlasy: mohli bychom zapsat na (mimořádně dlouhý) papír všechna nezáporná celá čísla a z této množiny pak postupně vyškrtat všechny hodnoty, který vyplatit jdou. Získali bychom množinu všech „nezaplatitelných“ hodnot a také hledanou hodnotu největší. Nápad má malou vadu: jeden lidský život by nestačil... .

Přesto bychom se nemuseli vzdát. Množinu všech nezáporných celých čísel $\{0, 1, 2, \dots\}$ bychom mohli zakódovat do exponentů „polynomu“ $x^0 + x^1 + x^2 + \dots$. Ne, on není polynom, jde o řadu, našťástí geometrickou s prvním členem $a_1 = 1$ a kvocientem x . Tu

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

umíme sečíst: $x^0 + x^1 + x^2 + \dots = \frac{1}{1-x} = f(x)$. Pozor, „jednoduchá“ funkce $f(x) = \frac{1}{1-x}$ nám „šifruje“ nekonečnou množinu $\{0, 1, 2, \dots\}$, je její vytvořující (generující) funkcí.

Jinak řečeno“ při zápisu množiny všech nezáporných celých čísel $\{0, 1, 2, \dots\}$ by nám asi upadla ruka, při zápisu vytvářející funkce této množiny $f(x) = \frac{1}{1-x}$ ne.

Teď nějak zapsat množinu všech hodnot, které vyplatit jdou... . Povšimněme si, že sjednocení množin

$$M_0 = \{0+0q, 0+q, 0+2q, 0+3q, \dots\}$$

$$M_1 = \{p+0q, p+q, p+2q, p+3q, \dots\}$$

$$M_2 = \{2p+0q, 2p+q, 2p+2q, 2p+3q, \dots\}$$

...

$$M_{q-1} = \{(q-1)p+0q, (q-1)p+q, (q-1)p+2q, (q-1)p+3q, \dots\}$$

tvoří právě množinu těch nezáporných celých čísel, která lze zapsat jakožto lineární kombinaci $a \cdot p + b \cdot q$ nezápornými celočíselnými koeficienty a, b . Všechny množiny M_0, M_1, \dots, M_{q-1} jsou tvořeny aritmetickými posloupnostmi. Zakódujme zase M_0 jako $x^0 + x^q + x^{2q} + \dots$, tj. nyní jde o nekonečnou geometrickou řadu s prvním členem $a_1 = x^0 = 1$ a kvocientem x^q . Pak $x^0 + x^q + x^{2q} + \dots = \frac{1}{1-x^q}$.

Jak zakódujeme M_1 ? Lze ji zapsat jako $x^p + x^{p+q} + x^{p+2q} + x^{p+3q} + \dots = x^p(x^0 + x^q + x^{2q} + x^{3q} + \dots) = x^p \frac{1}{1-x^q}$. Analogicky M_2 zakódujeme jako $x^{2p} \frac{1}{1-x^q}$, M_{q-1} jako $x^{(q-1)p} \frac{1}{1-x^q}$. Nakonec sjednocení množin M_0, M_1, \dots, M_{q-1} zakódujeme jako

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

$\frac{1}{1-x^q} (1 + x^p + x^{2p} + \dots + x^{(q-1)p})$. Poslední závorka je součtem prvních $q - 1$ členů

geometrické řady s prvním členem $a_1 = 1$ a kvocientem x^p . Tento součet je roven $\frac{1-x^{pq}}{1-x^p}$ a tudíž množinu všech nezáporných celých čísel, která lze zapsat jakožto lineární kombinaci $a, p + b, q$ nezápornými celočíselnými koeficienty a, b , lze zakódovat vytvořující funkcí

$$g(x) = \frac{1}{1-x^q} \frac{1-x^{pq}}{1-x^p} = \frac{1-x^{pq}}{(1-x^p)(1-x^q)}.$$

Nejhorší máme za sebou. Nakonec rozdíl funkcí $f(x) - g(x)$ podle našeho plánu kóduje hledanou konečnou množinu těch přirozených čísel, která nemohou být vyjádřena jakožto lineární kombinace $a, p + b, q$ s nezápornými celočíselnými koeficienty a, b .

$$\text{Je } f(x) - g(x) = \frac{1}{1-x} - \frac{1-x^{pq}}{(1-x^p)(1-x^q)} = \frac{(1-x^p)(1-x^q) - (1-x)(1-x^{pq})}{(1-x)(1-x^p)(1-x^q)}.$$

A teď nějaké dividendy z našeho snažení. Rozdíl $f(x) - g(x)$ kóduje konečnou množinu, je to nikoli nekonečná řada, ale jen polynom. Protože bylo $f(x) = \frac{1}{1-x} = x^0 + x^1 + x^2 + \dots$, lze si představit, že funkce $g(x)$ nekonečně mnoho členů odečetla, nějaké však zůstaly. Který je poslední nenulový člen? Stačí určit stupeň polynomu zatím (mírně zákeřně) zapsaného jako $\frac{(1-x^p)(1-x^q) - (1-x)(1-x^{pq})}{(1-x)(1-x^p)(1-x^q)}$. Čítec má stupeň $p q + 1$, jmenovatel $p + q + 1$ a rozdíl je

$p q - p - q$. Tato hodnota je obecnou odpovědí na Sylvesterův problém. Speciálně pro numerické hodnoty $p = 5$ a $q = 17$ je největší hodnotou, kterou nelze vyplatit, číslo 63.

Provedeme-li v programu Mathematica výpočet pro tyto hodnoty, získáme vskutku polynom, jehož exponenty kódují ony „nevyplatitelné“ hodnoty.

Together[1/(1-x)-(1-x^85)/((1-x^5)(1-x^17))]

$$x + x^2 + x^3 + x^4 + x^6 + x^7 + x^8 + x^9 + x^{11} + x^{12} + x^{13} + x^{14} + x^{16} + x^{18} + x^{19} + x^{21} + x^{23} + x^{24} + x^{26} + x^{28} + x^{29} + x^{31} + x^{33} + x^{36} + x^{38} + x^{41} + x^{43} + x^{46} + x^{48} + x^{53} + x^{58} + x^{63}$$

Středisko služeb školám, Plzeň, Částkova 78
Podpora talentovaných žáků v Plzeňském kraji
CZ.1.07/1.2.03/02.0001

Tento projekt je v letech 2012-15 financován z rozpočtu Plzeňského kraje

5 Použitá literatura

<http://www.cut-the-knot.org/blue/Sylvester2.shtml>

ZÍTEK, F.: Vytvořující funkce. Edice Škola mladých matematiků, Mladá fronta Praha, 1972.

6 Kontakt na autora

Doc. RNDr. Jaroslav Hora, CSc.

katedra matematiky, fyziky a technické výchovy FPE ZČU, Klatovská 51, Plzeň.

horajar@kmt.zcu.cz

CIFRY A ČÍSELNÉ SOUSTAVY

Martina KAŠPAROVÁ

1 Úvod

Do soutěžních úloh matematické olympiády bývají zařazovány příklady vyžadující nalezení či důkaz neexistence čísel, jejichž cifry musejí vyhovovat předepsaným podmínkám. S povahy takových úloh plyne, že se pracuje zejména s kladnými celými čísly, takže se využívá zejména dělitelnost celých čísel, rozvinutý zápis čísel v desítkové soustavě a v jiných soustavách, řešení jednoduchých diofantovských rovnic apod.

2 Úlohy

Příklad 1: Dokažte, že devítimístné číslo, v jehož zápise jsou všechny číslice kromě nuly a které končí 5, nemůže být druhou mocninou celého čísla. (Vasiljev, Jegorov 1988, str. 50–51.)

Předpokládejme naopak, že takové číslo může být druhou mocninou čísla x . V takovém případě je x pětimístné a musí končit cifrou 5. V tom případě můžeme psát $x = 10y + 5$, a tedy $x^2 = 100y(y + 1) + 25$. Devítimístné číslo tedy končí ciframi 25 a jeho prvních sedm cifer představuje číslo, které je součinem po sobě jdoucích čísel. Z toho důvodu může končit pouze cifrou 0, 2 nebo 6, neboť součiny cifer 1.2, 3.4, 6.7, 8.9 končí cifrou 2, 2.3, 7.8 končí 6, 4.5 a 5.6 končí cifrou 0. Nula je vyloučená zadáním úlohy, cifru 2 jsme již použili na místě desítek, proto na místě stovek může být jedině cifra 6. Devítimístné číslo x^2 lze proto zapsat jako $1\ 000z + 625 = 125 \cdot (8z + 5)$. Je tedy dělitelné 125. Protože jde o druhou mocninu přirozeného čísla, musí být v jeho rozkladu na součin mocnin prvočísel všechna prvočísla v sudé mocnině, proto je x^2 dělitelné dokonce $625 = 5^4$. Odtud i $125 \cdot (8z + 5)$ je dělitelné 625, a tedy z musí být dělitelné 5. Číslo dělitelné 5 končí 0 nebo 5, což není možné, tudíž devítimístné číslo požadovaných vlastností neexistuje.

Příklad 2: Najděte největší čtvercové číslo takové, že po škrtnutí jeho posledních dvou cifer se opět získá čtvercové číslo. Předpokládejme, že aspoň jedna ze škrtnutých cifer je různá od nuly. (Vasiljev, Jegorov 1988, str. 29.)

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Označme hledané číslo x^2 a číslo vzniklé škrtnutím posledních dvou cifer y^2 , pak lze psát $x^2 = 100y^2 + z$, kde $0 < z < 100$. Pro číslo x proto platí $x > 10y$, neboli $x \geq 10y + 1$. Odtud $x^2 \geq 100y^2 + 20y + 1$, a tedy $z \geq 20y + 1$. Vzhledem k podmínce $0 < z < 100$ dostaneme omezení pro y : $100 > 20y + 1$, a tedy $y < 5$. Chceme co možná největší čtvercové číslo, proto zvolme $y = 4$. Z nerovnosti $z \geq 20y + 1$ získáme podmínku $z \geq 81$. Odtud $x^2 \geq 4^2 \cdot 100 + 81 = 1\,681$. Protože $1\,681 = 41^2$ a $42^2 = 1\,764$ už nevyhovuje, je největším čtvercovým číslem $1\,681$.

Příklad 3: Ve které číselné soustavě má číslo 2015 zápis $abab$?

Úlohu můžeme stručně zapsat vztahem $(2015)_{10} = (abab)_z$, kde z je kladné celé číslo větší než 1 a a, b jsou kladná celá čísla menší než z nebo $b = 0$. Zapišme neznámé číslo $abab$ rozvinutým zápisem v soustavě o základu z :

$$2015 = az^3 + bz^2 + az + b$$

Obě strany rovnice lze upravit na součin:

$$5.13.31 = (az + b)(z^2 + 1) \quad (*)$$

Při rozkladu činitele 403 čísla $2015 = 5.403$ můžeme s výhodou použít tvrzení, podle něhož musí být nejmenší prvočíslo p , které dělí číslo n , menší nebo rovno \sqrt{n} . Podle základní věty aritmetiky je každý rozklad přirozeného čísla na součin prvočísel určen jednoznačně až na pořadí činitelů. Proto i výraz na pravé straně musí být pro jistá a, b, z rozložitelný na tři činitele, pokud má daná úloha řešení. Postačí uvažovat dva případy. (1) Výraz $az + b$ je dále nerozložitelný, je tedy roven 5, nebo 13, nebo 31. (2) Výraz $z^2 + 1$ není součinem dvou činitelů, v tom případě musí být roven některému z prvočísel na levé straně (*). Prozkoumáním všech možností zjistíme, že k řešení s přihlédnutím k podmínkám na a, b a z vede pouze případ $az + b = 31, z^2 + 1 = 65, z$ něhož vyplyne $(2015)_{10} = (3737)_8$.

Příklad 4: Ciferný součet kladného trojčiferného prvočísla p_1 je dvojčiferné prvočíslo p_2 . Ciferný součet prvočísla p_2 je jednociferné prvočíslo $p_3 > 2$. Najděte všechny takové trojice prvočísel p_1, p_2, p_3 . Ciferný součet kladného trojčiferného prvočísla p_1 je dvojčiferné prvočíslo p_2 . Ciferný součet prvočísla p_2 je jednociferné prvočíslo $p_3 > 2$. Najděte všechny takové trojice prvočísel p_1, p_2, p_3 . (21. MO, Z-P-1, 1973, s. 56)

Uvažujme $p_1 = 100.a + 10.b + c, p_2 = 10.x + y, a, b, c, x, y \in \{0, 1, 2, \dots, 9\}, a, x \neq 0$. Cifry a, b, c jsou maximálně rovny 9, proto je jejich ciferný součet, tj. číslo p_2 , maximálně roven 27. Hledáme tedy dvouciferná prvočísla p_2 , jejichž ciferný součet je rovněž prvočíslo, a to prvočíslo $p_3 > 2$. Všechna prvočísla p_2 s cifrou $x = 1$ na místě desítek mají sudý ciferný součet, proto $x = 2$ a p_2 může být jedině 23. Zbývá najít cifry a, b, c tak, aby $a + b + c = 23$. Dvouciferné prvočíslo $p_2 = 23$ lze získat s ohledem na maximální možný ciferný součet trojčiferného čísla jako součet „poměrně vysokých“ cifer. Zjistíme, že $23 = 9 + 9 + 5 = 9 + 8 + 7 = 8 + 8 + 7 = 9 + 7 + 7$. Různým uspořádáním cifer v číslech lze získat 15 trojčiferných čísel se součtem 23, z nichž pouze 599, 887, 977, 797 jsou prvočísla.

3 Závěr

Při řešení úloh se procvičily základní metody, které lze použít pro řešení úloh týkajících se číselných soustav a ciferných problémů.

4 Použitá literatura

VASILJEV, N. B., JEGOROV, A. A., Zadači vsesojuznych matematiceskich olimpiad. Moskva: Nauka, 1988. 285 s.

XXI. ročník matematické olympiády. Praha: SPN, 1973, 184 s.

5 Kontakt na autora

Mgr. Martina Kašparová, Ph.D.

KMT-M FPE ZČU

Klatovská 51, Plzeň

mernesto@kmt.zcu.cz

INVARIANTY V ÚLOHÁCH

Martina KAŠPAROVÁ

1 Úvod

Mezi olympiádními úlohami se občas objevují takové, v nichž je potřeba zjistit, zda lze pomocí daných operací přejít od jednoho z objektů k jinému, nebo dokázat, že dané operace nelze provádět do nekonečna. V takových úlohách je vhodné najít invariant – číselnou charakteristiku objektu nebo funkci s jistými vlastnostmi na množině objektů, která se nemění při daných operacích, nebo funkci, jejíž hodnoty se při každé operaci zvětšují, resp. zmenšují.

2 Úlohy

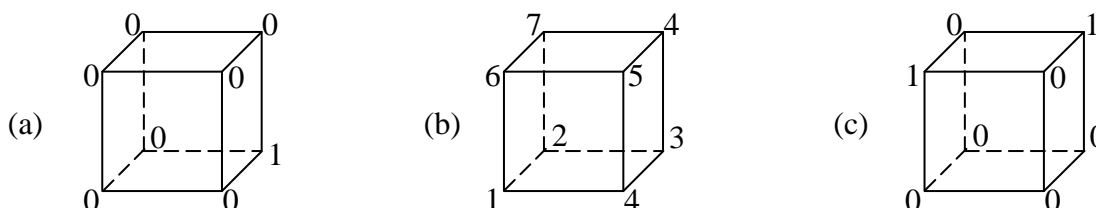
Příklad 1: Na tabuli jsou napsána čísla 1, 2, 3, ..., 19, 20. Smažeme libovolná dvě čísla a a b a místo nich napíšeme číslo $a + b - 1$. Jaké číslo zůstane po 19 takových operacích. (Genkin a kol. 1994)

Prováděná operace obsahuje součet čísel, která se ze souboru vypouštějí. Podstatné pro řešení úlohy bude sledování změny součtu všech čísel zapsaných na tabuli. Na začátku je součet čísel $S = 1 + 2 + \dots + 20 = 210$. Po první operaci se z S změní na $S - a - b + (a + b - 1) = S - 1$. V dalším kroku odebereme např. čísla c a d . Výsledek z první operace, tj. $S - 1$, se změní na $(S - 1) - c - d + (c + d - 1) = S - 2$. Po devatenácti operacích je součet čísel na tabuli roven $S - 19 = 210 - 19 = 191$. Při každé operaci ubude jedno číslo, proto po devatenácti operacích zůstane na tabuli pouze jedno číslo a to je rovno 191. Invariantem

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

v úloze je hodnota $S - p$, kde p je počet čísel, která jsou v daném kroku napsána na tabuli. (Po operaci se hodnota $S - p$ změní na $S - (p - 1) - a - b + (a + b - 1) = S - p$, tj. nezmění se.)

Příklad 2: V každém vrcholu krychle je napsáno číslo, viz obrázky (a), (b), (c). V jednom kroku se ke dvěma číslům umístěným na stejné (libovolné) hraně přičte číslo jedna. Lze po několika takových krocích dosáhnout toho, že je v každém vrcholu stejné číslo?

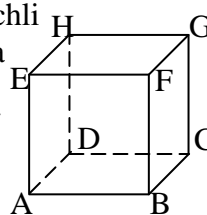


(Vasiljev, Jegorov 1988, str. 81.)

Po několika neúspěšných pokusech očíslovat vrcholy krychle stejným číslem při výchozím uspořádání uvedeném na obrázku (a) usoudíme, že takové očíslování není možné. V každém kroku se dvě čísla zvětší o 1, proto se v každém kroku zvětší součet čísel ve všech vrcholech o 2. Součet čísel ve vrcholech krychle (a) může být 1, 3, 5, 7, ..., tj. liché číslo. Předpokládejme, že lze očíslovat vrcholy číslem x , pak je součet čísel ve všech vrcholech $8 \cdot x$. To je číslo sudé, ať je x sudé nebo liché. Z uspořádání daného obrázkem (a) proto danou operací nelze získat krychli očíslovanou stejným číslem.

Nejprve ověříme, že je součet čísel při vrcholech krychle v obrázku (b) sudý. Přičteme číslo 1 k vrcholům hrany 61, tím je v obou vrcholech původní hrany 67 číslo 7. Po této úpravě se hrana 12 v dolní podstavě změní na 22 a postupným přičítáním čísla 1 ji lze změnit tak, aby ve vrcholech bylo číslo 7 jako na hraně v horní podstavě. Nyní je boční stěna očíslována stejným číslem. Přičtením čísla 1 k oběma vrcholům hrany 43 v dolní podstavě se získá hrana 55 místo 54 v přední a boční stěně a hrana 44 v boční a zároveň zadní stěně. Navyšováním o 1 se čísla ve vrcholech změní na 7. Krychli na obrázku (b) lze proto očíslovat stejným číslem.

I když je součet čísel u všech vrcholů krychle (c) sudý, nedaří se krychli očíslovat stejným číslem. Pokud by se jedna ze svislých hran 10 zaměnila za hranu 01, krychli by bylo možno očíslovat číslem 1. Rozhodující pro řešitelnost úlohy není jen parita součtu čísel u vrcholů, ale také uspořádání jednotlivých čísel. Chceme-li zvětšit číslo v některém z vrcholů krychle, např. v A, pak se podle zadané operace zvýší o 1 číslo na jedné ze tří hran, které z vrcholu A vycházejí, tj. v B, D nebo v E. Změna v bodě F ovlivní E, B nebo G, v C způsobí změnu v G, B nebo D, konečně nárůst ve vrcholu H změní G, E, nebo D. Změny v bodech A, F, C, H vedou ke změnám v bodech B, D, E, G a obráceně. Součet čísel při vrcholech v každé ze jmenovaných skupin bodů roste stejným způsobem. V obrázku (b) je součet v první skupině $1 + 5 + 3 + 7 = 16$ a ve druhé $4 + 2 + 6 + 4 = 16$, přičtením 1 k vrcholům jedné hrany se oba součty zvýší na 17. V obrázku (c) je součet v první skupině 0 a ve druhé 2. Zadaná operace nezmění rozdíl mezi těmito součty, rozdíl součtů čísel při vrcholech dvou skupin je invariantní, zůstane vždy 2. Krychli (c) proto nelze očíslovat stejným číslem.



INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Příklad 3: Tři stroje tisknou na kartičky dvojice přirozených čísel. První stroj přečte kartičku (a, b) a vydá $(a+1, b+1)$; druhý po vstupu (a, b) vydá $(a/2, b/2)$, pracuje jen v případě sudých a, b ; třetí stroj ke dvěma kartičkám $(a, b), (b, c)$ vydá kartičku (a, c) . Všechny kartičky jsou k dispozici. Lze z kartičky $(5, 19)$ získat pomocí strojů kartičku $a) (1, 50), b) (1, 2015)$? (Upraveno podle Vasiljev, Jegorov 1988, str. 70.)

Upravujeme danou kartičku: $(5, 19) \xrightarrow{1} (6, 20) \xrightarrow{2} (3, 10) \xrightarrow{1} (4, 11) \xrightarrow{1} \dots$
 $\xrightarrow{1} (10, 17) \xrightarrow{3} (3, 17) \xrightarrow{1} (4, 18) \xrightarrow{2} (2, 9) \xrightarrow{1} \dots \xrightarrow{1} (9, 16) \xrightarrow{3} (2, 16)$
 $\xrightarrow{2} (1, 8) \xrightarrow{3} (1, 15) \xrightarrow{3} (1, 22) \xrightarrow{3} (1, 36) \xrightarrow{3} (1, 50)$.

Všimněme si, co zachovávají všechny tři stroje. První stroj zachovává rozdíl čísel na kartičce. Úpravou v druhém stroji je tento rozdíl zmenšen půlením, zachovává se tedy největší lichý dělitel rozdílu čísel na kartičce, což zachová i úprava prováděná třetím strojem. Na dané kartičce je invariantem 7 jako největší lichý dělitel rozdílu $19 - 5 = 14$. Číslem 7 je dělitelný i rozdíl čísel na kartičce $(1, 50)$. V b) je největším lichým dělitelem rozdílu čísel $2015 - 1 = 2014$ číslo 1 007, ten však 7 dělitelný není, proto kartičku $(1, 2015)$ nelze z kartičky $(5, 19)$ zadanými stroji vytvořit.

Příklad 4: Na tabuli je napsáno několik 0, 1, 2. Dvě různé číslice se smažou a místo nich se zapíše cifra 0, 1 nebo 2, ale různá od smazaných. Když nakonec zůstane na tabuli jedno číslo, tak nezávisí na pořadí, v němž byly číslice smazány. Dokažte. (Vasiljev, Jegorov 1988, str. 57.)

Předpokládejme, že jsou na tabuli napsány tři nuly, jedna jednička a čtyři dvojky, $\{0, 0, 0, 1, 2, 2, 2, 2\}$. Nahraďme všechny dvojice $\{0, 2\}$ číslem 1, získáme soubor $\{1, 1, 1, 1, 2\}$. Další úpravy, $\{1, 1, 1, 0\} \rightarrow \{1, 1, 2\} \rightarrow \{1, 0\}$ vedou k číslu 2. Stejný soubor upravme nyní tak, že $\{1, 2\}$ nahradíme 0, tj. $\{0, 0, 0, 1, 2, 2, 2, 2\} \rightarrow \{0, 0, 0, 0, 2, 2, 2\}$. Upravujeme např. takto: $\{0, 0, 0, 0, 2, 2, 2\} \rightarrow \{0, 1, 1, 1\} \rightarrow \{2, 1, 1\} \rightarrow \{0, 1\}$. Zřejmě opět zůstane na tabuli 2, i když jsme prováděli úpravy v jiném pořadí. Některé soubory evidentně nelze zadanými úpravami dovést k jedinému číslu, např. $\{0, 0, 0\}$. Označme počet nul v souboru p , počet jedniček q , počet dvojek r a sledujme jejich změny na příkladě při prvním postupu úprav.

0	p	3	2	1	0	1	0	1	0
1	q	1	2	3	4	3	2	1	0
2	r	4	3	2	1	0	1	0	1

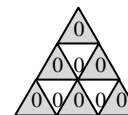
Po každé úpravě se počet nul, jedniček i dvojek změní o 1, tj. v každém kroku se mění parita tohoto počtu. Pokud zůstane po provedení všech úprav na tabuli jen jedno číslo, musí být jedno z čísel p, q, r rovno 1 a ostatní 0. Původně proto musela být parita počtu jedné z číslic 0, 1, 2 odlišná od parity počtu výskytů druhých dvou číslic. Číslice s odlišnou paritou zůstane na tabuli jako poslední.

Příklad 5: Rovnostranný trojúhelník se stranou délky 3 je rozdělen na devět trojúhelníkových buněk. V těchto buňkách jsou na začátku zapsány nuly. V jednom kroku lze vybrat dvě čísla, které jsou v buňkách se společnou stranou, a přičíst k oběma z nich 1 nebo od obou z nich 1

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

odebrat. Petr chce udělat několik takových kroků, aby pak v buňkách zůstala v nějakém pořadí zapsaná čísla $n, n+1, \dots, n+8$. Pro která n to lze provést? (Vserossijskaja olimpiada 2014-2015)

Pokusy doplnit do buněk čísla pro $n = 0$ vedou ke zjištění, že změna v bílých polích vede ke změně v šedých polích a že se zachovává součet čísel ve stejně vyznačených buňkách. Navíc se celkový součet při každém kroku zvětší o 2. Na začátku je součet čísel v polích stejné skupiny roven 0. Odtud dostáváme dvě podmínky; 1) součet $n + (n+1) + \dots + (n+8) = 9n + 36$ musí být sudé číslo. 2) součet tří největších čísel (v bílých buňkách) musí být roven součtu šesti čísel (v šedých buňkách). Z podmínek plyne rovnice $9(n+4) : 2 = 6n + 15$, která má jediné řešení $n = 2$.



3 Závěr

Studenti se seznámili s několika úlohami, v nichž se danou operací mění daný objekt a ve kterých je proto vhodné hledat invariant.

4 Použitá literatura

GENKIN, S. A. a kol., Leningradskije matěmaticeskije kružki. Kirov: ASA, 1994.

Dostupné na internetu: <http://problems.ru/view_problem_details_new.php?id=30752>

VASILJEV, N. B., JEGOROV, A. A., Zadači vsesojuznych matěmaticeskich olimpiad. Moskva: Nauka, 1988. 285 s.

VSEROSSIJSKAJA OLIMPIADA po matěmatike 2014/2015. Regionalnyj raznoboj 4. 2. 2015. Dostupné na internetu: <<http://math.mosolymp.ru/upload/files/2015/aesc/outrunning-2015-02-04-region-g9-mixture.pdf>>

5 Kontakt na autora

Mgr. Martina Kašparová, Ph.D.

KMT-M FPE ZČU

Klatovská 51, Plzeň

mernesto@kmt.zcu.cz

URČOVACÍ GEOMETRICKÉ ÚLOHY

Martina KAŠPAROVÁ

1 Úvod

Mezi geometrické určovací úlohy obvykle řadíme úlohy, které se týkají geometrických objektů a jsou řešeny výpočtem (např. určení délek, obsahů, objemů, počtu objektů splňujících zadané vlastnosti), konstrukční úlohy a úlohy na vyšetření množiny všech bodů s danou vlastností. V rámci kempu jsme se věnovali především výpočtovým úlohám.

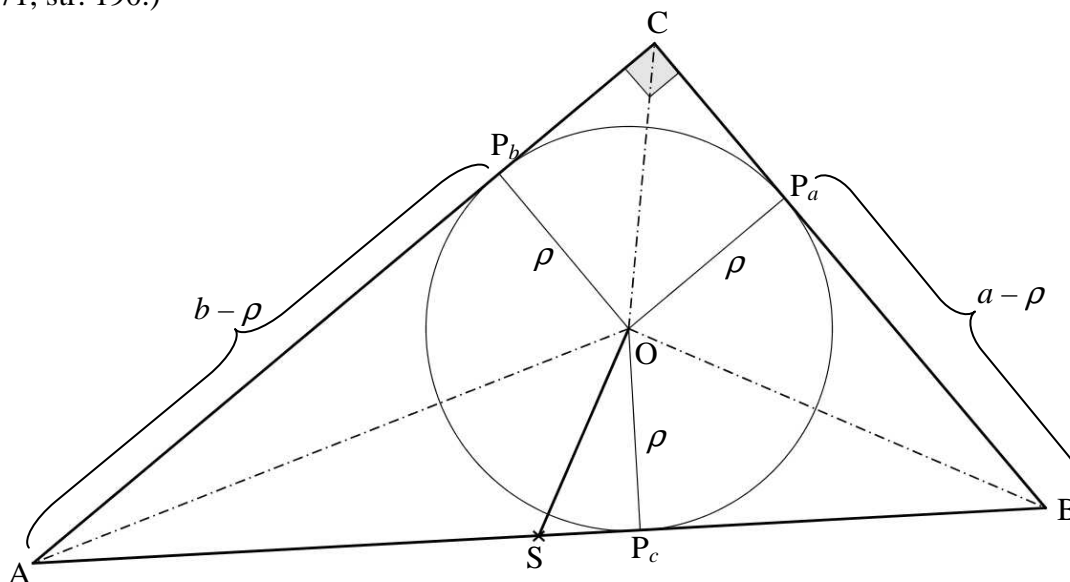
Středisko služeb školám, Plzeň, Částkova 78
Podpora talentovaných žáků v Plzeňském kraji
CZ.1.07/1.2.03/02.0001

Tento projekt je v letech 2012-15 financován z rozpočtu Plzeňského kraje

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

2 Úlohy

Příklad 1: Jsou dány velikosti poloměrů r , ρ opsané a vepsané kružnice pravoúhlému trojúhelníku ABC. Vyjádřete vzdálenost středů obou těchto kružnic pomocí čísel r , ρ . (Zedek 1971, str. 190.)



Vzdálenost středů S, O vypočteme z pravoúhlého trojúhelníku SOP_c :

$$|SO|^2 = \rho^2 + |SP_c|^2$$

K vyjádření $|SP_c|$ v závislosti na r , ρ využijeme vlastností pravoúhlého trojúhelníku a jemu vepsané kružnice. Vzhledem ke konstrukci středu O platí, že čtyřúhelník OP_aCP_b je čtverec. Proto $|AP_b| = b - \rho$, $|BP_a| = a - \rho$. Dvojice trojúhelníků AOP_b , AOP_c a BOP_a , BOP_c jsou dvojicemi shodných trojúhelníků, a tedy $|AP_c| = b - \rho$, $|BP_c| = a - \rho$. Odtud $|AB| = 2r = a + b - 2\rho$, neboli

$$2(r + \rho) = a + b, \quad (1)$$

protože střed S kružnice opsané trojúhelníku ABC je středem přepony. Pythagorovou větou v trojúhelníku se získá další vztah mezi a , b , r :

$$4r^2 = a^2 + b^2 \quad (2)$$

Vzhledem k tomu, že $|SP_c| = a - \rho - r$, vypočte se hledaná vzdálenost ze vztahu

$$|SO|^2 = \rho^2 + (a - \rho - r)^2, \quad (3)$$

přičemž z něj pomocí (1) a (2) eliminujeme a . Vyjde $|SO| = \sqrt{r^2 - 2r\rho}$.

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Příklad 2: Trojúhelník ABC má obsah 24 cm^2 . Označme X střed strany AB a Y takový bod strany BC, že platí $BY = 2 \cdot CY$. Společný bod úseček CX, AY označme Z. Vypočítejte obsah čtyřúhelníka XBYZ. (Zedek 1971, str. 198.)

Pro obsah čtyřúhelníku platí například:

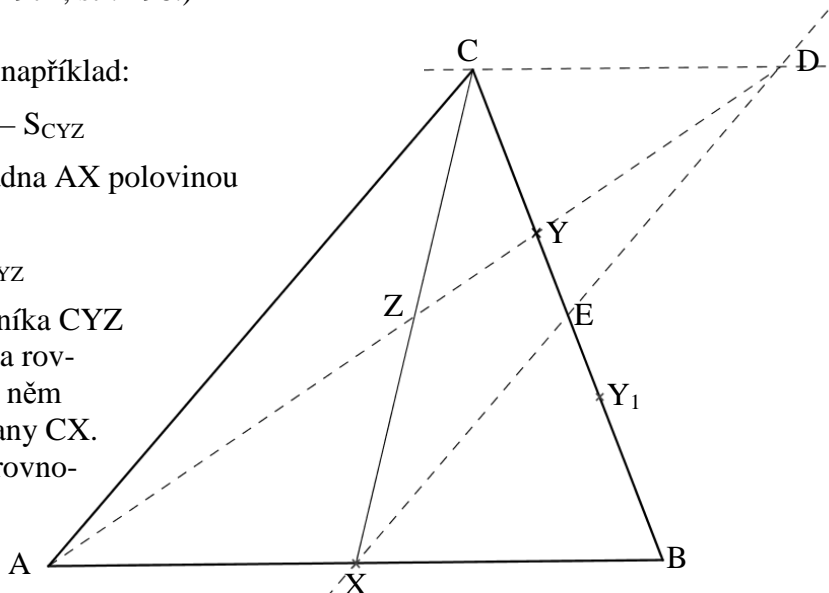
$$S_{XBYZ} = S_{ABC} - S_{AXC} - S_{CYZ}$$

V trojúhelníku AXC je základna AX polovinou základny AB, proto

$$S_{XBYZ} = 24 - 12 - S_{CYZ}$$

Pro nalezení obsahu trojúhelníka CYZ

doplníme trojúhelník AXC na rovnoběžník AXDC. Bod Z je v něm středem, a tedy i středem strany CX. Strana XD je úhlopříčkou v rovnoběžníku XBDC, bod E je jeho středem a zároveň středem strany BC.



Úsečka ZE je proto střední příčkou v trojúhelníku XBC. Obsah trojúhelníku CZE tvoří čtvrtinu obsahu trojúhelníku XBC, tj. čtvrtinu z 12 cm^2 , což jsou 3 cm^2 . Základna CY trojúhelníku CYZ tvoří dvě třetiny základny CE trojúhelníku CEZ, oba mají stejnou výšku na zmíněné základny, proto $S_{CYZ} = \frac{2}{3} \cdot S_{CEZ} = \frac{2}{3} \cdot 3 = 2 \text{ cm}^2$. Obsah čtyřúhelníka XBYZ je 10 cm^2 .

Lze zvolit i jiný postup. Označíme-li $S_{CZY} = p$, pak $S_{XBYZ} = S_{XBC} - S_{CZY} = 12 - p$, neboť strana AB zadaného trojúhelníka je půlena bodem X, takže trojúhelníky AXC a XBC mají stejný obsah. Strana BC je body Y a Y_1 rozdělena na třetiny, proto $S_{CZY} = S_{ZY_1Y} = S_{ZY_1B} = p$ a S_{AYB} má dvojnásobný obsah než S_{AYC} , tj. $S_{AYB} = 16$. Obsah trojúhelníku ABZ je $16 - 2p$, polovina z toho dává obsah trojúhelníku ZXB, který spolu s trojúhelníky ZY_1B a ZYY_1 tvoří hledaný čtyřúhelník. Dvě různá vyjádření obsahu hledaného čtyřúhelníku vede k sestavení lineární rovnice

$$12 - p = (8 - p) + 2p$$

s řešením $p = 2$. Odtud se již snadno získá stejný výsledek jako v předchozím postupu.

Příklad 3: Obdélník, jehož rozměry jsou přirozená čísla a, b ($a \geq 2, b \geq 2$), je rozdělen na ab shodných čtverců. Stočme tento obdélník do pláště rotačního válce tak, aby strana, která má velikost a , se stala obvodem podstavy tohoto válce. Vrcholy zmíněných shodných čtverců vytvoří na plášti válce „mřížové body“. Každé dva různé mřížové body spojíme přímkou, kterou nazveme příčka.

a) Kolik je příček procházejících vnitřkem vytvořeného válce?

b) Dostaneme více takových příček, když stočíme delší nebo kratší stranu obdélníka v podstavou kružnici rotačního válce? (Zedek 1971, str. 203.)



INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Řešení úlohy a) spočívá ve zjištění počtu mřížových bodů a následně počtu příček, které lze jimi vést za podmínek uvedených v zadání. Při řešení je třeba vyloučit mřížové body v podstavách, které vytvářejí příčky neprocházející vnitřkem válce, a také body, které leží na stejné povrchové úsečce kolmé na podstavu. V části b) zjistíme porovnáním dvou výrazů rozdílem, že větší počet příček se získá při stáčení obdélníku podél delší strany.

3 Závěr

Studenti se seznámili s některými vlastnostmi geometrických objektů, které nejsou standardní součástí středoškolského učiva. V některých úlohách se ukázalo, že geometrický vhled nestačí a k dosažení výsledku je třeba zvládnout postupy pro úpravy výrazů a eliminaci neznámých ze soustavy rovnic.

4 Použitá literatura

ZEDEK, M. a kol., Vybrané úlohy z matematické olympiády kategorie B a C. Praha: SPN, 1971. 259 s. ISBN 14-386-71.

5 Kontakt na autora

Mgr. Martina Kašparová, Ph.D.
KMT-M FPE ZČU
Klatovská 51, Plzeň
mernesto@kmt.zcu.cz

Středisko služeb školám, Plzeň, Částkova 78
Podpora talentovaných žáků v Plzeňském kraji
CZ.1.07/1.2.03/02.0001

Tento projekt je v letech 2012-15 financován z rozpočtu Plzeňského kraje

DŮKAZOVÉ TECHNIKY V GEOMETRII A TEORII ČÍSEL, KOMBINATORIKA

Josef KŘIŠŤAN

Úvod

I tento rok předkládám stručné shrnutí přednášky, která se skládala ze tří tematických částí, a to

- Důkazové techniky v geometrii,
- Důkazové techniky v teorii čísel,
- Kombinatorika.

Pro atraktivitu přednášky jsem také letos uspořádal soutěž, kde mezi sebou soutěžily jednotlivé skupiny, složené vesměs ze dvojice studentů. Na začátku soutěže si studenti zvolí jméno svého týmu, což vyústí v kuriózní jména a zároveň to odlehčí formální začátek přednášky. Po každém tematickém bloku následoval kvíz, který se sestával ze série ryze nematematických otázek a po stanoveném časovém limitu se odpovědi obodovaly. Body šlo ale hlavně získávat za aktivitu a řešení úloh. Na konci přednášek jsem vyhlásil výsledky a rozdál sladké odměny.

V následujících částech uvedeme několik úloh řešených během přednášky.

1 Důkazové techniky v geometrii

V sekci Důkazové techniky v geometrii jsme se zabývali základními vlastnostmi přímk, kružnic a trojúhelníků. Vyslovili jsme (někdy včetně důkazu) několik základních i pokročilých vět z geometrie trojúhelníka a snažili se tyto poznatky využít při řešení úloh.

Příklad 1. Označme S střed kružnice vepsané v trojúhelníku ABC a A' , B' a C' postupně obrazy bodu S v osové souměrnosti podle přímk BC , CA a AB . Dokažte, že trojúhelníky ABC a $A'B'C'$ jsou podobné právě tehdy, když je ABC rovnostranný trojúhelník.

Řešení. Volme klasické označení stran a úhlů. Jak známo, bod S leží na osách vnitřních úhlů trojúhelníku ABC , takže snadno dopočítáme $|\angle C'SB'| = \pi - \alpha$.

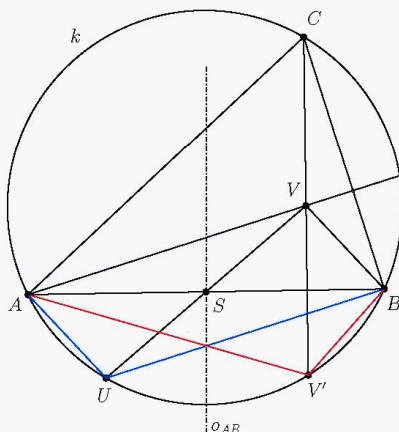
Na druhé straně, bod S je pro trojúhelník $A'B'C'$ střed kružnice opsané. To lze snadno nahlédnout z toho, že např. $|A'S| = 2r$, kde r je poloměr kružnice vepsané trojúhelníku ABC . V trojúhelníku $A'B'C'$ plyne z vlastností obvodových a středových úhlů: $|\angle B'SC'| = 2|\angle B'A'C'|$. Za předpokladu, že trojúhelníky ABC a $A'B'C'$ jsou podobné musí být $|\angle B'SC'| = 2\alpha$. Z dvojího vyjádření velikosti úhlu $\angle B'SC'$ plyne podmínka $\pi - \alpha = 2\alpha$, $\alpha = \pi/3$. Podobně dostaneme $\beta = \gamma = \pi/3$, tj. musí trojúhelník ABC je rovnostranný.

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Naopak, pokud je trojúhelník ABC rovnostranný, je úloha triviální a rádi přenecháme tuto část laskavému čtenáři.

Příklad 2. V ostroúhlém trojúhelníku ABC označme V jeho ortocentrum a S střed AB . Buď U bod souměrně sdružený bodu V podle středu S . Dokažte, že $|\angle ACV| = |\angle BCU|$.

Řešení.



Obrázek 1: náčrt k příkladu 2.

Ve středové souměrnosti, ve které přejde bod V na bod U přejde trojúhelník AVB na BUA , a proto

$$|\angle AUB| = |\angle AVB|, \quad |AU| = |BV|. \quad (1)$$

Velikost $|\angle AVB|$ dopočítáme z trojúhelníku AVB . Platí $|\angle VAB| = \pi/2 - \beta$ a $|\angle VBA| = \pi/2 - \alpha$, pak $|\angle AVB| = \alpha + \beta = \pi - \gamma$. Proto také $|\angle AUB| = \pi - \gamma$, z čehož plyne, že čtyřúhelník $AUBC$ je tětiový a opsaná kružnice tomuto čtyřúhelníku je totožná s opsanou kružnicí trojúhelníku ABC .

Označme V' obraz bodu V v osové souměrnosti podle přímky AB . V této souměrnosti přejde trojúhelník AVB na trojúhelník $AV'B$, takže

$$|\angle AV'B| = |\angle AVB| = \pi - \gamma, \quad |BV'| = |BV| = |AU| \quad (\text{viz (1)}). \quad (2)$$

Jak vidíme, bod V' leží také na kružnici opsané trojúhelníku ABC , viz obrázek 1.

Nyní již víme, že body U a V' leží na kružnici opsané trojúhelníku ABC . Protože $|AU| = |BV'|$, obvodové úhly nad těmito tětivy jsou shodné: $|\angle ACU| = |\angle BCV'|$. Pak

$$\begin{aligned} |\angle ACV| &= |\angle ACV'| = |\angle ACU| + |\angle UCV'| = \\ &= |\angle BCV'| + |\angle V'CU| = |\angle BCU|, \end{aligned}$$

což jsme měli dokázat.

2 Důkazové techniky v teorii čísel

Jednou ze základních metod v teorii čísel je matematická indukce. Aplikujeme ji na následující, na první pohled geometrickou, úlohu.

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Příklad 3. Dokažte, že n přímek rozdělí rovinu na nejvýše $\frac{1}{2}n(n+1) + 1$ částí.

Řešení. Pro první část matematické indukce stačí ukázat, že vzorec platí pro $n = 1$. A skutečně, jedna přímka rozdělí rovinu na dvě části. Tvrzení pro $n = 1$ platí.

V druhém kroku indukce předpokládejme, že máme rovinu rozdělenou n přímkami maximálně na $\frac{1}{2}n(n+1) + 1$ částí. Přidáme-li $(n+1)$ -ní přímku, je rozdělena průsečíky s ostatními přímkami na nejvýše $n+1$ úseků a každý z nich oddělí novou část roviny.

Rovina bude rozdělena $n+1$ přímkami na maximálně na $\frac{1}{2}n(n+1) + 1 + (n+1) = \frac{1}{2}(n+1)(n+2) + 1$ částí, což jsme chtěli dokázat.

Další základní technika v teorii čísel je rozklad přirozeného čísla na součin prvočinitelů. Uměli byste dokázat existenci nebo jednoznačnost takového rozkladu?

Příklad 4. Označme $d(k)$ počet všech kladných dělitelů přirozeného čísla k a necht' číslo n je řešením rovnice $d(1, 6n) = 1, 6d(n)$. Určete hodnotu podílu $d(0, 16n) : d(n)$.

Řešení.

Číslo n splňující zadanou rovnici zapíšeme v prvočíselném rozkladu, $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_k^{\alpha_k}$, kde $k \geq 1$ a $2 \leq p_1 < p_2 < \cdots < p_k$ jsou navzájem různá prvočísla. Exponenty α_i ($i = 1, 2, \dots, k$) jsou nezáporná celá čísla. Tento zápis čísla n je výhodný pro výpočet počtu dělitelů $d(n)$. Dělitelem n je každé číslo ve tvaru

$$p_1^{\beta_1} p_2^{\beta_2} \cdots p_k^{\beta_k}, \quad 0 \leq \beta_i \leq \alpha_i \quad (i = 1, 2, \dots, k),$$

kde každé β_i může nabývat hodnot od 0 do α_i pro každé $i = 1, 2, \dots, k$. Použijeme-li nyní kombinatorické pravidlo součinu, je snadné určit $d(n) = (\alpha_1 + 1)(\alpha_2 + 1) \cdots (\alpha_k + 1)$.

Odvození tohoto vzorce jsem nechal na studentech. Za každý dobrý nápad nebo při aktivní účasti před tabulí jsem rozdával body. To byl pro družstva druhý způsob (kromě nematematických kvízů), jak získat body do celkového hodnocení. Body šlo tedy získávat i za podúlohy typu:

* Dokažte multiplikativnost funkce $d(n)$ pro nesoudělná čísla a, b , tj. $d(a \cdot b) = d(a)d(b)$.

** Odvoďte vzorec $d(n) = (\alpha_1 + 1)(\alpha_2 + 1) \cdots (\alpha_k + 1)$.

Aby měla rovnice $d(1, 6n) = 1, 6d(n)$ smysl, musí být číslo $1, 6n = \frac{8}{5}n$ přirozené, takže číslo n musí být dělitelné 2 a 5 a lze ho psát ve tvaru $n = 2^\alpha 5^\beta n'$, kde $\beta \geq 1$ a n' je nesoudělné s 2 a 5. Danou rovnici přepíšeme (využijeme multiplikativnost funkce $d(n)$) do tvaru

$$(\alpha + 4)\beta d(n') = \frac{8}{5}(\alpha + 1)(\beta + 1)d(n').$$

Po zkrácení kladných číslem $d(n')$ a další úpravě přepíšeme rovnici do tvaru

$$(3\beta + 8)(4 - \alpha) = 40 \quad \text{nebo} \quad 3\beta(\alpha - 4) + 8(\alpha + 1) = 0.$$

Z prvního vyjádření vidíme, že $3\beta + 8 \geq 11$ a $3\beta + 8 \equiv 2 \pmod{3}$, takže ze všech rozkladů čísla 40 na součin vyhovuje jediné

$$3\beta + 8 = 20, \quad 4 - \alpha = 2,$$

a tedy $\alpha = 2, \beta = 4, n = 2^2 \cdot 5^4 n'$. Pokud využijeme druhého, méně nápaditého vyjádření, vidíme okamžitě, že musí být $\alpha - 4 < 0$. Dosadíme-li postupně $\alpha = 1, 2, 3$, najdeme pouze jednu vyhovující dvojici $\alpha = 2$ a

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

$\beta = 4$. V obou případech jsme dospěli ke stejnému závěru. Pak podíl $d(0, 16n) : d(n)$ je roven

$$\frac{d\left(\frac{4}{25}n\right)}{d(n)} = \frac{d(2^4 \cdot 5^2)d(n')}{d(2^2 \cdot 5^4)d(n')} = \frac{5 \cdot 3}{3 \cdot 5} = 1.$$

3 Kombinatorika

Příklad 5. Necht' x_1, x_2, \dots, x_n jsou reálná čísla splňující $|x_1 + x_2 + \dots + x_n| = 1$, a $|x_i| \leq \frac{n+1}{2}$ pro $i = 1, 2, \dots, n$.

Ukažte, že existuje permutace y_1, y_2, \dots, y_n z čísel x_1, x_2, \dots, x_n taková že

$$|y_1 + 2y_2 + \dots + ny_n| \leq \frac{n+1}{2}.$$

Řešení. Pro každou permutaci $\pi = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ z (x_1, x_2, \dots, x_n) označme $S(\pi)$ sumu $y_1 + 2y_2 + \dots + ny_n$. Pro důkaz sporem předpokládejme $|S(\pi)| > \frac{n+1}{2}$ pro každou permutaci π .

Vezměme permutaci π' , která se od π liší jen výměnou dvou sousedních členů, např. y_k a y_{k+1} . Pak $S(\pi)$ a $S(\pi')$ se liší $|y_k + y_{k+1}| \leq n+1$ (podle druhého předpokladu ze zadání), což ovšem znamená, že $S(\pi)$ a $S(\pi')$ mají stejné znaménko.

Uvažujme nyní identickou permutaci $\pi_0 = (x_1, \dots, x_n)$ a jí reverzní $\tilde{\pi}_0 = (x_n, \dots, x_1)$. Je zřejmé, že existuje posloupnost permutací $\pi_0, \pi_1, \dots, \pi_m = \tilde{\pi}_0$ taková, že permutaci π_{i+1} získáme z permutace π_i výměnou pouze dvou sousedních členů. To znamená, že postupnými výměnami můžeme x_n umístit na první místo, x_{n-1} na druhé a tak dále. Jak víme, všechny součty $S(\pi_0), S(\pi_1), \dots, S(\pi_m) = S(\tilde{\pi}_0)$ mají stejné znaménko. Pak součet $|S(\pi_0) + S(\pi_m)| = (n+1)(x_1 + \dots + x_n) = n+1$, implikuje, že jedna z $S(\pi_0)$ a $S(\tilde{\pi}_0)$ je menší než $\frac{n+1}{2}$ v absolutní hodnotě, což je spor s předpokladem.

Závěr a poděkování.

Na přednášce jsem se zabývali úlohami z geometrie, teorie čísel a kombinatoriky. Největší přínos vidím hlavně v aktivním zapojení studentů do přednášky.

Rád bych poděkoval všem lidem, kteří se podíleli na přípravě Kempu 2015. Zvláště bych chtěl poděkovat PaedDr. Naděždě Kubešové za pozvání a trpělivost. V neposlední řadě děkuji studentům za skvělou atmosféru při řešení úloh a nematických kvízů.

Literatura.

- Matematický seminář PRASE, <http://mks.mff.cuni.cz/>
- <http://mo.webcentrum.muni.cz>
- Dušan Djurkić a kol., The IMO Compendium. A Collection of Problems Suggested for the International

Kontakt na autora.

Josef Křišťan
email: kristan1@email.cz
tel.: +420777944564

Středisko služeb školám, Plzeň, Částkova 78
Podpora talentovaných žáků v Plzeňském kraji
CZ.1.07/1.2.03/02.0001

Tento projekt je v letech 2012-15 financován z rozpočtu Plzeňského kraje

CELÁ ČÁST REÁLNÉHO ČÍSLA, ABSOLUTNÍ HODNOTA REÁLNÉHO ČÍSLA I

Josef KUBEŠ

1 Úvod

Koncem 19. století se začaly objevovat zvláštní matematické konstrukce, které se značně lišily od ideálních matematických objektů, označované za podivné matematické výjimky. Později se ukázalo, že mnohem přesněji popisují objekty reálného světa. Mezi nejznámější „výjimky“ patří Cantorova množina, která neobsahuje žádný izolovaný bod, ale ani žádnou úsečku, Kochova křivka nekonečné délky, ohraničující konečnou plochu, Peanova křivka, vyplňující celou rovinu a mnoho dalších.

2 Dělení fraktálů

Na základě generování fraktálů rozeznáváme některé jejich typy:

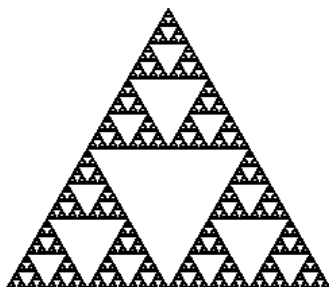
L-Systémy
Iterační funkční systémy (IFS)
Polynomické fraktály (TEA)
Náhodné fraktály

2.1 L-Systémy

L-systém nebo Lindenmayerův systém jsou nejlépe použitelné k modelování růstu rostlin, ale také umožňují modelovat morfologii různých organismů. L-systémy mohou být také použity pro generování fraktálních útvarů. Byly zavedeny a rozvíjeny od roku 1968 maďarským teoretickým biologem a botanikem Aristidem Lindenmayerem (1925-1989).



2.2 Iterační funkční systémy (IFS)



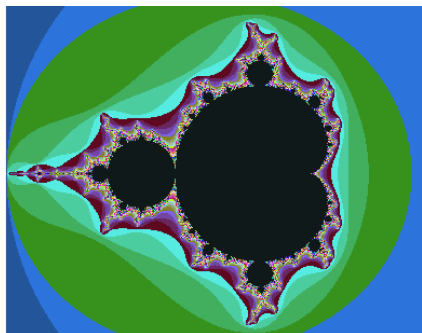
Jedná se o prostě iterační metodu. Spočívá v tom, že máme nějaký základní obrazec (trojúhelník, čtverec...) a na něj aplikujeme nějaké geometrické pravidlo. Jako příklad vezmeme Sierpinského trojúhelník. Nejprve tedy máme obecný, nejlépe ale rovno -straný, -ramenný nebo pravoúhlý trojúhelník. Nyní označíme středy jeho stran a spojíme je úsečkou (narýsujeme střední příčky). Počáteční trojúhelník je rozdělen na 4 části a my prostřední vyjmem. Získáme tři trojúhelníky (zmenšeniny toho původního) a na ně aplikujeme stejné pravidlo. Po dostatečném počtu iterací (nekonečném) dostaneme fraktální útvar.

Středisko služeb školám, Plzeň, Částkova 78
Podpora talentovaných žáků v Plzeňském kraji
CZ.1.07/1.2.03/02.0001

Tento projekt je v letech 2012-15 financován z rozpočtu Plzeňského kraje

2.3 Polynomické fraktály

V soustavě souřadnic (často komplexních) testujeme různé hodnoty, které dosazujeme do původní rovnice. Na její výsledek aplikujeme iterativně stejné pravidlo. Pravou stranu dosadíme do levé a tak stále pokračujeme. Z toho vyplývá, že výsledku bychom se dobrali až v nekonečném čase. V praxi se tedy stanoví limitní hranice pro počet iterací.



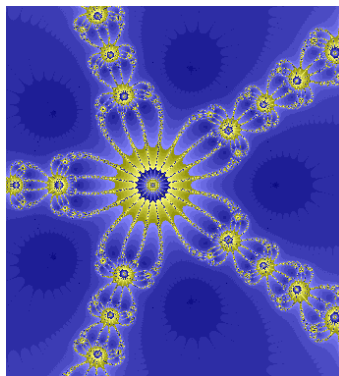
Příkladem takového fraktálu je Mandelbrotova množina. Vzniká iterativně a je definována rovnicí $z = z^2 + c$, kde z i c jsou komplexní čísla. Je to potvrzení teorie, že i velice jednoduché systémy mohou vykazovat chaotické chování. V m-set, jak se zkráceně Mandelbrotova množina nazývá, je c konstanta a zároveň pozice vykreslovaného bodu.

2.4 Náhodné fraktály

Mezi náhodné fraktály rozhodně nepatří všechny ostatní. Je to ale velmi rozsáhlá a neuspořádaná skupina. Používá se hlavně pro zobrazování a modelování přírodních objektů a dějů. Některé vznikají velice jednoduše, např. náhodným přesouváním bodu, který zanechává za sebou stopu (Brownův pohyb).

3 Závěr

Místo závěru si zobrazíme fraktál Newton.



4 Použitá literatura

<http://www.root.cz/clanky/obsah-jednotlivych-casti-serialu-a-galerie-fraktalu-ii/>

<http://chaos.fraktaly.sweb.cz/>

<http://www.fractals.webz.cz/fraktaly.htm>

<http://martin.hinner.info/math/Fraktaly/>

5 Kontakt na autora

PaedDr. Josef Kubeš

Gymnázium, Plzeň, Mikulášské nám. 23

Josef.Kubes@mikulasske.cz

CELÁ ČÁST REÁLNÉHO ČÍSLA, ABSOLUTNÍ HODNOTA REÁLNÉHO ČÍSLA II

Josef KUBEŠ

1 Úvod

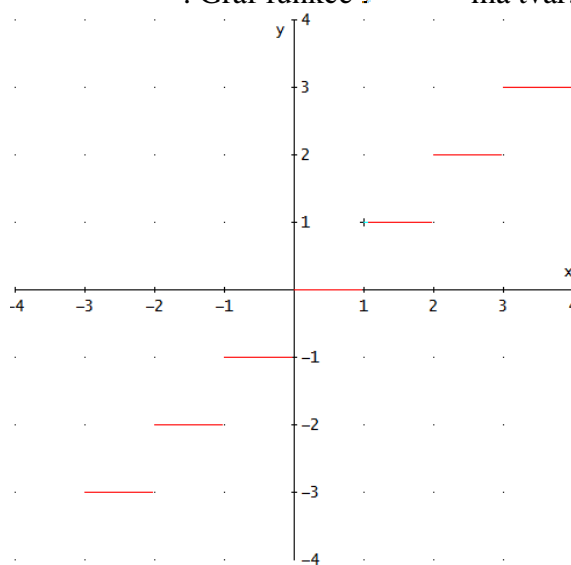
Celá část reálného čísla je partie, která se v klasických hodinách matematiky neprobírá. Ovšem je to vděčné téma ke tvorbě netradičních úloh, ve kterých je nutná individuální strategie. Nelze se naučit univerzální postup, je nutné si předem dobře zvážit postup řešení.

2 Definice celé části reálného čísla a její graf

Výraz $[a]$ znamená celou část z reálného čísla a . Je rovna nejbližšímu nižšímu celému

číslu. Tedy

. Graf funkce $y = [x]$ má tvar:



2.1 Určete všechna reálná čísla, která vyhovují rovnici .

2.2 V oboru reálných čísel řešte rovnici

V obou úlohách využijeme definici celé části, tedy $[x] = x + k$, kde $0 \leq k < 1$.

2.3 V oboru reálných čísel řešte soustavu rovnic

$$10x[y] = 1492$$

$$10y[x] = 1776$$

Řešení každé úlohy s celou částí neznámé je vždy originální a není na ně univerzální pravidlo. Zadaná soustava se převede na soustavu dvou nerovnic

$$[x][y] \leq 149$$

$$([y] + 1)[x] \geq 178$$

Odtud stanovíme podmínky pro obě proměnné a dosadíme všechny možné případy. Soustava má čtyři řešení.

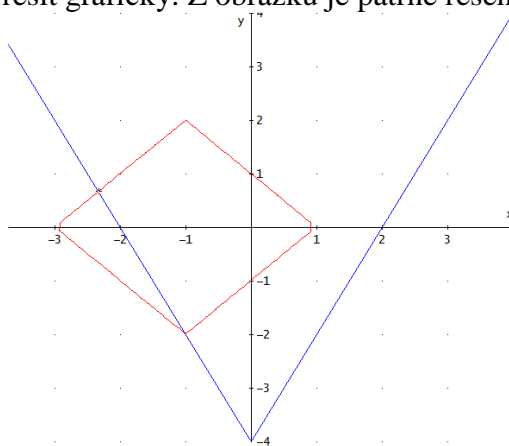
2.4 Určete všechny dvojice reálných čísel, které vyhovují soustavě rovnic

$$|x + 1| + |y| = 2$$

$$y + 4 = |2x|$$

Klíč k řešení je v diskuzi jednotlivých absolutních hodnot. Stanovíme podmínky pro jednotlivé proměnné tak, abychom mohli jednoznačně určit jejich znaménko a pro každý případ řešit zvlášť soustavu dvou rovnic o dvou neznámých.

Pro kontrolu lze úlohu řešit graficky. Z obrázku je patrné řešení: $K = \{-1, -2, [\frac{-7}{3}, .]\}$



3 Závěr

Uvedené úlohy z velké části přesahují rozsah základního středoškolského učiva matematiky. Pro řešení příkladů matematické olympiády jsou však základní a navazuje se na ně ve vyšších kolech. Řešitele zdokonaluje ve strategii a důslednosti řešení.

4 Použitá literatura

Středisko služeb školám, Plzeň, Částkova 78
Podpora talentovaných žáků v Plzeňském kraji
CZ.1.07/1.2.03/02.0001

Tento projekt je v letech 2012-15 financován z rozpočtu Plzeňského kraje

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

ŠVRČEK, J., CALÁBEK, P. Sbíрка netradičních matematických úloh. 1. vyd. Praha: Prométheus, spol. s r. o., 2007. 186 s. ISBN 978-80-7196-341-7

5 Kontakt na autora

PaedDr. Josef Kubeš

Gymnázium, Plzeň, Mikulášské nám. 23

Josef.Kubes@mikulasske.cz

DŮKAZOVÉ TECHNIKY – NEROVNOSTI

Josef KUBEŠ

1 Úvod

Znalost důkazových technik patří k základnímu vybavení každého řešitele matematické olympiády. Ověřování platnosti zadaných nerovnic vždy vyžaduje originální přístup, určitý nadhled a zkušenost.

2 Nerovnosti a jejich ověřování

Základním stavebním kamenem je nerovnost vyplývající z druhé mocniny dvojčlenu $(x - 1)^2$. Pro libovolné reálné číslo platí, že $(x - 1)^2 \geq 0$. Odtud plyne $x + \frac{1}{x} \geq 2$.

Další důležitá nerovnost je vztah mezi geometrickým a aritmetickým průměrem. Pro libovolnou n -tici reálných kladných čísel x_1, x_2, \dots, x_n platí:

$$\sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_n} \leq \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}$$

Poslední nerovností, se kterou se budeme zabývat, je nerovnost, která platí pro strany trojúhelníka (tzv. trojúhelníková nerovnost). Tuto nerovnost žáci znají z druhého stupně základní školy, ovšem lze sestavit na její použití velmi obtížné úlohy.

2.1 Dokažte, že obsah obdélníka o stranách a, b je menší než polovina obsah u čtverce sestrojeného nad jeho úhlopříčkou.

Vhodnou úpravou přejdeme na druhou mocninu dvojčlenu.

2.2 Dokažte, že pro každý ostrý úhel α platí

$$\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{cotg} \alpha \geq 2$$

Použijeme vztah mezi funkcemi tangens a kotangens a upravíme na druhou mocninu dvojčlenu.

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

2.3 V rovině je dán obdélník $ABCD$. Jeho stranám AB a BC jsou vně připsány polokružnice k , l . Sestrojte úsečku XY co největší délky d tak, aby platilo $X \in k$ a $Y \in l$. Délku d pak vyjádřete pomocí délek $a = |AB|$ a $b = |BC|$.

Pro řešení úlohy je důležitý správně nakreslený obrázek. Dále stačí využít několikrát trojúhelníkovou nerovnost.

2.4 V rovině je dán obdélník $ABCD$. Jeho stranám AB a BC jsou vně připsány polokružnice k , l . Sestrojte přímkou, která prochází bodem B a současně protíná polokružnice k , l po řadě v bodech X a Y tak, aby čtyřúhelník $AXYC$ měl co největší obvod.

Jádro řešení úlohy je v důkazu, že největší obvod ze všech pravouhlých trojúhelníků sestavených nad danou přeponou má trojúhelník rovnoramenný. To lze provést různými postupy, také nerovností mezi aritmetickým a kvadratickým průměrem.

2.5 Dokažte, že pro libovolnou trojici kladných čísel a, b, c platí

$$(a+b)(b+c)(c+a) \geq 8abc$$

Roznásobíme a použijeme nerovnost mezi aritmetickým a geometrickým průměrem.

2.6 Dokažte, že pro libovolnou trojici kladných čísel a, b, c platí

$$\left(1 + \frac{a}{b+c}\right) \left(1 + \frac{b}{c+a}\right) \left(1 + \frac{c}{a+b}\right) \geq \frac{27}{8}$$

Upravíme a použijeme nerovnost mezi aritmetickým a geometrickým průměrem pro členy $a+b$, $b+c$, $c+a$.

2.7 Dokažte, že pro libovolné přirozené číslo $n > 1$ platí:

$$n! < \left(\frac{n+1}{2}\right)^n$$

Využijeme rovnost: Pro libovolné přirozené číslo n větší než jedna platí: $1 + 2 + 3 + 4 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$. Dále je potřeba použít vztah mezi aritmetickým a geometrickým průměrem.

3 Závěr

Uvedené úlohy z velké části přesahují rozsah základního středoškolského učiva matematiky. Pro řešení příkladů matematické olympiády jsou však základní a navazuje se na ně ve vyšších kolech. Řešitelé zdokonaluje ve strategii a důslednosti řešení. Důkazové úlohy uvedeného typu také vyžadují precizní znalost v upravování algebraických výrazů.

4 Použitá literatura

ŠVRČEK, J., CALÁBEK, P. Sbíрка netradičních matematických úloh. 1. vyd. Praha: Prométheus, spol. s r. o., 2007. 186 s. ISBN 978-80-7196-341-7

5 Kontakt na autora

PaedDr. Josef Kubeš

Gymnázium, Plzeň, Mikulášské nám. 23

Josef.Kubes@mikulasske.cz

KRUHOVÁ INVERZE, APOLLONIOVY ÚLOHY

Josef KUBEŠ

1 Úvod

Tato oblast je nad rámec základních osnov matematiky na střední škole. Přesto kruhová inverze je velmi zajímavé zobrazení, se kterým by se matematicky nadaní žáci měli seznámit. S Apolloniiovými úlohami se ovšem žáci seznamují již od základní školy, aniž by bylo řečeno, do jaké skupiny vlastně patří. Například konstrukce kružnice opsané trojúhelníku.

2 Definice kruhové inverze

Je dán bod S a nenulové číslo κ . Kruhová inverze je zobrazení tzv. Möbiovy roviny na Möbiovu rovinu, které každému bodu $X \neq S$ přiřadí bod X' , pro který $|SX| \cdot |SX'| = |\kappa|$ a který pro $\kappa > 0$ leží na polopřímce SX a pro $\kappa < 0$ leží na opačné polopřímce k polopřímce SX ; bodu $X = S$ přiřazuje nevlastní bod; nevlastnímu bodu přiřazuje bod S .

V kruhové inverzi se středem S platí:

- obrazem přímky procházející středem S je totožná přímka;
- obrazem přímky neprocházející středem S je kružnice procházející středem S ;
- obrazem kružnice procházející středem S je přímka neprocházející středem S ;
- obrazem kružnice neprocházející středem S je kružnice.

3 Apolloniiové úlohy

Apolloniiova úloha má své jméno podle řeckého geometra Apollonia z Pergy (262 – 200 př. n. l.), který se touto úlohou zabýval a řešil ji v díle "O dotycích". Apollonios formuloval úlohu nejprve pro tři zadané kružnice, později byly tyto kružnice postupně nahrazeny bodem (kružnice o nulovém poloměru) a přímkou (kružnice o nekonečně velkém poloměru). Originální znění se nezachovalo. Je však známa reprodukce úlohy v díle "Mathematikai synagogai" (důležitý pramen historie matematiky obsahující výňatky ze ztracených matematických spisů) řeckého matematika Pappose Alexandrijského (3. stol. n. l.). Pappos uvádí úlohu v následujícím znění:

"Nechť jsou dány tři předměty, z nichž každý může být bodem, přímkou nebo kruhem; má se

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

narýsovat kruh, který prochází každým z daných bodů (jsou-li dány jen body) a dotýká se daných přímků či kruhů."

Z výše uvedeného zadání je možno vypočítat počet možných variant úlohy. Hledáme vždy skupiny tří objektů ze třech druhů (Bodů, přímek, kružnic), přičemž pořadí daných objektů není podstatné. Tvoříme kombinace s opakováním třetí třídy z podmínek $K'(k,n) = K'(3,3) = 10$. Je tedy **10 různých případů** (nových devět jsou zvláštní případy úlohy obecné), přičemž obecná úloha má **nejvýše 8 řešení**.

Existuje tedy devět speciálních případů obecné úlohy kkk, jsou to úlohy BBB, BBp, BBk, Bpp, Bpk, Bkk, ppp, ppk, pkk.

3.1 Řešte úlohu Bpk

Střed řídící kružnice kruhové inverze volíme v bodě B. Tím přímkou i kružnici převedeme na dvě kružnice a hledáme jejich společné tečny. Zpětným převodem získáme hledané kružnice.

3.2 Řešte úlohu Bkk

Střed řídící kružnice kruhové inverze opět volíme v bodě B. Tím obě kružnice převedeme na kružnice a hledáme jejich společné tečny. Zpětným převodem získáme hledané kružnice.

4 Závěr

Uvedené téma sleduje splnění dvou cílů. Nejprve rozšířit obzor o další zobrazení a jeho použití na úlohách. Druhý z cílů je propojení matematických poznatků s historickou dobou, ve které se jimi vědci zabývali. Je evidentní, že rozvoj starověké geometrie a formulované úlohy jsou natolik obtížné, že jejich řešení v dnešní době je dáno pouze určitě nadané skupině studentů.

5 Použitá literatura

Patáková, E. Apolloniovy úlohy. Diplomová práce. Dostupná na internetu
<<http://geometrie.kma.zcu.cz/work/AU/apoll/apoll.html>>

6 Kontakt na autora

PaedDr. Josef Kubeš
Gymnázium, Plzeň, Mikulášské nám. 23
Josef.Kubes@mikulasske.cz

FRAKTÁLNÍ GEOMETRIE – I

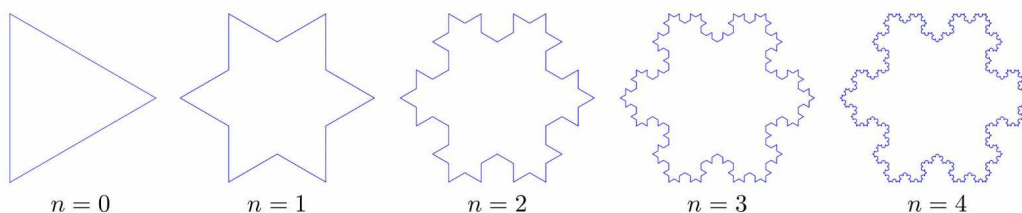
Petr NEČESAL

1 Úvod

Fraktál bychom mohli vnímat jako množinu s velice členitou hranicí. V jistém měřítku lze fraktální strukturu pozorovat v přírodě kolem nás: tvary blesků, systém cév v lidském těle, hranice pobřeží či ramena řek na satelitních snímcích, tvary sněhových vloček.

2 Definice fraktálů a fraktální dimenze

Nejprve jsme se seznámili s příklady klasických matematických fraktálů: grafy spojitých funkcí, které nemají derivaci v žádném bodě, křivky vyplňující část prostoru (Peanovy křivky) a Cantorova diskontinua. Dále jsme si ukázali dvě definice hranice Kochovy vločky,



Obrázek 1: První čtyři iterace při generování hranice Kochovy vločky.

a to

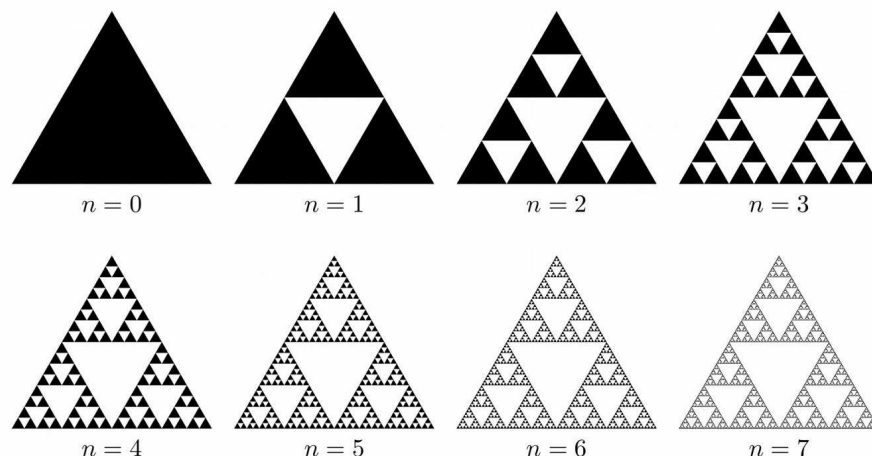
- pomocí Lindenmayerova systému (L-systému) vyvinutého pro modelování růstu rostlin,
- pomocí iterovaného funkčního systému (IFS-systému) s využitím afinních transformací (posunutí, otáčení, zrcadlení, změna měřítka, zkosení).

Odvodili jsme, že hranice Kochovy vločky má nekonečnou délku (není tedy jednodimenzionálním objektem) a že má nulový obsah (není tedy ani dvoudimenzionálním objektem). Seznámili jsme se s mřížkovou dimenzí a určili jsme její hodnotu pro hranici Kochovy vločky jako

$$\frac{\ln 4}{\ln 3} \doteq 1.26,$$

což je zároveň i její fraktální dimenze.

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ



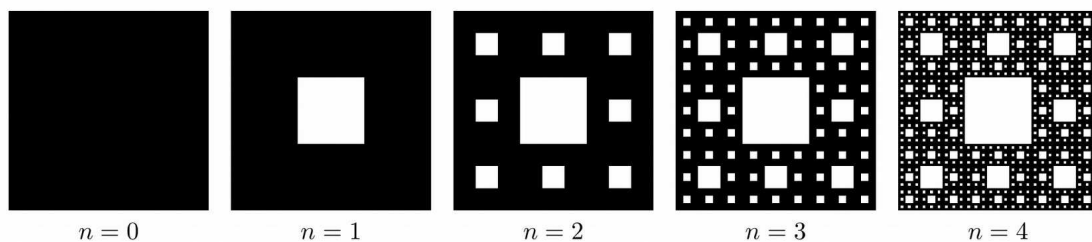
Obrázek 2: Prvních sedm iterací při generování Sierpinského trojúhelníku.

Dále jsme si definovali dva fraktály pomocí IFS-systémů: Sierpinského trojúhelník (viz obrázek 2) a Sierpinského koberce (viz obrázek 3). U obou fraktálů se nám podařilo určit jejich mřížkové dimenze. Mřížková dimenze Sierpinského trojúhelníka je

$$\frac{\ln 3}{\ln 2} \doteq 1.58$$

a mřížková dimenze Sierpinského koberce má hodnotu

$$\frac{\ln 8}{\ln 3} \doteq 1.89.$$



Obrázek 3: První čtyři iterace při generování Sierpinského koberce.

3 Závěr

Seznámili jsme se se základními definicemi jednoduchých fraktálů a prozkoumali jsme jejich dimenze. Obrázky 1, 2 a 3 byly vytvořeny pomocí systému počítačové algebry SAGE, který je volně dostupný přes webový prohlížeč na adrese www.sagemath.org.



INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

4 Použitá literatura

Falconer, K.: Fractal Geometry: Mathematical Foundations and Applications.
Hoboken, NJ: John Wiley & Sons, 2014.

Prusinkiewicz, P., Lindenmayer, A.: The Algorithmic Beauty of Plants.
Springer-Verlag, 1990.

5 Kontakt na autora

Ing. Petr Nečasal, Ph.D.
Katedra matematiky FAV ZČU, Univerzitní 8, 306 14 Plzeň
pnecesal@kma.zcu.cz

Středisko služeb školám, Plzeň, Částkova 78
Podpora talentovaných žáků v Plzeňském kraji
CZ.1.07/1.2.03/02.0001

Tento projekt je v letech 2012-15 financován z rozpočtu Plzeňského kraje

FRAKTÁLNÍ GEOMETRIE – II

Petr NEČESAL

1 Úvod

Ukážeme si jednoduchý matematický model popisující vývoj populace v čase. Model bude mít dva parametry, a to hodnotu celkové kapacity prostředí, ve kterém populace žije, a koeficient reprodukčního růstu, který bude vyjadřovat schopnost populace se množit. Matematický model bude popsán pomocí diferenciální rovnice prvního řádu, kde čas bude v roli spojitě nezávislé proměnné. Diskretizací času poté přejdeme od diferenciální rovnice k rovnici diferenční, která bude představovat pravidlo pro rekurentně zadané posloupnosti. Studium chování těchto posloupností v závislosti na koeficientu reprodukčního růstu populace objevíme množinu s fraktální strukturou.

2 Matematický model růstu populace

Uvažujme jeden ze základních matematických modelů růstu populace, a to Verhulstův model. Tento model je popsán pomocí diferenciální rovnice prvního řádu

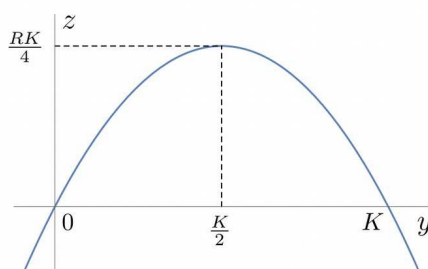
$$(1) \quad y'(t) = Ry(t) \left(1 - \frac{y(t)}{K} \right),$$

kde $y(t)$ udává velikost populace v čase t , $R > 0$ je koeficient reprodukčního růstu populace a $K > 0$ je kapacita prostředí, ve kterém populace žije. Mějme populaci, která má v čase $t = 0$ kladnou velikost $c < K$ (velikost populace je menší než kapacita prostředí), tedy

$$y(0) = c, \quad c \in (0; K).$$

Diferenciální rovnice (1) nám určuje (a tedy i modeluje), jaká bude velikost populace $y(t)$ v následujících časech $t > 0$. Z diferenciální rovnice (1) víme, že rychlost růstu velikosti populace $y'(t)$ je rovna hodnotě $Ry(t) \left(1 - \frac{y(t)}{K} \right)$. Tedy populace poroste rychleji, čím větší bude koeficient růstu populace R . Rychlost růstu populace ovšem závisí také na samotné velikosti populace (viz obrázek 1). Populace poroste nejrychleji, pokud bude zabírat právě polovinu kapacity prostředí. A naopak, populace poroste pomalu, pokud bude sama velmi malá (y je blízké 0) nebo pokud bude zabírat téměř celé prostředí a kapacita prostředí bude téměř vyčerpána (y je blízké K).

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ



Obrázek 1: Graf funkce $z = Ry \left(1 - \frac{y}{K}\right)$.

2.1 Od spojitého modelu k diskrétní logistické rovnici

Vynásobme rovnici (1) převrácenou hodnotou kapacity prostředí $\frac{1}{K}$, čímž dostáváme

$$(2) \quad \left(\frac{y(t)}{K}\right)' = R \frac{y(t)}{K} \left(1 - \frac{y(t)}{K}\right).$$

Dále označme $u(t) = \frac{y(t)}{K}$ (relativní velikost populace v čase t). Diferenciální rovnici (2) můžeme tedy zapsat ve tvaru

$$(3) \quad u'(t) = Ru(t)(1 - u(t)).$$

Dále nás bude zajímat velikost populace pouze ve vybraných časech $t = h, 2h, 3h, 4h, \dots$, kde $h > 0$ je zvolený časový krok. Relativní velikost populace ve vybraných časech $t = nh$ pro $n \in \mathbb{N}$ označme jako $u_n = u(nh)$. Splnění diferenciální rovnice (3) budeme požadovat ve vybraných časech $t = nh$, tedy požadujeme, aby

$$(4) \quad u'(nh) = Ru(nh)(1 - u(nh)), \quad n \in \mathbb{N}.$$

Víme, že první derivace $u'(t)$ je definována pomocí limity

$$u'(t) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{u(t+s) - u(t)}{s},$$

pro vybrané časy $t = nh$ tedy máme

$$(5) \quad u'(nh) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{u(nh+s) - u(nh)}{s}.$$

Zvolme nyní pevně dostatečně malý časový krok $h > 0$ a nahraďme první derivaci (5) pomocí následující poměrné difference (volíme $s = h$)

$$u'(nh) \approx \frac{u(nh+h) - u(nh)}{h} = \frac{u((n+1)h) - u(nh)}{h} = \frac{u_{n+1} - u_n}{h}.$$

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Diferenciální rovnici (4) tedy nahradíme diferenční rovnicí

$$\frac{u_{n+1} - u_n}{h} = Ru_n(1 - u_n),$$

odkud vyjádříme u_{n+1}

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= u_n + Rh u_n(1 - u_n), \\ u_{n+1} &= u_n + u_n(Rh - Rh u_n), \\ (6) \quad u_{n+1} &= u_n(1 + Rh - Rh u_n). \end{aligned}$$

Poslední rovnici (6) vynásobme kladným číslem $\frac{Rh}{1+Rh}$ a vytkneme $(1 + Rh)$ ze závorky na pravé straně rovnice (6). Dostáváme tak rovnici ve tvaru

$$(7) \quad \frac{Rh}{1 + Rh} u_{n+1} = \frac{Rh}{1 + Rh} u_n(1 + Rh) \left(1 - \frac{Rh}{1 + Rh} u_n\right).$$

Na závěr označme $x_n = \frac{Rh}{1+Rh} u_n$ pro $n \in \mathbb{N}$ a $r = (1 + Rh)$. Rovnici (7) potom můžeme zapsat ve tvaru

$$(8) \quad x_{n+1} = x_n r(1 - x_n).$$

Rovnice (8) je známa jako logistická diferenční rovnice.

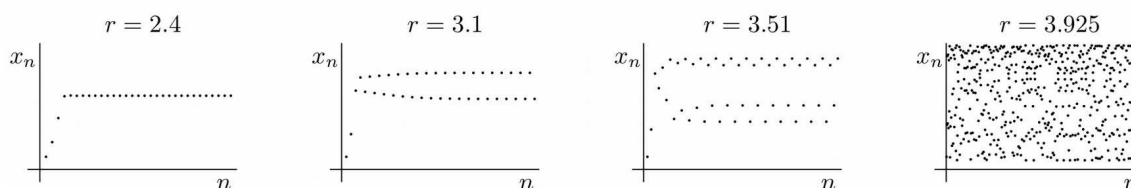
2.2 Logistická rovnice

Logistická diferenční rovnice

$$(9) \quad x_{n+1} = r x_n(1 - x_n)$$

modeluje vývoj populace v čase, kde x_n je relativní počet jedinců v populaci v čase $t = n$ a r je míra reprodukce.

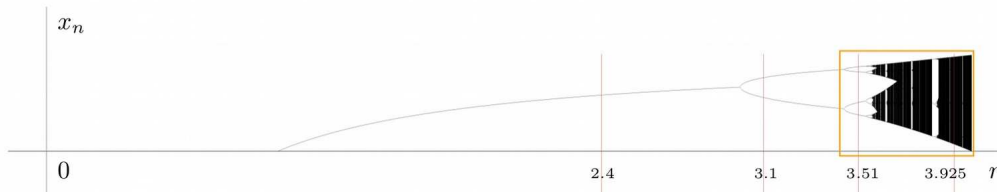
Pokud zvolíme hodnoty r a x_1 , z logistické rovnice (9) poté rekurentně určíme další prvky posloupnosti (x_n) . Na obrázku 2 jsou grafy posloupností (x_n) pro čtyři různé volby



Obrázek 2: Vývoj velikosti populace v diskrétních časech pro různé hodnoty koeficientu reprodukce r .

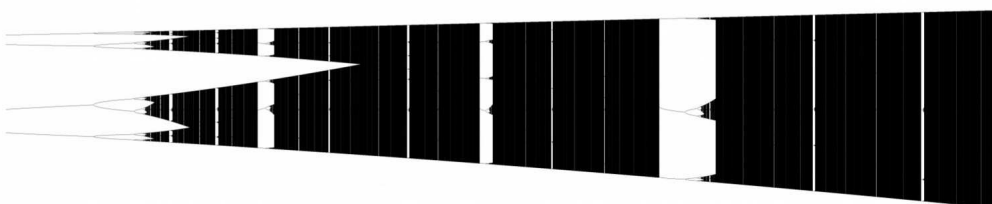
míry reprodukce r . Chování posloupností (x_n) pro n rostoucí nade všechny meze nyní zachytíme do jednoho obrázku. V rovině rx zakreslíme pro různé volby hodnoty parametru

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ



Obrázek 3: Bifurkační diagram pro logistickou diferenciální rovnici (9).

r body o souřadnicích (r, x_n) pro velká n (např. pro n od 10000 do 20000) a získáme tak diagram na obrázku 3 (tzv. bifurkační diagram). V bifurkačním diagramu na obrázku 3 máme zachyceny tzv. hromadné body posloupností (x_n) v závislosti na parametru r . Například pro volbu $x_1 = 0.1$ a $r = 2.4$ má posloupnost (x_n) jeden hromadný bod, který je zároveň její limitou (viz obrázky 2 a 3). Dále pro $r = 3.1$ posloupnost (x_n) limitu nemá, ale její prvky se střídavě přibližují ke dvěma různým hodnotám, které představují její dva hromadné body. Pro $r = 3.51$ má posloupnost (x_n) již čtyři hromadné body. Pro zvětšující se hodnotu parametru r dochází ke zdvojení počtu hromadných bodů posloupnosti (x_n) a tento počet roste nade všechny meze pro r blížící se k $3.56994567\dots$ Pro některé větší hodnoty r posloupnost (x_n) vykazuje chaotické chování. Poznamenejme, že dříve byla logistická rovnice pro $r = 4$ používána jako generátor náhodných čísel.



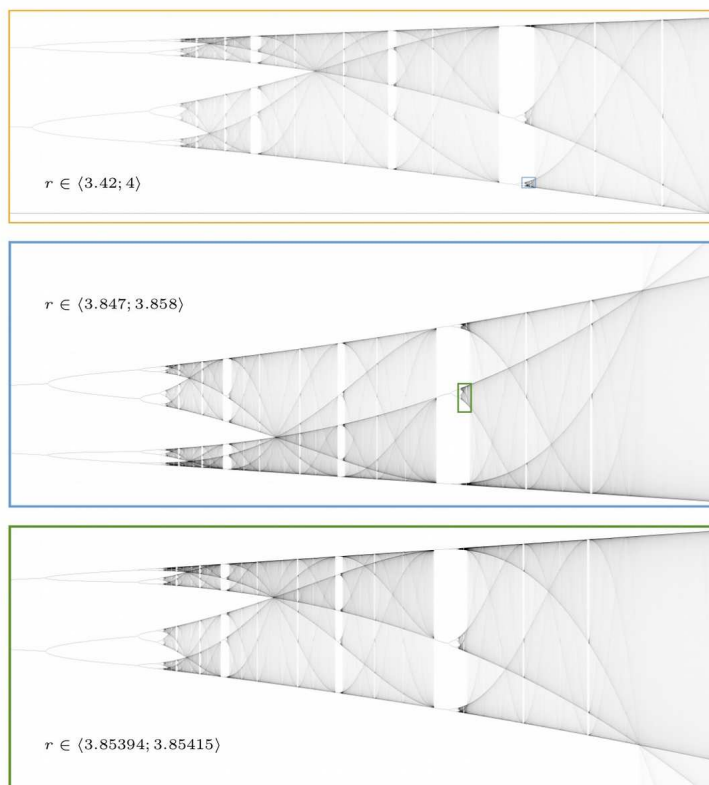
Obrázek 4: Přiblížení části bifurkačního diagramu pro $r \in (3.51; 4)$.

Bifurkační diagram pro logistickou diferenciální rovnici (9) je množina všech uspořádaných dvojic (r, b) , kde b je hromadný bod posloupnosti (x_n) . Tato množina má fraktální strukturu, má velmi členitou hranici (viz obrázek 4) a obsahuje soběpodobné struktury. Když se na tuto množinu podíváme v jemnějším měřítku, tak objevíme nové detaily, které najdeme v původním vyobrazení (viz obrázek 5 pro tři zjemnění měřítko).

3 Závěr

Podařilo se nám ukázat, že při studiu reálných posloupností daných jednoduchým rekurentním předpisem s jedním parametrem lze velmi snadno získat množinu s fraktální strukturou (bifurkační diagram). Struktura této množiny byla překvapivá a značně netriviální.

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ



Obrázek 5: Soběpodobné struktury ve třech přiblíženích bifurkačního diagramu.

4 Použitá literatura

Ott, E.: Chaos in Dynamical Systems.
2nd edition, Cambridge University Press, 2002.

Devaney, R.: An Introduction to Chaotic Dynamical Systems.
Addison-Wesley, New York 1989.

Pokorný, P.: Deterministický chaos - plod počítačové fyziky.
Čs. čas. fyz. 2008, sv. 58, č. 6, s. 328–338.

5 Kontakt na autora

Ing. Petr Nečesal, Ph.D.
Katedra matematiky FAV ZČU, Univerzitní 8, 306 14 Plzeň
pnecesal@kma.zcu.cz

Středisko služeb školám, Plzeň, Částkova 78
Podpora talentovaných žáků v Plzeňském kraji
CZ.1.07/1.2.03/02.0001

Tento projekt je v letech 2012-15 financován z rozpočtu Plzeňského kraje

MATEMATIKA HROU

(Vybrané složitější a zábavnější slovní úlohy použité v soutěžích a hrách kempu)

RNDr. Jana SOUKUPOVÁ

1 Úvod (Zajímavé slovní úlohy nejen na pohyb)

Studenti řešili v rámci pohybových her následující úlohy:

1. Na železniční trati z A do B je tunel dlouhý 192 m a ve vzdálenosti 933m od tunelu je most délky 350m . Osobní vlak jede z A do B a od okamžiku, kdy jeho lokomotiva vjede do tunelu, až do okamžiku, kdy jeho poslední vagón opustí tunel, uplyne 15 sekund. Z B do A jede po druhé koleji nákladní vlak a přitom od okamžiku, kdy lokomotiva nákladního vlaku vjede na most, až do okamžiku, kdy jeho poslední vagón opustí most, uplyne 34 sekund, Poslední vagóny obou vlaků opouštějí most nebo tunel ve stejný okamžik a od tohoto okamžiku uplyne právě 19 sekund, kdy se lokomotivy setkají. Místo setkání je vzdáleno 488m od tunelu. Určete délky i rychlosti obou vlaků. [os vl. 108m, rychlost 72km/h, nákl. vl. 160m, rychlost 54km/h]
2. Vlak projíždí tunelem dlouhým 220m. Od okamžiku, kdy vjede do tunelu lokomotiva, až do okamžiku, kdy poslední vagón opustí tunel, uplyne 19 sekund. Od tohoto okamžiku uplyne dalších 42 sekund, než lokomotiva přijede k návěsti, která je 1 km od tunelu. Vlak jede stálou rychlostí. Určete tuto rychlost a délku vlaku. [72km/h , 160m]
3. Z místa A do místa B, vzdáleného 9 km, vyšel chodec. Po čtvrt hodině byl za ním z místa A vyslán posel se vzkazem. Posel dohonil chodce a vrátil se zpět do místa A v okamžiku, kdy chodec přišel do místa B. Určete rychlost pohybu chodce a dobu, za kterou posel dohoní chodce, víte-li, že se oba pohybují stálou rychlostí a rychlost pohybu posla je 5 km/h . Přitom dobu potřebnou k předání vzkazu zanedbáváme. [4 km/h , dohoní ho za 1 h]
4. Tři vojáci - poručík Zamířil, major Vystřelil a generál Strefil - stříleli do terče. Když skončili, spočítali své zásahy. Každý z nich řekl tři věty:

Poručík Zamířil: "Nastřílel jsem 180." a "Nastřílel jsem o 40 méně než major." a "Nastřílel jsem o 20 víc než generál."

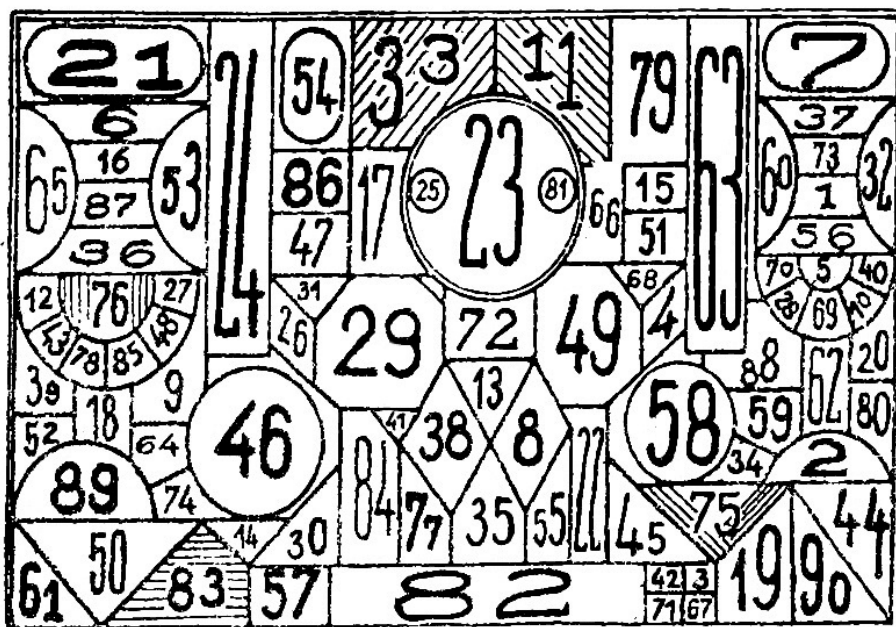
INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Major Vystřelil: "Nenastřílel jsem nejméně." a "Rozdíl mezi mnou a generálem je 60."
a "Generál nastřílel 240."

Generál Strefil: "Nastřílel jsem méně než poručík." a "Poručík nastřílel 200." a "Major
nastřílel o 60 víc než poručík."

Každý z nich jedenkrát nemluvil pravdu. Kolik každý z nich nastřílel bodů?

- Nalezněte 10.místné číslo, kde první číslice vyjadřuje kolik nul je v číslici, druhá číslice určuje, kolik je zde jedniček atd. až do desáté číslice, která určuje kolik je zde devítek.
- Příklad na postřeh: v následujícím obrázku počítejte od 1 do 99 a ukazujte.



INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

2 Prezentace účastníka mezinárodní olympiády v Thajsku o cestě a soutěži:

Jan Soukup – účastník mezinárodního kola matematické olympiády vyprávěl nejen o cestě šestice Čechů, ale také o příkladech, o účastnících ze Severní Koreji, o slonech a o tom, že Američané se na soutěž připravují intenzivně celý rok.



Středisko služeb školám, Plzeň, Částkova 78
Podpora talentovaných žáků v Plzeňském kraji
CZ.1.07/1.2.03/02.0001

Tento projekt je v letech 2012-15 financován z rozpočtu Plzeňského kraje

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ



2.1 Diskuse nad geometrickým příkladem právě z IMO:

Zadání:

Konečnou množinu S bodů v rovině nazveme vyváženou, jestliže pro libovolné dva různé body A a B z S existuje v S takový bod C , že $|AC| = |BC|$. Množinu S nazveme středuprostou, jestliže pro žádné tři různé body A, B a C z S neexistuje v S bod P takový, že $|PA| = |PB| = |PC|$.

- Dokažte, že pro každé přirozené číslo $n \geq 3$ existuje vyvážená množina obsahující právě n bodů.
- Určete všechna přirozená čísla $n \geq 3$, pro něž existuje vyvážená středuprostá množina obsahující právě n bodů.

2.2 Další zajímavá úloha, tentokrát z teorie čísel

Určete všechna přirozená čísla n , pro která je $\sqrt{n - 2012} + \sqrt{n + 2012}$ číslo celé.

Řešení:

Výraz se má rovnat celému číslu

$$\sqrt{n - 2012} + \sqrt{n + 2012} = k; k \in \mathbb{Z} \text{ podm. } n - 2012 \geq 0 \text{ a tedy } n \geq 2012.$$

také

$$(\sqrt{n - 2012} + \sqrt{n + 2012})^2 = k^2 \text{ a } k^2 \text{ je také celé číslo}$$

Úpravou najdeme všechny možné součiny levé strany:

$$\begin{aligned} \text{Rovnici umocníme (bude nutná zkouška)} \quad [4(n)^2 - 2012^2] &= k^4 - 4k^2n + 4n^2 \\ 4n^2 - 4 \cdot 2012^2 &= k^4 - 4k^2n + 4n^2 \end{aligned}$$

Středisko služeb školám, Plzeň, Částkova 78
Podpora talentovaných žáků v Plzeňském kraji
CZ.1.07/1.2.03/02.0001

Tento projekt je v letech 2012-15 financován z rozpočtu Plzeňského kraje

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

$$-(2 \cdot 2012)^2 = k^2 \cdot (k^2 - 4n)$$

$$(2 \cdot 4 \cdot 503)^2 = k^2 \cdot (4n - k^2)$$

$$\text{Podmínky : } k^2 - 2n \geq 0 \dots k^2 \geq 2 \cdot n \dots k^2 \geq 2 \cdot 2012 \dots k \geq 2 \cdot \sqrt{1006}$$

Máme tři možnosti, jak zvolit k .

a. $k = 503$

n není přirozené

b. $k = 2 \cdot 503$

$$4n - (2 \cdot 503)^2 = 4^2$$

$$n = 4 + 503^2$$

c. $k = 4 \cdot 503$

$$2 = 4n - (4 \cdot [503])^2$$

$$n = 1 + 4 \cdot 503^2$$

d. $k = 2 \cdot 4 \cdot 503$

$$1 = 4n - 2^2 \cdot 4^2 \cdot 503^2$$

n není přirozené

Na závěr je nutné provést zkoušky, které pro obě čísla vycházejí

3 Závěr

Studenti řešili úlohy formou soutěží v přírodě.

4 Použitá literatura

ŠVRČEK J., CALÁBEK P. Sbíрка netradičních matematických úloh 1. vyd. Prometheus, 2007., ISBN 978-80-7196-341-7.

POLÁK J., Středoškolská matematika v úlohách

HERMAN J., CHRÁPAVÁ V., JANČOVIČOVÁ E., ŠIMŠA J. MATEMATIKA Rovnice a jejich soustavy, ISBN 978-80-247-1821-7

Časopis ROZHLEDY matematicko-fyzikální, ročník 87 (2012) č.1.

5 Kontakt na autora

RNDr. Jana Soukupová

Gymnázium Mikulášské náměstí 23 Plzeň

E-mail jana.soukupova@mikulasske.cz

Středisko služeb školám, Plzeň, Částkova 78
Podpora talentovaných žáků v Plzeňském kraji
CZ.1.07/1.2.03/02.0001

Tento projekt je v letech 2012-15 financován z rozpočtu Plzeňského kraje

Příklady na rovnice a nerovnice z mezinárodních matematických olympiád

Petr TOMICZEK

Úvod

Základním předpokladem k tomu, abychom byli schopni řešit současné technické problémy, je zcela jistě znalost postupů při řešení algebraických rovnic a nerovnic. Obsahem tohoto příspěvku jsou proto příklady s touto tematikou, které se řešily v uplynulých ročnících matematických olympiád po celém světě.

První kapitola je věnována rovnicím řešeným v oboru celých a racionálních čísel. Ve druhé kapitole je diskutován vztah mezi aritmetickým a geometrickým průměrem a jeho aplikacemi při řešení nerovnic. Pro pochopení některých důkazů je vhodné se nejdříve seznámit s principem matematické indukce.

1. Rovnice

Příklad 1.1: (NDR 1974)

Pro $x, y \in \mathbb{Z}$ řešte rovnici $(x + 2)^4 - x^4 = y^3$.

Řešení: Výpočtem dostaneme $8(x^3 + 2(x + 1)^2 + x^2) = y^3$, tudíž y je sudé $y = 2k, k \in \mathbb{Z}$ a $x^3 + 2(x + 1)^2 + x^2 = k^3$. Odtud vyplývá, že $k \geq x + 1$. Pro $k = x + 1$ platí $x^3 + 2(x + 1)^2 + x^2 = x^3 + 3x^2 + 3x + 1$, tedy $x = -1, y = 0$. Pro $k \geq x + 2$ musí platit $x^3 + 2(x + 1)^2 + x^2 \geq x^3 + 6x^2 + 12x + 8$, neboli $0 \geq 3x^2 + 8x + 6$, což nikdy nenastane.

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Příklad 1.2: (Bulharsko 1981)

Dokažte následující tvrzení. Jestliže $n \in \mathbb{N}$ je liché, pak rovnice $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{4}{n}$ má v množině \mathbb{N} řešení právě tehdy, když $n = m(4k - 1)$, kde $m, k \in \mathbb{N}$.

Řešení: Důkaz ekvivalence rozdělíme do dvou kroků.
Nejdříve " \Rightarrow ": Z rovnice $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{4}{n}$ dostaneme $n(x + y) = 4xy$ a použijeme, že n je liché. Tedy a) x, y jsou obě sudá nebo b) obě lichá čísla. V případě a) platí $x = 2x_1, y = 2y_1$, kde $x_1, y_1 \in \mathbb{N}$. Odtud $n(x_1 + y_1) = 8x_1y_1 \Rightarrow 2 \mid (x_1 + y_1)$ a opět obě čísla x_1, y_1 jsou sudá nebo lichá. Proto existuje $p \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ takové, že $x = 2^p x_p, y = 2^p y_p$, kde $x_p, y_p \in \mathbb{N}$ jsou lichá čísla (pokud $p = 0$, tak dostáváme případ b)). Po dosazení do původní rovnice dostaneme $n2^p(x_p + y_p) = 4 \cdot 2^p 2^p x_p y_p$. Odtud $4 \mid (x_p + y_p)$ a $x_p = 4k - 1, y_p = 4l - 3$, kde $k, l \in \mathbb{N}$. Po dosazení $n(4k - 1 + 4l - 3) = 4 \cdot 2^p(4k - 1)(4l - 3)$, tudíž $n(k + l - 1) = 2^p(4k - 1)(4l - 3)$. Jestliže $(k + l - 1) \cdot \alpha = 4k - 1$, kde $\alpha \in \mathbb{N}$, pak $l = \frac{4k-1}{\alpha} - k + 1$ a $4l - 3 = (4k - 1)(\frac{4}{\alpha} - 1)$. Tedy $n(k + l - 1) = 2^p(k + l - 1) \cdot \alpha \cdot (4k - 1)(\frac{4}{\alpha} - 1) \Rightarrow n = 2^p(4k - 1)(\alpha - 4)$, cbd.
Obráceně " \Leftarrow ": nyní $n = m(4k - 1)$ a hledáme čísla $x, y \in \mathbb{N}$ tak, aby řešila rovnici $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{4}{n} = \frac{4}{m(4k-1)}$. Řešení zkusíme najít ve tvaru $x = a \cdot m, y = b \cdot (4k - 1)$, kde $a, b \in \mathbb{N}$. Potom $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{x+y}{xy} = \frac{am+b(4k-1)}{am \cdot b(4k-1)} = \frac{4}{m(4k-1)}$, odtud $4ab = am + b(4k - 1)$, tedy $a = k, b = am = km$. Neboli $x = km, y = km(4k - 1)$, cbd.

Příklad 1.3: (NDR 1973)

Pro $x \in \mathbb{Z}$ řešte rovnici $x(x + 1)(x + 7)(x + 8) = y^2$.

Řešení: Substitucí $z = x + 4$ přejdeme k $(z^2 - 16)(z^2 - 9) = y^2$. Pro $z = 0$ je $y = \pm 12$, pro $z = \pm 3, z = \pm 4$ je $y = 0$, pro $z = \pm 5$, je $y = \pm 12$. Pro $z = \pm 1, \pm 2$ řešení v celých číslech neexistuje. Zbývá uvažovat $|z| \geq 6$. Pak $z^4 - 25z^2 + 144 = y^2 = (z^2 - 12)^2 - z^2$. Tedy $(z^2 - 12)^2 \geq y^2$ a $y^2 > (z^2 - 13)^2 = z^4 - 25z^2 + 144 - (z^2 - 25)$, neboť $(z^2 - 25) > 0$ pro $|z| \geq 6$. Další řešení tudíž neexistují.

Příklad 1.4: (Rumunsko 1981)

Pro $x, y \in \mathbb{Z}$ řešte rovnici $x^6 + 3x^3 + 1 = y^4$.

Řešení: Substitucí $z = x^3$ přejdeme ke kvadratické rovnici $z^2 + 3z + 1 - y^4 = 0$, pro jejíž diskriminant musí platit $D = 5 + 4y^4 = n^2, n \in \mathbb{N}$, abychom dostali řešení v celých číslech. Položíme $m = 2y^2$, pak $n^2 = m^2 + 5$ a $n \geq m + 1$, tedy $m^2 + 5 \geq (m + 1)^2 = m^2 + 2m + 1$. Odtud plyne $2 \geq m = 2y^2$, tudíž $1 \geq |y|$. Pro $y = 0$ řešení neexistuje, pro $y = \pm 1$ je $x = 0$.

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Příklad 1.5: (New York 1977)

Pro $x, y \in \mathbb{Z}$ řešte rovnici $2^x + 1 = y^2$.

Řešení: Z nerovnosti $0 < 2^x = y^2 - 1$ vyplývá pro $x, y \in \mathbb{Z}$, že $2^x = y^2 - 1 \geq 3$ a $x > 1$. Tedy $2^x + 1$ je liché číslo i y je liché. Pak $y = 2k + 1, k \in \mathbb{Z}$ a $2^x + 1 = (2k + 1)^2$, odtud $2^{x-2} = (k + 1)k$. Tato rovnost nastane pouze pro $k = 1$, neboli $x = 3, y = 3$.

Příklad 1.6: (Jugoslávie 1974)

Pro $x, y \in \mathbb{Z}$ řešte rovnici $x^2 + xy + y^2 = x^2y^2$.

Řešení: Díky symetrii příkladu můžeme bez újmy na obecnosti předpokládat, že $y = ax, |a| \geq 1$. Potom $x^2(1 + a + a^2) = a^2x^4$ a $x^2 = \frac{1+a+a^2}{a^2} \leq 3$, tedy pro $x = -1$, je $y = 1$, pro $x = 0$, je $y = 0$, pro $x = 1$, je $y = -1$.

Příklad 1.7: (NDR 1970)

Dokažte, že pro lichá čísla $a, b, c \in \mathbb{Z}$ rovnice $ax^2 + bx + c = 0$ nemá řešení v \mathbb{Q} .

Řešení: Aby kořeny kvadratické rovnice byly racionální čísla, tak pro její diskriminant musí platit $D = b^2 - 4ac = n^2, n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Z lichosti čísel a, b, c a rovnosti $b^2 - 4ac = n^2$ plyne, že i n je liché číslo. Položíme $a = 2a_1 + 1, b = 2b_1 + 1, c = 2c_1 + 1, n = 2n_1 + 1$, potom $4b_1^2 + 4b_1 + 1 - 4(4a_1c_1 + 2a_1 + 2c_1 + 1) = 4n_1^2 + 4n_1 + 1$ a $b_1^2 + b_1 - (4a_1c_1 + 2a_1 + 2c_1 + 1) = n_1^2 + n_1$. Jelikož $b_1^2 + b_1$ i $n_1^2 + n_1$ jsou sudá čísla, tak číslo na levé straně poslední rovnosti je liché a vpravo sudé, což je spor s předpokladem, že kořeny rovnice jsou racionální čísla.

Příklad 1.8: (Bulharsko 1983)

Dokažte, že rovnice $x^3 + 3y^3 + 9z^3 - 9xyz = 0$ má v \mathbb{Q} pouze triviální řešení.

Řešení: Nejdříve budeme předpokládat, že čísla x, y, z jsou celá, nenulová a nemají společného dělitele d (jinak tímto číslem můžeme rovnici vydělit). Dokážeme, že všechna čísla x, y, z jsou dělitelná třemi, což bude spor. Platí $x^3 = -3(y^3 + 3z^3 - 3xyz) \Rightarrow x = 3x_1, x_1 \in \mathbb{Z} \Rightarrow 3 \cdot 9x_1^3 = 3(9x_1yz - 3z^3 - y^3) \Rightarrow y = 3y_1, y_1 \in \mathbb{Z} \Rightarrow 9x_1^3 = 27x_1y_1z - 3z^3 - 27y_1^3 \Rightarrow z = 3z_1, z_1 \in \mathbb{Z}$, což je spor. Nyní budeme předpokládat, že x, y, z lze zapsat ve tvaru zlomků $x = \frac{p_x}{q_x}, y = \frac{p_y}{q_y}, z = \frac{p_z}{q_z}$. Potom platí $(\frac{p_x}{q_x})^3 + 3(\frac{p_y}{q_y})^3 + 9(\frac{p_z}{q_z})^3 - 9\frac{p_x p_y p_z}{q_x q_y q_z} = 0 \Rightarrow (p_x q_y q_z)^3 + 3(p_y q_x q_z)^3 + 9(p_z q_x q_y)^3 - 9(p_x q_y q_z p_y q_x q_y p_x q_y q_z)^3 = 0 \Rightarrow \tilde{x}^3 + 3\tilde{y}^3 + 9\tilde{z}^3 - 9\tilde{x}\tilde{y}\tilde{z} = 0$, kde $\tilde{x} = p_x q_y q_z$ atd. a $\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}$ jsou celá čísla, což opět povede ke sporu, stejně jako v první části důkazu.

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Příklad 1.9: (Anglie 1970)

Pro $x, y \in \mathbb{Q}$ řešte rovnici $\sqrt{2\sqrt{3}-3} = \sqrt{x\sqrt{3}} - \sqrt{y\sqrt{3}}$.

Řešení: Po umocnění dostaneme $2\sqrt{3}-3 = x\sqrt{3} - 2\sqrt{xy\sqrt{3}} + y\sqrt{3}$, vydělením $\sqrt{3}$, pak $2 - \sqrt{3} = x - 2\sqrt{xy} + y$ a $2 - x - y = \sqrt{3} - 2\sqrt{xy}$. Opět umocníme, potom $(2 - x - y)^2 = 3 - 4\sqrt{xy\sqrt{3}} + 4xy$. Odtud plyne, že $\sqrt{xy\sqrt{3}} \in \mathbb{Q}$. V první rovnosti $2\sqrt{3}-3 = x\sqrt{3} - 2\sqrt{xy\sqrt{3}} + y\sqrt{3}$ vytkneme $\sqrt{3}$, pak $\sqrt{3}(2-x-y) = 3 - 2\sqrt{xy\sqrt{3}} \in \mathbb{Q}$. Nutně tedy $2-x-y = 0$ a $3 - 2\sqrt{xy\sqrt{3}} = 0$. Odtud již dostaneme řešení $x = \frac{3}{2}, y = \frac{1}{2}$.

Příklad 1.10:

Řešte rovnici $x^{x+y} = (x+y)^y$ v kladných racionálních číslech.

Řešení: Rovnici $x^{x+y} = (x+y)^y$ upravíme $x^x = (1 + \frac{y}{x})^y \Rightarrow x^x = (1 + \frac{y}{x})^{\frac{y}{x}}$ a položíme $z = \frac{y}{x}$. Potom $x = (1 + \frac{1}{z})^z$, $x, z \in \mathbb{Q}$ a $x = \frac{m}{n}$, $z = \frac{p}{q}$, kde m, n a p, q jsou nesoudělná přirozená čísla. Po dosazení dostaneme $\frac{m}{n} = (1 + \frac{p}{q})^{\frac{p}{q}}$ a $m^q \cdot q^p = n^q \cdot (q+p)^p$. Z nesoudělnosti m, n a $p, q+p$ plyne $q^p | n^q$ a $n^q | q^p$, tudíž $q^p = n^q \Rightarrow q^{\frac{p}{q}} = n$. Rozložíme q na součin prvočísel $q = q_1^{r_1} \cdot q_2^{r_2} \cdot \dots \cdot q_k^{r_k}$, $r_i \in \mathbb{N}$. Potom $q^{\frac{p}{q}} = q_1^{\frac{p r_1}{q}} \cdot q_2^{\frac{p r_2}{q}} \cdot \dots \cdot q_k^{\frac{p r_k}{q}} = n$. Z nesoudělnosti p, q plyne, že $q | r_i$, tedy $r_i \geq q$ a $q = q_1^{r_1} \cdot q_2^{r_2} \cdot \dots \cdot q_k^{r_k} \geq q^q \Rightarrow q = 1 \Rightarrow n = 1$. Tudíž $z = p$, $x = (1 + \frac{1}{p})^p$ a $y = p(1 + \frac{1}{p})^p$, kde $p \in \mathbb{N}$.

V dalších příkladech použijeme následující jednoduché tvrzení.

Věta 1.1: (modulo 4)

Nechť $x \in \mathbb{Z}$, pak při dělení x^2 číslem 4 jsou zbytky pouze 0, když x je sudé, a 1, když x je liché. Píšeme $x^2 \pmod{4} \equiv 0$ (x sudé), $x^2 \pmod{4} \equiv 1$ (x liché). Podobně $x^2 \pmod{16} \equiv 0$ (x sudé), $x^2 \pmod{16} \equiv 1$ (x liché).

Příklad 1.11: (ČSSR 1976)

Pro $x, y, z \in \mathbb{Z}$ řešte rovnici $x^2 + y^2 = 3z^2$.

Řešení: Triviální řešení $x = 0, y = 0, z = 0$ je zřejmé. Bez újmy na obecnosti můžeme tedy předpokládat, že x, y, z jsou nesoudělná čísla a alespoň jedno je nenulové. Podle předchozího tvrzení 1.1 platí $(x^2 + y^2) \pmod{4} \equiv 0$ nebo 1 nebo 2 a $3z^2 \pmod{4} \equiv 0$ nebo 3. Tudíž $(x^2 + y^2) \pmod{4} \equiv 0$ a $3z^2 \pmod{4} \equiv 0$, což nastane pouze v případě, že všechna čísla x, y, z jsou sudá. Dostali jsme spor s předpokladem nesoudělnosti. Úloha tedy nemá netriviální řešení.

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Příklad 1.12: (USA 1976)

Pro $x, y, z \in \mathbb{Z}$ řešte rovnici $x^2 + y^2 + z^2 = x^2y^2$.

Řešení: Opět úloha má triviální řešení $x = 0, y = 0, z = 0$. Podle tvrzení 1.1 buď a) $x^2y^2 \pmod{4} \equiv 1$ nebo b) $x^2y^2 \pmod{4} \equiv 0$.

ad a) Tedy x, y jsou liché, pak i z je liché a $x^2 + y^2 + z^2 \pmod{4} \equiv 3 \neq x^2y^2 \pmod{4} \equiv 1$. Tedy možnost a) nenastane.

ad b) Nechť x je sudé, y je liché, pak z je též liché a $x^2 + y^2 + z^2 \pmod{4} \equiv 2 \neq x^2y^2 \pmod{4} \equiv 0$. (Analogicky y je sudé, x je liché.) Zbývá možnost x je sudé, y je sudé, pak i z je sudé. Potom $x = 2x_1, y = 2y_1, z = 2z_1$ a $x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 = 4x_1^2y_1^2$. Odtud $x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 \pmod{4} \equiv 4x_1^2y_1^2 \pmod{4} \equiv 0$, což nastane pouze v případě, že x_1, y_1, z_1 jsou sudá čísla atd. Čísla x, y, z jsou tedy dělitelná libovolnou mocninou čísla 2, tato situace nastane pouze pro $x = 0, y = 0, z = 0$.

Příklad 1.13: (USA 1979)

V celých číslech řešte rovnici $x_1^4 + x_2^4 + \dots + x_{14}^4 = 1599$.

Řešení: Platí $x^4 \pmod{16} \equiv 0$ nebo $x^4 \pmod{16} \equiv 1$. Tedy $(x_1^4 + x_2^4 + \dots + x_{14}^4) \pmod{16} \leq 14$ a $1599 \pmod{16} \equiv 15$. Proto úloha nemá řešení.

2. Nerovnice

Vzdálenost dvou čísel a, b na reálné ose se rovná $|a - b| = \sqrt{(a - b)^2}$. Zřejmě $(a - b)^2 \geq 0$, což je ekvivalentní se základní nerovností

$$2ab \leq a^2 + b^2, \text{ popřípadě } ab \leq \frac{a^2 + b^2}{2} \text{ nebo } \sqrt{ab} \leq \frac{a + b}{2} \text{ pro } a, b \geq 0, \quad (\text{N1})$$

kterou lze zobecnit do následující podoby.

Věta 2.2: (o průměrech)

Nechť $a_i > 0, i = 1, 2, \dots, n$, pak platí

$$\frac{n}{\frac{1}{a_1} + \dots + \frac{1}{a_n}} \leq \sqrt[n]{a_1 \cdot \dots \cdot a_n} \leq \frac{a_1 + \dots + a_n}{n} \leq \sqrt{\frac{a_1^2 + \dots + a_n^2}{n}}. \quad (\text{N2})$$

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Definice 2.1: Necht' $a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{R}$, aritmetický průměr se nazývá číslo

$$\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n}.$$

Necht' $a_i \geq 0, i = 1, 2, \dots, n$, geometrický průměr se nazývá číslo

$$\sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_n}.$$

Necht' $a_i > 0, i = 1, 2, \dots, n$, harmonický průměr se nazývá číslo

$$\frac{n}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n}}.$$

Necht' $a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{R}$, kvadratický průměr se nazývá číslo

$$\sqrt{\frac{a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2}{n}}.$$

Důkaz věty 2.1: Nejprve dokážeme vztah mezi geometrickým a aritmetickým průměrem

$$\sqrt[n]{a_1 \cdot \dots \cdot a_n} \leq \frac{a_1 + \dots + a_n}{n}. \quad (\text{GA})$$

Upravíme (GA) do tvaru $n \leq \frac{a_1 + \dots + a_n}{\sqrt[n]{a_1 \cdot \dots \cdot a_n}}$, a položíme $x_i = \frac{a_i}{\sqrt[n]{a_1 \cdot \dots \cdot a_n}}, i = 1, \dots, n$.

Potom $x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_n = 1$ a pomocí matematické indukce budeme dokazovat, že $n \leq x_1 + x_2 + \dots + x_n$. Pro $n = 1$ tvrzení zřejmě platí. Z využitím indukčního předpokladu $n \leq x_1 + x_2 + \dots + x_n$ chceme dokázat, že $n + 1 \leq x_1 + x_2 + \dots + x_n + x_{n+1}$, pokud $x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_n \cdot x_{n+1} = 1$. Bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že $x_1 \geq 1$ a $x_2 \leq 1$, potom $(x_1 - 1)(x_2 - 1) \leq 0$, tedy $1 + x_1 x_2 \leq x_1 + x_2$ a také

$$1 + x_1 x_2 + x_3 + \dots + x_n + x_{n+1} \leq x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_n + x_{n+1}.$$

Pro n čísel $x_1 x_2, x_3, \dots, x_{n+1}$ platí $x_1 x_2 \cdot x_3 \cdot \dots \cdot x_{n+1} = 1$ a podle indukčního předpokladu $n \leq x_1 x_2 + x_3 + \dots + x_n + x_{n+1}$. Odtud již dostaneme

$$1 + n \leq 1 + x_1 x_2 + x_3 + \dots + x_n + x_{n+1} \leq x_1 + x_2 + \dots + x_n + x_{n+1},$$

což jsme měli dokázat.

Pokud položíme $a_i = \frac{1}{b_i}, i = 1, \dots, n$ v nerovnosti (GA), pak dostaneme $\sqrt[n]{\frac{1}{b_1} \cdot \dots \cdot \frac{1}{b_n}} \leq \frac{\frac{1}{b_1} + \dots + \frac{1}{b_n}}{n}$. Odtud již snadno plyne nerovnost mezi harmonickým a geometrickým průměrem

$$\frac{n}{\frac{1}{b_1} + \dots + \frac{1}{b_n}} \leq \sqrt[n]{b_1 \cdot \dots \cdot b_n}. \quad (\text{HG})$$

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Nerovnost mezi aritmetickým a kvadratickým průměrem dokážeme také pomocí matematické indukce. Chceme tedy dokázat

$$\frac{a_1 + \dots + a_n}{n} \leq \sqrt{\frac{a_1^2 + \dots + a_n^2}{n}}, \quad (\text{AK})$$

což pro $n = 1$ zřejmě platí.

Za indukčního předpokladu $(a_1 + \dots + a_n)^2 \leq n(a_1^2 + \dots + a_n^2)$, dokážeme platnost $(a_1 + \dots + a_n + a_{n+1})^2 \leq (n+1)(a_1^2 + \dots + a_n^2 + a_{n+1}^2)$.

Platí

$$(a_1 + \dots + a_n + a_{n+1})^2 = (a_1 + \dots + a_n)^2 + 2(a_1 + \dots + a_n)a_{n+1} + (a_{n+1})^2 \stackrel{(N1)}{\leq} n(a_1^2 + \dots + a_n^2) + a_1^2 + a_{n+1}^2 + \dots + a_n^2 + a_{n+1}^2 + a_{n+1}^2 = (n+1)(a_1^2 + \dots + a_n^2 + a_{n+1}^2), \text{ což jsme měli dokázat.}$$

Poznamenejme, že rovnost v (N2) nastane pouze pro $a_1 = a_2 = \dots = a_n$.

S nerovnostmi z předchozí věty se často setkáme v úlohách z matematických olympiád.

Příklad 2.1: (2.ročník MO kat. A)

Dokažte, že pro $a_i > 0$, $i = 1, 2, \dots, n$, platí nerovnost

$$(a_1 + a_2 + \dots + a_n) \left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n} \right) \geq n^2.$$

Řešení: Jednoduchou úpravou dostaneme

$$\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} \geq \frac{n}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n}}, \quad (\text{HA})$$

což je nerovnost mezi harmonickým a aritmetickým průměrem, viz (N2).

Řešení však můžeme dostat i jiným postupem s využitím základní nerovnosti (N1).

$$(a_1 + a_2 + \dots + a_n) \left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n} \right) = \sum_{i=1}^n a_i \cdot \frac{1}{a_i} + \sum_{\substack{i \neq j \\ i, j=1}}^n a_i \cdot \frac{1}{a_j} =$$

$$n + \sum_{1 \leq i < j \leq n} \underbrace{\frac{a_i}{a_j} + \frac{a_j}{a_i}}_{\geq 2} \geq n + \binom{n}{2} \cdot 2 = n^2.$$

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Příklad 2.2:

Dokažte, že pro trojici kladných čísel a, b, c , platí nerovnost

$$(a + b)(a + c)(b + c) \geq 8abc.$$

Kdy nastane rovnost?

Řešení: Podle (GA) nerovnosti je $a + b \geq 2\sqrt{ab}$, odtud plyne $(a + b)(a + c)(b + c) \geq 2\sqrt{ab}2\sqrt{ac}2\sqrt{bc} = 8abc$, což jsem měli dokázat. Rovnost nastane pouze v případě, kdy $a = b = c$.

Příklad 2.3: (17.ročník MO kat. A)

Dokažte, že pro trojici nezáporných čísel a, b, c , platí nerovnost

$$a(a - \sqrt{bc}) + b(b - \sqrt{ac}) + c(c - \sqrt{ab}) \geq 0.$$

Řešení: Podle (GA) nerovnosti je $\sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2}$, tudíž $a(a - \sqrt{bc}) + b(b - \sqrt{ac}) + c(c - \sqrt{ab}) \geq a(a - \frac{b+c}{2}) + b(b - \frac{a+c}{2}) + c(c - \frac{a+b}{2}) = \frac{1}{2}((a-b)^2 + (b-c)^2 + (a-c)^2) \geq 0$.

Příklad 2.4:

Dokažte, že pro libovolné přirozené číslo n , platí nerovnost $n! \leq \left(\frac{n+1}{2}\right)^n$.

Řešení: Platí $1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$, pak $\left(\frac{n+1}{2}\right)^n = \left(\frac{1+2+\dots+n}{n}\right)^n \stackrel{(GA)}{\geq} n!$.
Poznámka: Lze to dokázat i matematickou indukcí a binomickou větou.

Příklad 2.5: (NewYork 75)

Dokažte, že pro dvě libovolná různá kladná čísla a, b platí nerovnosti

$$\sqrt{ab} < \frac{(a-b)^2}{8\left(\frac{a+b}{2} - \sqrt{ab}\right)} < \frac{a+b}{2}.$$

Řešení: Označíme $A = \frac{a+b}{2}$ a $G = \sqrt{ab}$, pak $\frac{(a-b)^2}{8\left(\frac{a+b}{2} - \sqrt{ab}\right)} = \frac{(a-b)^2}{8(A-G)} = \frac{(a+b)^2 - 4ab}{8(A-G)} = \frac{4A^2 - 4G^2}{8(A-G)} = \frac{A+G}{2}$ a zřejmě $G < \frac{A+G}{2} < A$.

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Příklad 2.6: (Jugoslávie 75)

Dokažte, že pro tři libovolná čísla a, b, c větší než 1 platí nerovnost

$$2\left(\frac{\log_b a}{a+b} + \frac{\log_c b}{b+c} + \frac{\log_a c}{c+a}\right) \geq \frac{9}{a+b+c}.$$

Řešení: Platí odhady $2\left(\frac{\log_b a}{a+b} + \frac{\log_c b}{b+c} + \frac{\log_a c}{c+a}\right) \stackrel{(GA)}{\geq} 6\sqrt[3]{\frac{\log_b a \log_c b \log_a c}{(a+b)(b+c)(c+a)}} = \frac{6}{\sqrt[3]{(a+b)(b+c)(c+a)}} \stackrel{(GA)}{\geq} \frac{18}{(a+b)+(b+c)+(c+a)}.$

Příklad 2.7: (Jugoslávie 1976)

Nechť součin třech čísel se rovná jedné a jejich součet je větší než součet jejich převrácených hodnot. Dokažte, že pak právě jedno z těchto čísel je větší než jedna.

Řešení: Platí $abc = 1$ a $a + b + c > \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$. Potom $a + b + c > \frac{bc+ac+ab}{abc} \stackrel{abc=1}{\Rightarrow} a + b + c - (bc + ac + ab) + abc - 1 > 0 \Rightarrow a - 1 + b(1 - a) + bc(a - 1) + c(1 - a) > 0 \Rightarrow (a - 1)(1 - b + bc - c) \Rightarrow (a - 1)(b - 1)(c - 1) > 0$. Odtud již plyne požadované tvrzení.

2.1 Bernoulliho nerovnost

Máme dokázat, že $\forall n \in \mathbb{N} \forall x \in \mathbb{R}, x \geq -2$ platí:

$$(1+x)^n \geq 1+nx.$$

- Pro $n = 1$ nastane rovnost $1+x = 1+x$.
- Ukážeme, že platí: $(1+x)^{n+1} \geq 1+(n+1)x$. Upravíme uvedenou nerovnost a dostaneme

$$\begin{aligned} (1+x)^n(1+x) &\geq 1+nx+x, \\ (1+x)^n + (1+x)^n x &\geq 1+nx+x. \end{aligned}$$

Podle indukčního předpokladu je $(1+x)^n \geq 1+nx$ a stačí tedy dokázat, že

$$(1+x)^n x \geq x.$$

Pro $x \geq 0$ nerovnost zřejmě platí. Pokud $x < 0$ danou nerovnost vydělíme x dostaneme $(1+x)^n \leq 1$. Tato nerovnost platí pro $-2 \leq x < 0$. Což jsme měli dokázat.

Poznámka: Důkaz nerovnosti $(1+x)^n \geq 1+nx$ pro $x \geq -1$ podal švýcarský matematik Jacob I. Bernoulli (1654-1705). Její další zobecnění následuje.

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Věta 2.3: (Bernoulliho nerovnost)

Nechť $x > -1$, $x \neq 0$, pak

$$\begin{aligned} (1+x)^\alpha &< 1+\alpha x, & \text{pro } 0 < \alpha < 1 \\ (1+x)^\alpha &> 1+\alpha x, & \text{pro } \alpha \notin [0, 1] \end{aligned} \quad (\text{BN})$$

Příklad 2.8: (Kanada 1982)

Dokažte, že pro $x > 0$, $x \neq 1$, $a < 1$ platí $\frac{1-x^a}{1-x} < (1+x)^{a-1}$.

Řešení: Nejdříve budeme předpokládat, že $x \in (0, 1)$, potom $(1+x)^{a-1} - \frac{1-x^a}{1-x} > 0 \Leftrightarrow (1-x)(1+x)^{a-1} - (1-x^a) > 0$.

Nyní využijeme Bernoulliho nerovnost: $(1-x)(1+x)^{a-1} - (1-x^a) \stackrel{(\text{BN})}{>} (1-x)(1+(a-1)x) - 1 + x^a = 1 + (a-1)x - x - (a-1)x^2 - 1 + x^a = (a-1)(x-x^2) + x(x^{a-1}-1) = (a-1)(x-x^2) + x((1-(x-1))^{a-1}-1) \stackrel{(\text{BN})}{>} (a-1)(x-x^2) + x(1+(a-1)(x-1)-1) = 0$.

Pro $x > 1$ položíme $t = \frac{1}{x}$, pak $t \in (0, 1)$ a využijeme dokázanou nerovnost:

$$\frac{1-x^a}{1-x} = \frac{1-(\frac{1}{t})^a}{1-\frac{1}{t}} = t^{1-a} \frac{t^a-1}{t-1} < t^{1-a}(1+t)^{a-1} = (1+\frac{1}{t})^{a-1} = (1+x)^{a-1}.$$

Příklad 2.9: (SSSR 1982)

Dokažte, že pro $1 \geq x_1 \geq x_2 \geq \dots \geq x_n \geq \dots > 0$, $a \leq 1$ platí

$$(1+x_1+x_2+\dots+x_n)^a \leq 1+1^{a-1}x_1^a+2^{a-1}x_2^a+\dots+n^{a-1}x_n^a.$$

Řešení: K důkazu použijeme matematickou indukci.

Pro $a < 0$ zřejmě $(1+x_1+x_2+\dots+x_n)^a \leq 1$, tedy platí i naše tvrzení.

Pro $n = 1$ ($x_1 \in (0, 1]$), pak pro $a \in [0, 1]$ platí $(1+x_1)^a \leq 1+x_1 \leq 1+x_1^a$.

V druhém kroku chceme dokázat, že $(1+x_1+x_2+\dots+x_n+x_{n+1})^a \leq 1+1^{a-1}x_1^a+2^{a-1}x_2^a+\dots+n^{a-1}x_n^a+(n+1)^{a-1}x_{n+1}^a$.

Odhadneme $(1+x_1+\dots+x_n+x_{n+1})^a - (1+x_1+\dots+x_n)^a = (1+x_1+\dots+x_n)^a \left(\left(1+\frac{x_{n+1}}{1+x_1+\dots+x_n}\right)^a - 1 \right) \leq (1+x_1+\dots+x_n)^{a-1} \cdot x_{n+1} \leq (n+1)^{a-1}x_{n+1}^a$.

Díky indukčnímu předpokladu dostaneme

$$(1+x_1+x_2+\dots+x_n+x_{n+1})^a \leq (1+x_1+\dots+x_n)^a + (n+1)^{a-1}x_{n+1}^a \leq 1+1^{a-1}x_1^a+2^{a-1}x_2^a+\dots+n^{a-1}x_n^a+(n+1)^{a-1}x_{n+1}^a.$$



INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Závěr

Příklady použité v tomto textu se již vyskytly v některé národní či mezinárodní matematické olympiádě. Věřím, že budou dobrou přípravou našim talentovaným matematikům. Některá řešení jsou originální a nejsou přejatá z dostupné literatury. Přeji čtenářům, aby se jim dařilo nacházet ještě jednodušší a elegantnější řešení.

Použitá literatura

Alois Kufner : Nerovnosti a odhady, Škola mladých matematiků(39), Nakladatelství Mladá Fronta, Praha 1975

František Veselý: O nerovnostech a nerovnicích, Škola mladých matematiků(48), Nakladatelství Mladá Fronta, Praha 1982

Konjagin, Tonojan, Šarigin, a jiní: Zarubežnye matematičeskie olimpiady, M. Nauka, Hlavní redakce fiz.-mat. literatury, 1987

Kontakt na autora

RNDr. Petr Tomiczek CSc.

Západočeská univerzita v Plzni

tomiczek@kma.zcu.cz

Středisko služeb školám, Plzeň, Částkova 78
Podpora talentovaných žáků v Plzeňském kraji
CZ.1.07/1.2.03/02.0001

Tento projekt je v letech 2012-15 financován z rozpočtu Plzeňského kraje

POKUSY S ASTRONOMICKOU TÉMATIKOU

Marek ČESAL

1 Úvod

Astronomické pokusy slouží k jednoduché demonstraci něčeho tak nekonečného jako je vesmír. Pomocí jednoduchých a nenáročných experimentů, lze nasimulovat spoustu úkazů probíhajících ve vesmíru.

2 Popisy pokusů

Jednotlivé pokusy mají jasný chemikální nebo fyzikální základ, ale astronomickými je činí pak spojení se stejnými jevy ve vesmíru. Proto je základem všech těchto pokusů i astronomické porovnání se skutečností. Doplněním pokusů o ukázky práce s tekutým dusíkem pak jen zvyšuje efektivitu ukázek.

2.1 Simulace sopky

Nejenom na Zemi, ale i na jiných tělesech sluneční soustavy nalezneme sopečnou činnost, např. na Jupiterovo měsíci IO. Simulace lávy vytékající z jícnu se dá vytvořit pomocí malé lahvičky a modelu sopky z plastelíny (může se použít i sádra nebo dokonce obyčejná zem). Do lahvičky se nasype jedlá soda. Pak se ve víčku od PET láhve rozmíchá ocet s červeným potravinářským barvivem a nalije se do lahvičky. Při reakci směsi s jedlou sodou se vytvoří červená pěna, která začne vytékat a připomíná tekoucí lávu z jícnu sopky.

2 Tornádo

Další z dynamických jevů pozorovatelný nejen na Zemi, ale i na jiných tělesech Sluneční soustavy je větrný vír – tornádo. Ve školních podmínkách se jeho tvar dá nasimulovat pomocí vodního víru v PET láhvi. K tomuto pokusu stačí 2 PET lahve spojené víčky, ve kterých je 0,5 cm otvor. Do jedné PET lahve se nalije voda a při otočení PET lahve začne voda proudit dolů a vzduch nahoru. Vzniklý vodní vír připomíná tornádo.

3 Závěr

Pokusy se dají použít ve školách při výuce astronomie, ale i v astronomických kroužcích pro přiblížení jednotlivých úkazů. Jejich použití při přednášce může daný problém více přiblížit. V dnešní moderní době není problém nalézt na internetu další návody na zajímavé pokusy a stačí pak je jen převést do astronomie spárováním s vhodným astronomickým úkazem.

4 Použitá literatura

MEISER T., Jednoduché experimenty demonstrující jevy a procesy ve vesmíru, bakalářská práce, 2008

MEISER T., Demonstrace astrofyzikálních procesů a jevů a jejich použití pro žáky základních škol, diplomová práce, 2010

KERROD, Robin, SPARRROW, Giles. Jak funguje Vesmír. Pavel Příhoda, Universum, 2005. 160 s. ISBN 80-242-1373-7.

MIKULÁŠEK, Zdeněk, MIŠ, Leon, RUMLER, Josef. Návod na použití vesmíru [online]. 2004 [cit. 2008-02-02].

Dostupné na internetu: <<http://navod.hvezdarna.cz/navod/konvekce.htm>>.

5 Kontakt na autora

Marek Česal

ZpČAS

mcesal@volny.cz

ZÁLUDNÉ VÝBĚROVÉ EFEKTY A ZÁŘIVÉ VYHLÍDKY ASTRONOMIE

Jiří GRYGAR

1 Úvod

„Člověk se liší od vepřů mimo jiné tím, že občas zvedá hlavu a dívá se na hvězdy“

Viktor A. Ambarcumjan (1908 – 1996) arménský astrofyzik

Zkusme si stručně představit, co vnímali naši prapředci na obloze ve dne i v noci. Příslušné úkazy seřadíme podle jejich vizuální nápadnosti. Použijeme ovšem soudobý způsob měření jasnosti objektů v logaritmické stupnici, kterou astronomové nazývají *magnituda* (zkratka: mag; česky: hvězdná velikost). Čím je jasnost objektu vyšší, tím je jeho magnituda algebraicky nižší, tj. nejjasnější objekty mohou mít záporné hvězdné velikosti.

2 Jak pračlověk vnímal objekty na obloze?

Seřazeno dle zaokrouhlené (maximální) jasnosti na obloze:

1. Slunce [-27 mag]
- 2.* Bolidy [-27 mag Tunguský meteorit; běžně -20 mag]
3. Měsíc [-13 mag]
- 4.* Hvězdy návštěvnice [- 9 mag]
5. Planety [-5 mag]
- 6.* Komety [-5 mag]

Středisko služeb školám, Plzeň, Částkova 78
Podpora talentovaných žáků v Plzeňském kraji
CZ.1.07/1.2.03/02.0001

Tento projekt je v letech 2012-15 financován z rozpočtu Plzeňského kraje

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

7. Hvězdy [-2 mag]
 8. Mléčná dráha [3 mag]
 9. Magellanova mračna [4 mag]
 10. Mlhovina M31 [5 mag]
 11. Uhelňý pytel [tmavší než mezihvězdné pozadí]
(* = *efemérní jevy*)
- Rozsah jasností objektů 33 mag (poměr intenzit osvětlení 13 řádů!)

3 Jak to vidí moderní astronomie?

Vlivem pokroku astronomie v průběhu přibližně tří tisíciletí se moderní tabulka významnosti astronomických jevů jednak zásadně rozšířila a jednak téměř úplně obrátila. U každého jevu uvádím, kdy přibližně byl poprvé rozpoznán (S = známost od starověku) a za pomlčkou, kdy byla jeho fyzikální podstata pochopena. Dále uvádím hmotnosti v kg a rozměry v metrech, popř. kilometrech. U těles, která mají vlastní zdroj zářivé energie, pak také zářivý výkon ve watttech, popř. kW (1 000 W), MW, FW, TW, PW, EW, ZW a YW (10^{24} W).

3.1. Málo významné astronomické jevy

16. BOLIDY a METEORITY (Starověk/S/ – XIX. stol.): $<10^7$ kg; <100 m
15. KOMETY (S – 1950): $<10^{17}$ kg; <100 km
14. PLANETKY, TRPASLIČÍ PLANETY (1801 – 1950): $<10^{22}$ kg; <3 tis. km
13. MĚSÍC (S – XVII. stol.): $<10^{23}$ kg; 3,6 tis. km
12. PLANETY (S - XVIII. stol.): $<10^{27}$ kg; rozměr <150 tis. km
11. SLUNCE (S – 1938): 1,4 mil. km; 10^{30} kg; 100 YW

3.2. Středně významné astronomické jevy

10. HVĚZDY (S – 1938): $<10^{33}$ kg; <1 mld. km; $<10^{32}$ W
9. NOVY (1918 – 1970): $<10^{30}$ kg; <10 tis. km; $<10^{32}$ W
8. GALAXIE (S – 1925): $<10^{43}$ kg; <1 Mpc; $<10^{40}$ W

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

7. SUPERNOVY (1936 – 1957): $<10^{32}$ kg; <10 mil. km; $<10^{35}$ W

6. PULSARY (1968 – 1969): $<10^{30}$ kg; <30 km; $<10^{31}$ W

5. KVASARY (1963 – 1980): $<10^{40}$ kg; <20 mld. km; $<10^{40}$ W

3.3. Velmi významné astronomické jevy

4. ZÁBLESKOVÉ ZDROJE ZÁŘENÍ GAMA(1973 – 94): $<10^{32}$ kg; <50 km; $<10^{42}$ W

3. ČERNÉ VELEDÍRY(1995 – 2005): $<10^{40}$ kg; <50 mld. km; 0 W.

2. SKRYTÁ LÁTKA = Dark Matter (1933 – 1980): průhledná, nezáří, přitažlivá;
~23% hmoty vesmíru

1. SKRYTÁ ENERGIE = *Dark Energy* (1998 – 2008): rovnoměrně rozložená, odpudivá;
~73 % M vesmíru !!

0. KOSMOLOGICKÁ INFLACE (1982 – 2008):

prudké rozfouknutí vesmíru 10^{30} x v čase 10^{-35} s po VT

3 Závěr

1. Neznalost vzdáleností nebeských těles a úkazů je hlavním výběrovým efektem, po němž následují selektivnost elektromagnetických i jiných projevů existence kosmických těles.

2. Časové pořadí, v němž jsou astronomické objekty a úkazy objevovány, je obecně nepřímou úměrné jejich fyzikální závažnosti pro stavbu a vývoj vesmíru.

3. Není příliš pravděpodobné, že na počátku XXI. století tento trend skončí; tempo závažných astronomických objevů se spíše zrychluje vlivem zdokonalování pozorovací techniky i teorie.

5 Kontakt na autora

RNDr. Jiří Grygar, CSc.

Fyzikální ústav AV ČR

grygar@fzu.cz



INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

ASTRONOMICKÉ PŘÍKLADY ŘEŠENÉ POMOCÍ STELLARIA

Lumír HONZÍK

1 Úvod

Astronomický program Stellarium je v podstatě počítačové planetárium. Program zobrazuje poměrně realistickou denní či noční oblohu včetně některých objektů. Může být nastaven pro pohled pouhým okem nebo dalekohledem. Má celou řadu různých nastavení a funkcí, pomocí kterých lze řešit poměrně jednoduchým a hlavně názorným způsobem celou řadu astronomických úloh. Pro správné řešení úloh je zapotřebí dát pozor na správně zadaná vstupní data (datum, čas, poloha apod.). Program je volně stažitelný na internetu. Existuje v několika vývojových verzích, které se liší částečně vzhledově, více však obsahovým vybavením. Pro starší a pomalejší typy počítačů je lepší používat starší a na výkon méně náročné verze, které obsahují většinu základních funkcí. U výkonnějších počítačových sestav lze instalovat novější verze.

2 Stellarium

2.1. Stellarium – základní ovládání

Po instalaci programu a prvním spuštění je zapotřebí nastavit počáteční parametry pozorovacího místa (zeměpisnou délku a šířku), dále nastavit požadovaný datum a čas (po spuštění je automaticky nastaven aktuální datum a čas). Ovládání programu je pomocí kláves, myši a pomocí menu. Ve starších verzích je ovládací panel ve spodní části obrazovky, u novějších verzí je jeden panel dole a druhý se vysouvá z boku. Pohybovat v krajině se lze jednak myší nebo pomocí šipek. Orientace je zajištěna zkratkami světových stran, které se zapínají a vypínají pomocí klávesy Q. Kolečkem myši nebo klávesami Page Up a Page Down lze měnit zoom, tedy přibližování a oddalování v určitém rozsahu. Aplikace pracuje v reálném čase. Je-li např. den, bude Stellarium ukazovat denní oblohu. Program reaguje na plynoucí čas a tak se vzhled oblohy mění, stejně tak poloha hvězd vůči pozorovacímu stanovišti v čase mění. Je ale možné běh času urychlovat i zpomalovat klávesami J (zpomalení, zpětný chod), K reálný běh času), L (zrychlení času). Pro zlepšení orientace na noční obloze lze zapnout klávesou C pomocné čáry pro tvar souhvězdí, klávesou V jejich názvy, klávesou B hranice souhvězdí a případně klávesou R jejich kresbu. Pro řešení některých úloh je také možné vypnout atmosféru (klávesou A), takže je možné za dne pozorovat hvězdy. Simulaci smogu při obzoru nebo mlhy je možné po zapnutí klávesy F. Zcela vypnout krajinu lze možné klávesou G. Tím je umožněno sledovat objekty i pod obzorem. Z menu je také možné přepínat mezi azimutální a paralaktickou montáží. Pro přesnější určování polohy objektu lze zapnout pomocné kružnice (světový rovník a ekliptiku) a souřadnicové sítě (obzorníkovou a druhou rovníkovou). Kliknutím na určitý objekt (hvězdy, planetu, deep-sky objekt) se zobrazí základní informace o daném objektu. Zapnout lze také režim databáze pro polohu

Středisko služeb školám, Plzeň, Částkova 78
Podpora talentovaných žáků v Plzeňském kraji
CZ.1.07/1.2.03/02.0001

Tento projekt je v letech 2012-15 financován z rozpočtu Plzeňského kraje

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

deep-sky objektů (hvězdokupy, galaxie, mlhoviny). Te také možné zejména při praktických pozorování přepnout na noční režim.

2.2. Stellarium – jednoduché astronomické úkoly

Počítačový program Stellarium umožňuje poměrně rychle a s dobrou přesností řešit celou řadu jednoduchých i složitějších astronomických úloh. Ukázka některých obecných příkladů:

1. Určit okamžiky východů a západů nebeských těles (Slunce, Měsíce, planet, hvězd apod.) pro dané pozorovací stanoviště. U úlohy je nutné přepnout na ideální horizont (krajina oceán) a správně zadat souřadnice pozorovacího stanoviště. U plošných těles jako je Slunce a Měsíce se okamžiky východu a západu vztahují na horní okraj tělesa.
2. Zjistit, jak se změní okamžiky východu a západu těles při změně zeměpisné délky. U této úlohy je nutné mít zapnutý ideální horizont (krajina oceán) ale postupně správně zadat změnu souřadnic pozorovacích stanovišť (např. pro Plzeň a Ostravu).
3. Určit okamžik kulminace nebeského tělesa pro dané pozorovací stanoviště. U úlohy je nutné přepnout na ideální horizont (krajina oceán) a správně zadat souřadnice pozorovacího stanoviště. Dále je nutné zapnout obzorníkovou síť. Kulminace nastává v nejvyšším bodě dráhy tělesa. U cirkumpolárních hvězd lze určit horní i spodní kulminaci. U plošných těles jako je Slunce a Měsíce se okamžiky kulminace vztahují na střed tělesa.
4. Jak se mění výška hvězdy Polárky nad obzorem v závislosti na změně zeměpisné šířky. U úlohy je nutné přepnout na ideální horizont (krajina oceán) a správně zadat zeměpisnou šířku pozorovacího stanoviště. Dále je nutné mít zapnutou obzorníkovou síť.
5. Pomocí Stellaria určit v kolik hodin bude kulminovat a v jaké výšce nad ideálním horizontem zadané těleso. U úlohy je nutné přepnout na ideální horizont (krajina oceán) a správně zadat souřadnice pozorovacího stanoviště. Dále je nutné zapnout obzorníkovou síť. Kulminace nastává v nejvyšším bodě dráhy tělesa. Během kulminace odečíst čas i výšku tělesa nad obzorem.
6. Pomocí Stellaria určit, II. rovníkové souřadnice zadaného objektu. Tuto úlohu lze řešit buď kliknutím na daný objekt, nebo pomocí zapnuté sítě II. rovníkových souřadnic.
7. Pomocí Stellaria určit, obzorníkové souřadnice zadaného objektu pro daný čas. Tuto úlohu lze řešit buď kliknutím na daný objekt, nebo pomocí zapnuté sítě obzorníkových souřadnic.

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

8. Posouzení vztahů mezi obzorníkovými a II: rovníkovými souřadnicemi. Pro tuto úlohu je nejlépe nasměrovat pohled severním směrem. Poté zapnout obzorníkové souřadnice a pozorovat při zrychleném pohybu putování vybraného objektu (např. jasné hvězdy). Pak zapnout II. rovníkové souřadnice a sledovat jak se pohybují vůči obzorníkovým i vůči hvězdnému pozadí.
9. Prověření viditelnosti jednotlivých planet nad obzorem pro určité období a čas včetně magnitudy.
10. Podle Stellaria zjistit azimuty východů a západů Slunce na určitém pozorovacím stanovišti pro dny rovnodenností a slunovratů během roku. Okamžiky východů a západů vztáhněte k hornímu okraji slunečního disku. Pro tuto úlohu je nutné zapnout síť obzorníkových souřadnic.
11. Podle Stellaria ověřte, jaké změny nastanou u předchozí úlohy č. 10, budeme-li měnit zeměpisnou šířku pozorovacího stanoviště?
12. Podle Stellaria zjistěte, ve který den v letošním roce se Slunce dostane přímo do podzimního bodu. Ukažte podzimní bod ve Stellariu a vysvětlete, co je podzimní bod. Určete jeho souřadnice. Pro tuto úlohu je nutné mít zapnutý světový rovník, ekliptiku a síť II. rovníkových souřadnic.
13. Ve Stellariu zjistěte, jak se liší délka bílého dne pro určité stanoviště (např. v Plzni) ve dnech rovnodenností a slunovratů v aktuálním roce. Určete s přesností alespoň 1 minuty. Okamžiky východů a západů vztáhněte opět k hornímu okraji slunečního disku. Výsledky porovnejte např. s Hvězdářskou ročenkou. Nezapomeňte při tom na přepočtení polohy pro jiné stanoviště.
14. Ve Stellarium ověřte, zda pro pozorovací stanoviště v Plzni platí tvrzení, že v létě máme Slunce přímo nad hlavou? Jaká je výška Slunce nad obzorem pro okamžiky rovnodenností a slunovratů v roce 2015 s přesností alespoň 1°. Okamžik vztáhněte ke středu slunečního disku. Pro tuto úlohu je nutné zapnout síť obzorníkových souřadnic.
15. Pro určitý den v roce zjistěte podle Stellaria rozdíl doby, mezi západem spodní a horní části slunečního disku na dvou stanovištích se zeměpisně odlišnou šířkou (např. v Plzni a v hlavním městě Ekvádoru v Quitu (0° j. z. š.; -78,5° z. z. d.). Quito leží téměř na rovníku (22 km jižně od rovníku). Refrakci zanedbejte. Pro tuto úlohu je zapotřebí vhodný zoom a vypnutí atmosféry.



INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

3 Závěr

V předchozím odstavci bylo nastíněno jen několik úloh, které jdou poměrně lehce řešit pomocí počítačového astronomického programu Stellarium. Jejich výčet není zdaleka úplný. Ze souřadnicové sítě lze odvodit např. úhel, který svírá světový rovník a ekliptika. Pomocí Stellaria lze řešit i složitější úlohy, např. vykreslit sluneční analemu během roku, zjistit náklon prstence Saturnu během delšího časového období, zjistit pohyb Barnardovy hvězdy vůči hvězdnému pozadí, sledovat pohyb severního (případně i jižního) světového pólu způsobený precesními vlivy. Lze simulovat deformaci souhvězdí způsobenou vlastním pohybem hvězd během dlouhého časového období (pouze u novějších verzí Stellaria). Pomocí tohoto programu je také možné nasimulovat různé situace, jako jsou zdánlivé smyčky planet na obloze, konjunkce, zatmění Slunce a Měsíce. Rovněž je možné zadat parametry pro vykreslení dráhy komety nebo planety, což ale patří již mezi složitější úlohy. Stellarium lze skutečně buď přímo řešit, nebo alespoň ověřit celá řada dalších astronomických úloh.

4 Použitá literatura

Dostupné na internetu: <http://www.stellarium.org/cs/>

5 Kontakt na autora

Lumír Honzík
Hvězdárna a planetárium Plzeň
Lumir.honzik@seznam.cz

Středisko služeb školám, Plzeň, Částkova 78
Podpora talentovaných žáků v Plzeňském kraji
CZ.1.07/1.2.03/02.0001

Tento projekt je v letech 2012-15 financován z rozpočtu Plzeňského kraje

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

JAK FOTOGRAFOVAT ATMOSFÉRICKÉ A ASTRONOMICKÉ OBJEKTY

Josef JÍRA

1 Úvod

Na první pohled by se mohlo zdát, že fotografie „počasí“ nepatří mezi astronomická pozorování, na druhý pohled je ale vztah mezi počasím a astronomií naprosto zřejmý. Většina astronomů se výrazným způsobem zajímá především o předpověď počasí, která ovlivňuje výsledky jejich astronomických pozorování.

K největším průkopníkům československé meteorologické fotografie patří bezesporu RNDr. Antonín Bečvář, který je autorem legendárních hvězdných atlasů „Atlas Coeli, Atlas Eclipticalis, Atlas Borealis, Atlas Australis“. Jeho atlasy jsou známé po celém světě. Doktor Bečvář je zároveň autorem mnoha prací z meteorologie, mezi jeho nejceněnější dílo patří fotografický atlas „Atlas horských mraků“ z roku 1953.

2 Základní pravidla

Řada atmosférických úkazů má velmi krátkou dobu trvání a pro jejich zachycení na fotografii nám musí stačit krátký okamžik a nutná dávka štěstí. Pokud možno nosme menší fotoaparát u sebe a buďme tak neustále připraveni, protože štěstí přeje připraveným.

Vhodné je mít fotoaparát, který umožní měnit objektivy o různých ohniskových vzdálenostech a tedy i různých velikostech zorného pole. Pokud budeme fotografovat velké útvary, jako jsou oblaka a některé optické úkazy v atmosféře, snažme se snímek pořídít v otevřené krajině. Řada optických úkazů se také nechá pozorovat z letadla, vrtulníku, výškových budov nebo vrcholků hor.

2.1 Rozdělení

Atmosférické úkazy si můžeme rozdělit do několika skupin, a to podle náročnosti na vybavení a způsob pořízení snímku. První skupinu budou tvořit úkazy pozorovatelné v noci, jako jsou polární záře, svítící oblaka, noční bouřky. Další skupinu budou tvořit optické úkazy v atmosféře a do poslední skupiny můžeme zařadit atmosférické úkazy, jako jsou oblaka, sněhové vločky atd. Popisovat všechny útvary by bylo značně obsáhlé, proto se ve sborníku zaměříme jen na několik vybraných úkazů.

2.1.1 Noční svítící oblaka

Historie pozorování tohoto přírodního úkazu není tak dlouhá. První dochované pozorování se datuje z roku 1885, kdy se také rozběhl program na jejich sledování. Podstata vzniku tohoto druhu oblaků je spojena s drobnými ledovými částicemi, které se vyskytují v extrémních výškách. Výška nad povrchem klasické oblačnosti v našich zeměpisných šířkách je kolem 12 kilometrů. Noční svítící oblaka se ale vyskytují ve výškách kolem 80 až 85 kilometrů, tedy v části, kterou označujeme pojmem mezoféra. Výskyt pozorování

Středisko služeb školám, Plzeň, Částkova 78
Podpora talentovaných žáků v Plzeňském kraji
CZ.1.07/1.2.03/02.0001

Tento projekt je v letech 2012-15 financován z rozpočtu Plzeňského kraje

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

tohoto druhu „oblačnosti“ souvisí s výškou Slunce pod obzorem. Noční svítící oblaka se nejlépe pozorují za soumraku v období letního slunovratu, tedy v období druhé poloviny měsíce května až první poloviny měsíce srpna, kdy se sluneční kotouč pohybuje 6° až 16° pod obzorem. Další podmínkou pro pozorování nočních svítících oblaků je zeměpisná šířka pozorovacího stanoviště, která by se měla pohybovat v rozmezí 50° až 65° severní, případně jižní polokoule. Samotný vzhled nočních svítících oblaků připomíná závoj modrostříbrné barvy, který se táhne podél obzoru ve výškách 15° až 20° .

Fotografování nočních svítících oblaků je velmi jednoduché a k jeho zachycení použijeme stejného postupu jako u polárních září.



2.1.2 Polární záře

Polární záře je jedním z nejhezčích atmosférických úkazů, které můžeme na noční obloze fotografovat. Tento velmi barevný a dynamický děj se odehrává ve výškách 80 až 100 km nad zemí ve vrstvě atmosféry, kterou označujeme jako ionosféru. Charakteristický výskyt polárních září, jak už z názvu vyplývá, je zejména v polárních oblastech, ale za jistých podmínek je můžeme pozorovat i v nižších zeměpisných šířkách.

Samotná podstata vzniku polárních září navazuje na sluneční aktivitu, proto výskyt a četnost polárních září kopíruje jedenáctiletý cyklus sluneční aktivity. Polární záře vznikají jako důsledek srážek částic slunečního větru s atomy a molekulami vzduchu, a to zejména kyslíku a dusíku. Sluneční vítr tvoří protony, elektrony a alfa částice s vysokou energií. Elektromagnetické záření, které vzniká ve viditelném oboru spektra jako důsledek srážek slunečního větru s atomy a molekulami vzduchu má charakteristické zbarvení, pro kyslík červenou barvu s vlnovou délkou 630 nm, pro dusík zelená barva s vlnovou délkou 577 nm.

Výskyt polárních září ve vyšších zeměpisných šířkách souvisí s magnetickým polem Země, které ji obklopuje. Magnetické pole Země si můžeme představit jako magnetický dipól, jehož póly odpovídají zhruba pólům Země. Magnetické siločáry tak vytvářejí v oblastech kolem pólů jakési trychtýře, kterými se částice slunečního větru dostávají po spirále do nižších atmosférických výšek, kde narážejí do atomů a molekul vzduchu. Pokud

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

je ze Slunce erupcí vyvrženo velké množství nabitých částic, se kterými se Země střetne, zvýší se pravděpodobnost, že budeme moci pozorovat polární záři i v nižších zeměpisných šířkách.

K samotnému fotografování polárních září nám postačí základní vybavení, jako je fotoaparát s drátěnou spouští a stativ. Délka expozic by neměla přesáhnout jednu minutu, vhodnější je exponovat fotografie v řádu několika desítek sekund, protože polární záře jsou velmi dynamickým jevem, který během 20 s změní svůj tvar, strukturu i velikost. Citlivost ISO volíme na základě jasů polární záře. Polární záře jsou úkazy velmi rozsáhlé, proto jako objektiv použijeme buď základní objektiv 50 mm, nebo širokoúhlý objektiv.



2.1.3 Blesky

Chceme-li být úspěšní při fotografování blesků, budeme muset experimentovat s dlouhou expozicí. Základním předpokladem úspěchu je výskyt dostatečně velké bouřky s mnoha blesky. To je do určité míry ovlivněno místem pozorovacího stanoviště (místní mikroklima v dané oblasti). Při fotografování blesků potřebujeme fotoaparát s expozičním časem "B", spoušť s dálkovým ovládním a stativ. Při fotografování blesků je vhodné chránit fotoaparát před deštěm a silným větrem, který doprovází bouřku. To, jestli budeme clonit objektiv nebo ne, záleží jednak na kvalitě objektivu, tak i na fotografických podmínkách. Samotnou délku expozice volíme maximálně několik minut, případně můžeme využít techniky startrails, která se používá při fotografování hvězdných stop.

Blesk je atmosférický úkaz, který vzniká jako elektrický výboj během bouřky, doprovázený emisí světla a zvuku. Blesky se dělí podle svého tvaru do několika skupin. Tvar výboje je silně ovlivněn fyzikálními a klimatickými podmínkami, jako je vlhkost, teplota a tlak vzduchu.

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Bouřková oblaka mají možnost akumulace elektrické energie, která se pak uvolňuje formou blesků. Bouřková oblaka, jako jsou například kumulonimby, vznikají silnými vzestupnými proudy, které unášejí vodní páru do vyšších výšek, kde kondenzuje a mění se ve vodní kapky. Kapky se díky tomuto proudění o sebe třou a nabíjejí se. Vlastní výboj (blesk) se šíří cestou nejmenšího odporu. Délka trvání úkazu je v setinách až desetinách sekund a může mít blikavý charakter. To je způsobeno řadou výbojů, které neutralizují náboj. Často je hlavní výboj doprovázen menšími odnožemi, které se vybíjejí do vzduchu nebo do oblak.



3 Závěr

Na obloze, a to nejenom na té noční, se vyskytuje celá řada zajímavých přírodních úkazů, které jsou neopakovatelné a stojí za vaši pozornost. Fotografie jako záznam této události se stává originálem, který se již nebude opakovat.

4 Použitá literatura

CHARLES, R. Jeffrey – PRACTICAL ASTROPHOTOGRAPHY, Springer – Verlag London Limited 2000, Printed in Great Britain, ISBN 1-85233-023-6

REEVES Robert – Wide-Field Astrophotography, Published by Willmann-Bell, Inc. P. O. BOX 35025, Richmond, Virginia 23235, Secon Printing June 2001, ISBN 0-943396-64-6

5 Kontakt na autora

Mgr. Josef Jíra DiS.
Západočeská pobočka České astronomické společnosti
josef.jira@seznam.cz

Středisko služeb školám, Plzeň, Částkova 78
Podpora talentovaných žáků v Plzeňském kraji
CZ.1.07/1.2.03/02.0001

Tento projekt je v letech 2012-15 financován z rozpočtu Plzeňského kraje

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

POKUSY S VÝVĚVOU

Zdeňka KIELBUSOVÁ

1 Úvod

Existuje mnoho experimentů, které se užívají k demonstraci podtlaku a jeho účinků. Mezi nejznámější patří experiment s magdebuskými polokoulemi či var vody za sníženého tlaku. Provedeme nejen tyto tradiční experimenty, ale i některé méně tradiční, které jsou níže popsány.

2 Obsah

Během přednášky s názvem Pokusy s vývěvou byly žákům předvedeny a vysvětleny tradiční i méně tradiční experimenty s vývěvou. Žákům byly předvedeny tyto klasické pokusy: zpola nafouknutý balónek ve vývěvě, var vody za sníženého tlaku, zhasínání svíčky ve vývěvě, balónek ve vývěvě, scvrklé jablíčko ve vývěvě, přečerpávání vody ve vývěvě, zvonek či budík ve vývěvě, rozsvícená žárovka ve vývěvě, Newtonova trubice, Magdeburské polokoule.

V rámci přednášky si žáci některé experimenty vyzkoušely sami s pomocí injekčních stříkaček.

3 Závěr

Studenti byli experimenty nadšeni. Každý si z hodiny odnesl vlastnoručně vyrobenou fyzikální hračku.

4 Použitá literatura

KIELBUSOVÁ, Z., Motivace a aktivizace žáků ve výuce fyziky [rigorózní práce] : experimenty s plyny, Plzeň: 2009.

5 Kontakt na autora

Jméno a příjmení s tituly: PhDr. Zdeňka Kielbusová

Název instituce: Západočeská univerzita v Plzni, Fakulta pedagogická, KMT, oddělení fyziky

E-mail: kielbus@kmt.zcu.cz



INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ
ZAJÍMAVÉ EXPERIMENTY

Zdeňka KIELBUSOVÁ

1 Úvod

Experiment je základním prvkem veškerého poznání. Prováděním experimentů aktivně a relativně samostatně poznáváme studovanou skutečnost prostřednictvím ovlivňování podmínek a následného vyhodnocení průběhu nebo výsledku.

2 Obsah

V rámci přednášky s názvem Zajímavé experimenty byly žákům v první polovině předvedeny a vysvětleny experimenty z mechaniky tuhého tělesa a kinematiky hmotného bodu. Ve druhé části pak byly realizovány experimenty z molekulové fyziky.

Žáci si mnohé experimenty v rámci přednášky vyzkoušely sami. Zkusili s postavit plechovku na hranu, hledali těžiště v různých předmětech či s jak dostat minci do lahve, aniž by se jí dotkli rukou.

3 Závěr

Studenti byli experimenty nadšení. Každý si z hodiny odnesl vlastnoručně vyrobenou fyzikální hračku.

4 Použitá literatura

SVOBODA, Emanuel. *Fyzika: pokusy s jednoduchými pomůckami*. 2. vyd. Praha: Prometheus, 2001. 54 s. ISBN 80-7196-226-0.

SVOBODA, Emanuel, HOUDEK, Václav a SVOBODA, Miroslav. *Pokusy z fyziky na střední škole*. 1. vyd. Praha: Prometheus, 1997. 160 s. ISBN 80-7196-007-1.

5 Kontakt na autora

Jméno a příjmení s tituly: PhDr. Zdeňka Kielbusová

Název instituce: Západočeská univerzita v Plzni, Fakulta pedagogická, KMT, oddělení fyziky

E-mail: kielbus@kmt.zcu.cz

Středisko služeb školám, Plzeň, Částkova 78
Podpora talentovaných žáků v Plzeňském kraji
CZ.1.07/1.2.03/02.0001

Tento projekt je v letech 2012-15 financován z rozpočtu Plzeňského kraje

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

PRAVDĚPODOBNOSTNÍ ROZDĚLENÍ POUŽÍVANÁ VE FYZICE

Václav Kohout

1 Úvod

Studenti byli seznámeni s pojmem pravděpodobnosti v nejjednodušším smyslu. Z tohoto pojmu byl odvozen jednoduchým způsobem pojem náhodná veličina. Na zajímavých příkladech jsme si ověřovali užitečnost obou pojmů.

2 Náhodné veličiny

Analyzovali jsme několik příkladů z běžného života a z takovýchto dat jsme odvodili některé základní náhodné veličiny. Zaměřili jsme se na takové typy, které jsou schopni studenti nejen odvodit, ale i zobecnit.

První náhodná veličina, která byla definována a vyšetřována bylo binomické rozdělení. S tímto rozdělením úzce souvisí rozdělení Poissonovo. Obě rozdělení jsme nejen definovali, ale ukázali jejich užitečnost při zpracování dat.

Dalšími náhodnými veličinami, které jsme vyšetřovali jsou normální rozdělení a rovnoměrné rozdělení. Tato rozdělení mají souvislost se zpracováním dat (pokusy – vyhodnocení chyb – centrální limitní věta – normální rozdělení). Pomocí rozdělení rovnoměrného můžeme vytvářet přesné generátory náhodných čísel, které jsou základním pojmem pro případ simulací náhodných situací např. tzv. Brownův pohyb, výskyt molekul v dané části prostoru atd.

Studenti byli také seznámeni s některými fyzikálními rozděleními – Maxwell – Boltzmannovo, Jde o komplikovanější rozdělení, které je vytvořeno jistou transformací rozdělení normálního.

3 Závěr

V přednášce jsme samozřejmě dávali přednost spíše intuitivním úvahám, protože přesné odvození některých pojmů není z časových důvodů možné. Pro další studium je možné doporučit (ANDĚL, 2015 nebo Budíková et al, 2010).

4 Použitá literatura

ANDĚL, J. Matematika náhody, 3. vydání, Praha, MafyzPress, 2015, 292 s., ISBN 80-85863-52-9, ,

BUDÍKOVÁ, M., KRÁLOVÁ, M., MAROŠ, B. Průvodce základními statistickými metodami, 1. vydání, Praha, Grada, 2010, 272 s., ISBN 978-80-247-3243-5

5 Kontakt na autora

RNDr. Václav Kohout
KMT, FPE, ZČU Plzeň
kohout@kmt.zcu.cz

Středisko služeb školám, Plzeň, Částkova 78
Podpora talentovaných žáků v Plzeňském kraji
CZ.1.07/1.2.03/02.0001

Tento projekt je v letech 2012-15 financován z rozpočtu Plzeňského kraje

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

ŘEŠENÍ ÚLOH – SKLÁDÁNÍ A ROZKLÁDÁNÍ SIL

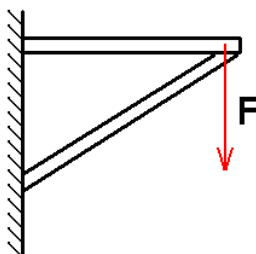
Pavel KRATOCHVÍL

1 Úvod

Přednáška se zabývala řešením příkladů na skládání a rozkládání sil.

2.1 Příklad č.1

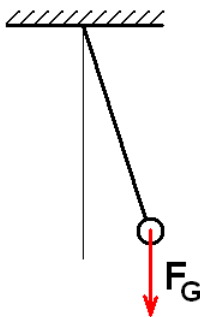
Určete graficky velikosti sil působících na jednotlivé části nosníku. Na obr. 1 je zakreslena tíhová síla způsobená zavěšeným břemenem.



Obr.1

2.2 Příklad č.2

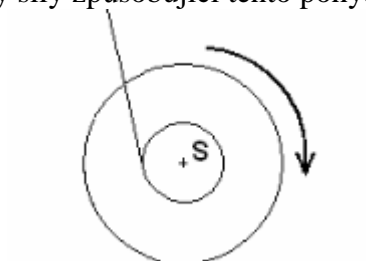
Kyvadlo je tvořeno závažím o hmotnosti 50g zavěšeném na niti o délce 30cm (obr. 2). Určete velikost tečného zrychlení kyvadla při výchylce 15° od svislé polohy.



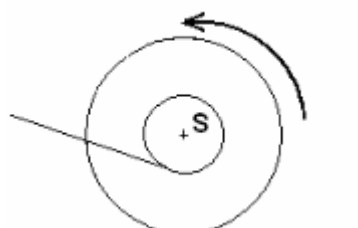
Obr. 2

2.3 Příklad č.3

V závislosti na úhlu provázku se cívka pohybuje vpřed či vzad. Zakreslete do obrázků 3 a 4 všechny síly způsobující tento pohyb.



Obr. 3



Obr. 4

2.4 Příklad č.4 dle [1]

Bednu je možné posouvat rovnoměrným pohybem nahoru po nakloněné rovině silou o velikosti F_1 , dolů po nakloněné rovině silou o velikosti F_2 . Určete koeficient smykového tření f mezi bednou a nakloněnou rovinou, platí-li $F_1 = 6F_2$ a obě síly jsou rovnoběžné s nakloněnou rovinou, která svírá s vodorovnou rovinou úhel $\alpha = 15^\circ$.

3 Použitá literatura

[1] Bedna na nakloněné rovině. In: *Sbírka řešených úloh z fyziky* [online]. 2015 [cit. 2015-09-16]. Dostupné z: <http://reseneulohy.cz/97/bedna-na-naklonene-rovine>

4 Kontakt na autora

PhDr. Pavel Kratochvíl, Ph.D.

Západočeská univerzita v Plzni, Katedra matematiky, fyziky a technické výchovy

E-mail: kratinek@kof.zcu.cz

ŘEŠENÍ ÚLOH Z KINEMATIKY

Pavel KRATOCHVÍL

1 Úvod

Přednáška se zabývala řešením úloh z kinematiky.

2.1 Příklad č.1 dle [1]

Od vjezdu lokomotivy do tunelu do výjezdu posledního vozu z tunelu uplynulo 65 s. Následně vlak minul telegrafní sloup za 15s. Jakou rychlostí projel vlak tunelem a jak je vlak dlouhý, pokud tunel měří 500 m?

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

2.2 Příklad č.2 dle [1]

Loďka plující po proudu řeky předešla kus dřeva v bodě A. Po dalších 60 minutách plavby se loďka obrátila a plula zpět a potkala kus dřeva v bodě vzdáleném 6 km od bodu A. Najděte rychlost proudu řeky, víte-li, že rychlost loďky vzhledem k řece je stále stejná.

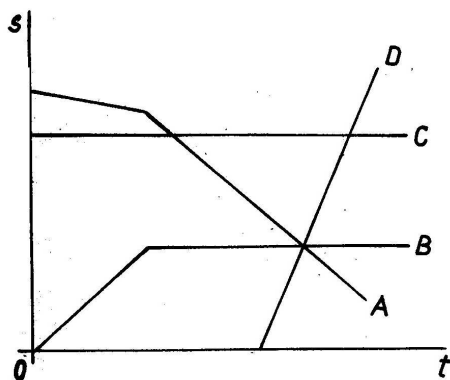
2.3 Příklad č.3 dle [1]

Dva plavci plavou z bodu A na břehu řeky do bodu B, který je naproti bodu A na druhém břehu. Jeden plave po úsečce AB, druhý plave stále kolmo k proudu řeky a vzdálenost, o kterou ho snese proud, dojde po břehu pěšky rychlostí u . Při jaké rychlosti u se oba plavci dostanou do bodu B současně, je-li rychlost proudu řeky $2 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$ a rychlost obou plavců vzhledem k vodě je $2,5 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$?

2.4 Příklad č.4 dle [1]

Obrázek 1 zachycuje grafy **závislosti dráhy na čase** čtyř hmotných bodů A, B, C, D.

- Jaký je charakter jednotlivých pohybů?
- Který hmotný bod se pohybuje nejvyšší rychlostí?
- Jaký význam mají průsečíky grafů se souřadnými osami?
- Jaký význam mají průsečíky grafů navzájem?
- Jaký význam mají zlomy v jednotlivých grafech?



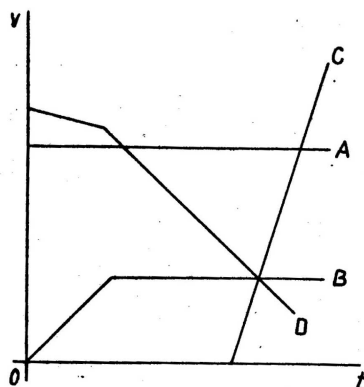
Obr. 1

2.5 Příklad č.5 dle [1]

Obrázek 2 zachycuje grafy **závislosti rychlosti na čase** čtyř hmotných bodů A, B, C, D.

- Jaký je charakter jednotlivých pohybů?
- Jaký význam mají průsečíky grafů se souřadnými osami?
- Jaký význam mají průsečíky grafů navzájem?
- Jaký význam mají zlomy v jednotlivých grafech?
- Který hmotný bod se pohybuje s největším zrychlením?

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

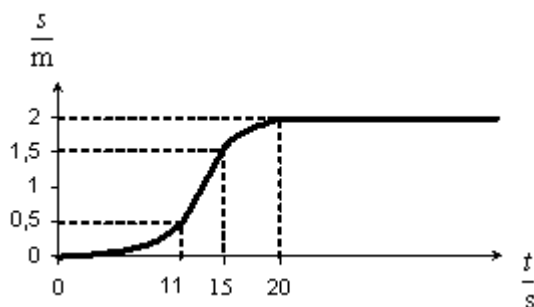


Obr. 2

2.6 Příklad č.6 dle [1]

Těleso se pohybuje přímočaře. Na grafu (obr. 3) je znázorněna závislost dráhy na čase. Z grafu určete:

- průměrnou rychlost tělesa během pohybu
- maximální rychlost na této dráze;
- časový okamžik t_0 , v němž je průměrná rychlost za čas t_0 rovna okamžité rychlosti.



Obr. 3

3 Použitá literatura

[1]Příklady z kinematiky hmotného bodu.doc. In: [online]. [cit. 2015-09-16]. Dostupné z: <http://kof.zcu.cz/st/sm/>

4 Kontakt na autora

PhDr. Pavel Kratochvíl, Ph.D.

Západočeská univerzita v Plzni, Katedra matematiky, fyziky a technické výchovy

E-mail: kratinek@kof.zcu.cz

ÚLOHY Z TERMIKY – KALORIMETRICKÁ ROVNICE

Pavel KRATOCHVÍL

1 Úvod

Přednáška se zabývala měření úlohy na téma: Kalorimetrická rovnice.

2.1 Úloha

Určete materiál předloženého závažíčka. Zhodnoťte přesnost naměřených a vypočtených hodnot. Určete hlavní zdroje chyb. Navrhněte opatření pro zpřesnění měření.

Pomůcky: závaží z neznámého materiálu, kalorimetr, váha, teploměr, vaříč, kádinka, voda, fyzikální tabulky.

4 Kontakt na autora

PhDr. Pavel Kratochvíl, Ph.D.

Západočeská univerzita v Plzni, Katedra matematiky, fyziky a technické výchovy

E-mail: kratinek@kof.zcu.cz

ŘEŠENÍ ÚLOH Z TERMODYNAMIKY

Pavel KRATOCHVÍL

1 Úvod

Přednáška se zabývala řešením úloh na téma: Tepelná výměna a stavová rovnice ideálního plynu.

2.1 Příklad č.1 dle [1]

Voda nedodává lidskému tělu žádnou využitelnou energii, ale při ohřívání ledu na teplotu lidského těla člověk naopak energii spotřebuje (musí dodat). Kolik kostek ledu o hmotnosti 50 g a teplotě $-20\text{ }^{\circ}\text{C}$ by člověk musel spolykat, aby se zbavil pěti kilogramů tuku? Při spálení jednoho gramu tuku při metabolismu v lidském těle se uvolní teplo 38 kJ.

2.2 Příklad č.2 dle [2]

V kalorimetru bylo 150 g vody o teplotě $6\text{ }^{\circ}\text{C}$, do které bylo přidáno 120 g ledu. Po vyrovnání teplot byl z kalorimetru vybrán a zvážen veškerý led. Voda byla v kalorimetru ponechána. Bylo zjištěno, že se hmotnost ledu zvětšila o 12 g. Jaká byla počáteční teplota ledu?

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

2.3 Příklad č.3 dle [3]

a) Jaké teplo projde za jeden zimní den bočními stěnami dřevěného srubu? Délka srubu je 10 m, šířka 7 m a výška stěn 3,5 m a jejich tloušťka 50 cm. Průměrná venkovní teplota je -10 °C a teplotu uvnitř udržujeme na hodnotě 18 °C.

b) Kolik dřeva je třeba na udržení dané vnitřní teploty spálit v kamnech s tepelnou účinností 30 % za jeden den?

c) Kolik by stálo elektrické vytápění tohoto srubu za jeden den? Účinnost elektrického vytápění je prakticky 100 % a průměrná cena elektrické energie je např. 4,30 Kč/kWh.

d) Jaký musí být průtok vody radiátorem, jestliže voda na vstupu do radiátoru má teplotu 80 °C a radiátor opouští s teplotou 70 °C?

Předpokládejme, že střecha je tak dobře tepelně izolovaná, že ztráty tepla střechou můžeme zanedbat

2.4 Příklad č.4 dle [4]

V horském potůčku proudí voda o teplotě 8 °C s průtokem 450 l za minutu. Turisté z nedaleké chaty bez zavedené elektrické energie si v něm ochlazují pivo, které na slunci dosáhlo teploty 22 °C. Jak dlouho bude turista chladit pivo na svých oblíbených 12 °C? Kolik litrů vody za tu dobu proteče potůčkem? Předpokládejte, že do potůčku je ponořena pouze válcová část pivní lahve. Měrnou tepelnou kapacitu piva uvažujte rovnou měrné tepelné kapacitě vody.

2.5 Příklad č.5 dle [5]

Vzduchová bublina o poloměru 5,0 mm stoupá ode dna jezera hlubokého 20,7 m. Teplota u dna jezera je 7 °C a u hladiny 27 °C. Atmosférický tlak je 100 kPa. Jak velká bude bublina, až dospěje ke hladině?

2.6 Příklad č.6 dle [6]

Nádoba A obsahuje ideální plyn o teplotě 300 K a tlaku $5,0 \cdot 10^5$ Pa a je úzkou trubicí propojena s nádobou B. Nádoba B má čtyřikrát větší vnitřní objem, obsahuje stejný plyn ohřátý na teplotu 400 K a o tlaku $1,0 \cdot 10^5$ Pa. Jaký bude výsledný tlak celého systému, jestliže otevřeme kohoutek na spojovací trubici a zároveň budeme obě nádoby udržovat na původních teplotách?

2.7 Příklad č.7 dle [7]

Za velmi nízkých teplot se molární tepelná kapacita chloridu sodného mění s teplotou podle tzv. Debyeova zákona

$$C = kT^3 / \Theta^3,$$

kde hodnota konstanty $k = 1948,8 \text{ J mol}^{-1} \text{ K}^{-1}$ a Debeyova teplota pro chlorid sodný je $\Theta = 281 \text{ K}$.

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Spočtete:

- tepelnou kapacitu C_1 při teplotě 10 K a tepelnou kapacitu C_2 při teplotě 50 K,
- jaké teplo Q je zapotřebí k ohřátí 2 molů NaCl z teploty 10 K na teplotu 50 K,
- průměrnou molární tepelnou kapacitu C_{pr} v teplotním intervalu 10 K až 50 K.

3 Použitá literatura

- [1] Ledová dieta. In: *Sbírka řešených úloh z fyziky* [online]. 2015 [cit. 2015-09-16]. Dostupné z: <http://reseneulohy.cz/352/ledova-dieta>
- [2] Led v kalorimetru. In: *Sbírka řešených úloh z fyziky* [online]. 2012 [cit. 2015-09-16]. Dostupné z: <http://reseneulohy.cz/353/led-v-kalorimetru>
- [3] Vytápění dřevěného srubu. In: *Sbírka řešených úloh z fyziky* [online]. 2015 [cit. 2015-09-16]. Dostupné z: <http://reseneulohy.cz/326/vytapeni-dreveneho-srubu>
- [4] Chlazení piva. In: *Sbírka řešených úloh z fyziky* [online]. 2012 [cit. 2015-09-16]. Dostupné z: <http://reseneulohy.cz/172/chlazení-piva>
- [5] Bublina v jezeře. In: *Sbírka řešených úloh z fyziky* [online]. 2015 [cit. 2015-09-16]. Dostupné z: <http://reseneulohy.cz/331/bublina-v-jezere>
- [6] Dvě propojené nádoby. In: *Sbírka řešených úloh z fyziky* [online]. 2015 [cit. 2015-09-16]. Dostupné z: <http://reseneulohy.cz/332/dve-propojene-nadoby>
- [7] Debyeův zákon pro kuchyňskou sůl. In: *Sbírka řešených úloh z fyziky* [online]. 2012 [cit. 2015-09-16]. Dostupné z: <http://reseneulohy.cz/347/debyeuv-zakon-pro-kuchynskou-sul>

4 Kontakt na autora

PhDr. Pavel Kratochvíl, Ph.D.

Západočeská univerzita v Plzni, Katedra matematiky, fyziky a technické výchovy

E-mail: kratinek@kof.zcu.cz

ŘEŠENÍ OBTÍŽNĚJŠÍCH ÚLOH – OHMŮV ZÁKON

Pavel KRATOCHVÍL

1 Úvod

Přednáška se zabývá řešením úloh na téma: Ohmův zákon.

2.1 Příklad č.1 dle [1]

Dává-li baterie proud 3 A, je její svorkové napětí 24 V. Při proudu 4 A klesne svorkové napětí na 20 V.

Středisko služeb školám, Plzeň, Částkova 78
Podpora talentovaných žáků v Plzeňském kraji
CZ.1.07/1.2.03/02.0001

Tento projekt je v letech 2012-15 financován z rozpočtu Plzeňského kraje

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

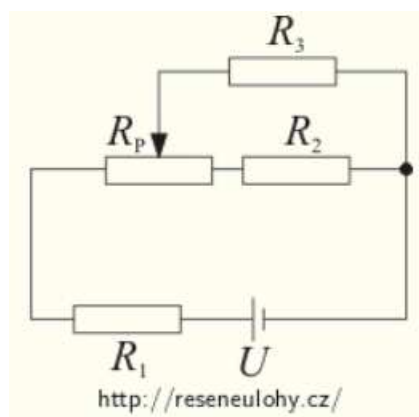
Jaký je zatěžovací odpor pro oba dva případy? Jaký je vnitřní odpor baterie a její elektromotorické napětí?

2.2 Příklad č.2 dle [2]

Přestože se o potenciometru uvažuje zejména v souvislosti s regulací napětí na spotřebiči, vidíme, že jím zároveň měníme i proud procházející tímto spotřebičem.

V jakém intervalu můžeme regulovat proud tekoucí rezistorem R_3 v zapojení podle obrázku? Jaké je napětí na rezistoru R_3 v krajních bodech tohoto intervalu? Jezdec potenciometru můžeme nastavit do libovolné polohy.

$$U = 30 \text{ V}, R_1 = 100 \text{ } \Omega, R_2 = 20 \text{ } \Omega, R_3 = 1200 \text{ } \Omega, R_p = 105 \text{ } \Omega.$$



3 Použitá literatura

[1] Parametry baterie. In: *Sbírka řešených úloh z fyziky* [online]. 2010 [cit. 2015-09-16]. Dostupné z: <http://reseneulohy.cz/305/parametry-baterie>

[2] Změna proudu potenciometrem. In: *Sbírka řešených úloh z fyziky* [online]. 2015 [cit. 2015-09-16]. Dostupné z: <http://reseneulohy.cz/184/zmena-proudu-potenciometrem>

4 Kontakt na autora

PhDr. Pavel Kratochvíl, Ph.D.

Západočeská univerzita v Plzni, Katedra matematiky, fyziky a technické výchovy

E-mail: kratinek@kof.zcu.cz



INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ
ZAJÍMAVÉ EXPERIMENTY

Pavel KRATOCHVÍL

1 Úvod

Přednáška se zabývala zajímavými a nevšedními experimenty.

2.2 Experimenty s kapalným dusíkem

Leiden-Frostův jev, zmrazení hopíku, rozlomení gumy, zmrazení salátu, rajčete a jiných potravin, vystřelení špuntu, pohyb křídý na plynném polštáři, roztočení ping-pongového míčku, protékání vody a dusíku hadrem, žárovka bez baňky, kapalnění kyslíku, desublimace SF₆, levitace supravodiče I. a II. typu, model supravodivého vlaku Maglev.

4 Kontakt na autora

PhDr. Pavel Kratochvíl, Ph.D.

Západočeská univerzita v Plzni, Katedra matematiky, fyziky a technické výchovy

E-mail: kratinek@kof.zcu.cz

ZÁKLADY ZPRACOVÁNÍ FYZIKÁLNÍHO MĚŘENÍ

Robert KUNESCH

1 Úvod

Vzhledem k výzkumem prověřené averzi studentů ohledně fyzikálních měření, je hlavním úkolem úvodu přednášky motivace studentů k danému tématu. Studentům je proto podrobně vysvětlováno, proč je nutné naučit se protokolovat naměřené výsledky fyzikálních (i jiných) měření, kontinuita s možností budoucího profesního zaměření, respektive vědeckými pracemi v jejich dalším studiu či kariéře.

2 Zpracování fyzikálního měření

Účastníci kempu jsou dotazováni na dosud nabyté vědomosti se zpracováním obecného měření v dosavadní výuce fyziky či v jiných předmětech. Jsou jim ukázány různé druhy zpracování výsledků měření, jsou upozorněni na mnohá úskalí, která na ně mohou čekat při vytváření protokolu nebo i při samotném předchozím měření. Důraz kladen na vysvětlení významu určování chyb měření.

Středisko služeb školám, Plzeň, Částkova 78
Podpora talentovaných žáků v Plzeňském kraji
CZ.1.07/1.2.03/02.0001

Tento projekt je v letech 2012-15 financován z rozpočtu Plzeňského kraje



INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

2.1 Náležitosti elaborátu

Na konkrétních příkladech jsou ukázané nejdůležitější formální náležitosti, které musí řádný protokol obsahovat, jako je úkol, úvod, čísla přístrojů, teoretická část, použité vztahy, atd. Je vysvětlen zásadní význam závěru a chyb měření u každého protokolu, ukázky dalších praktických možností.

2.2 Tabulky a grafy

Studenti jsou konfrontováni se svými znalostmi a zkušenostmi z dosavadního studia při práci s programy Word a Excel. Jsou jim ukázány různé metody zpracování a následná tabelování výsledků s důrazem na přehlednost. Jsou jim ukázány nejvýhodnější a nejhodnější metody zpracování pomocí grafů. Vše s ohledem na speciální potřeby fyziky. Je jim zdůrazněna funkce grafu pro výsledek samotného měření na bázi významu funkce grafu ve fyzice obecně a motivace k jejich co možná nejpřesnějšímu provedení. Jsou zasvěceni do dalších důležitých údajů, které mohou grafy poskytovat, jako je spojnice trendu, rovnice křivky v grafu, hodnota spolehlivosti, apod.

2.3 Chyby měření a závěr

Účastníkům kurzu jsou v poslední kapitole přednášky zdůrazněny nejdůležitější části protokolu. Chyby měření a závěr, který spojujeme zároveň s hodnocením. Důraz je v této části kladen na význam vlastního názoru a především vlastního přínosu v kontextu celého zpracování.

3 Závěr

Na závěr je vše se studenty zopakováno v uceleném bloku pomocí ukázky přímého zpracování protokolu fyzikálního měření.

4 Použitá literatura

HAVEL, Václav; PETŘÍK, Josef; RAUNER, Karel. Fyzikální praktikum I: Určeno stud. 1. a 2. roč. učitelství VVP [všeobecně vzdělávací předměty]. Plzeň: Západočeská univerzita, 1992. ISBN 80-7043-047-8.

BROŽ, Jaromír; a kolektiv. Základy fyzikálních měření I. 1. vyd. Praha: SPN, 1967. 524 s. ISBN 16-924-67.

5 Kontakt na autora

Robert Kunesch, Mgr.
OF KMT FPE ZČU
kotal@kmt.zcu.cz

Středisko služeb školám, Plzeň, Částkova 78
Podpora talentovaných žáků v Plzeňském kraji
CZ.1.07/1.2.03/02.0001

Tento projekt je v letech 2012-15 financován z rozpočtu Plzeňského kraje



INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

MEZINÁRODNÍ OLYMPIÁDA V ASTRONOMII A ASTROFYZICE

Pavel KŮS

1 Úvod

Mezinárodní olympiáda v astronomii a astrofyzice (IOAA) je jednou z celosvětově pořádaných vrcholových přírodovědných soutěží, která je určena pro studenty středních škol se zájmem o astronomii a fyziku. Jejím cílem je napomáhat rozvíjet znalosti talentovaných studentů v oboru astronomie a astrofyziky (a příbuzných disciplín) a zjevně usilovat o vytvoření určitého mezinárodního „standardu“. Soutěž se každoročně koná v jednom ze států zapojených do této soutěže.

Cílem prezentace bylo seznámit účastníky kempu s průběhem soutěže na 9. ročníku IOAA, která se letos konala od 26.7. do 4.8. v Indonésii ve Střední Jávě ve městě Magelang. Vedle toho bylo cílem motivovat mladší účastníky k zapojení do soutěže jako je astronomická olympiáda a rozvíjet své znalosti z tohoto či příbuzného oboru.

2 O průběhu soutěže

Letošního 9. ročníku IOAA se zúčastnilo k 40 státům světa a celkem soutěžilo 206 účastníků. Pětičlenná reprezentace českého týmu byla vybrána na základě výsledků celostátního kola AO.

Soutěž byla rozdělena do čtyř částí: teoretické kolo, datová analýza, pozorovací kolo a týmová soutěž. Každá část měla své specifické zadání a cílem problémů bylo otestovat jednak teoretické znalosti soutěžícího, tak i schopnost umět zpracovat naměřená data či manipulovat s dalekohledem a otočnou mapkou souhvězdí.

3 Závěr

Účastníci byly detailně seznámeni s průběhem soutěže a hlavně motivováni pro svůj další rozvoj. Byla jim doporučena literatura, kterou by si měli pro úspěšný start v této soutěži prostudovat.

5 Kontakt na autora

Pavel Kůs

Gymnázium J. Š. Baara, Domažlice

E-mail: kuspavel96@gmail.com

Středisko služeb školám, Plzeň, Částkova 78
Podpora talentovaných žáků v Plzeňském kraji
CZ.1.07/1.2.03/02.0001

Tento projekt je v letech 2012-15 financován z rozpočtu Plzeňského kraje

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

COULOMBŮV ZÁKON

Pavel MASOPUST

1 Úvod

Přednáška seznámila studenty s použitím Coulombova zákona. Základní vzorec rozšířila tak, aby byl platný vektorově a byly počítány úlohy s Coulombovým zákonem související. Byl propočten Bohrův model atomu vodíku, spočteno jakou silou by se přitahovaly náboje získané z různých těles a popsána souvislost Coulombova a Newtonova gravitačního zákona. Řešeny byly příklady především z [1] (sekce II a III) a [2] (část II, kapitoly 22, 23, 24). Příklady (většinou řešené) lze najít v těchto publikacích.

2 Použitá literatura

[1] LIAO S., DOURMASHKIN P., BELCHER J., *Fyzika 8.02: Elektřina a magnetismus*, [Online], [cit. 1. 9. 2015],

Dostupné na internetu: < <http://www.aldebaran.cz/elmg/kurz.html>>

[2] HALLIDAY, D., RESNICK, R., WALKER, J., *FYZIKA*. Prometheus, 2000, ISBN 81-7196-213-9

3 Kontakt na autora

PhDr. Pavel Masopust, PhD.

ZČU, FPE, katedra matematiky, fyziky a technické výchovy

Klatovská 51, Plzeň

pmasop@kmt.zcu.cz

KIRCHHOFFOVY ZÁKONY

Pavel MASOPUST

1 Úvod

Přednáška ukázala, jak pomocí Kirchhoffových zákonů řešit základní úlohy teorie obvodů. Zmíněna byla i aplikace pro výpočet střídavých obvodů a přechodových jevů v obvodech s kondenzátory.

O zákonech lze nalézt mnoho informací jak v odborné literatuře, tak na internetu. V použité literatuře je seznam počítaných příkladů i teorie v množství dostatečném k dokonalému pochopení přednesené problematiky. Především [1] obsahuje množství multimediálních materiálů a komentovaných příkladů.

Středisko služeb školám, Plzeň, Částkova 78
Podpora talentovaných žáků v Plzeňském kraji
CZ.1.07/1.2.03/02.0001

Tento projekt je v letech 2012-15 financován z rozpočtu Plzeňského kraje

2 Použitá literatura

- [1] REICHL J., *Kirchhoffovy zákony*, [Online], [cit. 1. 9. 2015],
Dostupné na internetu: <<http://fyzika.jreichl.com/index.php?page=257&sekce=browse>>
- [2] SVOBODA J., *Kirchhoff's Laws*, [Online], [cit. 1. 9. 2015],
Dostupné na internetu:
<http://people.clarkson.edu/~jsvoboda/Syllabi/ES250/ckts/KCL_KVL.pdf>
- [3] Wikipedie, *Kirchhoffovy zákony*, [Online], [cit. 2. 9. 2015],
Dostupné na internetu: <http://cs.wikipedia.org/wiki/Kirchhoffovy_z%C3%A1kony>

3 Kontakt na autora

PhDr. Pavel Masopust, PhD.
ZČU, FPE , katedra matematiky, fyziky a technické výchovy
Klatovská 51, Plzeň
pmasop@kmt.zcu.cz

ŘEŠENÍ OBTÍŽNĚJŠÍCH ÚLOH Z ELEKTŘINY A MAGNETISMU

Pavel MASOPUST

1 Úvod

Přednáška demonstrovala použití obtížnějších metod k řešení příkladů z oblasti elektřiny a magnetismu. Seznámila studenty (nebo rozšířila znalost) použitím Coulombova zákona, Gaussovy věty elektrostatiky, Ampérova zákona. Zmíněno bylo i základní použití diferenciálního počtu a jeho souvislost s příklady z elektřiny a magnetismu. Řešeny byly příklady především z [1] (sekce II, III, IV, V, VI, VII, IX) a [2] (část II, kapitoly 22, 23, 24, 26, 28, 29 30). Příklady (většinou řešené) lze najít v těchto publikacích.

2 Použitá literatura

- [1] LIAO S., DOURMASHKIN P., BELCHER J., *Fyzika 8.02: Elektřina a magnetismus*, [Online], [cit. 1. 9. 2015],
Dostupné na internetu: <<http://www.aldebaran.cz/elmg/kurz.html>>
- [2] HALLIDAY, D., RESNICK, R., WALKER, J., *FYZIKA*. Prometheus, 2000, ISBN 81-7196-213-9

3 Kontakt na autora

PhDr. Pavel Masopust, PhD.
ZČU, FPE , katedra matematiky, fyziky a technické výchovy
Klatovská 51, Plzeň
pmasop@kmt.zcu.cz

Středisko služeb školám, Plzeň, Částkova 78
Podpora talentovaných žáků v Plzeňském kraji
CZ.1.07/1.2.03/02.0001

Tento projekt je v letech 2012-15 financován z rozpočtu Plzeňského kraje

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

ŘEŠENÍ VYBRANÝCH ÚLOH ŠKOLNÍCH KOL FO

Petr Mazanec

1 Úvod

V přednášce bylo ukázáno řešení úloh z minulých ročníků fyzikální olympiády.

2 Stat'

Příklad 1 (51.ročník FO kategorie A – školní kolo)

Automobil (za jízdy po přímé trati)

Automobil má motor o maximálním výkonu $P_m = 95$ kW a jeho hmotnost s jednou osobou je $m = 1000$ kg. K uvedení do pohybu odbrzděného automobilu se zařazeným neutrálem na vodorovné silnici musel přivolaný pomocník vyvinout ve vodorovném směru sílu o velikosti $F_0 = 120$ N. Předpokládejte, že velikost odporové síly je popsána funkcí

$$F_t = Av^2 + F_0,$$

kde A je konstanta a v je velikost okamžité rychlosti.

- Řidič provedl experiment: vyjel na vrchol kopce, z něhož se přímočarý vozovka svažuje pod stálým úhlem $\alpha = 4,0^\circ$. Automobil po rozjezdu z kopce a po zařazení neutrálu dosáhl stálé rychlosti $v_1 = 72$ km/h. Určete konstantu A .
- Jaký musí být výkon P_1 motoru, aby se automobil pohyboval stálou rychlostí $v_1 = 72$ km/h po vodorovné vozovce?
- Při jízdě stálou rychlostí musí motor pracovat se stálým výkonem. Sestrojte graf závislosti výkonu P motoru na rychlosti v a určete maximální rychlost v_m při výkonu P_m .

Řešení:

- Auto jelo rovnoměrně přímočaře stálou rychlostí z kopce dolů, protože složka tíhové síly $F = mgsin \alpha$ je v rovnováze s odporovou silou F_t .

$$F = F_t$$

$$mgsin \alpha = Av_1^2 + F_0$$

$$A = \frac{mgsin \alpha - F_0}{v_1^2} = 1,41 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-1}$$

Středisko služeb školám, Plzeň, Částkova 78
Podpora talentovaných žáků v Plzeňském kraji
CZ.1.07/1.2.03/02.0001

Tento projekt je v letech 2012-15 financován z rozpočtu Plzeňského kraje

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

b) Okamžitý výkon $P_1 = F_t v_1 = (Av_1^2 + F_0) \cdot v_1 = v_1 mgs \sin \alpha = 14 \text{ kW}$

c) Výkon motoru $P = F_t v = (Av^2 + F_0) \cdot v = Av^3 + F_0 v$

je kubickou funkcí rychlosti v .

Pomocí grafu funkce a její tabulky můžeme numericky zjistit, že

$$P = P_m = 95 \text{ kW}$$

při maximální rychlosti $v = v_m = 40 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} = 144 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$.

Příklad 2 (51.ročník FO kategorie B – školní kolo)

2. Pohyby v planetární soustavě

O planetě Mars zjistili astronomové na základě měření z povrchu Země, že siderická doba oběhu Marsu je $T_M = 1,881$ roku. V úloze vystačíme při řešení problémů s modelem, v němž se obě planety pohybují po kružnicích, jejichž střed splývá se středem Slunce.

a) Určete poloměr kružnice, po níž se pohybuje střed Marsu, a rychlost pohybu středů obou planet při jejich pohybu kolem středu Slunce.

b) Z údajů o pohybu Marsu kolem Slunce určete hmotnost Slunce.

c) Jestliže se středy Slunce, Země a Marsu dostanou přibližně do téže polo-přímky, pak právě o půlnoci začneme naše pozorování. Za jak dlouho se tato situace bude opakovat? Tato doba se nazývá synodická oběžná doba.

Řešení:

a) Podle 3. Keplerova zákona platí

$$\left(\frac{r_m}{r_z}\right)^3 = \left(\frac{T_m}{T_z}\right)^2$$

$$r_m = r_z \cdot \left(\frac{T_m}{T_z}\right)^{\frac{2}{3}} = 1.524 \text{ AU}$$

$$v_m = \frac{2\pi r_m}{T_m} = 24,1 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1}$$

$$v_z = \frac{2\pi r_z}{T_z} = 29,8 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1}$$

Středisko služeb školám, Plzeň, Částkova 78
Podpora talentovaných žáků v Plzeňském kraji

CZ.1.07/1.2.03/02.0001

Tento projekt je v letech 2012-15 financován z rozpočtu Plzeňského kraje

- b) Gravitační síla, kterou působí Slunce o hmotnosti M na Mars o hmotnosti m je silou dostředivou, která způsobuje pohyb Marsu po kružnici o poloměru $r = r_m$ **stálou rychlostí $v = v_m$** .

$$F_g = F_d$$

$$\frac{\kappa m M}{r^2} = \frac{mv^2}{r}$$

$$M = \frac{v^2 r}{\kappa} = 1,99 \cdot 10^{30} \text{ kg}$$

- c) Synodická úhlová rychlost je rovna rozdílu úhlových rychlostí Země a Marsu při oběhu kolem Slunce. Synodická oběžná doba odpovídá této úhlové rychlosti a je to perioda dvou po sobě jdoucích opozic nebo konjunkcí Marsu a Země se Sluncem, kterou naměří pozorovatel na Zemi.

$$\omega_s = \omega_z - \omega_m$$

$$T_s = \frac{T_z \cdot T_m}{T_m - T_z} = 2,135 \text{ roku}$$

Příklad 3 (51.ročník FO kategorie C – školní kolo)

1. Macocha

Z okraje vyhlídkové plošiny Macochy vrhl chlapec svisle dolů kámen s počáteční rychlostí o velikosti $5,0 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$. Za dobu $5,20 \text{ s}$ od začátku vrhu byl slyšet dopad kamene na vodní hladinu. K vrhu došlo při teplotě vzduchu $20 \text{ }^\circ\text{C}$, při níž se zvuk ve vzduchu šíří rychlostí $343 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$. Určete

- výšku horního okraje propasti nad vodní hladinou a dobu od začátku vrhu, za kterou dopadl kámen na vodní hladinu,
- velikost rychlosti, s jakou dopadl kámen do vody.

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Odpor vzduchu zanedbejte.

Řešení:

Kámen při pádu s počáteční rychlostí v_0 padal do propasti po dobu t_1 na dráze $s = h$ a při dopadu do vody měl rychlost v . Pro jeho dráhu a rychlost platí:

$$v = v_0 + gt_1$$

$$s = h = v_0 t_1 + \frac{gt_1^2}{2}$$

Po nárazu kamene na hladinu vody se šíří vzduch k chlapci rychlostí v_1 rovnoměrně přímočaře po stejné dráze

$$s = h = v_1 \cdot t_2$$

kde t_2 je doba pohybu zvukové vlny k chlapci.

Ze zadání plyne, že $t_1 + t_2 = t = 5,20s$.

Matematickým řešením výše uvedených rovnic (3 lineární a 1 kvadratická) vypočteme všechny neznámé veličiny:

$$t_1 = 4,80s \quad t_2 = 0,40s \quad h = 140m \quad v = 52m \cdot s^{-1} = 187km \cdot h^{-1}$$

3 Závěr

Bylo provedeno řešení tří fyzikálních úloh, zadaných v 51. ročníku této soutěže v kategoriích A, B a C ve školním kole.

4 Použitá literatura

Zadání školního kola FO v 51.ročníku této soutěže, www-stránky ÚV FO

5 Kontakt na autora

Mgr. Petr Mazanec

Gymnázium, Plzeň, Mikulášské nám. 23

pmazanec@mikulasske.cz

Středisko služeb školám, Plzeň, Částkova 78
Podpora talentovaných žáků v Plzeňském kraji
CZ.1.07/1.2.03/02.0001

Tento projekt je v letech 2012-15 financován z rozpočtu Plzeňského kraje

VYUŽITÍ MATEMATIKY VE FYZICE 1

Petr Mazanec

1 Úvod

V přednášce byly ukázány 2 příklady fyzikálních dějů s exponenciální závislostí.

2 Stat'

Příklad 1 (teplotní délková roztažnost tyče)

Odvoďte závislost délky l tyče na její teplotě t , jestliže při teplotě t_0 má tyč délku l_0 .

Řešení:

Změna délky tyče Δl je přímo úměrná změně teploty Δt a původní délce tyče l .

$$\Delta l = \alpha l \Delta t$$

Koeficient přímé úměrnosti α je součinitel teplotní délkové roztažnosti materiálu tyče. Tento vztah platí pro malé změny obou veličin ($\Delta l \rightarrow 0$ $\alpha \Delta t \rightarrow 0$). V tomto případě můžeme změny nahradit diferenciály a dostaneme diferenciální rovnici, kterou vyřešíme separací proměnných a dvěma určitými integrály:

$$dl = \alpha \cdot l \cdot dt$$

$$\int_{l_0}^l \frac{dl}{l} = \alpha \cdot \int_{t_0}^t dt$$

$$[\ln l]_{l_0}^l = \alpha \cdot [t]_{t_0}^t$$

$$\ln l - \ln l_0 = \alpha(t - t_0) = \alpha \Delta t$$

$$\ln \left(\frac{l}{l_0} \right) = \alpha \Delta t = x$$

Veličina x je bezrozměrná veličina.

$$\frac{l}{l_0} = e^x$$

Hledaná závislost tedy je exponenciální a rostoucí (tyč se při zahřívání prodlužuje a při ochlazování zkracuje).

$$l = l_0 \cdot e^x = l_0 \cdot e^{\alpha \Delta t}$$

Součinitel $\alpha \approx 10^{-5} K^{-1}$ a pro $\Delta t = \Delta T \in \langle -100K; +100K \rangle$ je $x \in \langle -0,001; 0,001 \rangle$.

Protože je $x \rightarrow 0$, bude platit velmi dobře i původní rovnice pro změny

$$\Delta l = l - l_0 \quad \alpha \Delta t = t - t_0$$

$$l - l_0 = \alpha l_0 \Delta t$$

Úpravou dostaneme jednoduchý vztah lineární

$$l = l_0 \cdot (1 + \alpha \Delta t) = l_0 \cdot (1 + x)$$

Porovnáním přesné exponenciální a přibližné lineární závislosti dostáváme

$$e^x \approx 1 + x \quad \text{pro } x \rightarrow 0$$

Přímka o rovnici $y = 1 + x$ je tečnou exponenciální křivky $y = e^x$ v bodě $x = 0$.

Kvádr má při teplotě t_0 objem $V_0 = a_0 b_0 c_0$. Potom při teplotě t má objem

$$V = abc = a_0 \cdot e^x \cdot b_0 \cdot e^x \cdot c_0 \cdot e^x = V_0 \cdot e^{3x}$$

$$V = V_0 \cdot e^{3\alpha \Delta t} = V_0 \cdot e^{\beta \Delta t} \quad \beta = 3\alpha$$

Pro malé teplotní změny objemu můžeme odvodit jednodušší vztah:

$$e^{3x} = (e^x)^3 \approx (1 + x)^3 = 1 + 3x + 3x^2 + x^3 \approx 1 + 3x$$

Vyšší mocniny x můžeme zanedbat ($x \rightarrow 0 \Rightarrow x^2 \rightarrow 0 \Rightarrow x^3 \rightarrow 0$) a funkci linearizovat pro malá x , blíží se k nule.

Přímka o rovnici $y = 1 + 3x$ je tečnou exponenciální křivky $y = e^{3x}$ v bodě $x = 0$.

Tyto dva výsledky jdou zobecnit na větu:

Přímka o rovnici $y = 1 + kx$ je tečnou exponenciální křivky $y = e^{kx}$ v bodě $x = 0$.
 $e^{kx} \approx 1 + kx$ pro $x \rightarrow 0$ a pro $k \in R$

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Pro malá x tedy platí:

$$V = V_0 \cdot (1 + \beta \Delta t) \quad \beta = 3\alpha$$

Příklad 2 (radioaktivní rozpad jader atomů)

Odvoďte závislost počtu nerozpadlých jader N radioaktivního materiálu na čase t , jestliže na začátku pozorování v čase $t = 0$ byl počet nerozpadlých jader ve vzorku N_0 a poločas rozpadu je T .

Řešení:

Za poločas rozpadu klesne původní počet jader na poloviční počet, protože druhá polovina jader se rozpadla rozpadem α **nebo** β . Potom platí:

$$t = 0 \rightarrow N = N_0$$

$$t = T \rightarrow N = \frac{N_0}{2}$$

$$t = 2T \rightarrow N = \frac{N_0}{4}$$

$$t = 3T \rightarrow N = \frac{N_0}{8}$$

$$t = kT \quad \Rightarrow \quad N = \frac{N_0}{2^k} = N_0 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^k = N_0 \cdot 2^{-k} \quad k = \frac{t}{T}$$

Po dosazení dostaneme zákon radioaktivního rozpadu:

$$N = N_0 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{T}} = N_0 \cdot 2^{-\frac{t}{T}}$$

Počet nerozpadlých jader exponenciálně klesá s časem. Počet rozpadlých jader x v čase t je $x = N_0 - N = -\Delta N$.

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Ted' odvodíme stejný zákon řešením diferenciální rovnice. Počet x rozpadlých jader za malý časový interval Δt je přímo úměrný původnímu počtu jader a délce časového intervalu.

$$x = -\Delta N = \lambda \cdot N \cdot \Delta t$$

λ je rozpadová konstanta radionuklidu.

Tento vztah opět platí pro malé změny obou veličin ($\Delta N \rightarrow 0$ a $\Delta t \rightarrow 0$). V tomto případě můžeme změny nahradit diferenciály a dostaneme diferenciální rovnici, kterou vyřešíme separací proměnných a dvěma určitými integrály:

$$dN = -\lambda \cdot N \cdot dt$$

$$\int_{N_0}^N \frac{dN}{N} = -\lambda \cdot \int_0^t dt$$

$$[\ln N]_{N_0}^N = -\lambda \cdot [t]_0^t$$

$$\ln \left(\frac{N}{N_0} \right) = -\lambda t = -x$$

$$N = N_0 \cdot e^{-x} = N_0 \cdot e^{-\lambda t}$$

Dostali jsme vyjádření rozpadového zákona pomocí přirozené exponenciální funkce. Platí tedy exponenciální závislost pro $t > 0$.

$$N_0 \cdot 2^{-\frac{t}{T}} = N_0 \cdot e^{-\lambda t}$$

$$2^{-\frac{t}{T}} = e^{-\lambda t}$$

Obě strany rovnosti zlogaritmujeme přirozeným logaritmem:

$$\ln \left(2^{-\frac{t}{T}} \right) = \ln(e^{-\lambda t})$$

$$-\frac{t}{T} \cdot \ln 2 = -\lambda t$$

$$\lambda = \frac{\ln 2}{T}$$

Úpravou jsme dostali vztah mezi poločasem rozpadu a rozpadovou konstantou.

Závěr: $N = N_0 \cdot 2^{-\frac{t}{T}} = N_0 \cdot e^{-\lambda t}$ $\lambda = \frac{\ln 2}{T}$

3 Závěr

Na příkladech teplotní roztažnosti a radioaktivního rozpadu jsme ukázali rostoucí a klesající exponenciální závislost mezi fyzikálními veličinami a řešení diferenciální rovnice $dy = k \cdot y \cdot dt$ separací proměnných.

4 Použitá literatura:

časopis Kvant, číslo 12, ročník 1972

5 Kontakt na autora:

Mgr. Petr Mazanec
Gymnázium, Plzeň, Mikulášské nám. 23
pmazanec@mikulasske.cz

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

VYUŽITÍ MATEMATIKY VE FYZICE 2

Petr Mazanec

1 Úvod

V přednášce bylo ukázáno využití matematického řešení kvadratických, exponenciálních a goniometrických rovnic při řešení fyzikálních úloh.

2. Stat'

Příklad 1

Kaskadér o hmotnosti $m=90$ kg, přivázaný k pružnému lanu, používanému na bungee-jumping, o tuhosti $k=50\text{N/m}$ a délce v nezatíženém stavu $l=30\text{m}$, skáče z vrcholu mostu, který je ve výšce h nad hladinou přehrady. Určete tuto výšku, jestliže ho pružné lano při pádu zastaví těsně nad hladinou a pak ho vymrští zpět nahoru. Zanedbejte odpor vzduchu při prvním pádu a předpokládejte, že lano při deformaci vyhovuje Hookovu zákonu.

Řešení:

Úlohu vyřešíme užitím zákona zachování mechanické energie, který platí při zanedbání odporu vzduchu.

Polohová energie kaskadéra v tíhovém poli Země na začátku pádu v poloze 1 se přemění na polohovou energii deformovaného lana v nejnižší poloze 2 při pádu brzděném natahujícím se pružným lanem. Nulovou hladinou polohové energie v tíhovém poli země volíme v poloze 2. V obou polohách je kinetická energie kaskadéra nulová.

Tedy platí:

$$E_1 = E_2$$

$$mgh = \frac{kx^2}{2}$$

Z geometrie obou poloh vyplývá vztah $h = l + x$, jehož dosazením do předchozí rovnice dostaneme kvadratickou rovnici pro prodloužení lana x při deformaci v poloze 2.

$$kx^2 - 2mgx - 2mgl = 0$$

Podmínka pro neznámé prodloužení x je

$$x > 0$$

Obecně můžeme řešení vyjádřit ve tvaru

$$x_{1,2} = \frac{mg \pm \sqrt{m^2 g^2 + 2mgl}}{k}$$

Číselně vychází při dosazení $g = 9,81 \text{ ms}^{-2}$

$$x_1 = 54,7\text{m} \quad x_2 = -19,4\text{m}$$

Záporné řešení nesplňuje podmínku pro prodloužení a nemá fyzikální smysl, protože lano se nemůže při kmitu směrem vzhůru zkracovat.

Tedy maximální prodloužení lana je $x = 54,7\text{m}$ a výška mostu
 $h = l + x = 30\text{m} + 54,7\text{m} = 84,7\text{m}$.

Příklad 2

Odpor termistoru v digitálním teploměru s měřicím rozsahem $t \in \langle 0^\circ\text{C}; 100^\circ\text{C} \rangle$ je funkcí termodynamické teploty čidla T v kelvinech podle vztahu

$$R = R_B \cdot e^{\frac{B}{T}}$$

kde B a R_B jsou konstanty pro daný polovodičový materiál. Při teplotě 25°C jsme naměřili odpor termistoru 100Ω a při teplotě 25°C odpor 40Ω . Vypočítejte :

- konstanty B a R_B
- odpor termistoru při teplotě 100°C
- teplotu ve $^\circ\text{C}$, při které má termistor odpor 50Ω

Řešení:

Využijeme funkční předpis a matematického vztahu $\ln(e^x) = x$.

$$R_0 = R_B \cdot e^{\frac{B}{T_1}} \quad T_1 = 273,15\text{K}$$

$$R_{25} = R_B \cdot e^{\frac{B}{T_2}} \quad T_2 = 298,15\text{K}$$

$$R_{100} = R_B \cdot e^{\frac{B}{T_3}} \quad T_3 = 373,15\text{K}$$

$$R = R_B \cdot e^{\frac{B}{T}} \quad T \in \langle 273,15\text{K}; 373,15\text{K} \rangle \quad t = T - 273,15$$

Vydělením první a druhé rovnice dostaneme

$$\frac{R_0}{R_{25}} = e^x \quad \text{kde } x = \frac{B \cdot (T_2 - T_1)}{T_2 \cdot T_1}$$

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Řešením této exponenciální rovnice logaritmováním obou stran rovnice přirozeným logaritmem podle výše uvedeného matematického vztahu dostaneme

$$x = \ln\left(\frac{R_0}{R_{25}}\right)$$

$$B = \frac{T_2 \cdot T_1}{T_2 - T_1} \cdot \ln\left(\frac{R_0}{R_{25}}\right)$$

Číselně vychází $B = 2985\text{K}$.

Užitím B z první rovnice vyjádříme pomocí vztahu $\frac{1}{e^x} = e^{-x}$

$$R_B = \frac{R_0}{e^{\frac{B}{T_1}}} = R_0 \cdot e^{\frac{-B}{T_1}}$$

Číselně vychází $R_B = 1,795 \cdot 10^{-3} \Omega$.

Dosazením B a R_B do třetí rovnice vypočítáme $R_{100} = 5,3 \Omega$.

Z funkčního předpisu vyjádříme

$$\frac{R}{R_B} = e^x \quad \text{kde } x = \frac{B}{T}$$

Řešením této exponenciální rovnice dostáváme

$$x = \ln\left(\frac{R}{R_B}\right)$$

$$T = \frac{B}{\ln\left(\frac{R}{R_B}\right)}$$

$$t = \frac{B}{\ln\left(\frac{R}{R_B}\right)} - 273,15$$

Číselně pro $R=50\Omega$ dostaneme $t = 18,5^\circ\text{C}$.

Příklad 3

Za jakou dobu t od počátku pádu se kaskadér v příkladu 1 dostane do nejnižší polohy, jestliže opět v tomto časovém intervalu zanedbáme odpor vzduchu?

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Řešení:

Pád můžeme rozdělit na 2 úseky – volný pád na dráze $l = 30\text{m}$ než se napne lano za dobu t_1 a na něj navazující část netlumeného kmitu na dráze $x_1 = 54,7\text{m}$ za dobu t_2 .
Celková doba pádu $t = t_1 + t_2$.

Ze vztahu pro dráhu volného pádu dostaneme

$$l = \frac{gt_1^2}{2}$$

$$t_1 = \sqrt{\frac{2l}{g}} = 2,47\text{s}$$

Těsně před napnutím lana má okamžitou rychlost $v_1 = gt_1 = 24,26\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$.

Kmity kaskadéra se díky odporu vzduchu nakonec utlumí, a zůstane v klidu viset v rovnovážné poloze s prodloužením lana x_0 . V této poloze je tíhová síla svisle dolů v rovnováze se silou pružiny svisle vzhůru. Z toho odvodíme velikost x_0 .

$$F_G = F_F$$

$$mg = kx_0$$

$$x_0 = \frac{mg}{k} = 17,7\text{m}$$

V této rovnovážné poloze je okamžitá výchylka y z této polohy při kmitání nulová. Pokud orientujeme osu y svisle vzhůru, můžeme okamžitou výchylku y v čase t od začátku kmitu vyjádřit $y = x_0 - x$, kde x je okamžitá prodloužení v čase t .

Považujeme-li část kmitu z polohy $x = 0$ do polohy $x = x_1 = 54,7\text{m}$ za netlumený kmit přes rovnovážnou polohu $x = x_0 = 17,7\text{m}$, potom jeho amplituda výchylky je $y_m = x_1 - x_0 = 37\text{m}$.

Perioda netlumeného kmitu je

$$T = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{m}{k}} = 8,43\text{s}$$

a úhlová frekvence netlumených kmitů $\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{\sqrt{5}}{3} \text{rad} \cdot \text{s}^{-1}$.

Počáteční výchylka kmitajícího kaskadéra v čase $t = 0$ je

$$y_0 = x_0 = 17,7\text{m} \text{ a počáteční rychlost kmitání } v_0 = -v_1 = -24,26\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$$

(v_0 má opačný směr než osa y , a proto je záporná!).

Amplituda rychlosti $v_m = \omega y_m = 27,58\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$.

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Pro okamžitou výchylku y a okamžitou rychlost v kaskadéra při netlumeném kmitání platí tyto vztahy v závislosti na čase t :

$$y = y_m \cdot \sin(\omega t + \varphi_0)$$

$$v = v_m \cdot \cos(\omega t + \varphi_0)$$

Dosažením $t = 0$ a počátečních podmínek kmitu y_0 a v_0 dostaneme soustavu goniometrických rovnic pro počáteční fázi kmitu φ_0 .

$$\sin\varphi_0 = \frac{y_0}{y_m} = 0,4784 \quad \cos\varphi_0 = \frac{v_0}{v_m} = -0,8796$$

Řešení této soustavy leží v intervalu $\left(\frac{\pi}{2}; \pi\right)$ a je rovno přibližně $\varphi_0 = 2,64 \text{ rad}$.

Nyní již můžeme počítat dobu kmitu t_2 od okamžiku $t = 0$ do nejnižší polohy, kde $y = -y_m = -37 \text{ m}$ a $v = 0$. Pro tyto hodnoty okamžité výchylky a rychlosti dostáváme soustavu goniometrických rovnic s neznámou t a t_2 je nejmenší kladné řešení libovolné z těchto rovnic. Pro jednodušší výpočet si vybereme okamžitou rychlost, která je nulová v nejnižší poloze. Proto platí:

$$\cos(\omega t + \varphi_0) = 0$$

$$\omega t + \varphi_0 = \frac{\pi}{2} + k\pi \quad k \in \mathbb{Z}$$

Nejmenší kladné řešení dostaneme pro $k = 1$:

$$\omega t_2 + \varphi_0 = \frac{3\pi}{2}$$

$$t_2 = \frac{3\pi - 2\varphi_0}{2\omega} = 2,78 \text{ s}$$

Celková doba pádu do nejnižšího bodu je $t = t_1 + t_2 = 2,47 \text{ s} + 2,78 \text{ s} = 5,25 \text{ s}$.

3 Závěr

Ve třech příkladech bylo ukázáno využití matematického řešení kvadratických, exponenciálních a goniometrických rovnic ve fyzikálních úlohách.

4 Použitá literatura:

ŠEDIVÝ, P.: Teplotní závislosti fyzikálních veličin, knihovnička FO, studijní text

5 Kontakt na autora

Mgr. Petr Mazanec

Gymnázium, Plzeň, Mikulášské nám. 23

pmazanec@mikulasske.cz

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

VYUŽITÍ MATEMATIKY VE FYZICE 3

Petr Mazanec

1 Úvod

V přednášce byla ukázána na 2 fyzikálních úlohách souvislost součtu nekonečné řady a určitého integrálu.

2 Stat'

Příklad 1

Závislost okamžité rychlosti rovnoměrně zrychleného pohybu na čase je lineární funkcí

$$v = v_0 + at$$

V čase $t = 0$ jsou počáteční podmínky $v = v_0$ a $s = 0$.
Odvoďte funkční závislost dráhy s na čase t .

Řešení:

a) Součtem nekonečné řady

Časový interval

$\{0; t\}$ rozdělíme na n intervalů o délce $\Delta t = \frac{t}{n}$ ($n \in \mathbb{N}$).

Pokud je n dostatečně velké přirozené číslo ($n \rightarrow \infty$), pak můžeme předpokládat že v těchto krátkých intervalech se rychlost téměř nezmění. Označme k pořadí intervalu od začátku pohybu ($k \in \{1, 2, 3, \dots, n\}$).

Určíme rychlosti v_k a dráhy $s_k = v_k \cdot \Delta t$ v těchto intervalech.

$$k = 1 \quad t = \Delta t \quad v_1 = v_0 + a\Delta t \quad s_1 = v_1 \cdot \Delta t$$

$$k = 2 \quad t = 2\Delta t \quad v_2 = v_0 + 2a\Delta t \quad s_2 = v_2 \cdot \Delta t$$

$$k = k \quad t = k\Delta t \quad v_k = v_0 + ka\Delta t \quad s_k = v_k \cdot \Delta t$$

·
·
·

Středisko služeb školám, Plzeň, Částkova 78
Podpora talentovaných žáků v Plzeňském kraji
CZ.1.07/1.2.03/02.0001

Tento projekt je v letech 2012-15 financován z rozpočtu Plzeňského kraje

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

$$k = n \quad t = n\Delta t \quad v_n = v_0 + na\Delta t \quad s_n = v_n \cdot \Delta t$$

Celkovou dráhu $s(n)$ v intervalu $(0:t)$ pro zvolené dělení n intervalu vypočteme

$$s(n) = s_1 + s_2 + \dots + s_k + \dots + s_n = \sum_{k=1}^n s_k = \Delta t \cdot \sum_{k=1}^n v_k$$

$$\sum_{k=1}^n v_k = \sum_{k=1}^n (v_0 + ka\Delta t) = \sum_{k=1}^n v_0 + a\Delta t \cdot \sum_{k=1}^n k = nv_0 + a\Delta t \cdot \frac{n(n+1)}{2}$$

Při výpočtu předchozího součtu jsme využili známý vzorec pro součet přirozených čísel od 1 do n :

$$\sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}$$

Z výše odvozených vztahů plyne:

$$s(n) = nv_0\Delta t + a(\Delta t)^2 \cdot \frac{n(n+1)}{2}$$

Po dosazení za $\Delta t = \frac{t}{n}$ a úpravě dostaneme

$$s(n) = v_0 t + at^2 \cdot \frac{n+1}{2n}$$

Výsledek bude tím přesnější, čím bude číslo n větší (v limitě se musí blížit k ∞).

Tedy celková dráha $s = \lim_{n \rightarrow \infty} s(n) = v_0 t + at^2 \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{2n} = v_0 t + at^2 \cdot \frac{1}{2}$

Matematicky jsme provedli součet nekonečné řady pomocí limity poslounosti

$$f(n) = \frac{n+1}{2n} = \frac{1 + \frac{1}{n}}{2}$$

Z předchozí úpravy a z toho, že $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$ vyplývá, že $\lim_{n \rightarrow \infty} f(n) = \frac{1}{2}$.

Závěr: $s = v_0 t + \frac{at^2}{2}$

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Tato úvaha o součtu nekonečných řad velmi malých kladných čísel blížících se k nule dovedla Isaaca Newtona k objevu integrálního počtu.

b) Pomocí určitého integrálu

V zápise určitého integrálu je $dt = \lim_{n \rightarrow \infty} \Delta t$. Určitý integrál funkce $v(t)$ v mezích od 0 do t (v intervalu $\{0; t\}$) je roven součtu nekonečné řady v řešení a).

$$s = \int_0^t v \cdot dt = \int_0^t (v_0 + at) \cdot dt = v_0 \cdot \int_0^t dt + a \cdot \int_0^t t \cdot dt = v_0 \cdot [t]_0^t + a \cdot \left[\frac{t^2}{2} \right]_0^t$$

$$\text{Závěr: } s = v_0 t + \frac{at^2}{2}$$

Využili jsme pravidla a vzorce pro výpočet určitého integrálu, při jejichž znalosti velmi rychle dojdeme ke stejnému výsledku.

Příklad 2

Tenká tyč o hmotnosti m a délce l leží na ose x s levým krajním bodem v počátku soustavy souřadnic a začne se otáčet kolem osy z úhlovou rychlostí ω tak, že je stále kolmá na osu z (z je pevná osa otáčení a počátek je pevný bod tyče při otáčení). Určete kinetickou energii tyče při otáčení.

a) Součtem nekonečné řady

Délkový interval tyče $x \in \{0; l\}$ rozdělíme na n intervalů o délce $\Delta x = \frac{l}{n}$ ($n \in \mathbb{N}$).

Pokud je n dostatečně velké přirozené číslo ($n \rightarrow \infty$), pak můžeme předpokládat že jsme

tyč rozdělili na n hmotných bodů o stejné hmotnosti $\Delta m = \frac{m}{n}$. Označme k pořadí hmotného bodu od počátku soustavy souřadnic ($k \in \{1, 2, 3, \dots, n\}$).

Určíme rychlosti v_k a poloměry otáčení r_k a kinetické energie E_k těchto hmotných bodů.

$$k = 1 \quad r_1 = \Delta x \quad v_1 = r_1 \omega \quad E_1 = \frac{\Delta m v_1^2}{2}$$

$$k = 2 \quad r_2 = 2\Delta x \quad v_2 = r_2 \omega \quad E_2 = \frac{\Delta m v_2^2}{2}$$

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

$$\begin{aligned}
 k = 1 \quad r_1 = 1\Delta x \quad v_1 = r_1\omega \quad E_1 &= \frac{\Delta m v_1^2}{2} \\
 &\vdots \\
 &\vdots \\
 &\vdots \\
 k = n \quad r_n = n\Delta x \quad v_n = r_n\omega \quad E_n &= \frac{\Delta m v_n^2}{2}
 \end{aligned}$$

Celkovou kinetickou energii $E(n)$ tyče vypočteme jako součet

$$E(n) = \sum_{k=1}^n E_k = \frac{\Delta m}{2} \cdot \sum_{k=1}^n v_k^2 = \frac{\Delta m \omega^2}{2} \cdot \sum_{k=1}^n r_k^2 = \frac{\Delta m \omega^2 \cdot (\Delta x)^2}{2} \cdot \sum_{k=1}^n k^2$$

Pro součet druhých mocnin přirozených čísel od 1 do n platí vzorec

$$\sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

Užitím vzorce dostaneme

$$E(n) = \frac{\Delta m \omega^2 \cdot (\Delta x)^2 \cdot n(n+1)(2n+1)}{12}$$

Po dosazení za Δm a Δx z výše uvedených vztahů dostaneme po úpravě:

$$E(n) = \frac{m\omega^2 l^2}{12} \cdot \frac{(n+1)(2n+1)}{n^2}$$

Výsledek bude tím přesnější, čím bude číslo n větší (v limitě se musí blížit k ∞).

Tedy celková kinetická energie
$$E = \lim_{n \rightarrow \infty} E(n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{m\omega^2 l^2}{12} \cdot \frac{(n+1)(2n+1)}{n^2}$$

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

$$E = \frac{m\omega^2 l^2}{12} \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)(2n+1)}{n^2} = \frac{m\omega^2 l^2}{12} \cdot 2 = \frac{m\omega^2 l^2}{6}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)(2n+1)}{n^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right) \left(2 + \frac{1}{n}\right) = (1+0)(2+0) = 2$$

$$\text{Závěr: } E = \frac{m\omega^2 l^2}{6}$$

b) Pomocí určitého integrálu

Poloměr otáčení hmotného bodu o hmotnosti $dm = \lim_{\Delta m \rightarrow 0} \Delta m$ a délce

$dx = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta x$ v poloze o souřadnici x je $r = x$. Jeho rychlost $v = r\omega = x\omega$.

Diferenciál hmotnosti můžeme vyjádřit vztahem $dm = \frac{m}{l} \cdot dx$ pomocí diferenciálu délky.

Diferenciál kinetické energie $dE = \lim_{\Delta E \rightarrow 0} \Delta E$ můžeme vyjádřit pomocí diferenciálu hmotnosti:

$$dE = \frac{dm \cdot v^2}{2}$$

Po dosazení výše uvedených vztahů a úpravě dostaneme vztah mezi diferenciály dE a dx .

$$dE = \frac{m\omega^2}{2l} \cdot x^2 \cdot dx$$

Určitý integrál diferenciálu dE v mezích od 0 do l (v intervalu $x \in (0; l)$) je roven součtu nekonečné řady v řešení a), a tedy celkové kinetické energii tyče.

$$E = \int_0^l dE = \frac{m\omega^2}{2l} \cdot \int_0^l x^2 \cdot dx = \frac{m\omega^2}{2l} \cdot \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^l = \frac{m\omega^2}{2l} \cdot \frac{l^3}{3} = \frac{m\omega^2 l^2}{6}$$

Opět jsme velmi rychle došli ke správnému výsledku pomocí určitého integrálu.

3 Závěr

Bylo provedeno řešení dvou fyzikálních úloh, na kterých byl ilustrován určitý integrál jako součet konvergentní nekonečné řady, pomocí kterého je definován v matematické analýze.

4 Použitá literatura:

Časopis Kvant, číslo 10, ročník 1983

5 Kontakt na autora

Mgr. Petr Mazanec
Gymnázium, Plzeň, Mikulášské nám. 23
pmazanec@mikulasske.cz

FYZIKA VE VĚDECKO FANTASTICKÉ LITERATUŘE

Jan PLZÁK

1 Úvod

Při čtení vědeckofantastické literatury může mnohého čtenáře napadnout, zda se autor při psaní textu drží fyzikálních zákonů, či je obchází. Hned tak se nabízí prověřit si některé knížky.

Možností prověření je rovnou několik. Nabízí se například myšlenkový experiment či přímý výpočet některých parametrů.

2 Myšlenkový experiment

Pro myšlenkový experiment jsem vybral knížku Stanisława Lema *Kyberíada* (Lem, 2000). Již v první kapitole knihy je popisován stroj, který má za úkol vyrobit „nic“ (rozumí se tím, že vytvoří absolutní prázdnotu nebo, chcete-li, nicotu).

Vytvořit si představu nicoty je velmi těžké, ale lze k této představě dospět postupným ubíráním objektů ze známého světa. Postup může být například tento:

- 1) představte si sami sebe venku na ulici před domem
- 2) odstraňte z představy všechny lidi
- 3) odstraňte všechny budovy (půdorys zaplňte například pískem)
- 4) odmyslete si všechno co vytvořil člověk
- 5) odmyslete si rostliny a živočichy
- 6) zemi pod nohama nahraďte dokonalou hladkou koulí

Středisko služeb školám, Plzeň, Částkova 78
Podpora talentovaných žáků v Plzeňském kraji
CZ.1.07/1.2.03/02.0001

Tento projekt je v letech 2012-15 financován z rozpočtu Plzeňského kraje

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

- 7) odstraňte atmosféru (zajímavostí je, že by měly být vidět hvězdy)
- 8) odstraňte z představy sluneční soustavu a hvězdy
- 9) odstraňte kouli pod nohama
- 10) odstraňte svoje tělo (v této chvíli přestane existovat prostor a čas)

3. Ověření výpočtem

3.1 Neutronová hvězda a černá díra

V knize *Dračí vejce*, jejímž autorem je Robert Forward (Forward, 1999), jsou popisovány tvorové žijící na povrchu neutronové hvězdy. Autor tvory pojmenoval jako „Číly“. Jejich těla jsou tvořena degenerovaným elektronovým plynem, a aby mohli cestovat ve vesmíru mezi hvězdami, musí se čílové naučit vytvářet umělé černé díry, které jejich těla udrží ve formě degenerovaného elektronového plynu.

Je zajímavé si odhadnout například z rovnice β -rozpadu neutronu, jak velká energie se uvolní při přeměně neutronu na proton a elektron. Stejná energie by se měla uvolnit v případě, že číla by se dostal do vesmíru bez dostatečného tlaku působícího na jeho tělo. Odhadem vychází pro čílu o hmotnosti 80 kg a velikosti několik milimetrů uvolněná energie z hmoty jeho těla (elektronově degenerovaná látka) ekvivalentní výbuchu 500 kilotun TNT.

Další zajímavostí mohou být účinky slapových sil působících v blízkosti neutronové hvězdy a malých černých děr uvnitř čílských vesmírných plavidel.

3.2 Vesmírná loď s umělou gravitací

Často je ve vědeckofantastické literatuře a filmu popisována vesmírná loď, na které je umělá gravitace vytvářena tím, že se část lodi nebo celá loď otáčí. Takovou to loď popisuje například Arthur C. Clarke ve své knize *Ráma* (Clarke, 1984). Ráma je obrovský, hermeticky uzavřený válec o délce 40 km a průměru 40 km otáčející se s periodou 4 minut. Na jeho vnitřním povrchu jsou vystavěna města a roste vegetace. Odstředivá síla však nemá stejné vlastnosti jako gravitační síla a tak může být velmi zajímavé a poučné pokusit se odpovédět na několik otázek z běžného života na vnitřním povrchu otáčejícího se válce.

Otázka č. 1) Jak by mohl vypadat život na vesmírné lodi, kde by byla tíha nahrazena odstředivou silou?

Odpověď: Nad hlavou by bylo možné vidět lidi chodit vzhůru nohama. Oblačnost a mraky by se tvořily v blízkosti rotační osy.

Otázka č. 2) Jaká by byla odstředivá síla ve středu takové lodi?

Odpověď: V ose otáčení by byl stav beztlíže.

Otázka č. 3) Jak by se pohybovalo těleso padající ze středu k povrchu?

Odpověď: Těleso by nepadalo v soustavě spojené s povrchem po přímce, ale po spirální trajektorii. To však jen v případě, že by těleso mělo počáteční rychlost, jinak by těleso bylo v klidu, pokud by nepůsobil odpor vzduchu.

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Otázka č. 4) Jak by byl ovlivněn běžec při běhu ve směru nebo protisměru otáčení?

Odpověď: Běžec by při pohybu ve směru rotace měl větší obvodovou rychlost, a tím pádem by se cítil díky větší odstředivé síle těžší. Při pohybu v protisměru rotace by se obvodová rychlost zmenšovala, a tím pádem by se díky snížené odstředivé síle cítil lehčí. V krajním případě, kdyby běžec byl schopen dosáhnout obvodové rychlosti, by se mohl ocitnout ve stavu beztlíže a po odrazu od povrchu by se začal pohybovat rovnoměrně přímočaře uvnitř lodi, dokud by opět nenarazil na rotující povrch.

Otázka č. 5) Jak by se chovala atmosféra na takové lodi?

Odpověď: U osy rotace by byl nižší tlak než na vnitřním povrchu. Vlhkost by pravděpodobně vytvářela oblaka par mezi osou rotace a povrchem. Déšť by padal po spirální trajektorii.

4 Závěr

Není na škodu se při čtení knihy zamyslet i nad zajímavými důsledky fyzikálních zákonů, které autora nenapadly, nebo se mu v jeho příběhu nehodily.

5 Použitá literatura

LEM, Stanisław. *Kyberíada*. Praha: Baronet, 2000, 415 s. ISBN 80-721-4323-9.

FORWARD, Robert L. *Dračí vejce*. Vyd. 1. Překlad František BOUŠKA. Frenštát pod Radhoštěm: Polaris, 1999, 294 s. Science fiction (Polaris). ISBN 80-859-1157-4.

CLARKE, Arthur Charles. *Setkání s Rámou*. 1. vyd. Překlad Zdeněk VOLNÝ. Svoboda, 1984, 217 s. Edice: Omnia, Ráma. ISBN 25-092-84.

6 Kontakt na autora

Mgr. Ing. Jan Plzák
VOŠ a SPŠE Plzeň a KMT ZČU Plzeň
plzak@spseplzen.cz

GEOMETRICKÁ OPTIKA V PŘÍKLADECH

Jitka PROKŠOVÁ

1 Úvod

Geometrická optika je část optiky, která se zabývá zobrazením různými optickými prvky. Jedná se především o zobrazení zrcadly, čočkami a soustavami.

Seminář se zabývá konstrukcí obrazů a základními zákony geometrické optiky v následujících příkladech.

2 Příklady k procvičení

(v závorkách jsou uvedeny výsledky jednotlivých příkladů)

1. Určete mezní úhel pro kapalinu s indexem lomu 1,414 na rozhraní se vzduchem. Předpokládejte, že index lomu vzduchu = 1. (30°)
2. Světelný paprsek prochází ze skla do vody. Jaký je největší možný úhel dopadu, je-li index lomu skla 1,533 a vody 1,333? (60,5°)
3. Jak nastavíte rovinné zrcadlo světelnému paprsku a) aby se odrazil nazpět po téže přímce, b) aby svíral s paprskem odraženým úhel 60°? Nakreslete.
4. Světlo postupuje z prostředí o indexu lomu 1,7 do prostředí o indexu lomu 1,5. Při jakém úhlu dopadu nastane úplný odraz? (62°)
5. Na rovný povrch skleněné polokoule o indexu lomu 1,5 a poloměru 10 cm dopadá kolmo paprsek světla. Vzdálenost mezi paprskem a osou polokoule je 6 cm. V jaké vzdálenosti od rovné stěny protne paprsek tuto osu? (19,63 cm)
6. Při žlutém sodíkovém světle byla v hranolu s lámavým úhlem 60° změřena minimální deviace 39°. Určete index lomu hranolu, je-li obklopen vzduchem. (1,52)
7. Ve vzdálenosti 18 cm od spojky, která má ohniskovou vzdálenost 12 cm, se nalézá bod, který je vzdálen 6 cm od optické osy. Určete konstrukcí polohu a vlastnosti obrazu.
8. Optická mohutnost tenké čočky ($n = 1,5$) je na vzduchu 5,5 dioptrie. Jak se změní mohutnost čočky, ponoříme-li ji do vody? (1,4)
9. Symetrická dvojbypuklá čočka je vyrobena ze skla, které má pro červené paprsky index lomu 1,4835 a pro fialové 1,4996. Vypočtete rozdíl ohniskových vzdáleností pro červ. a fial. paprsky, je-li poloměr křivosti 10 cm. (0,33 cm)

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

10. Vzdálenost mezi předmětem a stínítkem je 30 cm. Čočka umístěná mezi nimi dá ostrý obraz předmětu ve dvou polohách, jejichž vzdálenost je 10 cm. Určete Z obrazu v obou těchto polohách. (-2; -0,5)

3 Závěr

Jevy geometrické optiky jsou zajímavé především svým praktickým užitím v běžném životě, proto uvedené příklady slouží jednak k rozlišení těchto jevů a pak k poznání, jak používat zákonitosti vlnové optiky, které studenti SŠ probírají ve výuce.

4 Použitá literatura

MALÝ, P. Optika, 1. vyd. Praha: Academia, 2008, 362 s. ISBN 978-80-246-1342-0
FUKA, J., HAVELKA, B. Optika a atomová fyzika 1. 1. vyd. Praha: SPN, 1961. 842 s.

5 Kontakt na autora

RNDr. Jitka Prokšová, Ph.D.
oddělení fyziky KMT FPE ZČU v Plzni
proksovj@kmt.zcu.cz

NĚKTERÉ JEVY ATMOSFÉRICKÉ OPTIKY

Jitka PROKŠOVÁ

1 Úvod

Jevy atmosférické optiky patří k zajímavým úkazům, se kterými se můžeme na obloze setkat. Dochází při nich k lomu a odrazu světla, k disperzi a rozptylu světla a k projevům vlnové povahy světla (interferenci a difrakci). Barevnost optických úkazů v atmosféře záleží i na povaze a velikosti částic, na kterých se světlo odráží, láme, skládá, ohýbá, rozptyluje a rozkládá.

Přednáška se zabývá zmíněnými jevy podrobně v následujícím členění.

2 Refrakční jevy

Refrakční jevy vznikají při průchodu světla atmosférou, přičemž zdroj je buďto vně nebo uvnitř ovzduší Země. Podle toho dělíme projevy refrakce na astronomickou a terestrickou.

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

2.1 Astronomická refrakce

Zdroj světla je vně atmosféry (např. Slunce). Průchodem světla nehomogenním prostředím (zemskou atmosférou) dochází stále více k lomu ke kolmici, takže pozorovatel vnímá vzdálený zdroj v jiném místě, než ve skutečnosti je. Důsledkem astronomické refrakce je např. zploštění slunečního kotouče u obzoru, prodloužení trvání dne apod.

2.2 Terestrická refrakce

Zdroj světla je uvnitř atmosféry (např. plocha odrážející sluneční záření v oáze na poušti). Pozorovatel tak vnímá vzdálené předměty blíže (fata morgána v poušti nebo v arktických krajinách). Výklad o obou typech refrakce je doprovázen obrázky a potřebnými vztahy.

3 Duha

Rozkladem světla na vodních kapkách v atmosféře se vytváří duha. Rozeznáváme několik typů – primární (způsobenou jediným vnitřním odrazem světla v kapce vody), sekundární (dva vnitřní odrazy) a terciární (tři odrazy). Barevnost a šířka duhy závisí také na velikosti kapek, což je v této části přednášky diskutováno spolu s rozdíly mezi jednotlivými typy duhy.

4 Soumrakové jevy

Typické projevy podvečerní oblohy – červánky, iridiscence oblaků, glórie a další efekty se souhrnně nazývají soumrakové jevy. Důraz ve vysvětlení je kladen i na rozdíly mezi astronomickým a občanským soumrakem.

5 Halové jevy

Jevy, ke kterým dochází odrazem, lomem a interferencí světla na ledových krystalcích nazýváme halovými jevy. Patří sem např. malé a velké haló, halový sloup, cirkumzenitální oblouk, Parryho oblouk, parhélia a další.

6 Závěr

Jevy atmosférické optiky přitahují na obloze pozornost, proto je užitečné umět mezi nimi rozlišovat a dokázat tak užívat zákonitosti optiky, které studenti SŠ probírají ve výuce.

7 Použitá literatura

MALÝ, P. Optika, 1. vyd. Praha: Academia, 2008, 362 s. ISBN 978-80-246-1342-0
FUKA, J., HAVELKA, B. Optika a atomová fyzika 1. 1. vyd. Praha: SPN, 1961. 842 s.

8 Kontakt na autora

RNDr. Jitka Prokšová, Ph.D.
oddělení fyziky KMT FPE ZČU v Plzni
proksovj@kmt.zcu.cz

Středisko služeb školám, Plzeň, Částkova 78
Podpora talentovaných žáků v Plzeňském kraji
CZ.1.07/1.2.03/02.0001

Tento projekt je v letech 2012-15 financován z rozpočtu Plzeňského kraje

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

VLNOVÁ OPTIKA V PŘÍKLADECH

Jitka PROKŠOVÁ

1 Úvod

Vlnová optika je část optiky, která se zabývá vlnovými projevy světla. Patří mezi ně především interference, polarizace a difrakce světla.

Seminář se zabývá zmíněnými jevy v následujících příkladech.

2 Příklady k procvičení

(v závorkách jsou uvedeny výsledky jednotlivých příkladů)

11. Na stínítku, které je od dvojštěrbiny vzdáleno 80 cm, pozorujeme interferenční proužky. Určete vlnovou délku a barvu světla, je-li jejich vzdálenost 2,5 mm a vzájemná vzdálenost štěrbin 0,2 mm. (625 nm)
12. Nakloněné plochy skleněného dvojhranolu ($n = 1,5$) svírají kolmicí na optickou osu úhel 2° . Před hranolem je ve vzdálenosti 10 cm štěrбина, kterou na něj dopadají monochromatické paprsky vlnové délky 590 nm. Určete rozdíl interferenčních proužků ve vzdálenosti 1 m. (0,185 mm)
13. Na olejovou skvrnu (tloušťky $0,2 \mu\text{m}$) na vodní hladině dopadá kolmo bílé světlo. Určete, jaká barva se nebude odrážet a která se odrazí nejvíce. Předpokládejte, že rychlost šíření světla v oleji je $2 \cdot 10^8 \text{ ms}^{-1}$. (max - fialová, min - žlutá)
14. Mýdlová blána o indexu lomu 1,33 se při kolmém dopadu světla jevila jako modrá ($\lambda = 450 \text{ nm}$). Jakou měla tloušťku? (84 nm)
15. Biletova dvojdiočka má $f = 15 \text{ cm}$, $e = 0,08 \text{ mm}$. Určete Δy , použijeme-li světlo o vlnové délce 580 nm a umístíme-li zdroj 25 cm od čočky a 200 cm od stínítka. (4 mm)
16. Při osvětlení Newtonových skel monochromatickým paprskem o vlnové délce 589,3 nm byly zjištěny tyto hodnoty průměrů dvou po sobě jdoucích tmavých kroužků: 2 mm a 2,236 mm. Určete poloměr křivosti čočky. (42,4 cm)
17. V tenké klínové vrstvě celofánu o indexu lomu 1,4 se vytvořily interferenční proužky, jejichž vzdálenost je 0,25 cm. Určete vlnovou délku použitého světla, je-li úhel klínu $20''$. (678 nm)
18. Ohybová mřížka je osvětlena kolmo svazkem bílého světla. Zjistěte, zda se může některá barva ze spektra 1. řádu úplně překrývat s některou barvou spektra 2. řádu.
19. Kolmo na štěrbinu dopadá světlo o vlnové délce 450 nm a na stínítku se objeví střed 2. tmavého proužku pod úhlem $5^\circ 14'$. Určete, pod jakým úhlem bude možné pozorovat střed 4. tmavého proužku při světle o vlnové délce 760 nm. (18°)

Středisko služeb školám, Plzeň, Částkova 78
Podpora talentovaných žáků v Plzeňském kraji
CZ.1.07/1.2.03/02.0001

Tento projekt je v letech 2012-15 financován z rozpočtu Plzeňského kraje

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

20. Určete největší řád spektra, který ještě vznikne při ohybu žlutozeleného světla mřížkou, která má 2000 vrypů na 1 cm délky. (9)

3 Závěr

Jevy vlnové optiky jsou zajímavé především svým praktickým užitím v běžném životě, proto uvedené příklady slouží jednak k rozlišení těchto jevů a pak k poznání, jak používat zákonitosti vlnové optiky, které studenti SŠ probírají ve výuce.

4 Použitá literatura

MALÝ, P. Optika, 1. vyd. Praha: Academia, 2008, 362 s. ISBN 978-80-246-1342-0
FUKA, J., HAVELKA, B. Optika a atomová fyzika 1. 1. vyd. Praha: SPN, 1961. 842 s.

5 Kontakt na autora

RNDr. Jitka Prokšová, Ph.D.
oddělení fyziky KMT FPE ZČU v Plzni
proksovj@kmt.zcu.cz

FYZIKA KAPALIN A PLYNŮ I – ZA CO MŮŽOU MOLEKULY

Václav SOUKUP

1 Úvod

Věříte v existenci částicové struktury látek? Které fyzikální jevy není možné vysvětlit na základě představy spojitě striktury hmoty a je nutné uvažovat o částicové struktuře látek. Jaké pro ni máme důkazy?

2 Fyzikální jevy podmíněné molekulovou strukturou látek

2.1 Platí $0,5 + 0,5 = 1$?

Smísíme-li v dlouhé trubici stejné objemy dvou mísitelných kapalin a promícháme, výsledný objem směsi bude menší než součet původních objemů obou kapalin. Příčina je v existenci mezimolekulových prostorů (a tedy existence molekulové struktury) obou kapalin. Modelovou situací je možno znázornit např. pomocí směsi zrn hrachu a máku.

2.2 Kolik molekul je?

Johann Josef Loschmidt odvodil počet molekul v 1m^3 a z něj byla odvozena po definování jednotky mol Avogadrova konstanta. Hodnoty těchto konstant ukázaly na

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

obrovský počet molekul ($N_0 = 268 \cdot 10^{23} \text{ m}^{-3}$, $N_A = 6,02 \cdot 10^{23} \text{ mol}^{-1}$) a umožňují vypočítat objemy a hmotnosti molekul.

2.3 Jak se molekuly chovají?

Přidáme-li do dvou válců, jednoho s teplou a druhého se studenou vodou barvivo, posléze se rozšíří do celého objemu válců, u teplé vody rychleji. Zmáčknutý balónek se po uvolnění nabyde původního tvaru. Jevy dokazují pohyb molekul. Jaké jsou jejich rychlosti? Lamertův pokus umožňuje zjistit velikost rychlostí molekul. Střední kvadratické rychlosti molekul plynů při běžných teplotách jsou řádově stovky metrů za sekundu a závisí na teplotě.

Jak to, že vlhká sklíčka lze jen obtížně od sebe oddělit? Žiletka položená na hladinu vody na ní plave a popírá tak Archimédův zákon. Proč? Příčinou jsou mezimolekulové síly, jejichž charakter je závislý na vzdálenosti mezi molekulami. Na povrchu kapalin vrstva molekul působí jako blanka, která udrží lehčí předměty na hladině. Mezimolekulové síly jsou příčinou přilnavosti látek, kapilární elevace a dalších jevů.

3 Závěr

Správné pochopení chování molekul uvnitř látek umožňuje vysvětlit a využít řadu fyzikálních jevů, se kterými se běžně setkáváme v přírodě i v praxi.

4 Použitá literatura

BARTUŠKA, K., SVOBODA, E. Fyzika pro gymnázia - Molekulová fyzika a termika. 4. vyd. Praha: Prometheus, 2007. 155 s. ISBN 80-7196-200-7

SOUKUP, V., VESELÝ, J. Maturitní otázky – fyzika, 1. vyd. Praha: Fragment 2007, 201 s. ISBN 978-80-253-0501-0

5 Kontakt na autora

RNDr. Václav Soukup
Masarykovo gymnázium Plzeň
soukup@mgplzen.cz

FYZIKA KAPALIN A PLYNŮ II – ZA CO MŮŽOU IONTY

Václav SOUKUP

1 Úvod

Pokusme se zodpovědět následující otázky: Jak vznikají mezimolekulové síly? Které jevy jsou způsobeny iontovou strukturou látek?

2 Fyzikální jevy podmíněné existencí nabitých částic v látkách

2.1 Proč jsou zadečky v suchu?

Umístíme-li na dno kelímku látku obsaženou v dětských plenkách a nalijeme-li do kelímku vodu, voda se nadá vylít. Příčinou jsou silné mezimolekulové síly mezi polyakrylátem a molekulami vody, jejichž podstatou jsou elektrostatické síly mezi polárními molekulami vody a náboji vzniklými na řetězci polyakrylátu.

2.2 Proč vzniká blesk?

Nabijeme elektroskop pomocí novodurové tyče. Při přiblížení plamene se elektroskop vybije. Proč? Suchý vzduch je izolant, neobsahuje nabitě částice. Plamen dodává energii, molekuly ionizuje, vzduch vede elektrický proud. Při dostatečně silném elektrickém náboji dochází k ionizaci nárazem, není třeba vnějšího ionizátoru. Je-li nabitých částic, dostatek, dojde k elektrickému výboji.

2.3 Proč slaná voda vede elektrický proud a sladká nikoliv?

Některé látky se ve vodě rozpouštějí. Opět jde o projev silového působení mezi nabitými molekulami polárních nebo iontových látek. Roztoky iontových sloučenin obsahují volně pohyblivé ionty, které mohou vést elektrický proud (slaná voda). Sacharóza se sice ve vodě rozpouští, ale v roztoku jsou celé molekuly, nikoliv ionty. Proto není elektricky vodivý.

2.4 Jaké jsou důsledky rovnováhy mezi kovem a roztokem s jeho ionty?

Ponoříme-li měděnou destičku do roztoku síranu měďnatého, vznikne mezi roztokem a destičkou dvojrůžna, která se vyznačuje rozdílem potenciálů. Totéž nastane mezi zinkovou destičkou a roztokem síranu zinečnatého. Po vodivém spojení obou systémů vznikne zdroj napětí – galvanický článek. Podobný článek vznikne i tehdy, jestliže obě destičky uchopíme do rukou. Jev je možné vysvětlit putováním iontů v takto vzniklém systému.

3 Závěr

Nabitě částice a ionty jsou zodpovědné za řadu jevů, které často využíváme v praxi (nabíječky, baterie, lékařská diagnostika).



INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

4 Použitá literatura

LEPIL, O., ŠEDIVÝ, P. Fyzika pro gymnázia – Elektřina a magnetismus. 6. vyd. Praha: Prometheus, 2001. 220 s. ISBN 978-80-7196-385-1 7178-463-X.

SOUKUP, V., VESELÝ, J. Maturitní otázky – fyzika, 1. vyd. Fragment 2007, 201 s. ISBN 978-80-253-0501-0

5 Kontakt na autora

RNDr. Václav Soukup
Masarykovo gymnázium Plzeň
soukup@mgplzen.cz

KEPLEROVY ZÁKONY

Zuzana SUKOVÁ

1 Úvod

Johannes Kepler byl německý matematik, astrolog a astronom, který působil i v Praze na dvoře císaře Rudolfa II. Objevil tři základní zákony popisující pohyb nebeských těles, dnes nesou jeho jméno. První dva ze svých zákonů publikoval v roce 1609 v *Astronomia Nova*, třetí zákon publikoval v roce 1619 v *Harmonices Mundi*.

Tyto zákony popisují nejen pohyb planet a dalších těles (planetek, komet, ...) naší sluneční soustavy kolem Slunce, ale také například pohyb soustavy Jupiterových měsíců kolem Jupitera a sond a družic kolem Země.

2 Keplerovy zákony v příkladech

Nejprve jsou Keplerovy zákony podrobně popsány a vysvětleny včetně různých způsobů formulace. Vyvrácena je také miskoncepce daná častými obrázky na internetu i v učebnicích, kdy je dráha planet zobrazována jako elipsa s poměrně velkou numerickou excentricitou (například 0,7). Ve skutečnosti je například numerická excentricita Země 0,017. (Randa, 2015)

Protože žáci nemají dostatečný matematický aparát, tak je zvláštní pozornost věnována formulaci Keplerových zákonů v jednotkách běžně používaných pro popis těles sluneční soustavy (astronomické jednotky a roky). S tímto zjednodušením jsou žáci schopni pracovat již na druhém stupni základní školy, přestože se jedná o učivo střední školy.

V další části hodiny jsou řešeny konkrétní úlohy na výpočet doby oběhu nebo velké poloosy planet sluneční soustavy a obdobné příklady z předchozích ročníků astronomické olympiády, úlohy ze sbírek úloh z astronomie a astrofyzika (Randa 2015, Široký, Široká 1973, Štefl, Korčáková, Krtička 2002, Volf, Jarešová 2009).

Středisko služeb školám, Plzeň, Částkova 78
Podpora talentovaných žáků v Plzeňském kraji
CZ.1.07/1.2.03/02.0001

Tento projekt je v letech 2012-15 financován z rozpočtu Plzeňského kraje

3 Závěr

Keplerovy zákony popisují pohyby těles ve sluneční soustavě nebo i pohyb dalších těles v centrálním gravitačním poli tělesa mnohem hmotnějšího. Jejich pochopení a porozumění jejich důsledkům vede k lepšímu porozumění pohybu vesmírných těles i jevům přímo na Zemi (delší letní půlrok).

4 Použitá literatura

ŠIROKÝ, J., ŠIROKÁ, M. Základy astronomie v příkladech. 2. vyd. Praha: Státní pedagogické nakladatelství, 1973. 158 s.

ŠTEFL, V., KORČÁKOVÁ, D., KRTIČKA, J. Úlohy z astrofyziky. 1. vyd. Brno: Masarykova univerzita, 2002. 82 s.

RANDA, Miroslav. Planety: Charakteristiky. *Astronomia* [online]. 2015 [cit. 2015-09-2]. Dostupné z: <http://astronomia.zcu.cz/planety/soustava/1863-charakteristiky>

VOLF, I., JAREŠOVÁ, M. Fyzika je kolem nás (Pohyby těles v planetární soustavě). 1. vyd. Hradec Králové. MAFY, 2009.

5 Kontakt na autora

PhDr. Zuzana Suková
Západočeská univerzita v Plzni
zsukova@kmt.zcu.cz

NEWTONŮV GRAVITAČNÍ ZÁKON

Zuzana SUKOVÁ

1 Úvod

Isaac Newton byl anglický fyzik, matematik, astronom, alchymista a teolog. Jednalo se o velmi všestranného člověka, který například položil základy diferenciálního a integrálního počtu, ale byl také poslancem anglického parlamentu. Ve fyzice mimo jiné sestrojil zrcadlový dalekohled a objevil zákon všeobecné gravitace a tři zákony pohybu, nesoucí dnes jeho jméno.

Věnovat se budeme jeho gravitačnímu zákonu, který publikoval v roce 1687 v díle *Philosophiæ Naturalis Principia Mathematica*. Zákon vychází z pozorování, nikoli z teorie. Konstatuje, že gravitační síla mezi dvěma tělesy závisí na hmotnosti obou těles a na jejich vzdálenosti. Podařilo se mu v tomto zákonu propojit Keplerovy zákony s vlastní teorií gravitace a tím dokázal, že pohyb předmětů na Zemi se řídí stejnými pravidly jako pohyb vesmírných těles.

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

2 Newtonův gravitační zákon v příkladech

Nejprve je Newtonův gravitační zákon podrobně popsán a vysvětlen včetně různých způsobů formulace. Poté je zařazena diskuse podnětená otázkami: Jsme (gravitačně) přitahováni ke spolužákovi? Když Země přitahuje tužku, přitahuje také tužka Zemi? Následuje vysvětlení dopadů Newtonova gravitačního zákona, zodpovězení otázek a vyvrácení případných miskoncepcí.

V další části hodiny jsou řešeny konkrétní úlohy na výpočet gravitační síly mezi jednotlivými tělesy sluneční soustavy, velikost gravitační síly, kterou působí Měsíc na 1 m³ mořské vody na povrchu Země (vysvětlen princip přílivu a odlivu), a velikost gravitační síly, kterou Země přitahuje kosmonauta na kosmické stanici ISS (vysvětlen beztížný stav, odstranění miskoncepce, že na těleso v beztížném stavu nepůsobí žádné síly) (Hestic 2015, Krynický 2015).

3 Závěr

Newtonův gravitační zákon popisuje přitažlivé působení mezi libovolnými dvěma tělesy, ovšem výrazně se projevuje jen u velmi hmotných objektů, například těles naší sluneční soustavy. Pochopení a porozumění tomuto zákonu a jeho důsledkům vede k lepšímu porozumění jevům gravitace, přílivu a odlivu i beztížnému stavu.

4 Použitá literatura

HESTERIC, Roman. Gravitační zákon. *Priklady.eu - matematika a fyzika pro střední školy* [online]. 2015 [cit. 2015-09-1]. Dostupné z: <http://www.priklady.eu/cs/Fyzika/Gravitacni-pole/Gravitacni-zakon.alej>

KRYNICKÝ, Martin. Newtonův gravitační zákon. *Realisticky.cz* [online]. 2015 [cit. 2015-09-1]. Dostupné z: http://www.ucebnice.krynicky.cz/Fyzika/1_Mechanika/6_Gravitacni_pole/1601_Newtonuv_gravitacni_zakon.pdf

5 Kontakt na autora

PhDr. Zuzana Suková
Západočeská univerzita v Plzni
zsukova@kmt.zcu.cz

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

SUNCE - ZAJÍMAVÝ OBJEKT NA POZOROVÁNÍ

Jakub TOMAN

1 Slunce – zajímavý objekt na pozorování

Slunce je naše nejbližší hvězda, kterou můžeme sledovat mnoha způsoby. Od sledování pouhým okem (západ, východy, atmosférické úkazy) až po použití pokročilé techniky vědeckých observatoří. Metody pozorování a zpracování dat. Praktická ukázka pozorování Slunce.

2 Pozorování Slunce - obecně

Se Sluncem a s jevy s ním spojeným leduje každý den aniž by jsme si to uvědomovali. Střídání dne a noci, východ a západ Slunce lze pozorovat jak pouhým okem, tak i pomocí snímků z meteorologických družic prostřednictvím internetu. Zajímavou kapitolou jsou optické jevy v atmosféře (duha, halové jevy).

3 Slunce jako hvězda

Slunce jako nejbližší hvězda poskytuje na Zemi dostatek tepla a světla pro život. Svoji aktivitou může ovlivnit život na Zemi (sluneční bouře, polární záře, výpadky moderních technologií).

4 Jevy pozorovatelné na Slunci

Termonukleární reakcí v nitru vzniká značné množství energie, která se postupně dostává na povrch Slunce a v podobě světla a tepla směřuje k Zemi. Chování povrchu Slunce a jeho atmosféry záleží na aktivitě Slunce, které je způsobeno magnetickým polem Slunce. V rámci astronomických pozorování můžeme sledovat mnoho zajímavých a mezi sebou provázaných jevů. Ve fotosféře (viditelném světle) můžeme sledovat sluneční skvrny, granulaci, chromosféra (oblast záření vodíku) najdeme proudící sluneční materiál v podobě protuberancí a filamentů, můžeme sledovat i erupce. Při úplném zatmění Slunce zase spatříme korónu. Ze záznamů jevů můžeme zjišťovat průběh jednotlivých cyklů sluneční aktivity.

5 Pozorování Slunce

Slunce můžeme pozorovat poměrně jednoduchými prostředky (brýle pro pozorování Slunce), přes astronomické dalekohledy (musí být vybaveny filtry pro bezpečné pozorování Slunce, jinak hrozí poškození zraku), až po data z profesionálních pracovišť a vesmírných družic.

5.1 Družice

Pozorování z povrchu je ovlivněno viditelností Slunce během dne, počasím a chvěním zemské atmosféry. Z vesmíru např. z oběžné dráhy země jsme schopni sledovat Slunce

Středisko služeb školám, Plzeň, Částkova 78
Podpora talentovaných žáků v Plzeňském kraji
CZ.1.07/1.2.03/02.0001

Tento projekt je v letech 2012-15 financován z rozpočtu Plzeňského kraje



INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

24 hodin denně, pořizovat snímky v mnoha spektrech a velkém rozlišení. Mezi nejznámější družice na pozorování Slunce patří sonda SOHO a SDO.

5.2 Pozorování fotosféry

Pouhým okem můžeme na Slunci pozorovat velké pouze velké skvrny, pro podrobnější pozorování postačí i menší dalekohled. Pro bezpečné pozorování existuje několik metod a technický postupů, např. dalekohled vybavit filtrem ze speciální fólie určené pro pozorování Slunce. Pozorování je možné evidovat, lze zakreslovat polohy a velikosti skvrn do speciálních protokolů. Při větším množství záznamů se provádí zpracování např. relativního čísla (číslo udávající aktivitu Slunce).

5.2 Pozorování chromosféry

Pozorování chromosféry vyžaduje použití speciálních dalekohledů s filtry blokující tepelné záření ze Slunce a propouštějící spektrum vodíku. Pozorování je možné evidovat, lze zakreslovat polohy a velikosti protuberancí (filamentů) do speciálních protokolů. Při větším množství záznamů se provádí zpracování počtu protuberancí (filamentů).

5.2 Pozorování přes internet

Díky internetovému připojení, zveřejňování napozorovaných dat a přístupných archivu snímků z observatoří a družic je „pozorování“ Slunce dostupné jakémukoliv zájemci o tento obor. Data lze prohlížet, zpracovávat. Ale je možnost se zapojit i do vědeckých výzkumů, jako je např. hledání komet na snímcích ze sondy SOHO.

6 Závěr

Pozorování Slunce lze uskutečnit v nejen z hlediska pouhého zájmu a koníčku, ale lze si vyzkoušet zpracování systematické zpracování dat. Z pohledu astronomie je Slunce naše nejbližší hvězda a máme tak jedinečnou možnost sledovat hvězdu, kterých jsou v naší Galaxii miliardy, velmi podrobně.

7 Použitá literatura

TOMAN, J., Porovnání sluneční fotosféry a chromosféry na základě vlastních pozorování a snímků z internetu (Bakalářská práce), Plzeň, 2013,
Dostupné na internetu: < <http://slunce.astronomie.cz/>>.

8 Kontakt na autora

Bc. Jakub Toman
Západočeská pobočka České astronomické společnosti
jakub.toman@seznam.cz

Středisko služeb školám, Plzeň, Částkova 78
Podpora talentovaných žáků v Plzeňském kraji
CZ.1.07/1.2.03/02.0001

Tento projekt je v letech 2012-15 financován z rozpočtu Plzeňského kraje

VODÍKOVÉ PALIVOVÉ ČLÁNKY A JEJICH PERSPEKTIVY

Martin TOMÁŠ

1 Úvod

V současné době můžeme pozorovat podporu alternativních zdrojů elektrické energie, která vede k rozšíření těchto zařízení i do každodenního života. Mezi tyto zdroje elektrické energie patří i vodíkové palivové články s protonově vodivou membránou (PEMFC). Jejich největšími výhodami je vysoká účinnost, provoz bez emisí, absence pohyblivých částí či bezhlučnost. Kromě výhod můžeme určit i nejzávažnější problémy, které se váží k použití PEMFC v nejrůznějších aplikacích. Zásadními parametry vodíkových palivových článků jsou spolehlivost, životnost a výkonnost.

Obsahem příspěvku je diskuse nad dosud dosaženými výsledky výzkumu tohoto typu palivových článků a rozbor faktorů, které širší využití limitují. Zmíněny jsou i zajímavé aplikace, které využívají vodíkových palivových článků jako zdroje elektrické energie.

2. Princip vodíkových palivových článků

Vodíkové palivové články využívají chemické energie paliva, kterou přeměňují na energii elektrickou (Larminie, 2003). Jedná se o symetrická zařízení obsahující komponenty v následujícím sledu: bipolární deska - difúzní vrstva - katalytická vrstva - membrána - katalytická vrstva - difúzní vrstva - bipolární deska. Palivo (vodík a kyslík) je do PEMFC přivedeno tzv. bipolární deskou, která zajišťuje rozprostření paliva do plochy. Deska obsahuje velké množství kanálků, kterými proudí palivo směrem k další vrstvě. Tou je vrstva difúzní, která je tvořena uhlíkovým papírem či tkanivem. Vrstva obsahuje velké množství drobných kanálků, kterými palivo "difunduje" ke katalyzátoru. Katalytickou vrstvičku tvoří uhlíkový prach s malým obsahem platiny. Palivo se v této vrstvě rozkládá z dvojitomových molekul na jednotlivá atomová jádra a elektrony. Uprostřed palivového článku je polymerní membrána. Tato část PEMFC určuje výkonové charakteristiky a patří k nejdůležitějším částem palivového článku (Tomáš, 2013).

Membrána je obvykle tvořena polymerem na bázi teflonu (Mauritz, 2004). Obsahuje množství pórů, které se při činnosti článku vyplní kapalnou vodou. Takto zvlhčená membrána umožňuje pohyb iontů, v případě vodíkových palivových článků se jedná o elementární vodík H^+ . Ionty putují na druhou stranu membrány, kde došlo k rozdělení molekul kyslíku. Zde se ionty vodíku a kyslíku slučují za vzniku vody. Právě voda je tedy odpadním produktem celého zařízení.

Molekuly vodíku byly na katalytické vrstvě ochuzeny o elektrony. Zatímco jádra vodíku odvádíme k druhé katalytické vrstvě, elektrony směřují do vnějšího elektrického obvodu. Zde mohou konat práci. Poté jsou přivedeny zpět do palivového článku k druhé katalytické vrstvě, kde se slučují společně s ionty paliva do molekul vody.

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

3. Využití vodíkových palivových článků

Palivové články jsou využívány od svého vzniku v 18. století jako zajímavý alternativní zdroj elektrické energie. Zpočátku byl princip PEMFC demonstrován jako zajímavost bez praktického využití. V 60. letech minulého století ale lidstvo stálo před výzvou spojenou s cestováním do vesmíru. Protože v kosmických sondách a plavidlech není vhodné využití spalovacího motoru, byly využity pro zajištění dodávky elektrické energie právě vodíkové články.

Od této doby jsou palivové články využívány i k dalším aplikacím. Velmi perspektivní je využití PEMFC v automobilech, ale často jsou rovněž využívány jako záložní generátory. Existují dokonce i elektrárny poskytující elektrickou energii menším oblastem. Výkony těchto zařízení však nemohou konkurovat velkým tepelným či jaderným zdrojům. Nicméně pro malá města tvoří PEMFC zdroje zajímavou alternativu.

V poslední době došlo k zajímavému pokroku i v jiných oblastech výzkumu alternativních zdrojů elektrické energie. Pokrok na poli fotovoltaických panelů dovoluje využít PEMFC pro stavbu soběstačných domů. Hlavní myšlenka těchto domů je spojení fotovoltaických panelů, PEMFC, větrné elektrárny a baterií do jednotky, která umožní zásobování domu elektrickou energií bez nutnosti zapojení do rozvodné sítě (Doucek, 2014). Protože jsou fotovoltaické panely resp. větrná elektrárna zdroje s fluktuujícím výkonem, je nutné produkovat výkon ukládat ve formě, která umožní pozdější využití (tedy v okamžiku, kdy není dostatečné osvětlení panelů a nevaně vítr). Palivový článek může v reverzním režimu rozkládat molekuly na vodík a kyslík a tyto produkty mohou být uskladněny v nádržích. V okamžiku, kdy je v jednotce malá spotřeba elektrické energie, ale panují vhodné podmínky pro tvorbu elektrické energie ze slunečního záření a větru, jsou tyto přebytky uloženy ve formě vodíku do nádrže. Naopak v okamžiku, kdy je potřeba elektrické energie a podmínky nedovolují využití fotovoltaiky či větru, vodík začne být slučován s kyslíkem v palivovém článku a tvořená elektrická energie uspokojí potřeby dané domácnosti.

Tyto myšlenky byly již realizovány například v ÚJV Řež, kde v současnosti probíhá testování za účelem co nejefektivnějšího řízení jednotlivých částí jednotky. Ve větším měřítku lze tento princip využít i pro fotovoltaické či větrné elektrárny, které následně mohou produkovat konstantní výkon. Právě fluktuace výkonu způsobují v současnosti závažné problémy při zapojení tohoto typu elektráren do rozvodné sítě. Riziko "blackoutu" se může využitím PEMFC výrazně eliminovat.

Výše uvedené myšlenky čeká ještě dlouhá cesta k masovějšímu rozšíření. Pro rozšíření palivových článků typu PEM je potřeba dalšího výzkumu, který pomůže snížit cenu celého zařízení, prodloužit životnost článku a zvýší spolehlivost zařízení (Borup, 2007). Poté však bude palivový článek plnohodnotnou alternativou zdroje elektrické energie.

4. Závěr

Vodíkové palivové články patří mezi významné technologie, které v budoucnu ovlivní náš každodenní život. Cílem tohoto příspěvku je zvýšit povědomí o těchto zařízeních a popsat největší problémy, které je potřeba vyřešit, aby došlo k výraznějšímu rozšíření PEMFC.



INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Protože se řešení těchto problémů jeví nadějně, je možné nahlížet na budoucí využití PEMFC optimisticky.

4 Použitá literatura

Larminie, J., Dicks, A.: *Fuel Cell System Explained*. John Wiley and Sons Ltd., Chichester 2003

M. Tomáš, P. Novotný: *PMFA* **58**, 28 (2013)

K.A. Mauritz, R.B. Moore: *Chem. Rev.* **104**, 4535 (2004)

Doucek, A., Čermáková, J., Polák, L.: Hydrogen technologies for energy storage applications. In: *5th International Conference on Hydrogen Technologies, Hydrogen Days 2014*. April 2 - April 4, 2015, Prague, Czech Republic. Prague: Institute of Chemical Technology, 2014, ISBN: 978-80-7080-878-8.

R. Borup et al: *Chem. Rev.* **107**, 3904 (2007)

5 Kontakt na autora

PhDr. Martin Tomáš, Ph.D.

Nové technologie - výzkumné centrum, Západočeská univerzita v Plzni

mtomas@ntc.zcu.cz

SOUČASNÉ OTÁZKY A PROBLÉMY ASTRONOMIE

Ondřej TRNKA

1 Úvod

Astronomie patří k nejstarším přírodním vědám. V průběhu času se měnily její priority i význam a stejně tak je tomu i v současnosti. Astronomie má v dnešní době mnoho cílů. Přednáška shrnuje základní přehled současných problémů a otázek astronomie i její vazby na ostatní vědní obory.

Zde bude Váš text. (Times New Roman, velikost 12, obyčejné, řádkování 1, předsazení prvního řádku 1 cm zleva, zarovnání do bloku). Text musí být členěn na odstavce. V textu nepoužívejte tučné formátování.

Citaci v textu provádějte podle normy ISO 690 následujícím způsobem: Text citace (Autor, rok vydání, případně strana). Např. (Skalková 2007, s. 322). Je-li jméno autora součástí věty, uvádí se do závorky jen rok vydání, případně číslo stránek. Pro uvádění zdroje citace nepoužívejte odkazy pod čarou ani jiné způsoby.

Středisko služeb školám, Plzeň, Částkova 78
Podpora talentovaných žáků v Plzeňském kraji
CZ.1.07/1.2.03/02.0001

Tento projekt je v letech 2012-15 financován z rozpočtu Plzeňského kraje

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

2 Z historie astronomie

Astronomie se zabývá sledováním kosmických těles, jejich pohyby a vlastnostmi. Na rozdíl od všech dalších přírodních věd si musela poradit jen s pohledem na dálku, protože, po většinu své historie neměla možnost si na předměty svého zkoumání „sáhnout“ či si je alespoň přenést do laboratoře. Současně se předmět zkoumání astronomie svým rozsahem, škálami i prostředím vždy poměrně odchyloval od předmětů ostatních vědních oborů, a tak astronomie krom jiného sloužila k testování a potvrzování pravidel známých na naší planetě i v širším měřítku celého vesmíru.

Dřívější otázky astronomie byly mnohé. Jejich odhalení mnohdy značně zahýbalo celkovým světovým názorem lidstva, a tak byla astronomie důležitá i pro filozofii a někdy i pro náboženství. Mezi dlouhodobé otázky, na které astronomie hledala a nacházela odpovědi, bylo například přesné určení času a polohy na Zemi i samotné Země ve vesmíru. Stejně tak jako uspořádání vesmíru a naše role v něm, hledání podstaty různých kosmických těles, objevení správných principů, na kterých funguje Sluneční soustava a mnohé další.

Astronomické metody byly užívány při určování polohy lodí, obzvláště po zavedení přesných hodin a sextantů, a patří k základním dovednostem kapitánů a navigátorů i ve 21. století. Letecká navigace podle astronomických objektů se využívala hojně ještě během II. světové války. Přesné určování času založené na astronomických metodách přesného měření rotace Země hrálo zásadní roli až do počátku 20. století, kdy bylo nahrazeno přesnějšími časovými normály křemenných a později atomových oscilátorů.

3 Současné postavení astronomie

Dříve spíše odloučená věda se s rozšiřujícími vědomostmi stále více zapojovala mezi ostatní přírodní vědy, protože hranice mezi pozemským světem a kosmem se postupně smazávaly a v dnešní době je průzkum pozemské přírody veden stejným, či obdobným způsobem, jako průzkum vesmíru jako celku. Na celou věc lze nahlédnout dvěma pohledy:

1. Vesmír zkoumá mnoho vědních disciplín.
2. Astronomie má v současnosti mnoho podoborů, které zasahují téměř do všech přírodních věd.

Druhé tvrzení je zřejmě blíže pravdě, protože ačkoli v celém vesmíru platí stejné fyzikální zákony, stejně jako zákony chemické i jiné, existují podobory, které nahlíží na vesmír z hlediska daného oboru. Jde zejména o astrofyziku, astrochemii a astrobiologii. Všechny vznikly kombinací daného oboru a astronomie, která svým vývojem umožnila získávat data, která jsou pro dané odvětví podstatná.

Astronomie se řadí k těm oborům, které přispívají hlavně v primárním výzkumu, tedy v obecném výzkumu základních principů, zákonů a faktů. Její přínos pro aplikované vědy a rozvoj technologií je spíše minoritní, ovšem vzhledem k tomu, že astronomie je dlouhodobě spjata s vysokými nároky na pozorovací a detekční techniku, je také hnacím motorem v řadě technických oblastí. A inovace vyvinuté při vývoji astronomických přístrojů mohou být využity i v běžném životě.

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Zde bude Váš text. (Times New Roman, velikost 12, obyčejné, řádkování 1, předsazení prvního řádku 1 cm zleva, zarovnání do bloku) Text musí být členěn na odstavce. V textu nepoužívejte tučné formátování.

Některé současné otázky astronomie:

Vývoj raného vesmíru

- Jakým způsobem testovat teorie o nejranějších fázích vývoje Vesmíru?
- Jaký druh prostředí, hmoty, či zákonů mohl panovat před existencí časoprostoru?
- Pokud čas a prostor nejsou základní v nejhlubším vědeckém popisu Vesmíru, jak vznikly?

Multiversum

Je náš pozorovatelný Vesmír jedinečný, nebo je součástí mnohem většího multiversa?

- Může být teorie multiversa empiricky testována? Pokud ano, tak jak? Pokud ne, jaký je vědecký a gnozeologický statut těch domén, které nemohou být pozorovány?
- Jaké jsou typické charakteristiky multivers, založených na rozdílných kvantových kosmologiích?
- Mnoho teorií multiversa vyvolává představu nekonečna, jako části vlastního vysvětlovacího aparátu. Může být svět fyzicky nekonečný?

Složitost Vesmíru

Jaký je původ složitosti Vesmíru?

- Jaké jsou nutné podmínky pro Vesmír, aby se vyvinul do vysokého stupně složitosti?
- Jaká jsou klíčová stádia zvyšování složitosti Vesmíru? Jak k nim došlo?
- Bude složitost Vesmíru pokračovat, či dokonce narůstat? Pokud ano, jak dlouho? Existují teoretické limity složitosti Vesmíru?

Život ve Vesmíru

Jsmo ve Vesmíru sami? Nebo, existuje jiný život a inteligence za hranicemi Sluneční soustavy?

- Jaké jsou známky existence života a inteligence ve Vesmíru?
- Může „jemné vyladění“ Vesmíru pro život také znamenat, že tento je vzácný?
- Do jaké úrovně mohou být ostatní bytosti podobné či shodné s lidmi? Jsou v přírodě vlastnosti, které mohou omezit úroveň inteligence, či rozdílnost, kterou můžeme očekávat?

4 Současná astronomie

Současnou astronomii lze rozdělit na dvě základní části:

- Teoretická astronomie – ta představuje teoretické úvahy, matematické modely a simulace.
- Praktická astronomie – praktické metody pozorování a zkoumání Vesmíru. Mezi hlavní patří astrometrie, fotometrie, spektrometrie a polarimetrie.

Dále však k astronomii patří další významné obory:

- Kosmologie – řeší Vesmír jako celek.

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

- Astrofyzika – nahlíží na Vesmír z fyzikálního hlediska.
- Přístrojová astronomie – návrhy a vývoj dalekohled, detektorů, atd.
- Astrobiologie – hledání podmínek vhodných pro život, i života samotného.
- Astrochemie – pátrání po prvcích a sloučeninách a zjišťování jejich původu.
- Kosmonautika – pilotovaný i robotizovaný průzkum z oběžné dráhy, kontaktní průzkum na jiných tělesech Sluneční soustavy atd.

5 Blízký Vesmír

Mezi současné nevýznamnější oblasti výzkumu v blízkém Vesmíru, tedy v naší Sluneční soustavě patří planetologie, výzkum historie a dlouhodobého vývoje Sluneční soustavy, rizika srážek meziplanetární hmoty se Zemí a také kosmické počasí.

Planetologie

- Využívá zkušeností mnoha oborů věd o Zemi, přenesených do prostředí ostatních planet. Meteorologie, klimatologie, geologie, vulkanologie, geodézie.
- Využívá pozorovacích dat, dat z kosmických sond a z teoretických modelů.

Historie a další vývoj Sluneční soustavy

- Stáří 4.56 mld. let.
- Průzkum na různých tělesech.
- Část materiálu od vzniku Sluneční soustavy nepřeměněna.

Kosmické počasí a možnosti jeho předpovídání

- ohřev koróny
- chování plazmatu při erupcích
- předpověď chování aktivních oblastí

Rizika srážek s meziplanetární hmotou

- planetky, komety, meziplanetární prach
- hledání křížičů
- průzkum negravitačních vlivů
- otázky transportu života

6 Vzdálený Vesmír

Ve vzdáleném Vesmíru se nyní astronomie zaměřuje hlavně na hledání exoplanet, tedy planet u jiných hvězd, měření základních parametrů Vesmíru a dále na zkoumání exotických objektů, produkujících vysoké množství energie.

Exoplanety

- Současný počet: 1821 (i s kandidáty > 5 000).
- Řada způsobů detekce.
- O některých víme mnohé, o jiných téměř nic.
- Zatím žádná „druhá Země“ ani žádná „druhá Sluneční soustava“.

Základní parametry Vesmíru

- Důležité kvůli modelům a kvůli odhadu vývoje Vesmíru.
- Pokud by byly parametry jen trochu jiné, nevznikl by Vesmír, jaký známe.

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

- Velkými otázkami jsou Temná hmota a Temná energie.
Exotické objekty
- kvasary
 - Objev v roce 1960.
 - Vysvětlení - aktivní jádra galaxií.
 - Využití - vhodné referenční body na obloze pro definici souř. systémů.
- supermasivní černé díry
 - Typ velkých černých děr.
 - Hmotné objekty v jádrech galaxií (možná i v kulových hvězdokupách).
 - Aktivní i neaktivní.
 - Nejhmotnější objevená: 5 mld. Ms.
 - SMČD v nitru Galaxie: 4 100 000 Ms.
- blazary
 - Podskupina Kvasarů.
 - „Jet“ směřuje v linii pozorovatele.
 - Zřejmě nejenergetičtější objekty ve Vesmíru.
- magnetary
 - Neutronová hvězda s velmi silným magnetickým polem.
 - Jeden ze zdrojů „Gama záblesků“.
 - Při uvolňování magnetické energie dochází k „magnetotřesení“.
- hypernovy
 - Nejmasivnější známé hvězdy.
 - V podstatě nežijí, záhy po zformování explodují – velmi rychlá produkce těžkých prvků.

7 Závěr

Současná astronomie se stala komplexní vědou, která má své nezastupitelné místo při poznávání přírodních zákonů i celého Vesmíru. Řeší řadu otázek, z nichž mnohé mají nemalý vliv, či potenciální vliv na lidskou společnost. Často využívá nejmodernější metody a svými nároky určuje směr vývoje mnohých technologií. Navíc se jedná o vědu všeobecně atraktivní. Bohatě lze využívat jejího potenciálu vizuálně atraktivních výsledků při školní výuce.

8 Kontakt na autora

Bc. Ondřej Trnka
Hvězdárna a planetárium Plzeň
trnka@plzen.eu

ZÁKLADNÍ CHARAKTERISTIKY HVĚZD

Ondřej TRNKA

1 Úvod

Hvězdy jsou asi nejznámějšími objekty ve vesmíru. Samotná věda astronomie je pojmenována právě podle hvězd. Hvězdy představují naprostou většinu zářící baryonové hmoty ve vesmíru. Jsou to v pravdě továrny, které ve svých nitrech přeměňují lehké prvky na těžší a zásadně tak přispívají k rozmanitosti vesmíru. Jen v naší Galaxii je hvězd několik stovek miliard. Nejsou však všechny stejné a právě o podobnostech a rozdílnostech hvězd a o jejich kategoriích a dělení pojednává přednáška Základní charakteristiky hvězd.

2 Definice hvězdy a dělení charakteristik

Než se začneme bavit o vlastnostech hvězd, měli bychom si hvězdy definovat. Hvězdou je takové vesmírné těleso, jehož hmotnost a další parametry dostačují k tomu, aby alespoň po část své existence, v jeho nitru probíhaly termojaderné reakce.

Charakteristiky hvězd se dělá na tři základní skupiny: vnější relativní charakteristiky, vnější absolutní charakteristiky a vnitřní charakteristiky.

Vnější relativní charakteristiky se vyznačují tím, že jsou závislé na vzájemné poloze hvězdy a pozorovatele. Typickým představitelem je relativní jasnost, která závisí na zářivém výkonu a na vzdálenosti hvězdy. Určuje se v magnitudách. I samotná vzdálenost může být relativní charakteristikou hvězdy.

Vnější absolutní charakteristiky nejsou závislé na poloze hvězdy a hodí se pro různá srovnávání. Tyto hodnoty však nejsou nezávislé na čase, protože v průběhu života hvězdy se téměř všechny parametry hvězdy proměňují. Mezi absolutní parametry patří absolutní jasnost, závislá pouze na zářivém výkonu. Ta udává, jak by hvězdy zářily v jednotkové vzdálenosti. Dále sem patří například povrchová teplota, zářivý výkon, poloměr, hmotnost a chemické složení.

Poslední skupinou jsou vnitřní charakteristiky. Z nich mají význam především centrální tlak a centrální teplota, protože právě na nich závisí typ a vydatnost termojaderných reakcí a tedy i zářivý výkon hvězdy.

3 Slunce

Pokud chceme srovnávat hvězdy, je vhodné zvolit si jednu z nich jako referenční. V našem případě to bude Slunce. Hvězda k nám nejbližší, kterou všichni dobře známe a i astronomicky je nejlépe prozkoumána.

Základní parametry Slunce:

- průměr 1 391 000 km (109 průměrů Země)
- hmotnost $1,989 \times 10^{30}$ kg (330 000 hmotností Země)
- rotace od 27 dní na rovníku po 31 na pólech
- teplota povrchu 6 000 K
- teplota jádra 15 000 000 K

Středisko služeb školám, Plzeň, Částkova 78
Podpora talentovaných žáků v Plzeňském kraji
CZ.1.07/1.2.03/02.0001

Tento projekt je v letech 2012-15 financován z rozpočtu Plzeňského kraje

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

- spektrální třída G2
- jasnost relativní -26.8 mag., absolutní +4,1 mag.
- zářivý výkon 4×10^{26} W

Slunce je uvnitř uspořádáno do "slupek". Jádru pá asi desetinu průměru a produkuje téměř veškerou energii. Nad ním je vrstva v zářivé rovnováze, ve které se energie přenáší hlavně formou záření. Ta sahá přibližně do dvou třetin průměru Slunce. Poslední vrstvou je konvektivní vrstva, ve které se energie přenáší hlavně konvekcí. Zářícímu povrchu Slunce říkáme fotosféra. Je to vrstva o tloušťce jen několika stovek kilometrů. Z ní k nám přichází naprostá většina záření Slunce. Nad fotosférou jsou ještě dvě další vrstvy atmosféry, chromosféra a koróna.

4 Slunce mezi hvězdami

Budeme-li porovnávat hmotnosti hvězd se Sluncem, zjistíme, že Slunce je přibližně v polovině rozsahu možných hodnot. Méně hmotné hvězdy nazýváme červenými trpaslíky a jejich nejnižší hmotnost je 0,08 hmotnosti Slunce. Oproti tomu hvězdy podstatně hmotnější než Slunce se nazývají obří, či veleobří a jejich hmotnost se pohybuje v jednotkách až desítkách hmotností Slunce. Vůbec nejhmotnější hvězdy mohou dosáhnout hmotností asi 150 až 300 násobně převyšující hmotnost Slunce. Takové hvězdy jsou však velmi vzácné. V hmotnostech se hvězdy liší až v poměru 1:1000. Málo hmotné hvězdy vůbec nevzniknou, protože gravitační síly nejsou dostatečně veliké, aby tlak a teplota v centru umožnily zapálení termonukleární syntézy. Příliš hmotné hvězdy se již při vzniku rozpadají na menší. Hmotné hvězdy se vyvíjejí podstatně rychleji než méně hmotné, takže i jejich „životní kariéra“ je podstatně kratší. Hmotnosti hvězd se během jejich existence mění jen minimálně. Výjimkou jsou pouze případy těsných dvojhvězdy, kdy se v určitých stádiích může přenášet hmota z jedné hvězdy na druhou.

Co do rozměrů se hvězdy liší podstatně více. Nejmenší pozůstatky hvězd - neutronové hvězdy průměr řádově 10 km. Největší rudí veleobří mají průměr řádově $2\,000 \times$ větší, než Slunce. Navíc hvězdy svůj rozměr zásadně mění v závislosti na aktuálním stavu vývoje hvězdy.

Dalším parametrem hvězd je zářivý výkon. Tento parametr se u jednotlivých typů hvězd odlišuje asi nejvíce. Zatímco málo hmotné hvězdy mají nepatrný zářivý výkon, velmi hmotné hvězdy Slunce mnohanásobně přezáří. Krajiní hodnoty jsou $1,5 \times 10^5$ zářivého výkonu Slunce u červených trpaslíků a $10\,000\,000 L_S$ u velmi hmotných hvězd.

Vzdálenosti hvězd měříme obvykle v astronomických jednotkách, protože základní jednotky SI jsou pro požadované vzdálenosti příliš malé. Pro měření ve Sluneční soustavě využíváme astronomickou jednotku (au), která představuje střední vzdálenost Země od Slunce.

$$1 \text{ au} = 149\,597\,892 \text{ km}$$

Pro vzdálenosti v galaxii a dále používáme buď světelný rok (ly) nebo parsec (pc). Světelný rok je tedy vzdálenost, kterou urazí světlo ve vakuu za dobu jednoho roku. Tato jednotka je spíše v populární literatuře, ale věda ji nemá příliš v oblibě, protože není stanoveno, o jaký rok se jedná.

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

$$1 \text{ ly} = 9,454 \times 10^{12} \text{ km}$$

Druhá jednotka parces je odvozena z paralaktického měření vzdálenosti a odpovídá vzdálenosti, ze které by byl viditelný kolmo poloměr oběžné dráhy Země okolo Slunce pod úhlu jedné obloukové vteřiny.

$$1 \text{ pc} = 3,26 \text{ ly} = 30,857 \times 10^{12} \text{ km}$$

Povrchové teploty hvězd souvisí se zářivým výkonem a velikostí hvězdy. Na nich záleží, kolik energie prochází jednotkou plochy povrchu hvězdy a tedy i jaká je efektivní teplota povrchu. Povrchové teploty se pohybují v rozmezí od 2 000 K do asi 100 000 K. Přitom na teplotě závisí také barva hvězdy. Nejchladnější září nejvíce v infračervené a červené části spektra a nejteplejší v modré a ultrafialové části spektra.

Podle chemického složení rozlišujeme u hvězd, zda jsou složeny jen z vodíku a helia, nebo zda obsahují i těžší prvky, které musely být vytvořeny v jiných hvězdách. Podle toho se hvězdy dělí na dvě populace:

Populace I představuje mladší hvězdy, vytvořené z mezihvězdné látky obohacené o těžší prvky než H a He. Hvězdy jsou soustředěny kolem roviny Galaxie.

Populace II jsou starší hvězdy, vytvořené z původní materie, neobsahující těžší prvky. Vyskytují se v celém objemu Galaxie.

5 Metody astronomického průzkumu

Pokud chceme o hvězdách zjistit výše zmíněné informace, musíme použít některé metody astronomického průzkumu. Ty základní jsou astrometrie, fotometrie a spektrometrie.

Astrometrie se používá pro přesné určení polohy hvězd (a dalších objektů) buď na obloze, nebo v prostoru, pokud můžeme změřit i vzdálenost k objektu. Kromě určení polohy dokáže astrometrie také měřit některé pohybové vlastnosti. To může být užitečné například pro zjišťování hmotností.

Fotometrie se zabývá měřením jasu hvězd. Měří tedy světelný tok přicházející od jednotlivých hvězd. U řady hvězd není tato hodnota stálá, ale hvězdy jsou proměnné. Variace jasnosti pak může odhalit mnoho z fyzikálních dějů ve hvězdě, či například odhalit nerozlišitelného průvodce, který hvězdu občas zakrývá.

Spektrometrie je obor, který dokáže o hvězdách odhalit nejvíce informací. Při spektrometrii se světlo hvězdy rozkládá na spektrum a proměřuje se intenzita jasu hvězdy v jednotlivých vlnových délkách. Při této metodě je možné odhalit chemické složení v povrchových vrstvách hvězdy, povrchovou teplotu, ale i tlak, velikost, magnetické pole a další a další parametry.

6 Klasifikace hvězd

Poté, co jsme si hvězdy jednoduše popsali, můžeme je začít klasifikovat podle různých vlastností. Pro přehlednou a jednoduše zapamatovatelnou klasifikaci používáme tzv. Hertzsprung-Russelův (HR) diagram. Tento graf má na obou osách vyneseno několik veličin, které spolu souvisí. Na svislé ose lze najít zářivý výkon a absolutní magnitudu, které spolu úzce souvisí. Na vodorovné ose je pak vynesena povrchová teplota, barva a spektrální třída.

Hvězdy se v HR diagramu nevyskytují všude. Jsou v něm místa se zvýšenou koncentrací hvězd a místa, kde se hvězdy nevyskytují. Nejvýraznější oblast výskytu je hlavní

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

posloupnost, kde se vyskytují hvězdy během hlavní fáze života. Nad hlavní posloupností se nachází oblasti červených obrů a veleobrů. Tam se některé hvězdy dostávají v pozdějších fázích svého života. Ve spodní části je pak oblast bílých trpaslíků, což je jedno z koncových stádií hvězd, které potká mimo jiné i naše Slunce.

Spektrální třídy rozlišují hvězdy podle základních prvků ve hvězdných spektrech, tedy hlavně podle absorpčních čar jednotlivých chemických prvků a také podle povrchové efektivní teploty.

7 Vývoj hvězd a těsných dvojhvězd

Hvězdy vznikají z obrovských pracho-plynných mlhovin, označovaných molekulová mračna. Nevznikají osamoceně, ale ve skupinách po desítkách a po stovkách. Molekulové mračno může být velmi dlouhou dobu stabilní, síly které se jej snaží rozptýlit do prostoru, jsou v rovnováze s gravitační silou, která se ho naopak snaží kontrahovat. Rozptylné síly jsou hlavně odstředivá síla, tlak záření, turbulence, teplo a magnetické síly.

Spuštění kontrakce se děje teprve po vychýlení z tohoto rovnovážného stavu. To může způsobit například blízká exploze supernovy, průchod rázové vlny na náběžné hraně spirálního ramene galaxie, nebo srážka dnou molekulových oblaků.

Při kontrakci narůstá uvnitř oblaku hustota a teplota, která kontrakci brzdí. Oblak se proto musí ochlazovat, aby se mohl dobře smršťovat. O to se starají hlavně prachová zrna, která vyzářují přebytečnou energii jako tepelné záření.

Protože oblak nebyl z počátku zcela homogenní, vznikají v oblaku hustší jádra, která se smršťují rychleji než řídkší okolí. Smršťování se fragmentuje, dokud nevzniknou gravitační centra, jednotlivých zárodků hvězd.

Nejhmotnější shluky, které mohou ještě určitou dobu existovat jako prahvězdy, mají hmotnost několik málo stovek hmotností Slunce. Jejich intenzita záření však rychle narůstá natolik, že tlak záření těleso opět rozmetá do prostoru.

Mladé obří hvězdy také krátce po svém vzniku odfouknou tlakem záření přebytečný řídký materiál molekulového oblaku a odhalí globule - zhustky okolo jednotlivých prahvězd. Po vývoji všech prahvězd ve hvězdy vzniká otevřená hvězdokupa. Hvězdy v ní však nejsou dostatečně gravitačně vázané a časem se rozlétnou do prostoru galaxie.

Prahvězdy se v H-R diagramu objevují v pravé spodní polovině. Jsou to tedy chladné, nepříliš zářící objekty, které zatím září jen díky neustálému smršťování. Takto se dostanou až na Hyashiho linii, kde dochází k ustálení tělesa protohvězd do hydrostatické rovnováhy. Další vývoj přesouvá hvězdy na hlavní posloupnost. Na té hvězdy přeměňují převážně vodík na helium při termojaderné reakci pojmenované proton-protonový řetězec (p-p řetězec). Doba přechodu na hlavní posloupnost závisí na hmotnosti hvězdy. Čím hmotnější hvězdy jsou, tím rychleji a výš na hlavní posloupnost se dostávají.

Osamocená hvězda má pak svoji životní dráhu určenou svojí hmotností. Ta určuje intenzitu reakcí uvnitř hvězdy, tím i zářivý výkon a čas, po který hvězda září. Hmotné hvězdy mají sice krátkou, ale velmi zářivou existenci, na jejímž konci dochází k explozi supernovy. Méně hmotné hvězdy, podobné našemu Slunci září mnohonásobně méně, ale mohou zářit i deset miliard let. Jejich konec není tak dramatický, po odhození horních vrstev jako planetární

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

mlhoviny z nich zůstává jen obnažené vyhořelé jádro - bílý trpaslík. Málo hmotní červení trpaslíci pak se svojí energií velmi šetří a proto září jen velmi nepatrně. Na oplátku však mohou zářit dlouhé desítky miliard let a nakonec pouze zhasnou, aniž by došlo k explozi.

Složitější situace je u těsných dvojhvězd, kde může v určitých fázích vývoje docházet k přenosu hmoty z jedné hvězdy na druhou.

8 Zdroje energie ve hvězdách

Zdrojem záření hvězd jsou termojaderné reakce, při kterých se přeměňují lehčí prvky na těžší. Při tom se uvolňuje energie, která jednak jako elektromagnetické záření ohřívá těleso hvězdy. Další část energie odlétá ve formě neutrin, které s hmotou interagují jen velmi vzácně a tak většina této energie okamžitě opouští hvězdu.

Nejtypičtější reakce je proton-protonový řetězec, který převládá hlavně u mladších a méně hmotných hvězd. Při p-p řetězci se přeměňuje vodík na helium. Aby k tomu došlo, musí se nejdříve srazit dva protony (jádra vodíku), které vytvoří nestabilní jádro deuteria a uvolní se při tom pozitron a neutrino. Pokud se jádro deuteria před svým rozpadem srazí s dalším protonem, vzniká stále ještě nestabilní jádro helia ${}^3\text{He}$ a gama foton. Když se však stihnou před svým rozpadem srazit dvě jádra ${}^3\text{He}$, vznikne stabilní jádro helia ${}^4\text{He}$ a uvolní se dva protony. Řetězec je dokončen a při každé z jeho srážek se uvolnila energie.

V případě, že reakce vytvoří dostatek helia a v nitru hvězdy ještě naroste teplota a tlak, začnou se prosazovat další reakce. S pomocí 3-alfa záchytu se začnou vždy tři heliová jádra spojovat do jádra uhlíku. Následně může u hvězd, hmotnějších než Slunce převládnout složitější, ale také vydatnější CNO cyklus.

Pokud mají hvězdy dostatečnou hmotnost, mohou se různými reakcemi dostat až k přeměně křemíku na železo. Jádro železa je však poslední, při jehož tvorbě se vytváří energie. Fúzní reakce těžších prvků energii naopak spotřebovávají a nelze je tedy využívat jako palivo. Přesto se tyto prvky v přírodě vytváří. Je to zejména při explozích supernov, při kterých teplota a tlak v explodované hvězdě narůstá tak, že se mohou vytvářet i těžší prvky a při těchto reakcích se část energie supernovy naopak pohlcuje.

9 Závěr

Základní charakteristiky hvězd patří do základního astrofyzikálního vzdělání. Nejen že poskytují vhodnou pomůcku při pozorování hvězd, protože je možné je díky těmto charakteristikám rozlišovat a rozčleňovat, ale jejich poznání nám také poskytlo důležitý vhled do fungování vesmíru a přeměny hmoty v něm.

10 Kontakt na autora

Bc. Ondřej Trnka
Hvězdárna a planetárium Plzeň
trnka@plzen.eu

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

ARCHIMÉDŮV ZÁKON

Josef VESELÝ

1 Úvod

Archimédův zákon patří mezi nejznámější fyzikální zákony, již méně je znám rozdíl mezi laickou a odbornou verzí zákona. Rovněž řešení zajímavějších úloh s touto tematikou „dá zabrat“. Proč kvádr plove jenom v jedné poloze?

Pojďme hledat odpovědi a řešit úlohy.

2 Formulace zákona a jeho užití

„Laická“ verze uvádí: „Těleso ponořené do kapaliny je nadlehčováno vztlakovou silou, která je rovna tíze kapaliny tělesem vytlačené.“

Odborná formulace (např. Svoboda, str. 124): Na těleso ponořené do kapaliny působí hydrostatická vztlaková síla, jejíž velikost se rovná tíze kapaliny stejného objemu, jako je objem ponořené části tělesa.

V čem jsou hlavní rozdíly? První verze nebere v úvahu opačný směr tíhy a vztlakové síly. Dále v nádobě před vnořením tělesa mohl být menší objem kapaliny, než je následně objem ponořené části tělesa.

2.1 Úlohy o vztlakové síle

Příklad 1.

Jak velkou silou působí na dno nádoby závaží o hustotě $5\,000\text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$ o hmotnosti $0,50\text{ kg}$, které je zcela ponořeno do vody o hustotě $1000\text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$. Tíhové zrychlení $g = 9,8\text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$.

Řešení:

Označíme $\rho_z = 5\,000\text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$, $m = 0,50\text{ kg}$, $\rho = 1000\text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$, $g = 9,8\text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$; $F = ?$

$$F = F_G - F_{VZ} = mg - \rho Vg = mg - \rho mg / \rho_z = \underline{mg(1 - \rho/\rho_z)}$$

Numericky pro zadané hodnoty: $\underline{F = 3,9\text{ N}}$

Příklad 2.

Hliníkové těleso je zavěšeno na siloměru a zcela ponořeno do kapaliny o hustotě $1200\text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$. Dna nádoby ani stěn se nedotýká. Na siloměru odečteme sílu $2,0\text{ N}$. Jak velkou sílu naměříme po vnoření tělesa? Tíhové zrychlení $g = 9,8\text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$.

Řešení:

Označíme $\rho = 1200\text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$, $F_1 = 2,0\text{ N}$, $\rho_{Al} = 2700\text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$ (MFCHT, str. 131), $F_2 = ?$

$$F_1 = F_G - F_{VZ} = mg - \rho mg / \rho_{Al}$$

$$F_2 = F_G = mg$$

Řešením soustavy dostaneme

$$F_2 = \frac{F_1}{1 - \frac{\rho}{\rho_{AI}}}$$

Numericky pro zadané hodnoty $F_2 = 3,6 \text{ N}$

Další úlohy Chytilová, str. 22 až 24.

2.2 Plování a ponor těles

Je-li hustota tělesa ponořeného do kapaliny větší než hustota kapaliny, těleso klesne ke dnu. Budou-li hustoty stejné, těleso se v kapalině volně vznáší. Je-li hustota tělesa menší než hustota kapaliny, těleso se částečně vynoří a plove na hladině. Stejná tvrzení platí i pro těleso v plynu, např. ve vzduchu, pouze s tím rozdílem, že vzduch netvoří hladinu, ale s výškou jeho hustota klesá.

Příklad 3.

Dřevěný špalík plove na vodní hladině tak, že $\frac{1}{4}$ jeho objemu je vynořena nad hladinou. Určete průměrnou hustotu špalíku.

Řešení:

Označme V_1 objem vynořené části, V_2 objem ponořené části špalíku, V objem špalíku, ρ_s hustotu špalíku, hustota vody $\rho = 1000 \text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$.

Při plování platí $F_G = F_{VZ}$

$$mg = \rho V_2 g$$

$$\rho_s (V_1 + V_2) = \rho V_2$$

$$\rho_s V = \rho \frac{3}{4} V$$

$$\underline{\underline{\rho_s = \frac{3}{4} \rho = 750 \text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}}}$$

Průměrná hustota špalíku je $750 \text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$.

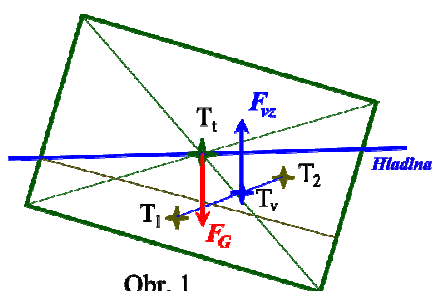
2.3 Rovnovážná poloha plovoucího tělesa

Co rozhoduje o tom, zda plovoucí těleso je v rovnovážné poloze volné, vratké nebo stálé? Homogenní koule, která plove na hladině, se může libovolně otáčet, „drží“ v každé poloze. Homogenní kvádr se vždy převrací tak, aby největší stěny byly vodorovné.

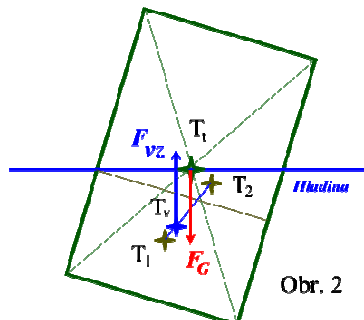
Pootočíme-li výše uvedenou kouli, nezmění se poloha jejího těžiště ani poloha těžiště „vytlačené vody“, obě těžiště zůstávají na svislé přímce a žádný moment síly nutný pro další otáčení nevzniká. Jedná se o rovnovážnou polohu volnou (indiferentní).

Jinak je tomu u kvádrů. Plove-li kvádr na „plocho“ a vychýlíme jej z rovnovážné polohy, vytvoří tíhová a vztlaková síla dvojici sil, jejíž moment vrací kvádr zpět (viz obr. 1). Jedná se o rovnovážnou polohu stálou (stabilní).

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ



Obr. 1



Obr. 2

Pokusíme-li kvádr „postavit“ na menší základnu, bude se převracet. Při vychýlení z této rovnovážné polohy vytvoří tíhová a vztlaková síla opět dvojici sil, tentokrát její moment uvádí kvádr do otáčivého pohybu (viz obr. 2), kvádr se převrací do rovnovážné polohy stálé. Původní rovnovážná poloha byla vratká (labilní).

Úloha k samostatnému řešení

Ověřte graficky výše uvedená pravidla pro kvádr. Obrázky sestrojte pro kvádr o rozměrech 10cm x 6cm x 6cm o hustotě rovnající se polovině hustoty kapaliny.

Poznámka: Účastníci kempu pravidla úspěšně ověřili.

3 Závěr

Žáci si zopakovali Archimédův zákon a hlouběji pochopili význam jeho formulace. Po procvičení je užití zákona velmi jednoduché.

Bylo jim doporučeno studium dalších titulů z „Knihovničky FO“.

4 Použitá literatura

SVOBODA, E. Přehled středoškolské fyziky, 1. vydání Praha: SNP 1991 ISBN 80-04-22435-0

CHYTILOVÁ, M. Archimédův zákon, MAFY Hradec Králové 1996

MIKULČÁK J. a kol. Dotisk 1. vydání Praha: SPN, 1988 15084/87-210

5 Kontakt na autora

Mgr. Josef Veselý
Gymnázium Jaroslava Vrchlického Klatovy
jvesely@gymkt.cz

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

SLOŽITĚJŠÍ ÚLOHY Z DYNAMIKY

Josef VESELÝ

1 Úvod

Také úlohy z dynamiky jsou pravidelně zařazovány ve všech kolech soutěže fyzikální olympiády, mnohdy vyžadují důkladné promyšlení, proto je vhodné procvičit jejich řešení. Úlohy často řešíme za zjednodušujících předpokladů. Je však takové řešení použitelné? To může rozhodnout pouze experiment.

2 ZÁKONY A PRAVIDLA

Klasická dynamika vychází z Newtonových pohybových zákonů. Jedná se o 1., 2. a 3. pohybový zákon, názorně též nazývané zákon setrvačnosti, zákon síly a zákon akce a reakce.

Druhý pohybový zákon má obecnější tvar

$$\mathbf{F} = \frac{d\mathbf{p}}{dt} = \frac{d(m\mathbf{v})}{dt},$$

při konstantní hmotnosti $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$

2.1 Síla, rychlost, výkon

Příklad 1.

Letadlo o hmotnosti m startuje rovnoměrně zrychleným pohybem na dráze s a dosáhne rychlosti o velikosti v . Vypočítejte velikost zrychlení a , velikost průměrné síly F , průměrnou rychlost v_p , maximální výkon motoru P_M . Řešte nejprve obecně, potom pro hodnoty $m = 10$ t, $s = 300$ m, $v = 60$ m·s⁻¹.

Výsledky:

$$a = v^2/2s = 6 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}, \quad F = mv^2/2s = 60 \text{ kN}, \quad v_p = v/2 = 30 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}, \quad P_M = m \cdot v^3/2s = 3,6 \text{ MW}$$

2.2 Neinerciální vztažné soustavy

Neinerciální vztažné soustavy jsou takové, kde neplatí zákon setrvačnosti. Jedné se například o soustavu se zrychlením vzhledem k nějaké inerciální vztažné soustavě. V těchto soustavách působí na těleso o hmotnosti m setrvačná síla

$$\mathbf{F}_s = -m\mathbf{a},$$

kde \mathbf{a} je zrychlení soustavy.

Příklad 2.

Určete zrychlení soustavy (viz obr.) a sílu, která napíná závěs, $m_1 < m_2$.

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

- a) Hmotnost kladky a závěsu zanedbejte.
 b) Kladku považujte za válec o poloměru r a hmotnosti m_3 . Tření neuvažujte.
 c) Na základě měření rozhodněte, zda jsou vypočítané hodnoty zrychlení reálné.

Hmotnosti závaží jsou 50 g a 70 g, hmotnost kladky je 54 g, $g = 9,8 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$.

Řešení:

a) Obě závaží vykonávají stejný druh pohybu a mají stejně veliké zrychlení, oba závěsy jsou napínány stejně velikou silou F_p . Pro zrychlení a můžeme napsat výsledek (vycházející z pohybové rovnice pro celou soustavu):

$$a = \frac{F_{G2} - F_{G1}}{m_1 + m_2} = \frac{g(m_2 - m_1)}{m_1 + m_2}$$

Síly napínající závěsy jsou vnitřní síly, musíme je hledat z dílčích pohybových rovnic, např.

$$F_p - gm_1 = m_1 a$$

$$F_p = \frac{2gm_1 m_2}{m_1 + m_2}$$

Číselně $a = 1,6 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$, $F = 0,57 \text{ N}$.

b) Kladka koná jiný druh pohybu než závaží, zapíšeme tři dílčí pohybové rovnice, kde r je poloměr kladky, J je moment setrvačnosti kladky, ε úhlové zrychlení kladky:

$$F_{G2} - F_{p2} = m_2 a$$

$$(F_{G2} - F_{p2})r = J\varepsilon$$

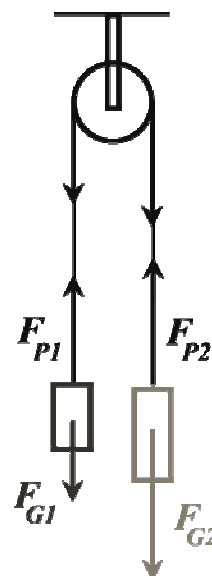
$$F_{p1} - F_{G1} = m_1 a$$

Použitím vztahů $J = \frac{1}{2}mr^2$ a $\varepsilon = \frac{a}{r}$ a řešením soustavy dostaneme

$$a = \frac{g(m_1 - m_2)}{m_1 + m_2 + \frac{1}{2}m_3}$$

$$F_{p1} = \frac{gm_1 \left(2m_2 + \frac{1}{2}m_3\right)}{m_1 + m_2 + \frac{1}{2}m_3}, \quad F_{p2} = \frac{gm_2 \left(2m_1 - \frac{1}{2}m_3\right)}{m_1 + m_2 + \frac{1}{2}m_3}$$

Číselně $a = 1,3 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$, $F_{p1} = 0,56 \text{ N}$, $F_{p2} = 0,34 \text{ N}$.



INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

c) Na základě měření dráhy a času jsme určili zrychlení soustavy $0,98 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$.

První postup je tedy nepoužitelný, ve druhém případě již dochází ke shodě při zaokrouhlení na jednu platnou cifru. Rozdíl vznikl zejména zanedbáním třecí síly v ose kladky, která jak vidno zcela zanedbatelná není.

Příklad 3.

V kabině výtahu je na siloměru zavěšeno těleso o hmotnosti m . Siloměr ukazuje sílu F . Určete zrychlení a kabiny. Pro numerické řešení použijte hodnoty $m = 2 \text{ kg}$, $F = 15 \text{ N}$, $g \doteq 10 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$

Výsledek: $|a| = |F/m - g| = 2,5 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$

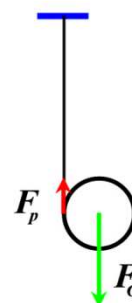
2.3 Valivý pohyb

Příklad 4.

„Špulka“ s nití je zavěšena za volný konec nitě tak, že padá svisle dolů a přitom se nití odmotává. Určete zrychlení posuvného pohybu „špulky“. Které parametry ovlivňují výsledek? Odchylku rozmotávané nitě od svislého směru, hmotnost nitě, odpor vzduchu a vztakovou sílu zanedbejte. Špulku považujte za váleček.

Řešení: Zapišeme dvě pohybové rovnice a řešíme soustavu

$$\begin{aligned} F_G - F_p &= ma \\ F_p r &= J\varepsilon \\ \hline F_G - F_p &= ma \\ F_p r &= \frac{1}{2} m r^2 \frac{a}{r} \\ \hline mg - F_p &= ma \\ F_p &= \frac{1}{2} ma \\ \hline g &= \frac{3}{2} a \Rightarrow a = \frac{2}{3} g \end{aligned}$$



Zrychlení špulky závisí pouze na jejím tvaru. Všechny válcové špulky padají se stejným zrychlením.

3 Závěr

Žáci si zopakovali a rozšířili metody řešení úloh v dynamice, procvičili řešení úloh o zrychleném valivém a zrychleném otáčivém pohybu, se kterými se málo setkávají při výuce fyziky ve škole.

Bylo jim doporučeno studium jednotlivých titulů z „Knihovničky FO“.

4 Použitá literatura

K použití literatury nedošlo, úlohy byly vytvořeny autorem pro fyzikální kemp pouze s využitím archivu autora.

5 Kontakt na autora

Mgr. Josef Veselý
Gymnázium Jaroslava Vrchlického Klatovy
jvesely@gymkt.cz

SLOŽITĚJŠÍ ÚLOHY Z KINEMATIKY

Josef VESELÝ

1 Úvod

Úlohy z kinematiky jsou pravidelně zařazovány ve všech kolech soutěže fyzikální olympiády, je proto vhodné procvičit jejich řešení.

Pro usnadnění postupu při řešení těchto úloh je často možné využít diferenciální počet, seznámíme se proto také s užitím derivace.

2 Derivace v kinematice

2.1 Pojem derivace

Derivaci funkce f podle proměnné x definujeme jako limitu

$$\frac{df(x)}{dx} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f(x)}{\Delta x},$$

ve fyzice často používáme derivace podle času, potom

$$\frac{df(t)}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta f(t)}{\Delta t}$$

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Polohu hmotného bodu ve vztažné soustavě můžeme určovat pomocí polohového vektoru $\mathbf{r} = (x, y, z)$. Okamžitá rychlost hmotného bodu je derivace polohového vektoru podle času a okamžitě zrychlení je derivace okamžité rychlosti podle času:

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt}, \quad \mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt}$$

Vzorce a pravidla pro derivování funkcí najdeme například v tabulkách.

2.2 Užití derivace

Derivaci funkce můžeme s výhodou použít například pro nalezení maxima funkce. Je-li funkce na nějakém intervalu spojitá a hladká (zde stačí tyto pojmy chápat intuitivně), má maximum tam, kde je derivace nulová a mění znaménko z „+“ na „-“.

Příklad 1.

Těleso vrhneme svisle vzhůru počáteční rychlostí v_0 o velikosti $30 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$ v homogenním tíhovém poli o tíhovém zrychlení $10 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$. Určete maximální výšku vrhu.

Řešení:

Pro řešení použijeme svislou vztažnou osu y s počátkem v místě startu orientovanou směrem vzhůru. Pro závislost souřadnice y na čase t a derivaci y podle t potom platí:

$$y = v_0 t - \frac{1}{2} g t^2$$

$$\frac{dy}{dt} = v_0 - g t$$

Nulový bod derivace je

$$t = \frac{v_0}{g}$$

a znaménko derivace se v tomto bodě mění z „+“ na „-“.

Pro zadané hodnoty dosáhne těleso maximální výšky v čase 3 s a výška bude 45 m.

3 Další úlohy z kinematiky

Příklad 2.

Detektiv Očko má za úkol najít viníka v případě vážného ublížení na zdraví, které postihlo pana Roubíčka. Pan Roubíček byl nalezen v bezvědomí a s velkou boulí na hlavě na chodníku před domem. Detektiv si všiml, že nedaleko leží rozbitý květináč. Jeho podezření ještě zesílil fakt, že v žádném okně květináč nechyběl. Zřejmě jej viník doplnil, aby zahladil stopy. Výšku pádu květináče by mohl odhalit záznam z kamery paní Zvídavé z prvního patra, kolem jejíhož okna musel květináč proletět.

Určete minimální frekvenci snímání kamery paní Zvídavé, jestliže maximální výška nad horním okrajem okna paní Zvídavé, ze které mohl květináč padat, je 22 metrů a výška okna je 180 cm. Předpokládejte volný pád a tíhové zrychlení počítejte $9,8 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$. Kamera snímá právě celé okno.

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Řešení:

Aby mohla být určena výška, musí být květináč alespoň na dvou následujících snímcích. Jistotu budeme mít, když za dobu T mezi následujícími snímky urazí květináč dráhu Δh menší než je polovina výšky okna d .

Označíme $h = 22$ m, $d = 1,8$ m, $g = 9,8$ m·s⁻²; $f = ?$

$$\Delta h = v_0 T + \frac{1}{2} g T^2$$

$$v_0 = \sqrt{2hg}$$

Řešením kvadratické rovnice nalezneme vyhovující kořen

$$T = \frac{-\sqrt{8hg} + \sqrt{8hg + hgd}}{2g}$$

Musí tedy být

$$f \geq \frac{2g}{-\sqrt{8hg} + \sqrt{8hg + hgd}} = 4,42 \text{ s}^{-1}$$

Kamera musí dělat alespoň 5 snímků za sekundu.

Příklad 3.

Osobní automobil o délce 5 m jede po dálnici rychlostí 126 km·h⁻¹. Před ním jede kamion o délce 15 m rychlostí 108 km·h⁻¹. Jak dlouhou dráhu potřebuje osobní automobil k předjíždění? Předjíždění začíná 10 m před kamionem a končí 10 m za ním.

Řešení:

Označme $l_1 = 5$ m, $l_2 = 15$ m, $d = 10$ m, $v_1 = 35$ m·s⁻¹, $v_2 = 30$ m·s⁻¹, $s_1 = ?$

Úlohu budeme řešit ve vztažné soustavě kamionu.

$$s_2 = (v_1 - v_2)t$$

$$t = \frac{s_2}{v_1 - v_2} = \frac{l_1 + l_2 + 2d}{v_1 - v_2}$$

$$s_1 = \frac{l_1 + l_2 + 2d}{v_1 - v_2} v_1$$

Číselně 280 m

Osobní automobil potřebuje k předjíždění 280m.

Příklad 4.

Automobil ujede 1 část dráhy s_1 za dobu t_1 , ve druhé části dráhy má průměrnou rychlost v_2 . Jak dlouho trvala celá jízda, jestliže průměrná rychlost celého pohybu je v_p ? Vypočítejte celkovou dráhu, rychlost na prvním úseku a délku druhého úseku. Úlohu řešte obecně.

$$[t = (s_1 - v_2 t_1) / (v_p - v_2), s = s_1 + v_2 (s_1 - v_p t_1) / (v_p - v_2)]$$

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Příklad 5.

Autobus jede rychlostí v_1 . Ve vzdálenosti d je značka omezující rychlost na v_2 . Reakční doba řidiče je t_1 . Určete potřebné průměrné zrychlení autobusu a . Řešte nejprve obecně, potom pro hodnoty $v_1 = 72 \text{ km}\cdot\text{h}^{-1}$, $d = 100 \text{ m}$, $v_2 = 36 \text{ km}\cdot\text{h}^{-1}$, $t_1 = 1 \text{ s}$,

$$[a = (v_1^2 - v_2^2) / 2(d - t_1 v_1); 15 / 8 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}]$$

4 Závěr

Žáci si zopakovali a rozšířili metody řešení úloh v kinematice, dále se seznámili s novými matematickými prostředky, které v mnoha případech usnadňují řešení úloh. Bylo jim doporučeno studium jednotlivých titulů z „knihovničky FO“.

5 Použitá literatura

K použití literatury nedošlo, úlohy byly vytvořeny autorem pro fyzikální kemp pouze s využitím archivu autora.

6 Kontakt na autora

Mgr. Josef Veselý
Gymnázium Jaroslava Vrchlického Klatovy
jvesely@gymkt.cz

ŠUMAVA

Václav VETÝŠKA

1. Šumava-obecní charakteristika pohoří Šumavy

Geografie, geologie, horniny, vodní toky, flora, fauna, osídlení, vysídlení, pohraničí(1952-1990), konec hraničního pásma, zemědělství, sklářství, lesnictví, zajímavosti, Šumavská nej, historie Kašperských hor, literáti Šumavy ap.

2.Závěr

Přednáška probíhala během cesty autobusem z Klatov do Čenkovy Pily. Zájem účastníků kempu 2015 byl dostačující, celkem bylo asi okolo 10 dotazů k přednášce.

3 kontakt na autora

Václav Vetýška
vety@centrum.cz