INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Podpora talentovaných žáků v Plzeňském kraji
Reg. č. CZ.1.07/1.2.03/02.0001

SBORNÍK

ODBORNÝ PŘÍRODOVĚDNÝ KEMP

BIOLOGIE, CHEMIE, MATEMATIKA

25. – 29. SRPNA 2014

WWW.PODPORATALENTU.CZ

TENTO PROJEKT JE FINANCOVÁN Z PROSTŘEDKŮ PLZEŇSKÉHO KRAJE.

Obsah:

BIOLOGICKÝ KEMP..... str. 1
CHEMICKÝ KEMP ..... str. 37
MATEMATICKÝ KEMP …… str. 67

evropský sociální fond v ČR
EVROPSKÁ UNIE
MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ, MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY
OP Vzdělávání pro konkurenceschopnost
PLZEŇSKÝ KRAJ
INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

PODPORA TALENTOVANÝCH ŽÁKŮ V PLZEŇSKÉM KRAJI

KEMP BIOLOGIE

SEŠLAPOVÉ POROSTY VE MĚSTECH NA PŘÍKLADU PLZNĚ

Zdeňka CHOCHOLOUŠKOVÁ

1 Úvod

Pro dnešní podobu měst je typická převaha tmavých výhřevných zpevněných substrátů (Pyšek, 1996), které vytváří zásadní podmínky pro existenci rostlinných druhů, které se zde mohou uplatnit. Novým fenoménem jsou zámkové dlažby, které nahradily dřívější dláždění z kamenných kostek. Převaha těchto substrátů v kombinaci s lidskými aktivitami (koncentrace lidí do měst, používání velkého množství vozidel), upřednostňuje druhy, které snášejí zhutňování substrátu, ať už chůzí lidí, nebo sjíždění vozidly. Takovým druhům říkáme sešlapové druhy a porostům, ve kterých se vyskytují sešlapové porosty.

Tyto porosty jednoletých nebo krátkověkých druhů jsou řazeny ke třídě: *Polygono arenastri-Poëtea annuae* Rivas-Martínez 1975 corr. Rivas-Martínez et al. 1991 (Chytrý, 2009). Porosty jsou často vlivem zhutňování a narušování rostlin mezernaté a pokud jsou tyto vlivy velmi intenzívní, rostliny zde nejsou schopny růst, a tyto plochy zůstávají bez vegetačního krytu (Pyšek et Chocholoušková, 2004).

2 Rostlinné druhy vyskytující se v sešlapových porostech

Rostlinné druhy, které rostou v sešlapových porostech jsou vystaveny neustálému narušování nebo i celkové destrukci. Výhodou je, že tato stanoviště jsou úživná, a proto tyto druhy mohou velmi rychle regenerovat. Patří mezi R (ruderální) nebo SR (stres-ruderální) stratégy (Grimme, 2001).

2.1 Typické druhy sešlapových porostů

Rostlinných druhů, které jsou schopny růst na těchto stanovištích, je relativně málo. Často mají listy v listové růžici nebo jsou schopny velmi rychlé obnovy. Následují příklady druhů, které dominují na sešlapových stanovištích

2.1.1 Jílek vytrvalý (*Lolium perenne*)

Vytrvalá nízkostébelná trsnatá tráva z čeledi lipnicovitých (*Poaceae*). V květenství bezosinné klásky nasedají užší stranou na vřeteno lichoklasu. Roste hojně na sešlapových stanovištích a dominuje v sešlapových trávnících. Často se do městských trávníků dosévá jílek mnohokvětý (*Lolium multiflorum*), který má pluchy dlouze osinaté.

2.1.2 Jitrocel větší (*Plantago major*)

Vytrvalá dvouděložná rostlina se širokými čepelemi listovými z čeledi jitrocelovitých (*Plantaginaceae*), které vytváří listovou růžici. V lidovém léčitelství se používají listy na zastavení krvácení.

2.1.3 Lipnice luční (*Poa annua*)

Nízkostébelná jednoletá tráva z čeledi lipnicovitých (*Poaceae*) s jednou až dvěma přísními větvemi na bázi laty. Dokáže vytvořit během jedné vegetační sezóny i několik generací. Vyskytuje se na místech, kde je více vlhko.

2.1.4 Truskavec obecný (*Polygonum arenastrum*)

Druh řazený do okruhu *Polygonum aviculare* agg. z čeledi rdesnovitých (*Polygonaceae*). Poléhavá bylina s listy na hlavních i postranních lodyhách stejně velkými (Kubát, 2002). Dobře snáší sešlap. V lidovém léčitelství se používá odvar z natě proti zánětům močových cest.

2.1.4 Jetel plazivý (*Trifolium repens*)

Bíle kvetoucí plazivý jetel z čeledi bobovitých (*Fabaceae*) rostoucí často v sešlapových trávnících, které jsou ve městech často několikrát ročně koseny.

2.2 Vybrané vzácnější druhy sešlapových porostů

Na sešlapových stanovištích se uplatňují i druhy, které často přehlížíme, ale jsou nedílnou součástí naší květeny.

2.2.1 Milička menší (*Eragrostis minor*)

Nízká tráva z čeledi lipnicovitých (*Poaceae*) rostoucí často i v zámkových dlažbách. Tento druh dobře snáší sešlap a v posledních letech se velmi šíří.

2.2.2 Průtržník lysý (*Herniaria glabra*)

Poléhavá, nenápadná bylina z čeledi hvozdíkovitých (*Caryophyllaceae*) rostoucí jak ve spárách dlažebních kostek, tak v zámkových dlažbách.

2.2.3 Kuřinka červená (*Spergularia rubra*)

Malá poléhavá růžově kvetoucí rostlina z čeledi hvozdíkovitých (*Caryophyllaceae*) vyskytující se na sešlapových stanovištích.

2.2.3 Šrucha zelná (*Portulaca oleracea*)

Žlutě kvetoucí rostlina z čeledi prvosenkovitých (Primulaceae) s dužnatými listy, které se používaly do salátů. Rostlina je původní v západní Asii nebo severní Africe (Kubát, 2002).

3 Závěr

Sešlapové porosty jsou spolu se sešlapovými trávníky převládající vegetací současných měst a zasluhují naši pozornost.

4 Použitá literatura

GRIMME, J. P. Plant strategies, vegetation processes, and ecosystem properties. Chichester: John Wiley et Sons. 2001.

CHYTRÝ, M. [ed.]. Vegetace České republiky. 2, Ruderální, plevelová, skalní a suťová vegetace. 1. vyd. Praha: Academia, 2009. 524 s. ISBN 978-80-200-1769-7.

KUBÁT, K., HROUDA, L., CHRTEK, J. jun., KAPLAN, Z., KIRSCHNER, J. et ŠTĚPÁNEK, J. [eds.]. Klíč ke květeně České republiky. 1. vyd. Praha: Academia, 2002. 928 s. ISBN 80-200-0836-5.

PYŠEK, P. Synantropní vegetace. Vysoká škola báňská – Technická univerzita Ostrava. 1996, 52-71 s.

PYŠEK, P., CHOCHOLOUŠKOVÁ, Z., PYŠEK, A., JAROŠÍK, V., CHYTRÝ, M. AND TICHÝ., L. Trends in species diversity and composition of urban vegetation over three decades. Journal of Vegetation Science, 2004.15:781-788.

5 Kontakt na autora

RNDr. Zdeňka Chocholoušková, Ph.D.
Centrum biologie, geověd a envigogiky, Fakulta pedagogická, Západočeská univerzita v Plzni, Chodské nám. 1, 306 14 Plzeň – Bory
chochol@cbg.zcu.cz

PODPORA TALENTOVANÝCH ŽÁKŮ V PLZEŇSKÉM KRAJI

KEMP BIOLOGIE

ČISTÍRNA ODPADNÍCH VOD PLZEŇ – EXKURZE

Jindřich DURAS

1 Úvod

Odpadní vody vznikají ve městech a obcích, v průmyslu (potravinářský, chemický, textilní...) i v zemědělství (zejména chov dobytka, silážní šťávy). My jsme navštívili čistírnu odpadních vod ve městě Plzeň.

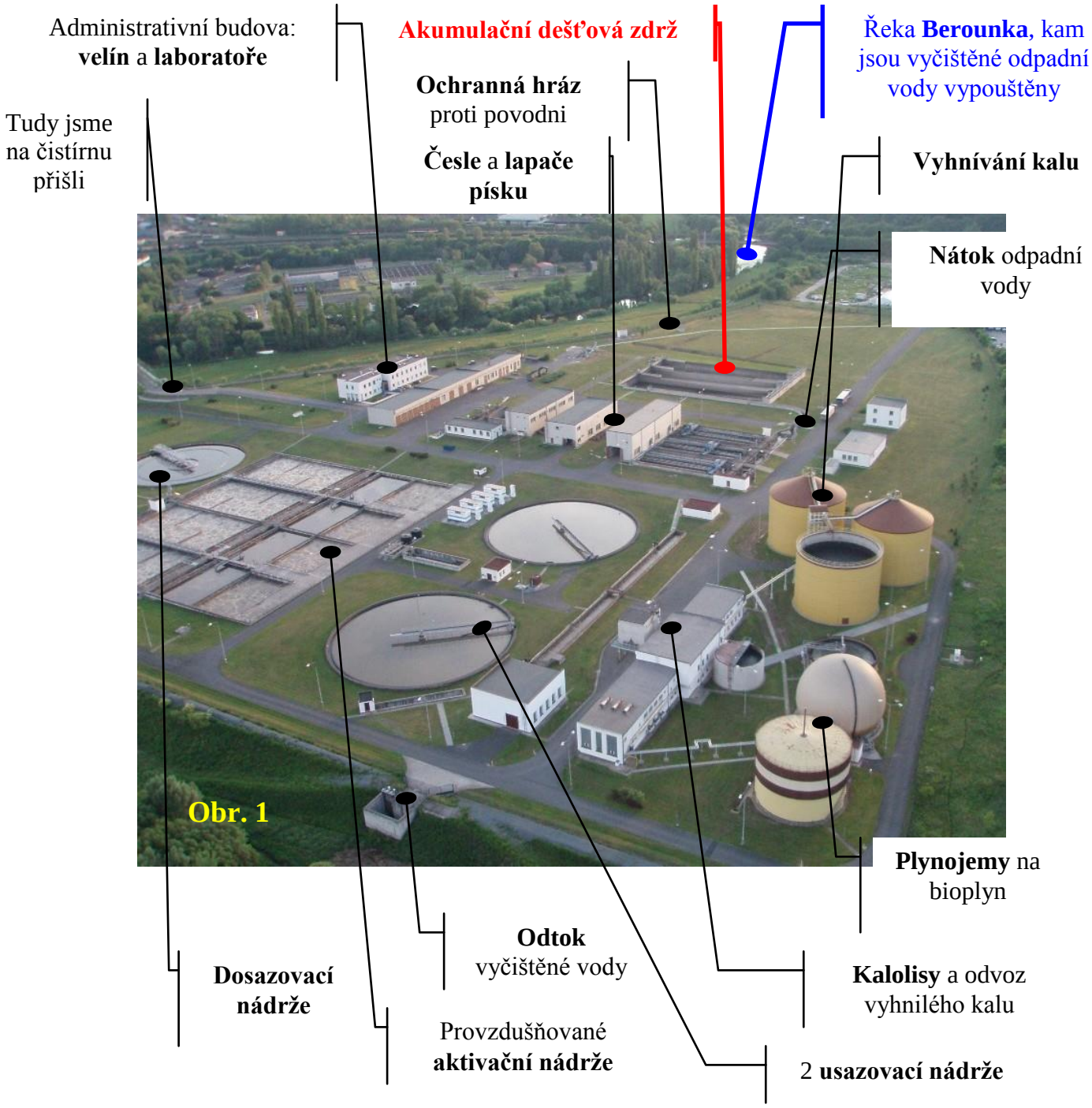
Komunální (městské) odpadní vody obsahují široké spektrum znečišťujících látek, což je důsledkem toho, kde takové odpadní vody vznikají: v domácnostech, hotelích a prádelnách, v nemocnicích, oplachem střech, chodníků a ulic, v drobných provozovnách (kadeřnictví, lázně, autoopravna...). Velmi důležitou znečišťující složkou jsou lehce rozložitelné organické látky (fekálie, zbytky jídla). Pokud se dostanou do řeky či rybníka, dojde k jejich rychlému bakteriálnímu rozkladu. Při tom se během hodin až dnů vyčerpá veškerý rozpuštěný kyslík, který byl ve vodě obsažen a uhyne – snad kromě baktérií a některých druhů prvoků – kompletně celé společenstvo organismů: ryby, larvy vodního hmyzu, plži, mlži, raci...

Právě na lehce rozložitelné organické látky, které silně znečišťovaly naše řeky po většinu minulého století, je zacílena **technologie mechanicko-biologického čištění.** Takovým typem čistírny je i plzeňská, ale patří sem i např. malé domovní čistírny pro jeden rodinný domek.

2 Uspořádání a funkce čistírny odpadních vod v Plzni

Uspořádání plzeňské čistírny odpadních vod ukazuje obr. 1.

Prvním stupněm čištění odpadních vod je **MECHANICKÁ ČÁST.** Zde jde v zásadě o to, aby se odpadní voda zbavila nečistot, které by v dalším procesu způsobovaly potíže. Jedná se o velké unášené nečistoty, které zachycují tzv. **česle** (papír, igelit...). Česle jsou neustále čištěny pohybem mechanického zařízení. Získaný materiál, tzv. shrabky, páchne a je silně infekční (riziko přenosu bakteriálních a virových onemocnění), proto se obvykle spaluje. Dále se zachycuje štěrk a písek, který se dostal do kanalizace z komunikací. Odděluje se od vody v zařízení, které se jmenuje **lapač štěrku a písku** a pracuje na principu tzv. odstředivek. Další využití zachyceného písku a štěrku není možné – je to černavý, hnilobný materiál s rizikem infekce. Skládkuje se na zabezpečených skládkách. Pak následuje **usazovací nádrž,** kde se odpadní voda jakoby zastaví, aby mohly lehké nečistoty vyplout na hladinu (zejména tukové částice) a těžší částice, tzv. kal se usazuje na dně. Plovoucí nečistoty se z hladiny stírají a kal se čerpá ze dna kalovými čerpadly. Kal se vede do válcových **vyhnívacích nádrží,** kde vzniká bakteriální činností bioplyn. Ten se dále spaluje a získává se teplo k vyhřívání těch vyhnívacích nádrží a také k výrobě elektrické energie v tzv. kogenerační jednotce.



Obr. 1

Pak následuje **BIOLOGICKÁ ČÁST**, kde v **aktivačních nádržích** bohaté společenstvo mikroorganismů rozkládá organické látky. Protože při tom spotřebovávají velké množství kyslíku, musí se intenzivně provzdušňovat, čímž se směs zároveň i promíchává. Činností bakteriálního společenstva vznikají vločky, které tvoří tzv. aktivovaný kal. Kal obsahuje široké spektrum bakterií, ale také bezbarvé bičíkovce, lezoucí, přisedlé i volně plovoucí

nálevníky, měňavky a často i vířníky, hlístice, břichobrvky, máloštětinaté červy či masožravé (karnivorní) houby. V aktivovaném kalu mají být zřetelně vidět vločky, které se dobře usazují, a jeho barva má být sytě hnědá a má se vyznačovat zemitým pachem (či vůní?). Pak se jedná o zdravý a dobře čistící kal.

Závěrem procesu čištění, když už mikroorganismy odvedly svoji práci, se opět uplatní **MECHANICKÁ ČÁST.** V **dosazovací nádrži** se nechávají vločky aktivovaného kalu odsadit a vyčištěná odpadní voda se pak může vypustit do řeky. Na odtoku se kontroluje množství i kvalita vyčištěné odpadní vody. Aktivovaný kal, který se v dosazovací nádrži odsadil, se vrací i se všemi přisedlými organismy zpět do biologické části (aktivační nádrž), ale protože pořád roste a přibývá, určitý podíl se ho stále musí ze systému odstraňovat. Tento přebytečný kal se nechává ve vyhnívacích nádržích vyhnít spolu s kalem z usazovacích nádrží. Aktivovaný kal se ale může – pokud neobsahuje nějaké škodlivé látky, třeba těžké kovy (olovo, kadmium) - také kompostovat a využívat k rekultivacím, případně se může po odvodnění spalovat.

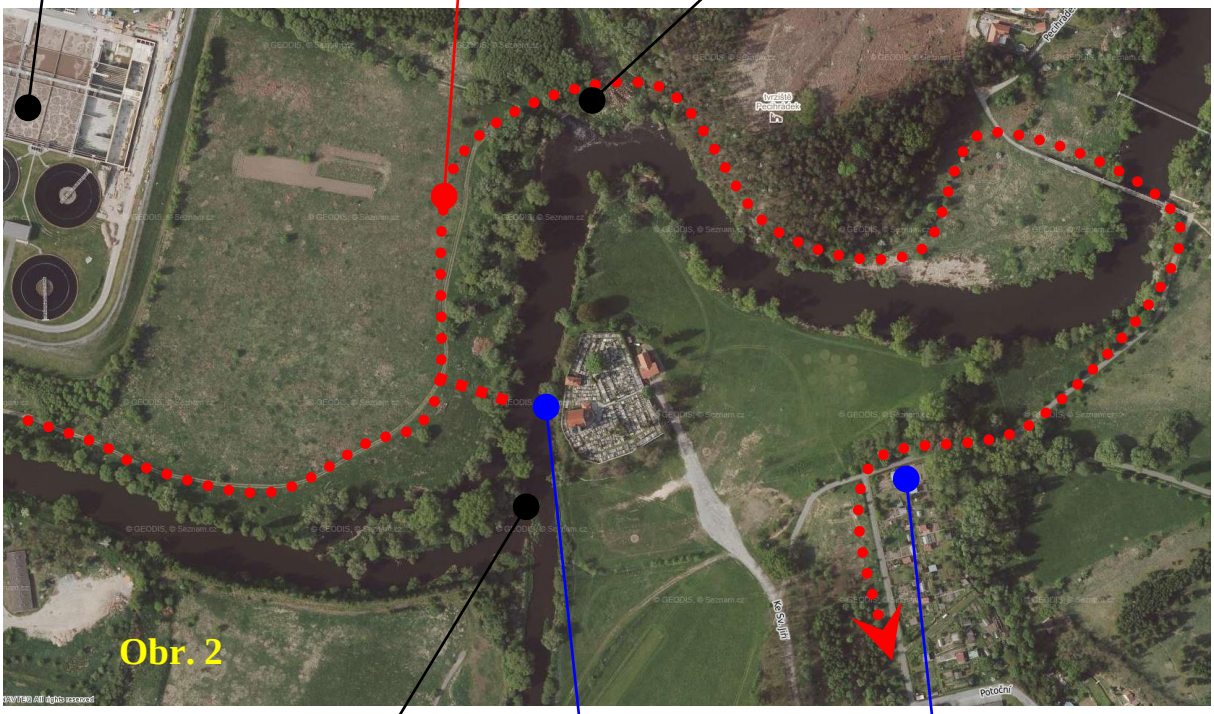
3 Otázka dešťových vod

Když ve městě začne pršet, ze zpevněných ploch (chodníky, silnice, střechy, náměstí, parkoviště...) voda rychle stéká do kanalizace. Samozřejmě by se rozsah zpevněných ploch měl omezovat a voda by se měla nechat zasakovat, aby ji pak mohly využívat stromy a svou evapotranspirací (odpařováním) klimatizovat naše města. To se u nás ale zatím moc nedaří, takže dešťová voda, co omyla městský povrch, vtrhne plnou silou do kanalizace. Tam začne unášet všechny usazené nečistoty a spolu s běžnými splašky, které tečou v kanálech, když neprší, všechno uhání na čistírnu. Protože ale vody ze zpevněných ploch odtéká velké množství, kanalizace by se zahltila. Proto se část odpadní vody tzv. odlehčí nejbližší cestou do řeky nebo městského potoka. Ta voda je znečištěná a nárazově jí teče spousta. Proto je třeba městský potok velmi prohloubit a nejlépe i napřímit, aby ten příval vůbec pobral. Jak je vidět, tak když špatně hospodaříme s dešťovou vodou, musíme následně zničit i potok. Je to řetězení negativních vlivů. Místo abychom zlepšili příčinu, snažíme se následky vylepšovat ničením dalších článků.

Nejvíce odpadní vody se vždycky odlehčuje těsně před čistírnou, aby ji náhlý příval nezatopil, protože pak by nefungovala nejméně celý další měsíc. V minulosti právě následkem toho, že do Berounky pod Plzní pronikl velký příval odpadních vod, uhynulo několik tun ryb. Baktérie ve vodě totiž začaly organické znečišťující látky rychle rozkládat, spotřebovaly všechen kyslík rozpuštěný ve vodě a neštěstí bylo hotovo.

Plzeň je jedno z mála měst u nás, kde je čistírna vybavena velkými dešťovými zdržemi (na obrázku červeně). Tyto zdrže dokážou za deště zadržet první příval odpadních vod ženoucích se na čistírnu. Právě tento první příval je nejznečištěnější a udělal by v řece nejvíc škody. Když už jsou kanalizační stoky propláchnuté, znečištění unášené srážkovou vodou není tak velké a řece nezbude, než si s ním nějak poradit – a Berounka to celkem zvládá. Znečištěná voda zachycená v dešťové zdrži se po dešti pomalu přičerpává k běžné odpadní vodě, která přitéká na čistírnu, a čistí se běžným způsobem.

Správně by každé – i malé – město mělo být vybaveno dešťovou zdrží. S odpadními vodami se totiž do potoků a řek dostává kromě jiného znečištění také sloučeniny fosforu, tedy nejdůležitější živiny pro růst planktonních řas a sinic. A jsou to právě sinice, které svým masovým rozvojem dokážou znehodnotit vodu v přehradní nádrži jak z pohledu rekreačního využití, tak také – a to je mnohem důležitější – z pohledu vodárenského využívání.



Obr. 2

Po prohlídce čistírny městských odpadních vod pokračovala exkurze podél břehu řeky Berounky (obr. 2). Zastavili jsme se v místě, kde vtékala vyčištěná odpadní voda z čistírny do řeky. V řece pod výústí nebyly vidět žádné šedobílé bakteriální nárosty, kde by nasvědčovaly tomu, že voda je vyčištěna nedostatečně, nebo že účinnost čištění je proměnlivá (=někdy teče i voda znečištěná). Byly dokonce pozorovány ryby (patrně jelci nebo plotice), jak se snaží dostat proti proudu odpadní vody. Zřejmě se chtěly dostat za potravou a obohatit svůj jídelníček o larvy pakomárů, které se v nárostech na kamenech či betonových stěnách hojně vykytují.

Cestou byl předveden odlov bezobratlých organismů obývajících dno řeky, tedy tzv. makrozoobentosu. Nalovený materiál se prohlížel na místě pouze zběžně a podrobněji až v laboratoři.

4 Drobný městský potok – pozorování a odlov bentických organismů

Hrádecký potok je typickou drobnou městskou vodotečí. Jeho koryto je ve značné délce upravené: zahloubené, napřímené a opevněné (dlažba). Společenstva žijící v tomto potoce se musí vyrovnávat s velkou rozkolísaností průtoků, protože sem jsou svedeny také vody, které po deštích stékají ze zpevněných městských ploch. Tyto nepříznivé podmínky nedokáže vydržet každý organismus. Proto zde společenstva bývají druhově chudá, omezená na tzv. euryekní neboli eurytopní druhy organismů. Tedy na ty, kteří se dokáží přizpůsobit velkému rozpětí životních podmínek, dokonce i jejich střídání, jaké v městském potoce zažívají. zároveň musí čelit nižší a málo pestré potravní nabídce, nedostatku vhodných habitatů (stanovišť) a stressu z náhlých vysokých průtoků, které odplavují většinu jejich biomasy. Společenstva zde tedy bývají chudá i početně. Druhy náročnější zde prostě žít nemohou.

Je vidět, jak je důležité rozumně a promyšleně hospodařit s vodou ve městech. Vodu je třeba co nejvíce nechat zasakovat, aby mohla být rostlinami využívána, až už dávno nebude pršet – nám se za to odvděčí zlepšením klimatických podmínek v horkých letních dnech. Je třeba omezovat rychlý odtok tím, že nebudeme bezmyšlenkovitě rozšiřovat zpevněné plochy. Když se nám to bude dařit, můžeme začít navracet městské potoky do přirozeného stavu, který bude nejen dobře vypadat, ale umožní také život bohatších společenstev vodních organismů.

Obr. 3: Pozorování na Hrádeckém potoce a odlov makrozoobentosu.

5 Kontakt na autora

RNDr. Jindřich Duras, Ph.D.
Povodí Vltavy, státní podnik, Denisovo nábřeží 14, Plzeň
jindrich.duras@pvl.cz

PODPORA TALENTOVANÝCH ŽÁKŮ V PLZEŇSKÉM KRAJI

KEMP BIOLOGIE

MAKROZOOBENTOS TEKOUCÍCH VOD

Luboš ZELENÝ

1 Co jsou to bentické organismy

Bentos je biocenóza vázaná na podklad. Bentos tekoucích vod tvoří nejrůznější mikroorganismy (bakterie, houby), autotrofní organismy (sinice, řasy, mechorosty, cévnaté rostliny) a živočichové (zoobentos). Sinice a řasy, případně mechy spolu s dalšími organismy vytvářejí nárostová společenstva – perifyton (epiliton). Jejich složení a umístění na povrchu podkladu se liší podle světelných, proudových, teplotních a dalších existenčních nároků. Perifyton podstatně neovlivňuje proudové a průtokové poměry toku, na rozdíl od vodních makrofyt, které se podílejí na mechanismech přetvářejících dno. Makrofyta rovněž vytváří vhodné podmínky pro přichycení a úkryt jiných organismů. Nejčastěji hovoříme o makrozoobentosu, což jsou organismy větší než 2 mm.

2 Odběr vzorku bentosu v tekoucích vodách

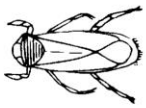
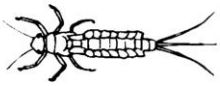
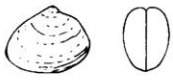
Odběr bentosu v tekoucích vodách zahrnuje odběr v broditelných tocích a příbřežní (litorální) části nebroditelných povrchových vod. Vzorkovací metoda je založená na tzv. multihabitatovém odběru, při kterém jsou jednotlivé habitaty (kupř. mělčina, proudící voda, vodní rostliny, břehová hrana...) v toku vzorkovány úměrně podle jejich výskytu v odběrovém úseku toku. Standardní doba odběru jsou 3 minuty, používá se ruční bentosové sítě. Do celkové doby odběru se započítává pouze čas, po který je dno rozrušováno, jsou promývány rostliny atd., čas strávený přecházením mezi odběrovými místy není do doby odlovu započítán. Před vlastním odběrem se vytipují všechny habitaty vyskytující se v odebíraném úseku a odhadne se jejich plošný podíl z celkové plochy dna odběrového úseku (v procentech). Při odběru vzorku je pak každému habitatu věnován odpovídající podíl celkové doby odlovu. Při odlovu se postupuje směrem proti proudu řeky, aby se nenarušovala ještě neprozkoumaná plocha. Odběrová síť je postavena spodní stranou rámu na dno a substrát před sítí je rozrušován nohou nebo rukou do hloubky 5 - 10 cm (*kick sampling*). Uvolněné organismy jsou splavovány proudem vody do sítě. Do sítě jsou rovněž opírány ponořené vodní rostliny, listy suchozemských rostlin splývající do vody, kořeny stromů, větve apod. Výskyt přisedlých organismů je třeba dodatečně kontrolovat prohlížením kamenů a jejich případným omytím rukou. V místech s neznatelným proudem a bahnitým dnem, je možné rozrušit dno nohou a pak nad ním aktivně pohybovat sítí.

Obr. 1 Odběr vzorku makrozoobentosu za použití ruční sítě

3 Makrozoobentos tekoucích vod

Druhové složení makrozoobentosu tekoucích vod je daleko pestřejší než ve vodách stojatých. Rozhodujícím faktorem, který určuje druhové složení a dynamiku bentosu je rychlost vodního proudu. Životu v rychlém proudu jsou živočichové různě adaptováni. Čím prudší je proud, tím dokonalejší jsou různé orgány a zařízení umožňující život i v nejprudších peřejích a vodopádech. Dokonalými tělními orgány jsou různé přísavky (zástupci rodu *Liponeura*), lepivé žlázy muchniček, někteří živočichové si staví různé schránky a trubičky (chrostíci a pakomáři), mnohé jepice mají uzpůsobený proudu i celkový tvar těla. Naproti tomu živočichové žijící v klidné vodě za kameny, pod kameny a v trsech vodních rostlin nebo v profilu dna se bez adaptací na proudění obejdou.

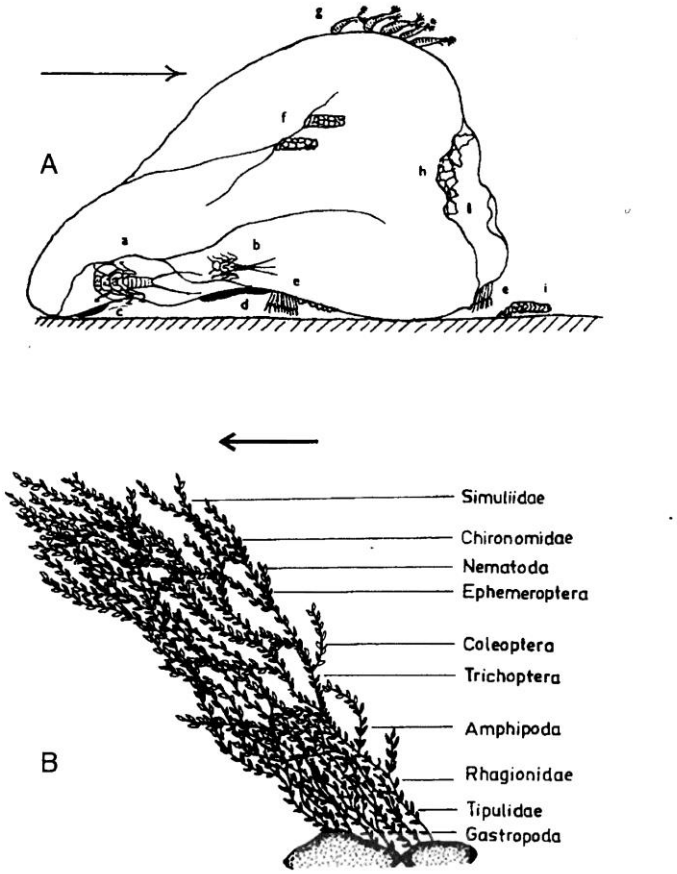
Obr. 2 Nejobvyklejší formy bezobratlých a jejich adaptace k životu ve vodě

1. Bruslaři (syn. *pleuston*, např. bruslařka) žijí na povrchu vody a loví organismy vyskytující se na hladině	
2. Plankton* (např. koretry, komáří larvy), žijící ve volné stojaté až mírně tekoucí vodě	
3. Různí živočichové (např. znakoplavka, potápníci) žijící v pomalu tekoucích vodách a tůních čerpají kyslík na vodní hladině, v případě vyrušení plavou a potápějí se	
4. Plavci (např. některé jepice) se obvykle přidržují kamenů nebo vegetace, jsou také schopni přeplavat krátké úseky	
5. Přidržovači (např. některé jepice, muchničky, pijavky, kamomil), jejichž morfologické a další uzpůsobení pro udržení se v rychlém proudění – zploštění těla, lepivá vlákna, drápky, přísavky aj. – umožňuje připevnit se v rychle tekoucích tocích na podklad	
6. Lezci (např. mnoho šidélek, larvy vážek, některé jepice) obývají povrch makrofyt nebo povrch jemných sedimentů	
7. Šplhači (např. vážky) obývají vegetaci, kořeny stromů a ve vodě ponořené větve a pohybují se po jejich povrchu	
8. Hrabači (např. červi, mlži, některé jepice, pakomáři) žijí v sedimentu, mohou ale také tunelovat chodbičky v rostlinných pletivech i dřevě	
* Pozn.: V obvyklém pojetí jsou typickými představiteli planktonu perloočky a buchanky.	

Zdroj: http://hgf10.vsb.cz/546/Ekologicke%20aspekty/loticky_system/biotopy.htm

Zpravidla nejvíce bývají osídleny kameny o průměru 15-20 cm. Makrozoobentos povrchu kamenů tvoří larvy jepic (*Baetis, Oligoneuriella*), muchniček, pakomárů, chrostíků (*Anabolia, Silo*), plži (*Ancylus, Bythinia*), přísalky, brouci (čeleď *Elmidae*). Spodní část kamenů osídlují prvoci, ploché kolonie hub, mechovky, ploštěnky, pijavice, plži, korýši (*Asellus, Gammarus*), jepice (*Ecdyonurus, Epeorus*), pošvatky (*Perlidae, Leuctridae*), chrostíci (*Hydropsychidae, Rhyacophilidae*), ploštice, vodule. Některé druhy žijí na obou stranách kamenů, jiné přelézají na horní stranu v noci nebo při nedostatku světla. Zoocenózy písčitého dna jsou druhově i početně nejchudší.

Obr. 3 Rozmístění bentických organismů



A) na kameni v proudu:

a larva pošvatky, **b** larva jepice, **c** ploštěnka, **d** pijavky, **e** larvy pakomárů v rourkách z bahna, **f** larvy chrostíků, **g** larvy muchniček, **h** kukly chrostíků, **i** lezoucí larva chrostíka v pískové schránce

B) na porostech mechu prameničky (*Fontinalis*)

Zdroj: http://hgf10.vsb.cz/546/Ekologicke%20aspekty/loticky_system/biotopy.htm

Během terénní exkurze byl odběr vzorku bentosu proveden na řece Berounce v profilu u kostela sv. Jiří na Doubravce a na Hrádeckém potoce, malém přítoku Berounky, který se do ní vlévá z pravé strany zhruba 500 m pod kostelem sv. Jiří. Účelem odběru vzorku na dvou naprosto odlišných lokalitách bylo prezentovat studentům rozdíl ve složení a struktuře jednotlivých živých organismů.

4 Zástupci makrozoobentosu nalezení v řece Berounce

Annelida (kroužkovci)
Oligochaeta (máloštětinatci)

Eiseniella tetraedra (žížala obojživelná) - žije ve vlhké půdě, močálech, na břehu řek i přímo ve vodě

Mollusca (měkýši)

Sphaerium corneum (okružanka rohovitá) - výskyt v živinami bohatších (často i organicky znečištěných) vodních tocích, kanálech, tůních a rybnících. Odolný proti organickému znečištění.

Pisidium sp. (hrachovka) - v tekoucích vodách pod kameny

Diptera (dvoukřídlí)

Simulium sp. (muchnička) – žijí často v koloniích, lepivé žlázy; v dospělosti značně nepříjemný hmyz

Chironomidae gen. sp. (pakomáři) – početná skupina druhů, obtížná determinace; oblíbená potrava ryb; vyšší úroveň znečištění toku

Trichoptera (chrostíci)

Hydropsyche angustipennis – běžný druh v potocích a řekách pahorkatin a nížin, nestaví si schránku; snese vyšší organické znečištění

Hydropsyche pellucidula – výskyt podobný předešlému druhu; vytváří sítě v proudných úsecích toku, do kterých chytá potravu

Ephemeroptera (jepice)

Baetis vernus - běžný druh pod kameny v tekoucích vodách

Potamanthus luteus – běžný druh jepice, který se vyskytuje ve větších vodních tocích

5 Zástupci makrozoobentosu nalezení v Hrádeckém potoce

Annelida (kroužkovci)

Hirudinea (pijavice)

Erpobdella octoculata (hltanovka bahenní) - pomalu tekoucí a stojaté vody, pod kameny; jedna z nejhojnějších pijavic

Obr. č.4 *Erpobdella octoculata*

Obr.č.5 *Ancylus fluviatilis*

Erpobdella vilnensis – snese i větší úroveň organického znečištění

Mollusca (měkýši)

Ancylus fluviatilis (kamomil říční) - rychle tekoucí vody, na kamenech; adaptace ulity pro život v proudu

Crustacea (korýši)

Asellus aquaticus (beruška vodní) - velmi běžný druh tekoucích i stojatých vod, požírá rostlinné zbytky, snese vyšší úroveň organického znečištění

Diptera (dvoukřídlí)

Chironomidae gen. sp. (pakomáři) – početná skupina druhů, obtížná determinace; oblíbená potrava ryb; vyšší úroveň znečištění toku

Ephemeroptera (jepice)

Baetis rhodani -běžný druh pod kameny v tekoucích vodách

Obr. č.6 Jepice rodu *Baetis*

6 Použitá literatura

HARTMAN P, PŘIKRYL I. a ŠTĚDRONSKÝ E. Hydrobilogie. 2. vyd. Praha: Informatorium, 1998, 335 s.
LELLÁK J. a KUBÍČEK, F. Hydrobiologie. 1. vyd. Praha: Karolinum, 1992, 258 s.
ROZKOŠNÝ a kol. Klíč larev vodního hmyzu. 1. vyd. Praha, Academia, 1980, 524 s.

7 Kontakty na autory

Mgr. Luboš Zelený
Povodí Vltavy, státní podnik
lubos.zeleny@pvl.cz

PODPORA TALENTOVANÝCH ŽÁKŮ V PLZEŇSKÉM KRAJI

KEMP BIOLOGIE

EDAFON

Michal MERGL

1 Úvod

Edafon je pojem, kterým se označuje společenstvo organismů žijící v půdě.

2 Obecná charakteristika

V půdě nacházíme bohaté společenstvo organismů, které z rozvětraného horninového podkladu a mrtvé organické rostlinné i živočišné hmoty na zemském povrchu vytváří půdu. Velikost těchto organismů se pohybuje od tisícin milimetru do desítek centimetrů a podle této velikosti se rozlišuje na mikrofloru a mikrofaunu – mezofaunu - makrofaunu - megafaunu. Hranice mezi mikrofaunou a mezofaunou je 0,2 mm, mezi mezofaunou a makrofaunou 2 mm. Mikroflóru a mikrofaunu tvoří především bakterie a aktinomycety, mezofaunu a makrofaunu tvoří různí členovci, kroužkovci a měkkýši. Některé skupiny živočichů zasahují i do více velikostních kategorií.

3 Příprava preparátu

Pro získání vzorku živočichů tvořící mezo- a makrofaunu je výhodné použít hrubší síto (při výzkumu se používá tzv. prosívadlo), přes které je listovka a svrchní vrstva půdy přesáta. Na světlém podkladu se z propadaného materiálu rozeběhnou různí půdní členovci, které se měkkou pinzetou vloží do Petriho misek nebo se usmrtí a alkoholu. K pozorování je vhodné binokulární lupa. Pokud necháme na sušším podkladu hromádku prosáté půdy, živočichů se soustředí do středu spodní vrstvu, ve kterém je vzorek nejméně proschlý.
Pro skutečné odborné studium se používají tzv. xeroeklektory. Jedná se o nálevku, ve které se umístí na sítku vzorek půdy. Jak půda svrchu prosychá, půdní fauna se stahuje je ke dnu nálevky, kde pak propadává do pod nálevkou ležící misky s fixační tekutinou.

4.1 Autotrofní organismy

V půdě je jen menší množství fotoautotrofních organismů, protože s výjimkou svrchní vrstvy půdu chybí dostatek světla pro fotosyntézu. Potravní řetězce jsou založeny na využívání mrtvé, především rostlinné organické hmoty. Tato hmota je rozmělňována makrofaunou (mnohonožkami, stejnonožci, hmyzem), jejímž trusem (stále s dostatkem živin), se živí menší půdní členovci (chvostoskoci, roztoči). Postupně se k této organické hmotě dostávají bakterie, aktinomycety a houby. Toto skupiny rostlinný detrit a trus mineralizují na základní prvky, které jsou následně využívány rostlinami. Na tyto saprofágy - detritofágy jsou vázáni dravci. Predaci na drobných půdních členovcích provádějí stonožky, půdní klepítkatci (pavouci, štírci, roztoči), larvy i imaga hmyzu, drobní draví plži a půdní hlístice. Do složitých potravních vztahů zasahují i paraziti na rostlinách (hlístice) nebo na členovcích (roztoči).

Složité potravní vztahy, saprofágii, mikrofágii, predaci i parazitismus nalezneme také na velikostní úrovni mikrofauny mezi půdními prvoky.

4.2 Prvoci

Z prvoků nalezneme ve svrchní vrstvě půdy různé zástupce bičíkovců (Mastigophora), kořenonožců (Rhizopoda) a obrvených (Ciliophora). Jejich četnost a druhové zastoupení kolísá v závislosti na složení, teplotě a vlhkosti půdy. Jsou zde i velké sezonní rozdíly, s maximem výskytu v letních měsících nebo měsících se silnějšími dešťovými srážkami. Při vyschnutí se prvoci chrání encystací. Půdy vlhké, s mechovým nebo rašeliníkovým porostem hostí zástupce různých tzv. krytenek. Z prvoků jsou pro půdu charakteristické měňavky (*Amoeba*). Z obrvených jsou v půdě především bobovky (*Colpoda*). Ve vlhké půdě a porostech rašelinníků jsou hojné různí formy kořenonožců s organickými nebo aglutinovanými baňkovitými schránkami (*Centropyxis, Trinema, Corythion, Difflugia, Nebela* aj.), křemenky (*Euglypha*) a štítovky (*Arcella*). Počty jedinců se pohybují až ve statisících na 1 cm^3. Nejvíce prvoků žije v malé hloubce, mezi 5 až 20 cm.

4.3 Mnohobuněční

4.3.1 Ploštěnky

Ploštěnky jsou drobní bezobratlí s tělem vyplněným parenchymem. Mají žlaznatou obrvenou pokožku, která nesnáší vyschnutí. Jsou dravé, svoji kořist vysávají pomocí jícnu. Jejich velikost se pohybuje mezi 0,2-2 mm. Z větších druhů je možno u nás ve vlhké půdě potkat ploštěnku lesní (*Rhynchodesmus*).

4.3.2 Hlístice

Hlístice jsou drobní válcovití živočichové s tělem vyplněným tekutinou v tělní dutině. Pokožku mají krytou odolnou kutikulou. Jsou schopni mrskavých a spirálních pohybů, neboť mají jen podélné pruhy svaloviny procházejí celým tělem. Potravu nasávají svalnatým jícnem, který pokračuje jednoduchým střevem v ose těla. Pohlaví mají oddělené.
Půdní hlístice jsou vůbec nejpočetnější skupinou půdních organismů. Parazitují na kořenech rostlin, jsou však i saprofyti nebo dravci lovící prvoky, vířníky, želvušky a jiné mikroskopické půdní živočichy.
Délka těla hlístic se pohybuje obvykle mezi 0,5 – 2 mm, jsou bělavé nebo průsvitné. Mají schopnost přežívat i v půdách s nedostatkem kyslíku, např. v silně podmáčených půdách.

4.3.3 Kroužkovci

Kroužkovci jsou válcovití segmentovaní živočichové s pravou tělní dutinou, neodlišenou hlavou a s řitním otvorem v posledním článku těla. Jsou u nás zastoupeny malými, jen 3-20 mm dlouhými bělavými roupicemi (Enchytraeidae) nebo většími, většinou fialově nebo růžově zbarvenými žížalami (Lumbricidae). Kroužkovci jsou detritofágové, kteří se živí listím. Žížaly dobře zpracovávají listí z olší, javorů lip, jilmů a jasanů zatímco dubové, bukové listů zpracovávají hůře a jehličí nejsou schopné zpracovávat vůbec. Listí zatahují do chodbiček, které vrtají do země. Trus roupic a žížal je důležitým zdrojem potravy pro menší půdní členovce, zejména chvostoskoky a roztoče.
Hloubením chodbiček, zatahováním listů a ponecháním trusu v chodbičkách žížaly provzdušňují půdu, umožňují zatékání vody do půdy a vtahují organickou hmotu do hlubších

vrstev půdy. Ze žížal jsou u nás časté žížaly *Lumbriculus terrestris, Allobophora longa* a *Octolasius.*

4.3.4 Měkkýši

Ve svrchní vrstvě půdy a mezi spadanými listy se vyskytují některé druhy měkkýšů, spíše s ulitami menší velikosti. Typickými zástupci jsou na rozkládajícím se dřevu jsou zástupci vrásenek (*Discus rotundatus, D. ruderatus*), některé závornatky (*Balea biplicata*), vzácněji i velmi drobné druhy jako boděnka (*Punctum pygmaeum*) nebo kuželík (*Euconulus*). V sušších půdách se vyskytují dosti odlišná společenstva, především s rody trojzubka (*Chondrula tridens)* a údolníček (*Vallonia*). K vysloveně půdním podzemním druhům patří bezočka (*Caecilioides acicula*), která vyhledává teplejší bazické půdy.

4.3.5 Členovci

Členovci jsou tvarově i druhově asi nejpočetnější skupinou edafonu.

4.3.5.1 Klepítkatci

Z klepítkatců (Chelicerata) se v půdě v listovce vyskytují štírci (řád Pseudoscorpiones), kteří pomocí klepítek na makadlech loví drobné půdní členovce. Štírci se vyskytují zejména v mechu a v sušší listovce na povrchu půdy.
V sutích a mezi listy lze nalézt plošíka (*Trogulus*), žlaznatku (*Paranemastoma*) a některé další zástupce sekáčů (řád Opilioides). Od pavouků se sekáči liší dlouhýma nohama, vakovitým tělem bez stopky a očním hrbolkem na přídi těla. Sekáči se pohybují mezi listím, na kůře stromů a na nižší vegetaci, nezalézají do hlubších vrstev půdy. Zajímavé druhy se však vyskytují ve štěrbinách skalních sutí.
Pavouci (řád Araneida) jsou zastoupeni velkým počtem dravých druhů, které loví v listovém opadu a na povrchu půdu. Z hlediska tvorby půd mají malý význam. Někteří si tvoří z pavučiny zápředky a kokony pod kameny, kůrou a padlými kmeny stromů. Půdní druhy mají nejčastěji hnědé nebo černé zbarvení, mají menší velikost a někdy i zajímavě tvarovanou hlavohruď s různými vyvýšenými očními hrbolky. Složení pavoučí zvířeny je silně závislé na složení listového opadu.
Roztoči (řád Acarina) jsou velmi početní v lesním edafonu, ve kterém tvoří až 70 % mezofauny. Jsou zastoupeni i parazitárními formami. Cizopasí na hlodacích, hmyzožravcích a hmyzu, zejména střevlících a koprofágních broucích. Velmi častou skupinou jsou pancířníci (Oribatei). Jsou to kulovití, černí nebo hnědí roztoči se silnou kutikulou. Jsou významnými tvůrci humusu. Většina pancířníků zpracovává listí, ve kterém jsou schopni chelicerami odstřihávat kousky epidermis a vybírat listový parenchym. Jiní požírají houbová vlákna, nebo se živí mrtvými chvostoskoky. Rozmělňováním rostlinného materiálu vytváří prostředí při činnost bakterií a aktinomycet. Počet druhů pancířníků na konkrétních biotopech může být až z řádu desítek nebo prvních stovek. Jsou důležitou skupinou v koloběhu dusíku v půdě.

4.3.5.2 Korýši

Z korýšů jsou v půdě hojní jen stejnonožci. Nemají sice velký význam, ale na některých místech mohou pomáhat při rozmělňování rostlinné hmoty, listů i dřeva. Nemají schopnost rozkládat celulózu, avšak rostlinnou hmotu rozmělňují pro další skupiny živočichů v půdě. U nás běžné druhy patří rodům *Oniscus, Armadilidium*, na vlhkých místech je běžná stínka *Trachelipus.*

4.3.5.3 Stonožkovci

Stonožkovci (Myriapoda) jsou vzdušnicovci s válcovitým protaženým tělem krytým nejčastěji hnědě nebo žlutavě zbarvenou kutikulou. Dvě hlavní vývojové linie u nás zastupují stonožky (Chilopoda) s nohami zakloubenými po stranách těla a mnohonožky (Diplopoda) s nohami na spodní straně těla.

Stonožky jsou dravci. Mají ploché tělo a silné nohy. Na hlavě mají kusadla s vývodem jedové žlázy. Kořist loví ve svrchní vrstvě půdy a pod kůrou stromů.

Mnohonožky jsou saprofágové, kteří rostlinou hmotu rozmělňují drobnými kusadly. Za hlavou mají tři články nesoucí po jednom páru končetin. Další tělní články, až na poslední telson, nesou po dvou párech končetin. Proto jsou jejich tělní články označovány jako diplosomity. Zvláštností mnohonožek je inkrustace kutikuly uhličitanem vápenatým. Proto vyhledávají především vápnité půdy. Mnohonožky se brání svinutím do spirály nebo volvací. Typickými mnohonožkami jsou v listovce se vyskytující rody svinule (*Glomeris*), mnohonožka (*Blaniulus*) a plochule (*Polydesmus*), která má nápadně křidélkovitě prodloužené diplosomity na svrchní straně těla. Mnohonožky nalezneme zejména v listnatých lesích v listovém opadu, pod kůrou, ve starém dřevu a na podobných místech, Nesnášejí prudké sluneční světlo a vyschnutí.

4.3.5.4 Hmyz

Z hmyzu je v edafonu významná skupina chvostoskoků (Collembola). Chvostoskoci jsou drobným bezkřídlým hmyzem, který má zadeček vybaven lepivou žlázou a skákacím zařízením tvořeným vidličkou. Primitivnější chvostoskoci mají zadeček ještě normálně dělený na segmenty, u vývojově pokročilejších nejsou články zřetelné a zadeček je kulovitý. Chvostoskoci mají skákací nebo sací ústní ústrojí. Velikost se pohybuje do 2 mm, jsou však i u nás druhy větší. Tělo je hladké, lesklé nebo šupinaté, většinou tmavě zbarvené. Některé olověnky (*Orchesella*) mají tělo naopak pestře pruhované.

Chvostoskoci jsou důležitou půdotvornou skupinou. Jsou polyfágní, zpracovávají různý již víceméně rozložený detrit, řasy, houby, pyl apod. V půdě se vyskytují v největším množství do hloubky 10 cm. Dávají přednost lesům s vyšší vrstvou opadaného listů, ale i v jehličnatých lesích bývají v ohromném množství, někdy i hromadně.

Z křídlatého hmyzu v půdě nalezneme, kromě dospělců nejčastěji dravých brouků s čeledi střevlíkovitých (čeleď Carabidae) a drabčíkovitých (čeleď Staphylinidae), i larvy jiných hmyzích řádů. Zastoupení larev i dospělých hmyzu závisí na konkrétní situaci v biotopu, neboť řada larev je dravých a v půdě hledá kořist v podobě různých skupin členovců, kroužkovců, měkkýšů a hlístic.

Významnou skupinou pro tvorbu půd a potravní řetězce v půdě reprezentují koprofágní a nekrofágní brouci. Při péči o potomstvo zatahují trus nebo části rozkládajících se živočišných těl do hlubších vrstev půdy, kde tento materiál slouží dalším skupinám živočichů a půdu obohacuje o organické látky. Velmi hojnou skupinou v půdě a na jejím povrchu jsou mravenci (řád Hymenoptera) a ve vlhké půdě žijící larvy tiplic, muchnic a jiných skupin dvoukřídlých (řád Diptera).

5 Použitá literatura

DANIEL, M., ČERNÝ, V. (1971): Klíč zvířeny ČSSR. Díl IV. Želvušky, jazyčnatky, klepítkatci, sekáči, pavouci, štírci, roztoči. – Nakl. ČSAV. Praha.

HRABĚ, J. (1954): Klíč zvířeny ČSSR. Díl I. Prvoci, houby, láčkovci, červi, měkkýši, korýši.– Nakl. ČSAV.

6 Kontakt na autora

doc. RNDr. Michal Mergl, CSc.
Západočeské univerzita v Plzni, Fakulta pedagogická, Klatovská 51, 30619, Plzeň
mmergl@cbg.zcu.cz

Obr. 1: Lesní ploštěnka *Rhynchodesmus*

Obr. 4: Žížala *Lumbricus terrestris*

Obr. 2: Plž vrásenka (*Discus rotundatus*)

Obr. 5: Štírek *Chelifer*

Obr. 3: Žížala *Allobophora hrabei*

Obr. 6: Štírek *Neobisium*

Obr. 7: Stonožka *Lithobius*

Obr. 8: Stočená mnohonožka

Obr. 9: Mnohonožka

Obr. 10: Svinule (*Glomeris*)

Obr. 11: Volvace svinule (*Glomeris*)

Obr. 12: Žlaznatka (*Paranemastoma*)

Obr. 13: Chvostoskok

Obr. 16: Střevlík vláhomil (*Notiophillus*)

Obr. 14: Mravenec (*Myrmica*)

Obr. 17: Střevlíček (*Anchomenus dorsalis*)

Obr. 14: Mrchožrout (*Oiceptoma thoracica*)

Obr. 18: Drabčík (*Staphylinus caesareus*)

PODPORA TALENTOVANÝCH ŽÁKŮ V PLZEŇSKÉM KRAJI

KEMP BIOLOGIE

ŽIVOZ V AEROFYTICKÉM MECHU

Michal MERGL

1 Úvod

Aerofytický mech je snadno dostupný zdroj prvoků a mikroskopických mnohobuněnčných pro mikroskopické pozorování.

2 Obecná charakteristika

Aerofytické mechy jsou mechy, které rostou na vysýchavých stanovištích, kterými jsou střechy budov, zídky, okraje betonových ploch, chodníků apod. Tyto mechy jsou přizpůsobené silnému a rychlému vyschnutí. Při dešti mechové polštáře rychle nasávají vodu a vytváří jasné zelené koberce. Představují tak prostředí, ve kterém se střídají suché a vlhké periody a stejně rychle za sebou kolísají i teploty. Mech ještě ráno vlhký může večer být vyschlý. V zimě tento typ mechů rychle vymrzá.

Organismy v takovém mechu jsou vystaveny mimořádnému stresu. Musí se při vyschnutí rychle bránit encystací (nebo podobným mechanismem), naopak při dostatku vody musí klidové stadium rychle nahradit aktivní etapou, při které si hledají potravu a rozmnožují se. Typickými aerofytickými mechy jsou u nás kroucence (*Tortula ruralis, T. muralis*).

3 Příprava preparátu

Příprava vzorku je jednoduchá. Mech získáme na střechách chatek, okrajích betonových ploch, okrajích obrubníků a pod. Mech položíme do mělké misky a zalijeme menším množství vody. Do jednorázového kapátka nasajeme několik mililitrů vody vysáté z rozvhlčeného mechu v misce. Kapátko se nechá ve svislé poloze 1 až 2 minuty, než si zvířený obsah (zrnka písku v půdě, organický detrit, živočichové, rozsivky) sesedne do špičky kapátka (je to primitivní náhrada centrifugace vzorku). Tento obsah pak jako drobnou kapku kápneme na podložní sklo a pozorujeme v procházejícím světle.

4.1 Autotrofní organismy

V mechu se z autotrofních organismů vyskytují sinice, bičíkovci a zejména různé druhy menších penátních rozsivek.

4.2 Prvoci

Z heterotrofních prvoků se v mechu pravidelně vyskytuje štítovka, zejména štítovka mechová (*Arcella arenaria*), která je charakteristická terčovitou, hnědavě zbarvenou organickou schránkou. Další tzv. krytenky jsou zastoupeny rodem *Centropyxis*, který má otvor na jedné

straně průhledné organické schránky, a rodem *Difflugia*, který má ústí na konci baňkovité aglutinované schránky. U těchto krytenek můžeme narazit i na živé jedince, kteří z ústí vysunují krátké až dlouhé prstovité panožky (lobopodie). Z tzv. křemének je v aerofytickém mechu běžná menší ozubenka mechová (*Assulina muscorum*) nebo křeménka *Euglypha*, které mají schránku z drobných taškovitě se překrývajících opálových destiček a mají nápadné ozubené ústí. Jejich panožky jsou hyalinní, průhledné, dlouze nitkovité a nepříliš dobře patrné.
Dalším běžným prvokem je améba zemní (*Amoeba verrucosa*), spolu s jinými méně častými amébami. Tato drobná améba vytváří krátké tupé hrbolkovité panožky. Při větším zvětšení je u této měňavky dobře patrná hyalinní ektoplazma a granulózní entoplazma s velkými vakuolami. V klidu se měňavka pohybuje pomalým přeléváním cytoplazny.
Z tzv. nálevníků lze v preparátu z mechu nalézt tvarově podobné ledvinovité typy, které bývají přirovnávány k ledvinovce (*Colpoda*).

4.3 Bezobratlí

Z mnohobuněčných živočichů jsou v mechu běžní vířníci (kmen Rotifera) ze skupiny pijavenek (třída Bdelloidea), hlístice (kmen Nematoda) a želvušky (kmen Tardigrada).

4.3.1 Pijavenky

Pijavenky (Bdelloidea) jsou tvarově rozmanitou skupinou vířníků. Mají válcovité tělo, u kterého hlava i noha jsou teleskopicky zatažitelné. Na hlavě mají dva věnce s vířivým aparátem. Na konci nohy je krátká vidlička, kterou využívají k přichycení k podkladu. Pijavenky jsou nápadné píďalkovitým pohybem a vysunutím dvou věnců s vířivým aparátem. Při nepříznivých podmínkách nohu a hlavu zatáhnou do trupu a vytvoří skulptovanou kutikulou krytý soudečkovitý útvar. V takovém stavu dokáže pijavenka přežít až několik let. Tato skupina je v aerofytickém mechu zastoupena především rodem *Mniobia*. Drobným vířivým aparátem vybírá mikroskopickou potravu z okolí.

4.3.2 Hlístice

Hlístice (kmen Nematoda) jsou v nálevu z aerofytického mechu nápadné válcovitým srpovitě prohnutým nebo spirálovitě stočeným tělem, které velikostně přesahuje velikost těla většiny jiných v nálevu přítomných živočichů. Tělo mají kryté silnou kutikulou, pod kterou leží epidermis a válcovitá, tělem probíhající dutina, tzv. pseudocoel. V ose pseudocoelu prochází válcovité střevo, okolo kterého v přilehlé dutině leží pohlavními orgány. Střevo je v mikroskopu patrné jako linie procházející tělem, pohlavní orgány tvoří granulózní výplň mezi střevem a povrchem těla. Hlístice mají oddělené pohlaví, samečkové jsou štíhlejší a mají v blízkosti řitního otvoru krátké jehlice (spikuly). Ústní otvor je krytý kutikulárními zuby, za kterými se nachází svalnaté nasávací zařízení. Tento svalový aparát pracuje jako pumpa a umožňuje nasávání potravy do úst a její posunutí do střeva. Konec těla je štíhlejší a někdy vybíhá do krátkého bičovitého ocásku. Kutikula na těle je hladká, ale v hlavové části mívá i různou skulptaci, např. příčné kroužkování nebo krátké smyslové brvy. Hlístice se v nálevu prozrazují rychlými mrskavými pohyby, zejména pokud jsou přímo osvětleny. Půdních a mechových hlístic je velké množství a jejich určování je záležitostí pro odborníky.

4.3.3 Želvušky

Želvušky (kmen Tardigrada) jsou mikroskopičtí živočichové o velikosti 0,1-1 mm, s krátkým válcovitým tělem, které je neseno čtyřmi páry homolovitých panožek zakončených drápky.

Ústní ústrojí tvoří dutina s bodci (stilety), které pokračuje dále do těla přímým střevem. Na hlavě mají oči tvořené shlukem pigmentových buněk. Kutikula želvušek je velmi silná, složitě skulptovaná, s četnými dlouhými výběžky. Při nepříznivém období se želvušky stáhnou do soudečkovitého tvaru. Zatáhnou panožky a hlavu a sníží metabolismus. Takový útvar je schopen přežít mimořádně nepříznivé podmínky. Dokážou přežít var vody i teplotu – 271°C. Ve strnulosti mohou přežít i několik let, přičemž k oživení jim stačí asi 3 hodiny. V nálevu z mechu se prozrazují pomalými máchavými pohyby panožek, které jsou zakončené dlouhými srpovými drápky. Želvušky se živí obsahem buněk řas, které nabodávají stilety v ústní dutině, ale loví i pijavenky, prvoky a roztoče. Klasickou želvuškou v mechu je červenohnědě zbarvené medvíďátko obecné (*Macrobiotus hufellandii*). U nás žije více než 100 druhů želvušek.

5 Použitá literatura

BARTOŠ, E., ŠLAJS, J (1967): Fauna ČSR. Svazek 17. Želvušky, jazyčnatky. – Academia. Praha.

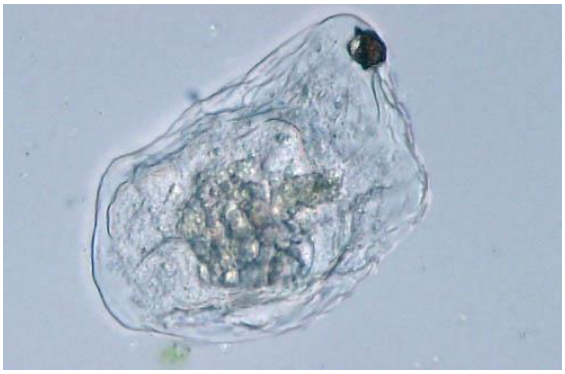
DANIEL, M., ČERNÝ, V. (1971): Klíč zvířeny ČSSR. Díl IV. Želvušky, jazyčnatky, klepítkatci, sekáči, pavouci, štírci, roztoči. – Nakl. ČSAV. Praha.

HRABĚ, J. (1954): Klíč zvířeny ČSSR. Díl I. Prvoci, houby, láčkovci, červi, měkkýši, korýši.– Nakl. ČSAV.

6 Kontakt na autora

doc. RNDr. Michal Mergl, CSc.
Západočeské univerzita v Plzni, Fakulta pedagogická, Klatovská 51, 30619, Plzeň
mmergl@cbg.zcu.cz

Obrázky:



Obr. 1: Améba *Amoeba verrucosa*

Obr. 2: Krytenka *Centropyxis* sp.

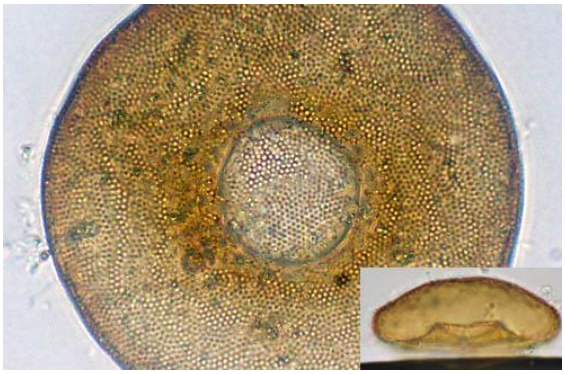
Obr. 3: Křeménka *Euglypha* sp.

Obr. 4: Krytenka *Nebela* sp.

Obr. 5: Krytenka *Difflugia* sp.

Obr. 6: Krytenka *Nebela* sp. s panožkami

Obr. 7: Krytenky *Nebela* sp. a *Arcella* sp.



Obr. 8: Struktura schránky štítovky *Arcella* sp. a její schránka z boku

Obr. 9: Štítovka *Arcella* sp. s vysunutými panožkami

Obr. 10: Pijavenka *Mniobia* sp

Obr. 11: Hlístice z mechu

Obr. 12: Želvuška *Macrobiotus* sp.

PODPORA TALENTOVANÝCH ŽÁKŮ V PLZEŇSKÉM KRAJI

KEMP BIOLOGIE

RYBA JMÉNEM JESETER

David GELA

1 Jeseteři – žijící fosilie

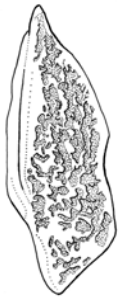
Jeseterovité a veslonosovité ryby paří do nadřádu chrupavčitých ryb (*Chondrostei*) a jsou jedny z nejstarších obratlovců, kteří dodnes žijí na naší planetě. Počátek jejich vývoje se datuje od období spodní jury přibližně před více než 200 miliony lety (Bemis a kol., 1997), zatímco kostnaté druhy ryb se na Zemi vyskytují asi 60 miliónů let. Jesetery tedy můžeme právem nazývat žijícími fosiliemi. Mezi jeseterovité ryby patří druhy dosahující v dospělosti hmotnosti od několika stovek gramů až do několika tun. Většinou se jedná o dlouhověké ryby, některé druhy se dožívají více než 100 let a pohlavně dospívají relativně pozdě, v 6 – 25 letech (Gela a kol., 2009). Vyza velká patří mezi největší ryby na světě, které se vytírají ve sladkých vodách. Největší zaznamenaný úlovek vyzy velké z roku 1736 vážil 2 075 kg a měřil 8,5 metru (Saffronová, 2004). Jak vyplývá z archeologických nálezů, prodělali jeseteři v průběhu své dlouhé evoluce jen velmi málo morfologických změn (Gardiner, 1984). Výsledkem tohoto vývoje je současných 27 druhů jeseterů, řazených do řádu jeseteři (*Acipenseriformes*), který čítá dvě čeledě - veslonosovití (*Polyontidae*) a jeseterovití (*Acipenseridae*). Všechny druhy z řádu jeseteři se přirozeně vyskytují výhradně na severní polokouli.

2 Základní charakteristika

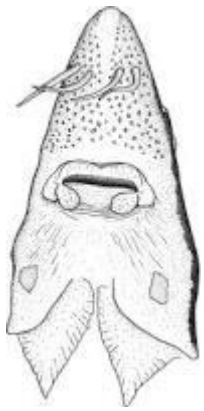
Jeseteři mají několik společných základních charakteristických znaků:

- heterocerkní ocasní ploutev (větší je hřbetní lalok), stejně jako žraloci

- chrupavčitou kostru, částečná osifikace je pouze na lebce
- jejich tělo je protáhlé a vřetenovité, zadní část je laterálně zploštělá
- tělo je pokryto pěti podélnými řadami velkých kostěných štítků, jde o tzv. ganoidní šupiny, veslonosovití mají tělo lysé - bez šupin



- chorda je zachována, není zaškrcována
- plynový měchýř je spojen s jícnem
- ve střevě je přítomna spirální řasa
- ústa jsou na spodině hlavy, která vybíhá v různě dlouhý rypec (rostrum)



- všichni zástupci čeledi jeseterovitých mají čtyři hmatové vousky, veslonos čínský má pouze jeden pár a u veslonose amerického vousky chybí úplně

Systematika chrupavčitých ryb

Třída: Ryby – *Osteichthyes*
Podtřída: Paprskoploutví – *Actinopterygii*
Nadřád: Chrupavčití – *Chondrostei*

Čeleď: Veslonosovití – *Polyodontidae*
Rod: *Polyodon*
Druh: Veslonos americký – *P. spathula*
autochtonní v Severní Americe
Rod: *Psephurus*
Druh: Veslonos čínský – *P. gladius*
autochtonní v Asii

Čeleď: Jeseterovití – *Acipenseridae*

Rod: *Pseudoscaphirhynchus*

Druh: Lopatonos kaufmannův (velký) – *P. kaufmanni*
Lopatonos hermannův (malý) – *P. hermanni*
Lopatonos fedtshenkův – *P. fedtschenkoi*
autochtonní v Asii

Rod: *Scaphirhynchus*

Druh: Lopatonos bílý (velký) – *S. albus*
Lopatonos americký (obecný) – *S. platorhynchus*
Lopatonos alabamský – *S. suttkusi*
autochtonní v Severní Americe

Rod: *Huso*

Druh: Vyza velká – *H. huso*
autochtonní v Evropě
Vyza malá (sibiřská) – *H. dauricus*
autochtonní v Asii

Rod: *Acipenser*

Druh: Jeseter krátkonosý (krátkorypý) – *A. brevirostrum*
Jeseter jezerní (rudý) – *A. fulvescens*
Jeseter zelený – *A. medirostris*
Jeseter ostronosý (atlantský) – *A. oxyrinchus*
Jeseter bílý – *A. transmontanus*
autochtonní v Severní Americe

Jeseter ruský – *A. gueldenstaedtii*
Jeseter jadranský (adriatický) – *A. naccarii*
Jeseter hladký – *A. nudiventris*
Jeseter malý – *A. ruthenus*
Jeseter hvězdnatý – *A. stellatus*
Jeseter velký (obecný) – *A. sturio*
autochtonní v Evropě

Jeseter sibiřský – *A. baerii*
Jeseter jihočínský – *A. dabryanus*
Jeseter sachalinský (severní) – *A. mikadoi*
Jeseter perský – *A. persicus*
Jeseter amurský – *A. schrencki*
Jeseter čínský – *A. sinensis*
autochtonní v Asii (Kahanec, M., 2014)

Dále jsou popsány druhy, jejichž systematické zařazení není ustálené a je stále středem zájmu systematiků (Kahanec, M., 2014). Jedná se o druhy:

Jeseter mexický (golfský) – *A. desotoi*

- tento druh však bývá v literatuře nejčastěji označován jako poddruh jesetera ostronosého a to jako *Acipenser oxyrinchus desotoi* Vladykov,1955, (Kirschbaum, 2010). Někteří ichtyologové ho však považují za samostatný druh.

Jeseter kolchický – *A. colchicus*

- někteří autoři rozlišují dvě formy *Acipenser gueldenstaedtii* var. *tanaica* a *A. gueldenstaedtii* var. *colchicus* (www.biolib.cz/cz/taxon/id710858/). V současné době panují názory, že by měl být *A. g. colchicus* uznán na základě genetických analýz jako samostatný druh. Jinak jsou jeho nároky na chov téměř shodné s jeseterem ruským.

Jeseter štítkatý (japonský) – *A. multiscutatus*

- v literatuře se uvádí i tento druh, bývá však většinou ichtyologů synonimizován s jeseterem amurským (Hochleithner 2004), přesto byl ještě do roku 2013 veden na stránkách World Sturgeon Conservation Society e V. (www.wscs.info), jako samostatný druh.

3 Závěr

V současné době se činností člověka u všech druhů chrupavčitých ryb rapidně snižuje jejich přirozený výskyt ve volné přírodě. Příčiny snižování diverzity a početnosti jeseterů lze shrnout do šesti základních bodů:

1) Nadměrný legální a ilegální odlov ryb z volných vod za účelem získání luxusního zboží, tzn. kaviáru a masa a nelegální obchod s tímto zbožím. V souladu s výsledky 10. konference členských zemí CITES jsou od 1.4.1998 všechny druhy jeseterovitých ryb (*Acipenseriformes* spp.) zařazeny v příloze II k CITES, s výjimkou druhů *Acipenser brevirostrum* a *Acipenser sturio*, které jsou v příloze I. (www.env.cz)

2) Pozdní pohlavní dospívání ryb násobené tím, že jikernačky jsou schopny opětovné reprodukce po třech až čtyřech letech.

3) Výrazná migrace největších jeseterovitých a veslonosovitých druhů. Jsou to silně migrující ryby, některé druhy sice žijí ve sladkých vodách celý život, ale většina z nich část života tráví v mořích a pouze za účelem reprodukce se vydávají do horních toků řek.

4) Stavby a umělé překážky na řekách, které nejsou migrující ryby schopny překonat a dostat se na místa přirozeného výtěru. Řeky jsou dále devastovány změnou jejich přirozených koryt zanášením naplaveninami.

5) Znečištění řek a moří, které zhoršuje reprodukční schopnosti ryb, kvalitu pohlavních produktů, zapříčiňuje zvýšený výskyt abnormalit a vnímavost ryb vůči nemocem a parazitům

a současně snižuje dostupnost přirozené potravy pro všechny věkové kategorie ryb (Altuf'ev, Y., 1997, Debus, L, 1997).

6) Malé finanční subvence do výzkumu zaměřeného na zvládnutí managementu chovu a řízené reprodukce u většiny chrupavčitých ryb.

Obr. 1. Jeseter sibiřský – dospělý jedinec (foto M. Podhora)

Obr. 2. Jeseter ruský – mladý jedinec (foto M. Podhora)

Obr. 3. Jeseter malý (foto M. Podhora)

4 Použitá literatura

ALTUF'EV, Y., 1997. Morphofunctional abnormalities in the organs and tissues of the Caspian sea sturgeons cause by ecological changes, same volume. 1997. In*:* Birstein, V.J., Bauer, A., Kaiser-Pohlmann, A. (eds.). Proceedings of the Sturgeon Populations and Caviar Trade Workshop, IUCN SSC p. 81.

BEMIS, W.E., FINDEIS, E.K., GRANDE. L., 1997. An overview of Acipenseriformes. Env. Biol. Fish, 48, pp. 25–71.

DEBUS, L., 1997. Sturgeons in Europe and causes in their decline. In*:* Birstein, V.J., Bauer, A., Kaiser-Pohlmann, A. (eds.). Proceedings of the Sturgeon Populations and Caviar Trade Workshop, IUCN SSC Paper No. 17: 55-68.

GARDINER, B.G., 1984. Sturgeons as Living Fossils. In: Eldredge, N., Stanley, S.M. (Eds.), Living Fossils. Springer-Verlag, New York, pp. 148–152.

GELA, D., KAHANEC, M., FLAJŠHANS, M., RODINA, M., LINHART, O., 2009. Chov chrupavčitých ryb ve Vodňanech. Konference 60. let výuky rybářské specializace na MZLU v Brně. MZLU v Brně, p.90

HOCHLEITHNER, M., 2004. Stör – Biologie und Aquakultur. AquaTech Publication, pp. 9-222.

KAHANEC, M., 2014. Metody odchovu raných stádií jeseterovitých ryb. Bakalářská práce. Fakulta rybářství a ochrany vod, Jihočeská univerzita v Českých Budějovicích, České Budějovice, Česká republika.pp. 1-51

KIRSCHBAUM, F., 2010. Store. Aqualog animalbook, GmbH, pp. 1-168.

SAFFRONOVÁ, I., 2004. Kaviár – fascinující cesta za utajenými dějinami kaviáru. BB/art s.r.o., p. 42.

Biolip. biolip.cz [online]. 2014, [cit.2014-16-1]. Taxonomie. Dostupné z WWW: <www.biolib.cz/cz/taxon/id710858/>

www.env.cz

WSCS - World Sturgeon Conservation Society. Dostupné na: http://www.wscs.info/

Zdroj perokreseb: http://commons.wikimedia.org Friedman M. 2012. Ray-finned fishes (Osteichthyes, Actinopterygii) from the type Maastrichtian, the Netherlands and Belgium. Scripta Geologica 145.

5 Poděkování

Děkuji Marku Podhorovi za poskytnutou fotodokumentaci ryb a umožnění její prezentace.

6 Kontakt na autora

Ing. David Gela, Ph.D.
Jihočeská univerzita v Českých Budějovicích, Fakulta rybářství a ochrany vod, Jihočeské výzkumné centrum akvakultury a biodiverzity hydrocenóz a Výzkumný ústav rybářský a hydrobiologický, Zátiší 728/II, 389 25 Vodňany, www.frov.jcu.cz
gela@frov.jcu.cz

PODPORA TALENTOVANÝCH ŽÁKŮ V PLZEŇSKÉM KRAJI

CHEMICKÝ KEMP

VYUŽITÍ KRESLÍCÍHO CHEMICKÉHO PROGRAMU CHEMSKETCH

Jana BRICHTOVÁ

1 Úvod

Hlavním cílem odpoledního setkání účastníků chemického kempu bylo seznámit se se základními nástroji kreslícího chemického programu ChemSketch.

Největším přínosem programu ChemSketch je jeho jednoduchost, snadná ovladatelnost, možnost optimalizace a vizualizace nakreslených struktur a v neposlední řadě může ještě více motivovat zájem o hlubší studium chemie.

Nejzajímavější částí kreslící programu ChemSketch je podprogram 3DViewer, který převádí strukturní vzorec sloučeniny na její 3D model s tím, že uživatel si může vybrat, s jakým druhem modelu bude v prostoru otáčet a předvádět ho z různých stran.

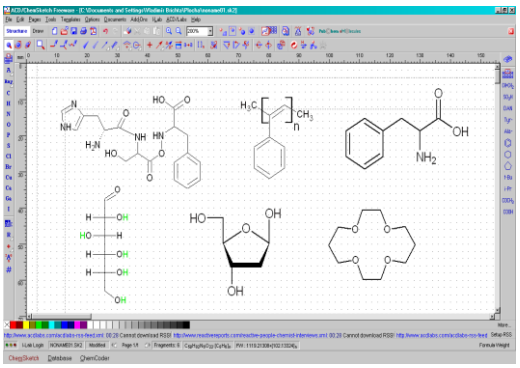
V dalším textu jsou pouze naznačeny některé možnosti kreslícího programu a vybrané úkoly, které účastníci chemického kempu měli během odpoledne vyřešit. Podrobnější návody s názornými ukázkami měli samozřejmě studenti k dispozici a tyto návody si také mohli odnést s sebou domů.

2 POPIS prostředí programu Chemsketch

Program ChemSketch je nejjednodušší kreslicí chemický program, který můžeme získat zdarma. Je produktem firmy Advanced Chemistry Development a v současné době je uživatelům k dispozici již verze č. 12.0.

S programem ChemSketch se pracuje ve dvou základních režimech.

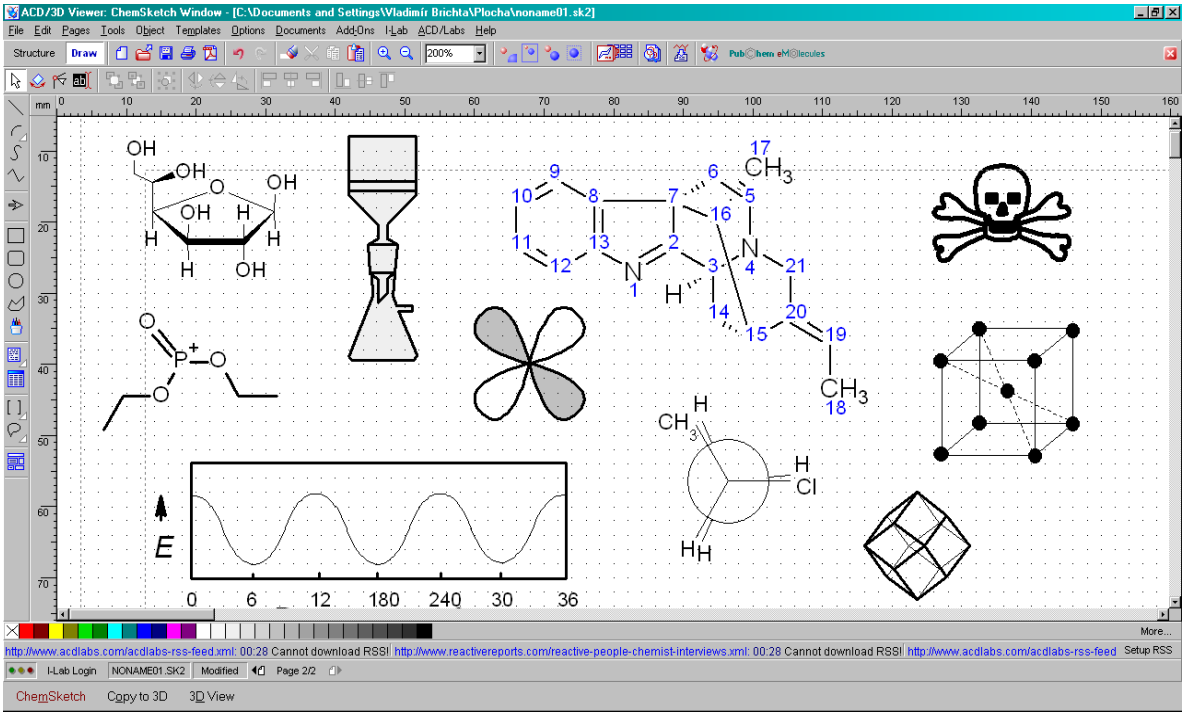
2.1 Režim Structure



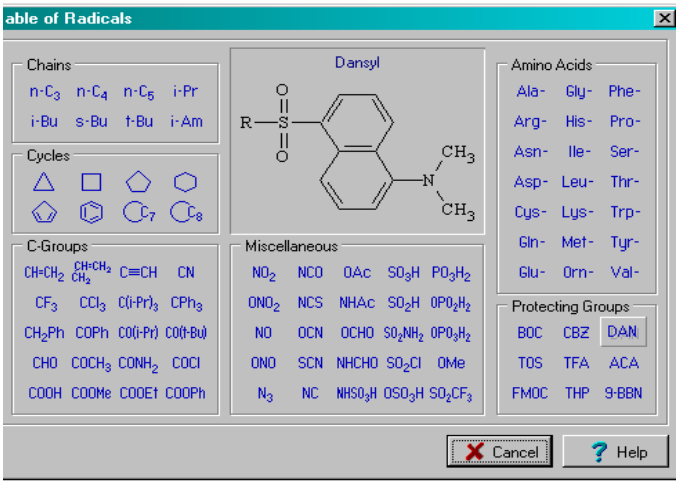
Režim „**Structure**“ je určený pro pohodlné kreslení chemických struktur a pro výpočty některých vlastností molekul (molární hmotnost, hustota, procentové složení a jiné). Navíc program umožňuje vytvořené struktury molekul i pojmenovat. V programu lze dobře kreslit také sloučeniny s kovalentní, koordinační i iontovou vazbou, vytvářet reakční schémata, ale nejvíce využívaný je program pro kreslení struktur organických a přírodních sloučenin.

2.2 Režim Draw

Režim „**Draw**“ je určený pro grafickou činnost, jako je nákres chemických aparatur, náročnějších a složitějších molekul, orbitalů, krystalických struktur nebo třeba grafů.

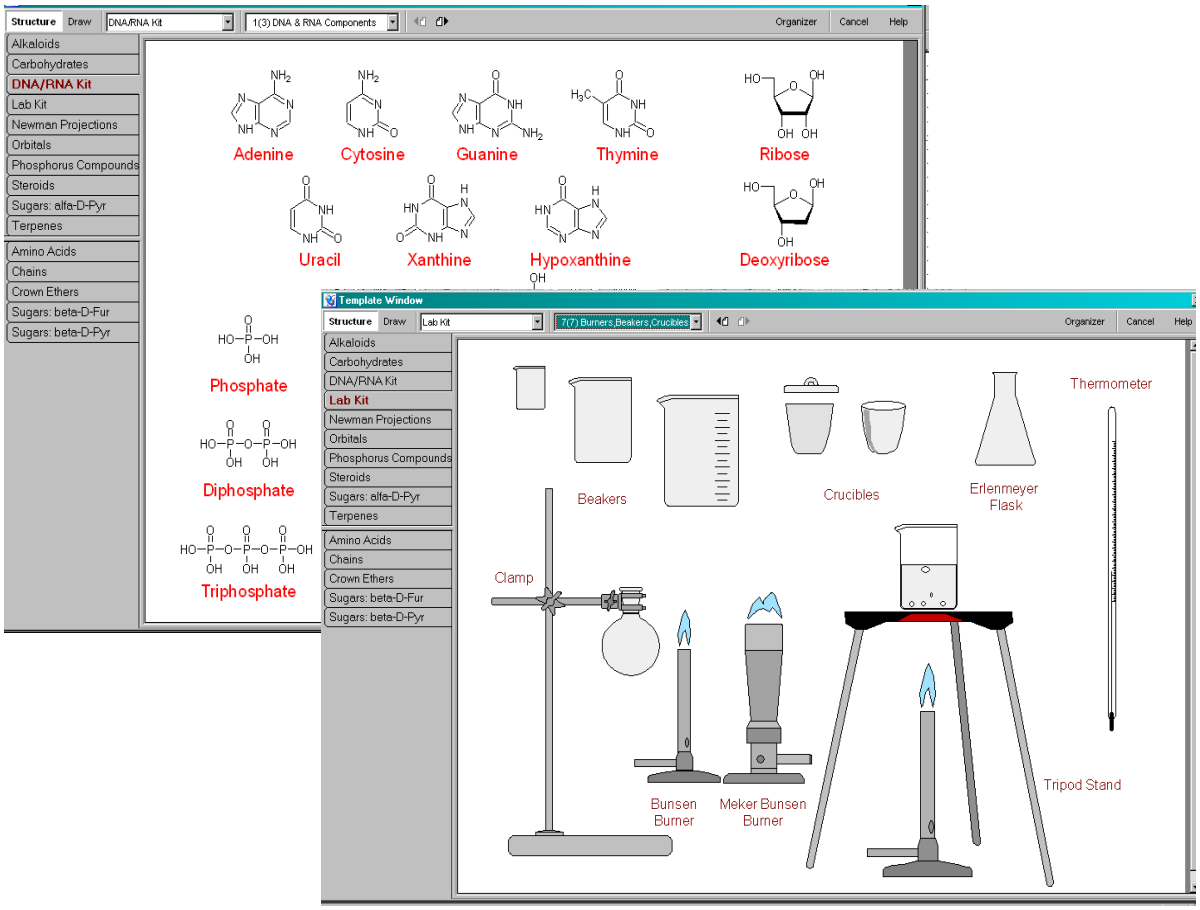


Velkou výhodou programu je velice široká nabídka již hotových struktur (funkčních skupin, sacharidů, uhlovodíků aminokyselin, vitamínů, cyklických sloučenin, steroidů, atd.) v podobě nástroje „Table of Radicals“ nebo šablon „Templates“.



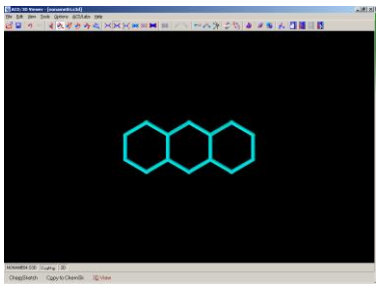
Po zakreslení dané struktury se na dolní liště objeví informace o této sloučenině. Uvidíme např. sumární vzorec, relativní molekulovou hmotnost, hustotu, molární objem apod.

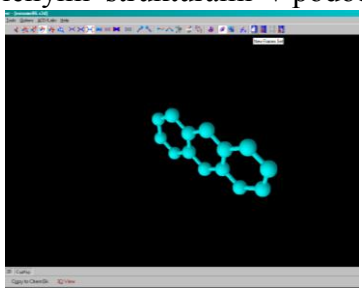
Pod nabídkou „***Templates***“ jsou umístěny šablony s obrovským množstvím sloučenin, které je možné kopírovat, editovat. Navíc zde najdeme i tabulky s laboratorním nádobím, ze kterého můžeme sestavovat různé laboratorní aparatury.

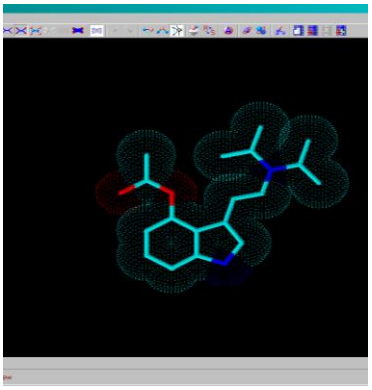


Nakreslené sloučeniny je možné uložit, vytisknout nebo převést do jiného dokumentu, např. do Wordu, Excelu a poslední verze umožní dokonce uložit vytvořený soubor v PDF formátu.

Nespornou výhodou je možnost optimalizace kreseb molekul v podobě 2D nebo 3D a navíc pro variantu 3D je program ChemSketch doplněn podprogramem ACD/3DViewer. V tomto podprogramu můžeme libovolně otáčet nakreslenými strukturami v podobě







drátových, tyčinkových nebo třeba kalotových modelů. Navíc je v tomto podprogramu možné s modely v prostoru otáčet nebo nechat změřit vazebné úhly, meziatomové vzdálenosti, aj.

Tato funkce je jednou z nejhezčích aplikací programu ChemSketch.

2.3 Cvičení a úkoly

Po seznámení s programem měli studenti možnost vyzkoušet si některé základní postupy při kreslení vybraných chemických struktur a procvičit si je s dopomocí podrobnějších návodů. Na závěr odpoledne studenti samostatně kreslili vybrané chemické sloučeniny, převáděli je do podprogramu 3D Viewer a zkoušeli jeho možnosti. Využívali samozřejmě i režim Draw a vytvářeli jednoduché chemické aparatury a reakční schémata.

3 Závěr

Studenti během semináře získali stručný přehled o možnostech a využití chemického kreslicího programu ChemSketch. Jeho absolvováním mají účastníci kempu základní schopnost orientovat se v problematice kreslícího programu a pracovat s ním jak v přípravách podkladů na vyučování, např. protokolů, seminárních prací, prezentací, zpracování projektů, tak třeba i jen pro svoji zábavu. Účastníci se také naučili, jak jednoduše si lze vytvořit vybrané vzorce již hotových chemických sloučenin a vyhnout se tak někdy problematickým autorským pravidlům.

4 Použitá literatura

DRAŠAR, P. ACD/ChemSketch – verze 10.0 pro Microsoft Windows, učební pomůcka, kreslení chemických struktur a grafiky. [online]. 2007 [cit. 2010-7-27]. 131 s. Dostupné z: <http://www.vscht.cz/lam/new/chemsk_t_v10_CZa.pdf>

5 Kontakt na autora

Mgr. Jana Brichtová
Masarykovo gymnázium, Petákova 2, Plzeň
janabrichtova@atlas.cz

PODPORA TALENTOVANÝCH ŽÁKŮ V PLZEŇSKÉM KRAJI

CHEMICKÝ KEMP

TITRAČNÍ METODY

Jan HRDLIČKA

1 Úvod

Titrací jsou nazývány metody stanovení látek založené na měření objemu roztoku činidla, které je právě potřeba k úplnému zreagování stanovované složky ve známém objemu stanovovaného roztoku, tj. k dosažení bodu ekvivalence. Pokud známe přesnou látkovou koncentraci roztoku činidla (tzv. titr), můžeme na základě znalosti chemické reakce vypočítat množství nebo koncentraci stanovované složky v roztoku.

V bodě ekvivalence dochází k tomu, že je všechna stanovovaná látka beze zbytku zreagována a naopak se objevuje první nadbytek titračního činidla. Tuto změnu obvykle nelze postřehnout smysly, a proto se využívá indikátorů. Jedná se o chemické látky, které mění svou barvu v závislosti na vlastnostech roztoku. Okamžik, ve kterém dochází k výrazné změně barvy, odpovídá dosažení bodu ekvivalence.

2 Laboratorní vybavení

Odměrné nádobí slouží k přesnému odměření potřebného objemu. Dělí se na dvě skupiny. Byreta a pipeta jsou odměrné nádobí kalibrované tzv. na vylití, na nádobí je nápis Ex. To znamená, že pokud naplníme nádobí přesně po rysku, pak to co vyteče je objem, který je určen popiskem na daném nádobí.

Odměrná baňka je oproti tomu odměrné nádobí kalibrované tzv. na dolití, na nádobí je nápis In. Znamená to, že pokud odměrnou baňku doplníme přesně po rysku, obsahuje objem určený popiskem na dané baňce.

Při odečítání hodnoty nebo doplňování kapaliny po rysku se díváme vždy vodorovně s hladinou vody a kolmo na skleněnou trubici. Protože v úzké trubici se výrazně projeví hydrofilita skla, hladina vodného roztoku v trubici má tvar misky. Zajímá nás nejnižší bod (tzv. meniskus) kapaliny. Ten je určující pro korektní odměření objemu.

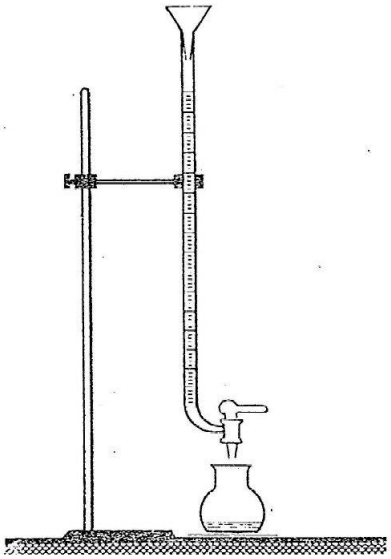
3 Odměřování objemů

Před vlastním odměřováním roztoku pipetou či byretou je třeba nádobí malým množstvím příslušného roztoku vypláchnout, abychom se zbavili malých množství vody ulpělých na stěnách, která by měnila koncentraci odměřovaných roztoků.

Odměřování přesného objemu pipetou. Ústy nebo balónkem nasajeme do pipety odměřovaný roztok tak, aby hladina roztoku byla o něco výše než je ryska. Dáváme pozor, abychom během sání nenadzvedli špičku pipety nad hladinu roztoku, mohlo by dojít k nasátí vzduchu a pak snadno vnikne roztok až do úst. Pak rychle uzavřeme pipetu ukazováčkem. Pomalu upouštíme roztok a sledujeme hladinu v pipetě. Jakmile se hladina dotkne rysky, opět pipetu pevně uzavřeme prstem. Přeneseme pipetu s roztokem k nádobí, do kterého roztok odměřujeme a uvolníme ukazováček. Roztok necháme volně vytéci, přičemž pipetu držíme

šikmo a dotýkáme se špičkou pipety skleněné stěny nádobí. Pipetu rozhodně nikdy nevyfukujeme, zbytek kapaliny ve špičce pipety je zohledněn již při její kalibraci.

Odměřování byretou. Připravíme si byretu na stojan podle obrázku (Obr. 1). Byreta by měla být v držáku uchycena přibližně ve třetině výšky a svisle. Byretu naplníme odměrným roztokem nad značku nuly pomocí vhodné nálevky. Nálevku vyjmeme a upouštíme kohoutem přebytečnou kapalinu, dokud se hladina přesně nedotkne rysky označující nulu. Zkontrolujeme, zda není nikde v objemu kapaliny žádná bublina vzduchu, obzvláštní pozornost věnujeme tenké trubičce v okolí kohoutu a špičce byrety. Pokud zde najdeme bublinu, je třeba ji odstranit a plnění opakovat, jinak nám hrozí, že při uniknutí bubliny bude objem kapaliny vypuštěný z byrety jiný, než hodnota odečtená ze stupnice.



Obr. **1** Sestava pro titraci

4 Titrační stanovení

4.1 Stanovení přesné koncentrace $AgNO_3$

Ke správnému výsledku titračních stanovení je nutné znát přesnou koncentraci titračního činidla, tzv. titr. Protože se roztoky titračních činidel ve většině případů připravují je o přibližné koncentraci, je nutno přesnou koncentraci stanovit pomocí vhodné látky. Obvykle tuto látku přímo navažujeme a musí splňovat některé podmínky, především musí být dostatečně stálá a dostupná v dostatečné čistotě. V případě argentometrických titrací je takovou látkou NaCl. Titrace pak probíhá podle rovnice

$$NaCl + AgNO_3 \rightarrow \underline{AgCl} + NaNO_3$$

Diferenčně se naváží asi 0,04 g NaCl přesně do 150–250 cm^3 kádinky. Navážka se rozpustí v asi 50 cm^3 vody a přidá se 1 cm^3 5% roztoku K_2CrO_4. Roztok se tím zabarví do žluta. Titruje se roztokem $AgNO_3$ (c~0,05 $mol.dm^{-3}$) za intenzivního míchání skleněnou tyčinkou. V místě, kde vtéká odměrný roztok do titrovaného roztoku, se tvoří červenohnědé zbarvení, které mícháním zmizí (zůstává však bílý zákal AgCl ve žlutém roztoku) zpočátku rychle, později stále pomaleji. Zmenšujeme proto rychlost přidávání, nakonec titrujeme po kapkách za vydatného míchání. V okamžiku, kdy se titrovaná směs právě postřehnutelně

zbarví červenohnědě vyloučeným Ag_2CrO_4 a toto zbarvení mícháním nezmizí, ukončíme titraci.

4.2 Stanovení halogenidů (chloridů nebo bromidů) Mohrovou metodou

Jedná se o již uvedenou srážecí reakci. Indikátorem je chroman draselný, který s $AgNO_3$ poskytuje červenou sraženinu Ag_2CrO_4. Tato sraženina je však rozpustnější než AgCl (AgBr), a proto se začne vylučovat až po úplném vysrážení halogenidů. Konec srážení halogenidů je tedy indikován vystoupením červeně zbarveného Ag_2CrO_4.

Vzorek v 250 cm^3 odměrné baňce se doplní vodou po rysku a promíchá. Do 250 cm^3 kádinky se odpipetuje 25 cm^3 zásobního roztoku, přidá se asi 50 cm^3 destilované vody a 1 cm^3 5% roztoku K_2CrO_4.

Pak začneme z byrety připouštět za intenzivního míchání $AgNO_3$ o známém titru. V okamžiku, kdy se titrovaná směs právě postřehnutelně zbarví červenohnědě a toto zbarvení mícháním nezmizí, ukončíme titraci.

4.3 Stanovení celkové tvrdosti vodovodní vody

Situace v chelatometrii je pro výpočty zjednodušena tím, že chelaton reaguje s kationtem vždy v látkovém poměru 1:1, tedy 1 mol chelatonu zreaguje přesně s jedním molem stanovovaného kationtu. Obecně lze reakci dvojmocného kationtu popsat rovnicí

$$M^{2+} + Y^{4-} \text{ --> } [MY]^{2-}$$

kde M je obecný symbol pro kov a Y je chelaton III po odštěpení dvou iontů sodíku a dvou iontů vodíku.

V tomto konrétním případě jde o vytitrování součtu iontů Ca^{2+} + Mg^{2+}. Titraci provádíme s použitím indikátoru eriochromčerň T v alkalickém prostředí o pH ~ 10.

Odpipetuje se 100 cm^3 vzorku vodovodní vody, přidá se 5 cm^3 amonného (Schwarzenbachova) tlumiče, zahřeje se na 50 °C a přidá se tolik eriochromčerně T, kolik je třeba pro vznik vínově červeného zabarvení. Pak se titruje roztokem chelatonu 3 (c = 0,02 $mol.dm^{-3}$) do čistě modrého zabarvení. Výsledek pak udáváme jako celkovou tvrdost vody, vyjádřenou v mmol kovů alkalických zemin na 1 dm^3 vody.

4.4 Stanovení Pb^{2+} zpětnou titrací

Zpětná titrace se využívá v situaci, kdy reakce analytu s titračním činidlem není dostatečně rychlá. Nejdříve se tedy nechá zreagovat analyt (v našem případě Pb^{2+}) se známým nadbytkem titračního činidla (chelaton III) tak, aby reakce proběhla beze zbytku. Nezreagované titrační činidlo se pak titruje dalším odměrným roztokem ($MgSO_4$) do bodu ekvivalence. Rozdíl mezi celkovým přidaným množstvím titračního činidla a jeho zjištěným nadbytkem odpovídá spotřebě titračního činidla na analyt.

Vzorek ve 100 cm^3 odměrné baňce se doplní vodou po rysku a promíchá. Do titrační baňky se odpipetuje 25 cm^3 roztoku vzorku, obsahujícího olovnaté ionty. Stěny baňky se opláchnou nejméně 50 cm^3 vody. Obsah baňky se okyselí 5 cm^3 HNO_3 (1:5) a přidá se 25 cm^3 odměrného roztoku chelatonu III. Do tohoto roztoku se dále přidá 5 cm^3 Schwarzenbachova pufru a tolik eriochromčerni T, až je roztok čistě modře zbarven. Odměrným roztokem $MgSO_4$ se provede titrace do vínově červeného zbarvení.

5 Závěr

Studenti si vyzkoušeli stanovení srážecími titracemi, které jsou náročnější na provedení. Také absolvovali postup a výpočty při zpětné titraci a při stanovení vody titraci reálného vzorku. Přitom si prakticky ověřili základy práce při odměřování roztoků pomocí pipety a byrety. Vzhledem k tomu, že v prvním úkolu studenti stanovovali titr titračního činidla, které bylo pro všechny shodné, bylo možné porovnávat výsledky mezi sebou. Stejná situace nastala ve třetím úkolu, kdy stanovovali celkovou tvrdost vodovodní vody, kterou si odebrali z kohoutku v laboratoři. Tyto údaje pak byly porovnány s normou pro pitnou vodu a mohli jsme konstatovat, že vodovodní voda v tomto ohledu vyhovuje. Při stanovení olova zpětnou titrací si pak studenti vyzkoušeli postup výpočtů pro tuto metodu, který je o poznání složitější.

6 Použitá literatura

KRAITR M. Příručka pro laboratorní cvičení z analytické chemie. PF Plzeň, Plzeň 1965
HORÁKOVÁ, M. Analytika vody 2. vyd. VŠCHT, Praha 2003.

7 Kontakt na autora

Ing. Jan Hrdlička, PhD.
Katedra chemie FPE ZČU v Plzni
hrdlicka@kch.zcu.cz

PODPORA TALENTOVANÝCH ŽÁKŮ V PLZEŇSKÉM KRAJI

CHEMICKÝ KEMP

NEROSTY A HORNICKÁ ČINNOST VE STŘÍBRSKÉM RUDNÍM REVÍRU

Milan KRAITR

1 Úvod

Těžba a využití nerostných surovin je významným interdisciplinárním tématem týkajícím se především chemických a geologických věd. Mimořádný význam má problematika těžby rudních nerostů, která vytváří surovinovou základnu pro metalurgii, chemický průmysl a další výrobní odvětví. V současné době se těžba rud v České republice neprovádí, v minulosti však naše země v tomto směru zaujímala přední místo ve světovém měřítku. K nejvýznamnějším rudním revírům na území Plzeňského kraje patří stříbrský rudní revír, kde těžba probíhala až do 2. poloviny 20. století. Zdejší zrudnění je nejdůležitějším reprezentantem pozdněvariské polymetalické asociace s Pb-Zn mineralizací v západních Čechách a v celé České republice.. Těžba zde byla zaměřena především na olovo (stříbronosný galenit), v novější době i na zinek (sfalerit).

2 Stříbrský rudní revír

2.1 Geologickomineralogická charakteristika

Zdejší žíly pronikají silně zvrásněnými horninami svrchního proterozoika, metamorfózou změněných na sericitické a chloritické fylity. Ve stříbrském obvodu je známo celkem asi 50-60 rudních žil různé kvality. Tvoří systém dvou hlavních směrů, S-J (SZ-JV) s úklonem k Z (JZ) a směru Z-V (JZ-SV) s úklonem k J (JV). Dosahují max. délky 2,4 km a jejich mocnost kolísá od několika cm do 50 cm, výjimečně v místech naduření přesahuje i 3 m. Typická je brekciovitá, páskovitá a drúzovitá textura žilné výplně. Zrudnění má nepravidelný čočkovitý ráz.

Stříbrský rudní obvod, rozkládající se na ploše přibližně 4x6 km, se dělí na 4 revíry. V jv. části Stříbra se rozkládá tzv. centrální revír. Hlavní žilou obvodu i celého stříbrského obvodu je Dlouhá žíla, tvořící složité žilné pásmo směru SSZ-JJV o sklonu 60-75^{o} k Z, otevřená v délce přes 2,4 km (polovina této délky je zrudněná). Druhou nejdelší žilou je Bohaté požehnání (1,8 km). Z dalších žil revíru jmenujme Barboru, Nového Prokopa, Antonína, Josefa aj.

Jz. od města se nachází revír Všech Svatých (Milíkov), kde byly těženy žíly Vojtěch a Josef (směr Z-V, úklon 60^{o} k J, mocnost kolem 50 cm). Na j. a jz. svahu kopce Jirná (3 km jjv. od Stříbra) se rozkládá Jirenský revír. Posledním revírem je Kladrubský (3 km j. od Stříbra).

Minerální složení žil není příliš rozmanité, minerály jsou však velmi často vyvinuty ve velkých drúzových dutinách ve formě pěkných krystalů. V žilovině převládá křemen více generací nad barytem a karbonáty. Mezi rudními nerosty převažuje galenit a sfalerit, častý je pyrit s markazitem, vzácné jsou zrnitý chalkopyrit a arzenopyrit. Galenit tvoří v dutinách

objemu desítek m^3 až 20 cm velké krystaly. Obsahuje malé množství stříbra (v Milíkově 0,05-0,1 %, v Jirném kolem 0,01 %). Nehojnými žilnými nerosty byly dolomit, siderit a fluorit. Jedním z nejmladších minerálů je harmotom, tvořící bílé povlaky a kůry na sfaleritu. Mineralogický význam má zdejší oxidační zóna, vyvinutá až do hloubky kolem 130 m. Jejím nejvýznamnějším nerostem je cerusit, který se v minulosti vyskytoval na žilách zcela běžně. Byl popsán už v roce 1791 J. T. Lindackerem. Dalším typickým minerálem zdejší oxidační zóny je pyromorfit. Zajímavá je jeho vápnitá odrůda, původně popsaná jako nový minerál miesit, která tvoří šedé ledvinité agregáty se stébelnatou či miskovitou stavbou. Část olova je v něm zastoupena až 9 % CaO. Velmi vzácně se vyskytoval anglesit a další sekundární minerály (Pauliš 2002).

Soupis nalezených minerálů: anglesit, ankerit, aragonit, argentit, arzenopyrit, azurit, baryt, barytokalcit, beudanit, bindheimit, brochantit, cerusit, dolomit, epsomit, fluorit, galenit, gibbsit, goslarit, greenockit, harmotom, hematit, chalcedon, chalkopyrit, chryzokol, kalcit, křemen, limonit, linarit, malachit, markazit, melanterit, minium, opál, palygorskit, pyrhotin, pyrit, pyromorfit, sádrovec, sfalerit, siderit, stříbro, uranitit, wurtzit.

2.2 Historie těžby a využití

O počátcích zdejší těžby nejsou přesné údaje, spadají však zřejmě již do 12. století. První dokument, vztahující se ke zdejším stříbrným dolům, pochází z roku 1186. Německé pojmenování Mies bylo odvozeno od keltského Misa označující řeku Mži. Nynější název Stříbro se objevuje v listinách až od roku 1469. Z počátku se zde těžilo stříbro, po vytěžení povrchových partií však obsahy tohoto kovu klesly natolik, že se po roce 1410 již většina autorů zmiňuje výhradně o dolech na olovo. Během 700 let existence zdejších dolů lze vydělit 4 různě dlouhá období konjunktury.

První bylo ukončeno husitskými válkami. Druhé v letech 1500-1650 bylo charakteristické tím, že zdejší olovo bylo využíváno především při hutnění stříbrných rud ve Velharticích, Českém Krumlově, Kutné Hoře a od roku 1558 v jáchymovské huti hraběte Šlika. V roce 1513 se začalo s ražbou dědičné štoly Prokop. Třetí a nejdelší období rozvoje hornického podnikání ve Stříbře započalo brzy po třicetileté válce a skončilo až v první polovině 20. století. Doly s kratšími přestávkami prosperovaly i v 18. a 19. století. Na počátku 20. století se těžba olověných rud rozvinula během 1. světové války v důsledku velké poptávky po olovu. V roce 1916 byla vojenskou správou znovuotevřena na levém břehu Mže štola Vojtěch. Začátkem dvacátých let zde bylo těženo 6-8,8 tisíc t Pb rud ročně. Ve dvacátých letech 20. století byla otevřena některá další důlní díla a v roce 1925 se začalo u Svinného s hloubením nové jámy Leo, která o rok později dosáhla hloubky 250 m. Kovnatost těžené rudy dosáhla 8,4 % Pb. Přes moderní vybavení byl provoz na tomto dole v roce 1930 zastaven.

Poslední etapu důlní činnosti zahájily v roce 1950 Středočeské rudné doly průzkumem Dlouhé žíly a žíly Bohaté požehnání, na které navázal v roce 1952 Západočeský rudní průzkum prospekcí celého revíru. Jako otvírková díla byly rekonstruovány především jáma I (dříve Langenzug a jámy III (dříve Leo). Dlouhá žíla byla prozkoumána do hloubky 350 m. Během těžebních prací v letech 1957-1975 bylo vytěženo přibližně 615 tis. t rudy (nejvíc 63 tis. t v roce 1965) o obsahu 2-3,7 % Pb, 0,1-1,5 % Zn a 10-40 g/t Ag. Ruda se zpracovávala v úpravně na Březových Horách v Příbrami. Vedle toho byla v těsné blízkosti Dlouhé žíly vyhloubena 100 m hluboká jáma Antonín, ze které byla sledována stejnojmenná žíla. Práce zde byly ukončeny v roce 1959. Na pravém břehu Mže, asi 250 m od Stříbra, byla v roce 1953 vyzmáhána jáma Brokárna, hluboká 275 m. Těžena byla především žíla Bohaté požehnání,

sledovaná směrně v délce 1 km. V letech 1960-65 se z ní získalo 41,5 tis. t rudy, zpracované na úpravně Stříbro. V letech 1961-72 probíhala těžba i na lokalitě Milíkov, kde se jamou Vojtěch vytěžilo ze žil Vojtěch a Josef 189 tis. t rudy. Poslední vůz rudy byl vytěžen 22. 12. 1974.

3 Závěr

Pozůstatky po těžbě rud z 12. – 20. století poskytují stále výborné příležitosti pro poznávací činnost. Ideální způsob poznávání stříbrského revíru představuje kombinace návštěvy hornického skanzenu ve Stříbře s dědičnou štolou Prokop a terénní práce spojené s hledáním a určováním nerostů na pozůstatcích důlních odvalů.

4 Použitá literatura

PAULIŠ, P. Nejzajímavější mineralogická naleziště Čech II. Kutná Hora: Kuttna, 2003. s.111-114.

BERNARD, J. H. a kol. Mineralogie Československa. Praha: Academia, 1981. s.271-274.

5 Kontakt na autora

Prof. Ing. Milan Kraitr, CSc.
Katedra chemie FPE ZČU v Plzni
kraitr@kch.zcu.cz

PODPORA TALENTOVANÝCH ŽÁKŮ V PLZEŇSKÉM KRAJI

CHEMICKÝ KEMP

PŘÍPRAVA ANORGANICKÝCH LÁTEK

Vladimír SIROTEK

1 Úvod

Smyslem práce v laboratoři je praktické poznávání chemických látek na základě experimentů a porovnávání těchto poznatků s teoretickými principy. Při přípravě anorganických látek se využívají základní preparační metody, jejichž podstatou jsou acidobazické, redoxní, srážecí, komplexotvorné nebo i další reakce.

Účastníci letošního chemického kempu si vyzkoušeli z těchto základních způsobů přípravy anorganických látek neutralizační a srážecí postupy.

2 Neutralizace

Princip:

Celou řadu ve vodě rozpustných solí minerálních kyselin a zásad lze připravit v laboratoři neutralizací. Neutralizace je reakce oxoniových iontů H_3O^+ s hydroxidovými ionty OH^- za vzniku vody. Současně s vodou vzniká při neutralizaci sůl příslušné kyseliny.

$$H_3O^+ + OH^- \leftrightarrow 2\ H_2O$$

Jedná se o silně exotermní reakce, při kterých dochází k uvolňování reakčního tzv. *neutralizačního* tepla, při čemž hodnota tepelného zabarvení reakce nezávisí na chemické povaze reagujících látek. U silných kyselin a zásad je hodnota neutralizačního tepla vyšší, u slabých kyselin a zásad je toto teplo ovlivněno vedlejšími reakcemi (hydratací iontů, disociačním stupněm apod.) a je obvykle menší. Při praktickém provádění neutralizační reakce je nutné pracovat s dostatečně zředěnými roztoky, které pohltí uvolněné neutralizační teplo, aniž by došlo k jejich přehřátí.

Sůl, která vzniká při neutralizaci, má ve vodném roztoku neutrální reakci pouze tehdy, vzniká-li ze stejně silné kyseliny a zásady (NaCl, KI, KNO_3, Na_2SO_4). Nejsou-li kyselina a zásada stejně silné, reagují roztoky solí kysele nebo zásaditě v důsledku hydrolýzy (Na_2CO_3, KCN, NH_4Cl).

Postup práce:

Pomocí hustoměru zjistíme hustotu příslušné kyseliny, kterou máme k dispozici. Z rovnice vypočítáme potřebná stechiometrická množství kyseliny (objem) a hydroxidu (hmotnost). Vypočtené množství odměříme (resp. odvážíme) a připravíme asi 10% roztoky. Vážení hydroxidu proveďte rychle, neboť se jedná o silně hygroskopickou látku). Neutralizaci provedeme postupným smísením obou roztoků za stálého míchání (ponecháme si stranou po 5 % z objemu obou roztoků). Po slití roztoků se přesvědčíme zjištěním pH univerzálním indikátorovým papírkem o proběhlé neutrální reakci. Případnou chybu (způsobenou vážením, nečistotami apod.) napravíme přídavkem malého ponechaného množství roztoku kyseliny nebo zásady, aby roztok skutečně reagoval neutrálně. (pH v rozmezí 6 až 8). Není-li

připravený roztok čirý, zfiltrujeme ho. Zfiltrovaný roztok zahustíme na vodní lázni ke krystalizaci. Zahuštěný roztok ochladíme proudem studené vody a vyloučené krystaly odsajeme a usušíme v sušárně (pozor na bod tání). Suchý preparát rozmělníme v třecí misce, zvážíme, vypočítáme výtěžek reakce. Matečný louh zahustíme k nové krystalizaci a celý postup pak opakujeme.

Neutralizací lze připravit např.:

NaCl – jemný, bílý (příp. bezbarvý), krystalický prášek, krystaluje v krychlové soustavě. v teplé vodě jen o málo rozpustnější než ve studené. Má slanou chuť. V přírodě se vyskytuje jako minerál halitt.

KCl – vlastnostmi podobný NaCl, bílá krystalická látka, slané chuti, dobře rozpustná ve vodě, v ethanolu obtížněji rozpustný. V přírodě se vyskytuje jako minerál sylvín.

NH_4Cl – bílá krystalická látka, krystaluje v drobných, bezbarvých osmistěnech, chutná slaně, po zahřátí snadno sublimuje, ve vodě dobře rozpustný, v ethanolu jen nepatrně, vodný roztok je slabě kyselý. Vyskytuje se jako nerost salmiak.

$Na_2SO_4 \cdot 10\ H_2O$ (Glauberova sůl) – bezbarvé, průhledné krystaly jednoklonné soustavy. Na vzduchu rychle větrá – na krystalech vzniká bílý povlak. Ochotně tvoří přesycené roztoky.

K_2SO_4 – krystaluje v bezbarvých, průhledných krystalech kosočtverečné soustavy. Na vzduchu velmi stálý, ve vodě trochu méně rozpustný, nerozpustný v ethanolu.

$(NH_4)_2SO_4$ – bezbarvé krystaly kosočtverečné soustavy, chutná slaně.

$NaNO_3$ – krystaluje v šesterečné soustavě. Na vzduchu vlhne, při zahřátí se redukuje na dusitan (silné oxidační činidlo), ve vodě je velmi dobře rozpustný.

KNO_3 – bezbarvé krystaly kosočtverečné soustavy, chutná slaně, na vzduchu stálý (nevlhne), silné oxidační činidlo. Při jeho rozpouštění ve vodě dochází k silnému ochlazení roztoku.

NH_4NO_3 – izomorfní s KNO_3, na vlhkém vzduchu se rozplývá, ve vodě velmi dobře rozpustný po zahřátí (250 °C) se rozkládá na oxid dusný a vodu.

3 Srážení

Princip:

Děje, při kterých dochází ke vzniku málo rozpustných sloučenin, vylučujících se z roztoku jako sraženiny, nazýváme *srážecí reakce*. Málo rozpustné látky ve vodě (absolutně nerozpustné neexistují) jsou takové, které mají velmi nízké *součiny rozpustnosti*.

Přídavkem srážedla převedeme rozpuštěnou látku na látku, která je v daném prostředí nerozpustná. Mezi pevnou fází a jejími ionty v roztoku se ustavuje v souhlase s Guldberg-Waagovým zákonem rovnováha. Např.:

$$AgCl\,(s) \leftrightarrow Ag^+\,(aq) + Cl^-\,(aq)$$

Součin rozpustnosti vyjadřuje vztah:

$$K = \frac{[Ag^+] \cdot [Cl^-]}{[AgCl]} = 1,6 \cdot 10^{-10}$$

U málo rozpustných sloučenin je koncentrace nedisociovaných molekul v nasyceném roztoku malá a pro danou teplotu konstantní, [AgCl] = konst. Pak lze součin rozpustnosti S_{AgCl} zapsat:

$$S_{AgCl} = [Ag^+]\cdot[Cl^-]$$

Součin rozpustnosti vyjadřuje součin koncentrací iontů v nasyceném roztoku při dané teplotě. Obecně pro sloučeninu A_xB_y disociovanou na xA^+ a yB^- platí:

$$S = [A^+]^x\cdot[B^-]^y$$

Čím menší je hodnota součinu rozpustnosti, tím je látka ve vodě méně rozpustná. Roztok je nasycený, jestliže při dané teplotě dosáhl součinu rozpustnosti. Překročí-li součin rozpustnosti, začne se z roztoku vylučovat málo rozpustná látka.

Součin rozpustnosti je důležitou charakteristikou málo rozpustných sloučenin. Ze vztahu pro výpočet součinu rozpustnosti plyne, že srážení je dokonalejší, použijeme-li malý přebytek srážedla, které má společný ion se sraženinou. Velký nadbytek srážedla však může někdy způsobit vznik rozpustnější komplexní sloučeniny.

Vlastnosti sraženin do značné míry závisí na podmínkách a způsobu srážení. Snahou je, aby sraženina byla co nejčistší a dobře filtrovatelná. Výhodné vlastnosti mají sraženiny, které obsahují dobře vyvinuté a málo znečištěné částice. Toho lze dosáhnout:

- srážením ze zředěných roztoků, sraženina se vylučuje pomaleji a částice jsou větší
- srážením za horka pomalým přídavkem srážedla, vzniklou sraženinu ještě za stálého míchání povařit
- vyloučenou sraženinu necháme po určitou dobu „zrát“ ve styku s původním roztokem, nejlépe za tepla a občasného promíchání

Některé látky, málo rozpustné ve vodě, se při srážení nevylučují ve formě sraženiny, ale vytvářejí velmi jemné částečky rozptýlené v roztoku, jako tzv. *koloidní disperze – soly*, ve vodném roztoku *hydrosoly*, které jsou nefiltrovatelné. Každá částice solu má elektrický náboj, který je schopen zachycovat nabité částice z roztoku (adsorbovat je). Je nutné je tzv. *zkoagulovat* (přídavkem elektrolytu), aby byly snáze filtrovatelné.

Postup práce:

Připravíme odděleně asi 10% roztoky obou solí v množství udaném stechiometrickým výpočtem. Roztoky zfiltrujeme, zahřejeme téměř k varu a za stálého míchání postupně přiléváme jeden roztok do druhého. Malé množství srážedla (asi 5 % objemu jednoho roztoku) si ponecháme stranou. Sraženinu necháme usadit, do čirého roztoku nad sraženinou přidáme několik kapek ponechaného roztoku srážedla a pozorujeme, zda se ještě tvoří sraženina. Po ukončení srážení sraženinu v roztoku rozmícháme, necháme stát a několikrát dekantujeme horkou destilovanou vodou a pak zfiltrujeme nebo odsajeme. Sraženinu na filtru promyjeme vlažnou vodou, abychom ji zbavili iontů vedlejší zplodiny srážecí reakce, a dáme sušit do sušárny. Před sušením je nutné zjistit v tabulkách (podle bodu tání), při jaké teplotě lze preparát v sušárně sušit. Vysušený preparát zvážíme a vypočítáme výtěžek reakce.

Srážením lze připravit např.:

AgCl - bílý amorfní prášek, účinkem světla šedne až fialoví (rozklad na subchlorid a chlor). Ve vodě nerozpustný, rozpouští se v roztoku NH_3 na komplex, v roztoku thiosíranu sodného (ustalovač ve fotografii).

$CaSO_4.2\ H_2O$ (sádrovec) – jemný bílý amorfní prášek, ve vodě nepatrně rozpustný, zahříváním na 100°C (130°C) ztrácí částečně (úplně) krystalovou vodu.

$BaSO_4$ (baryt) – bílý prášek, ve vodě i v kyselinách prakticky nerozpustný, rozpustný v koncentrované kyselině sírové.

$BaCrO_4$ – jemný, žlutý prášek ve vodě téměř nerozpustný (barytová žluť)

$BaCO_3$ – bílý, těžký prášek, ve vodě téměř nerozpustný

HgI_2 – jemný červenooranžový prášek, ve vodě nerozpustný, rozpustný v jodidu draselném na komplex

$Al(OH)_3$ – bílý amorfní prášek v suchém stavu, ve vlhkém stavu průhledná rosolovitá hmota. Zahříváním dehydratuje a přechází na oxid hlinitý.

$Fe(OH)_3$ – hnědočervená (rezavá) sraženina, která již při mírné teplotě nad 30 °C dehydratuje a postupně se mění na hydratovaný až bezvodý oxid železitý.

$PbCl_2$ – bílý prášek, ve vodě málo rozpustný

$PbBr_2$ – bílý až trochu nažloutlý prášek, ve vodě málo rozpustný

PbI_2 – žlutý prášek, méně rozpustný ve vodě než chlorid olovnatý. Rozpouští se v horkém roztoku KI na komplex (podvojný jodid) $K_2[PbI_4]$.

$PbCrO_4$ (chromová žluť) - jemný, žlutý prášek, nerozpustný ve vodě

$PbCO_3$ – bílý prášek

$PbSO_4$ – bílý prášek, ve vodě nepatrně rozpustný, dobře rozpustný v organických kyselinách

PbS – černý prášek, ve vodě i alkoholu téměř nerozpustný

Celá řada dalších sulfidů např.:

SnS, CuS, HgS, Ag_2S, CdS, Bi_2S_3, Sb_2S_3, As_2S_3, FeS, CoS, NiS, MnS, ZnS

Tyto sulfidy se odlišují svou barvou a využívají s v analytické chemii.

Další možné metody přípravy anorganických látek:

Rozpouštění kovů (oxidů kovů) v kyselinách

Oxidačně-redukční reakce

Reakce spojené s tvorbou komplexu

Rozkladné reakce a tavicí procesy

Hydrolýza

4 Závěr

Účastníci kempu se v tomto případě seznámili se základními postupy přípravy anorganických látek. Prakticky si vyzkoušeli přípravu vybrané látky neutralizací nebo srážením. Na konci cvičení shrnuli dílčí výsledky (s jakým výtěžkem pracovali) a zformulovali společný závěr.

5 Použitá literatura

SÝKOROVÁ, D., J., MASTNÝ, L. Návody pro laboratoře z anorganické chemie 2. vyd. Praha: FIRMA-JK, 2001. 249 s. ISBN 80-7080-452-1.

6 Kontakt na autora

PaedDr. Vladimír Sirotek, CSc.
Katedra chemie, FPE ZČU v Plzni
sirotek@kch.zcu.cz

PODPORA TALENTOVANÝCH ŽÁKŮ V PLZEŇSKÉM KRAJI

CHEMICKÝ KEMP

ATRAKTIVNÍ CHEMICKÉ EXPERIMENTY

Vladimír SIROTEK, Jitka ŠTROFOVÁ

1 Úvod

Přírodní vědy získávají nové poznatky prostřednictvím pozorování a experimentální činnosti. Oba způsoby by se měly v maximální možné míře promítnout také do výuky chemie na všech typech škol. Situace je na mnoha školách neuspokojivá a žáci základních a středních škol se vlastní experimentální činnosti věnují velmi málo. Proto jsme stejně jako v minulých dvou ročnících chemického kempu připravili pro úspěšné řešitele chemické olympiády řadu laboratorních úloh včetně atraktivních chemických experimentů.

Pod vedením lektorů z katedry chemie FPE ZČU mohli v rámci kempu jeho účastníci realizovat tyto pokusy:

- Sopka
- Faraonův had
- Vodní had
- Létající plechovka
- Bručící medvídek
- Zlatý déšť
- Skákající uhlík
- Zapalování vodou
- Erupce zinku se sírou
- Fialový plamen
- Oheň bez zápalek
- Blesky pod vodou
- Modré oscilace
- Měření pH
- Zeleno-modro-červené oscilace
- Vodotrysk
- Chemické jo-jo
- Semafor
- Modrý roztok
- Ohňostroj s vodou
- Barevný ohňostroj
- Modré světlo

Účastníci obdrželi materiály s kompletními pracovními návody ke všem uvedeným pokusům. V následujícím textu jsou velmi stručně popsány jen vybrané experimenty.

2 Zapalování vodou

Na první pohled nesmyslné tvrzení spojuje několik pokusů, u kterých místo zápalek použijeme vodu. Ta funguje v mnoha případech jako iniciátor dané chemické reakce.

2.1 Reakce jodu s hliníkem

Jemně rozetřený jod se důkladně smísí s práškovým hliníkem v poměru váhových dílů 1:1. Směs navršíme na nehořlavou podložku v digestoři a přikápneme trochu vody. Po chvíli začnou ze směsi unikat fialové dýmy, sublimující jod, a směs vzplane. Jedná se o silně exotermickou rekci, při níž vzniká kromě velkého množství tepla ještě jodid hlinitý. Voda v tomto případě funguje jako katalyzátor.

2.2 Ohňostroj s vodou

V tomto případě voda iniciuje reakci dusičnanu amonného, práškového zinku a chloridu amonného, který působí jako katalyzátor. Reakce je velmi prudká a silně exotermická, lze ji vystihnout následující rovnicí:

$$2\ NH_4NO_3 + 2\ Zn \longrightarrow 2\ ZnO + N_2 + 4\ H_2O$$

3 Oxidační účinky chlorečnanu draselného

Chlorečnan je velmi silné oxidační činidlo, a proto se s ním musí zacházet velmi opatrně. Jeho oxidační účinky se dají demonstrovat následujícími pokusy.

3.1 Bručící medvídek

Chlorečnan draselný nasypeme do zkumavky, pod níž postavíme misku s pískem, a roztavíme jej. Do taveniny vhodíme kousek želatinových medvídků. Ty obsahují velké množství cukru, který se oxiduje kyslíkem uvolněným z chlorečnanu draselného. Silně exotermická reakce je doprovázena světelnými a zvukovými efekty.

3.2 Barevný ohňostroj

Tento pokus je založen na stejném principu jako předchozí. Směs najemno rozetřeného chlorečnanu a cukru zabalíme do kousku filtračního papíru a zapálíme. Opět dojde k silně exotermické reakci cukru s kyslíkem, který se uvolní při tepelném rozkladu chlorečnanu draselného. Pro větší efekt můžeme ke směsi přidat dusičnan barnatý, který barví plamen do zelena, nebo dusičnan strontnatý, jež barví plamen karmínově červeně.

3.3 Fialový plamen

Směs chlorečnanu draselného a cukru navršíme na cihlu nebo jinou nehořlavou podložku. Přikápneme-li trochu koncentrované kyseliny sírové, směs prudce vzplane fialovým plamenem. Působením koncentrované H_2SO_4 na $KClO_3$ vzniká kyselina chlorečná, která disproporcionuje na oxid chloričitý a kyselinu chloristou. Cukr se oxiduje oxidem chloričitým.

$$2\ KClO_3 + H_2SO_4 \longrightarrow K_2SO_4 + 2\ HClO_3$$
$$2\ HClO_3 \longrightarrow HClO_4 + HClO_2$$

$$HClO_2 + HClO_3 \longrightarrow 2\,ClO_2 + H_2O$$

3.4 Oheň bez zápalek

K jemně rozetřenému chlorečnanu draselného opatrně přikápneme trochu koncentrované kyseliny sírové a přidáme několik kapek etanolu. Působením koncentrované H_2SO_4 na $KClO_3$ vzniká kyselina chlorečná, která disproporcionuje na oxid chloričitý a kyselinu chloristou. Oxid chloričitý se na světle rozkládá na prvky, vznikající kyslík zapálí ethanol. Směs okamžitě vzplane a rozstřikuje se.

$$2\,ClO_2 \longrightarrow Cl_2 + 2\,O_2$$

3 Závěr

Uvedené experimenty je možné využít na základní a střední škole v různých fázích výuky. Vysvětlení principu musí být adekvátní věku a znalostem žáků. V rámci chemického kempu bylo možné mechanismus jednotlivých dějů objasnit mnohem podrobněji. Účastníci také ocenili, že většinu experimentů mohli provádět samostatně.

4 Použitá literatura

RICHTR, V., KRAITR, M.: Atraktivní pokusy ve výuce chemie II. In: Chemie XV, Sborník PF ZČU v Plzni. Plzeň: PF ZČU, 1995.
RICHTR, V., KRAITR, M., ŠTROFOVÁ, J.: Atraktivní pokusy ve výuce chemie III. In: Chemie XVI, Sborník PF ZČU v Plzni. Plzeň: PF ZČU, 1996.
RICHTR, V., KRAITR, M., ŠTROFOVÁ, J.: Atraktivní pokusy ve výuce chemie IV. In: Chemie XVIII, sborník katedry chemie. Plzeň: ZČU, 2000.

5 Kontakt na autora

PaedDr. Vladimír Sirotek, CSc., Mgr. Jitka Štrofová, Ph.D.
Katedra chemie FPE ZČU v Plzni
sirotek@kch.zcu.cz, strofova@kch.zcu.cz

PODPORA TALENTOVANÝCH ŽÁKŮ V PLZEŇSKÉM KRAJI

CHEMICKÝ KEMP

PŘÍMÉ STANOVENÍ DUSIČNANŮ VE VODĚ SPEKTROFOTOMETRICKY

Jan HRDLIČKA

1 Úvod

Spektrofotometrie patří mezi nejstarší metody stanovení. Pro některé látky lze tuto metodu použít přímo, bez využití chemických reakcí, které by vedly ke vzniku barevného produktu. Jednou z takových látek jsou dusičnanové ionty, které výrazně pohlcují UV záření v oblasti kolem 200 nm. Proto lze jako velmi rychlou metodu pro stanovení dusičnanů ve vodě použit UV spektrometrii.

2 Optické analytické metody

Soubor fyzikálně-chemických metod, jejichž společným znakem je mechanizmus založený na reakci hmoty a záření. Hmotou zde rozumíme atomy, molekuly nebo ionty zkoumané látky v homogenním prostředí „průchodném“ pro elektromagnetické záření.

Hmota a záření si vyměňují energii, přičemž u absorpční spektroskopie je mechanizmus interakce mezi hmotou a zářením založen na schopnosti atomů, molekul nebo iontů přecházet ze stavů s menší energií do stavů energeticky bohatších a využívat k těmto přechodům dodanou zářivou energii.

Soubor všech elektromagnetických vln, uspořádaných podle rostoucí vlnové délky se nazývá elektromagnetické spektrum. Pokrývá oblast od vysokofrekvenčního (VF), infračerveného (IR), viditelného (VIS), ultrafialového (UV) po rentgenové (RTG) záření. Vlnové délky elektromagnetického záření se pohybují v rozmezí více než 15 řádů. Mezi jednotlivými oblastmi není ostrá hranice, jedno záření přechází plynule v druhé.

Polychromatické záření obsahuje všechny vlnové délky záření v dané oblasti, naopak monochromatické záření obsahuje pouze jednu vlnovou délku z elektromagnetického spektra. Spojité spektrum získáme, necháme-li procházet polychromatické záření disperzním prvkem (např. optickým hranolem). Vznikne barevné spektrum (ve kterém jsou zastoupeny všechny vlnové délky), které vydávají všechny rozpálené tuhé a kapalné látky (např. rozžhavená wolframová žárovka, rozžhavený platinový drátek).

3 Lambert – Beerův zákon

Lambert-Beerův zákon vyjadřuje vztah mezi absorbancí světla určité vlnové délky a koncentrací analytu. Je vyjádřen rovnicí

$$A = \varepsilon \,.\, c \,.\, l,$$

kde A je absorbance při dané vlnové délce, ε je molární absorpční koeficient [$dm^3.mol^{-1}.cm^{-1}$] pro danou vlnovou délku a daný analyt, l je délka optické dráhy, na které dochází k absorpci (tloušťka kyvety) [cm] a c je molární koncentrace stanovovaného analytu [$mol.dm^{-3}$].

Lambert – Beerův zákon je limitní tzn. že platí pouze za určitých podmínek:

a) pro přesně monochromatické záření

b) pro zředěné roztoky ($c << 10^{-2}$ mol.l^{-1})

c) absorbující částice nepodléhají žádným změnám (interakcím)

d) v měřeném systému existuje pouze 1 absorbující složka (je-li v měřeném systému více absorbujících složek absorbující při dané λ, pak je absorbance sumou všech složek).

4 Dusičnany ve vodě

Dusičnany jsou používány jako anorganická hnojiva a jsou konečným produktem mineralizace organických látek obsahujících dusík. Dále jsou, spolu s dusitany, využívány jako konzervační prostředky při nakládání masa a výrobě sýrů (dusitan sodný E 250, dusitan draselný E 249, dusičnan sodný E 251 a dusičnan draselný E 252).

Obsah dusičnanů a dusitanů v pitné vodě je legislativně upraveno vyhláškou ministerstva zdravotnictví zákona č. 252/2004 Sb. Reguluje obsah dusičnanů v pitných vodách veřejného zásobování na 50 mg.dm^{-3} a obsah dusitanů na 0,5 mg.dm^{-3}. V České republice byla v r. 1958 norma pro dusičnany 35 mg/l. Je tedy zřejmý dlouholetý trend zvyšování povolených koncentrací dusičnanů v neprospěch zdraví spotřebitele. Dnes vlivem lidské činnosti není reálné tuto normu dodržet, proto byla hranice posunuta pro dospělého na 50 mg.dm^{-3} a pro kojence na 20 mg.dm^{-3}.

Toxické účinky dusičnanů u člověka jsou dány hlavně jejich redukcí na dusitany a následnou tvorbou methemoglobinu (metHb). Vzniká stav tzv. dusičnanové alimentární methemoglobinémie (DAM), na který jsou nejcitlivější kojenci do tří měsíců věku.

5 Popis spektrofotometru Hitachi U-2001

Wolframová žárovka je zdrojem spojitého spektra záření v oblasti λ 320-1100 nm. Deuteriová výbojka je zdrojem spojitého spektra záření v oblasti λ 195-380 nm.

Při přechodu z viditelné do ultrafialové oblasti je wolframová žárovka přepnuta na deuteriovou výbojku, vlnová délka při které k přepnutí dochází je nastavitelná v rozmezí 320-380 nm.

V přístroji je použit monochromátor s ohybovou mřížkou (disperze ohybem, tj. difrakcí) Planparalelní křemenné kyvety jsou vkládány do měřícího kyvetového prostoru.

1. kyveta: roztok srovnávací tzv. blank, který obsahuje všechny složky kromě analytu.

2. kyveta: měřený roztok sledované látky (šest pozic, které jsou manuálně otáčeny).

Paprsek po výstupu z monochromátoru je rozdělen na dva paprsky procházející srovnávací a měrnou kyvetou. Zeslabené záření vycházející ze srovnávací kyvety je registrováno jedním detektorem a zeslabené záření vycházející z měřené kyvety je registrováno druhým detektorem.

Detektor je fotoelektrický detektor – křemíková fotodioda. Přístroj umožňuje měření absorbance v rozsahu 0 až 4 jednotek absorbance.

6 Stanovení dusičnanů

Stanovení je založeno na srovnání absorbance vzorku se standardními roztoky dusičnanu draselného v koncentračním intervalu od 0 do 20 mg.dm^{-3} dusičnanů při vlnové délce 220 nm. tzn. odečítání absorbance mimo vrchol píku. Pro vyhodnocení je používán Microsoft Excel, který z naměřené hodnoty absorbance při 220 nm (A) přepočte na koncentraci dusičnanů v mg.dm^{-3} (c) podle praktického tvaru rovnice regrese.

V případě vyššího obsahu dusičnanů je vzorek vody úměrně ředěn destilovanou vodou. Vzorek vody je orientačně zředěn destilovanou vodou tak, až hodnota absorbance „padne“ do rozsahu kalibrační křivky. Pak je provedeno ředění s analytickou přesností, po odečtení absorbance při vlnové délce 220 nm je stanoven obsah dusičnanů ve zředěném vzorku a matematickým přepočtem je získána koncentrace NO_3^- mg.dm^{-3} v původním vzorku vody.

7 Závěr

V rámci této úlohy si studenti při přípravě roztoků vyzkoušeli odměřování roztoků a přípravu řady kalibračních roztoků o přesné koncentraci. Přesnost práce si pak mohli sami zhodnotit podle toho, jak přesně protínala kalibrační přímka jednotlivé body v kalibračním grafu. Také si při tomto cvičení ověřili možnosti přístrojových metod při stanoveních nízkých koncentrací. Jako vzorek byla použita vodovodní voda a porovnáním výsledků se zákonnou normou pro pitnou vodu si mohli ověřit, že použitá pitná voda vyhovuje v tomto parametru normě.

8 Použitá literatura

OPEKAR, F.; JELÍNEK, I.; RYCHLOVSKÝ P. Základní analytická chemie pro studenty, pro něž analytická chemie není hlavním studijním oborem 1. vyd. Karolinum, Praha 2002.
HORÁKOVÁ, M. Analytika vody 2. vyd. VŠCHT, Praha 2003.
KOŽENÁ, L. Přímé stanovení dusičnanů ve vodě UV spektroskopií na přístroji HITACHI U-2010, Bakalářské práce, ZČU v Plzni, Plzeň 2007.

9 Kontakt na autora

Ing. Jan Hrdlička, PhD.
Katedra chemie FPE ZČU v Plzni
hrdlicka@kch.zcu.cz

PODPORA TALENTOVANÝCH ŽÁKŮ V PLZEŇSKÉM KRAJI

CHEMICKÝ KEMP

POLARIMETRIE

Vladimír SIROTEK

1 Úvod

Polarimetrie je optická fyzikální metoda, která využívá schopnost některých sloučenin stáčet rovinu polarizovaného záření. Látky se schopností stáčet rovinu polarizovaného záření nazýváme sloučeninami *opticky aktivními*. *Optická aktivita* je jedna z nejdůležitějších a nejznámějších vlastností látek, která bezprostředně souvisí se strukturou molekul. Optická aktivita může být přechodná, způsobená zvláštním uspořádáním částic v krystalové mřížce (roztavením látky zmizí), nebo trvalá, daná zvláštní strukturou molekul. Příčinou trvalé optické aktivity látek je nesymetrie v molekule nebo iontu. Mohou existovat dva druhy molekul (iontů), z nichž jeden je zrcadlovým obrazem druhého – tzv. optické antipódy, které dělíme podle směru polarizovaného světla buď na pravotočivé, nebo levotočivé.

2 Měření optické otáčivosti

Úhel stočení roviny polarizovaného světla α závisí nejen na charakteru látky, na vlnové délce světla a na teplotě, ale také na množství opticky aktivních částic, se kterými se paprsek polarizovaného záření setká, tedy na tloušťce vrstvy a na složení roztoku (koncentraci).

$\alpha = k \,.\, 1 \,.\, c$ kde c - složení roztoku g/cm^3
k - konstanta úměrnosti
1 - tloušťka vrstvy [dm]

Specifická otáčivost $[\alpha]^t_\lambda$ roztoku se číselně rovná úhlu α, o který by se za teploty t stočila rovina polarizovaného světla (o vlnové délce λ) při jeho průchodu 1 dm tlustou vrstvou roztoku, v němž by na každý 1 dm^3 roztoku připadal 1 g rozpuštěné látky.

Při měření specifické otáčivosti se zpravidla užívá monochromatické světlo, sodíkového dubletu označovaného D o vlnové délce 589,6 nm a při teplotě 20 ^{o}C. Specifickou otáčivost pak značíme $[\alpha]^{20}_D$.

3 Výpočet složení roztoku

Složení roztoku v g/100 cm^3 vypočítáme podle vztahu:

$$c = \frac{100.\alpha}{[\alpha]^{20}_D .l}$$

1 … délka polarimetrické trubice v dm
c … složení roztoku v g/100 cm^3
α … naměřená hodnota úhlu optické otáčivosti ve stupních
$[\alpha]^{20}_D$ … specifická otáčivost (tabulková hodnota)

4 Přístrojové vybavení – kruhový polarimetr METRA

Stočení roviny polarizovaného záření měříme polarimetry. V našem případě používáme kruhový polarimetr METRA. Tento přístroj je vybaven stabilně nastaveným polostínovým zařízením (polarizátorem je dvojhranol Jellet-Cornu). Otočný analyzátor je pevně spojen s kruhovou stupnicí dělenou na 360^{o}, na níž odečítáme úhel otočení analyzátoru potřebný k dosažení optické rovnováhy. Osvětlení polarimetru se provádí monochromatickým světlem sodíkové lampy. Polarimetr s polostínovým zařízením má kruhové zorné pole rozdělené ostrou kolmou čarou na dvě poloviny, které se při otáčení analyzátoru pomocí šroubu střídavě vyjasňují a zatemňují. Optická rovnováha je dána takovou polohou analyzátoru, při níž jsou obě poloviny zorného pole stejnoměrně zastíněny (ve stejném polostínu). Zorné pole pozorujeme dalekohledem, zaostření obrazu umožňuje vysouvací okulár (je individuální, závisí na citlivosti oka).

5 Závěr

V rámci seznámení se s metodou polarimetre měli studenti za úkol v předložených vzorcích cukru polarimetricky stanovit hmotnostní zlomek sacharosy. Dalším úkolem bylo polarimetrické určení koncentrace známého cukerného roztoku (sacharosa, fruktosa, maltosa, glukosa) a stanovení neznámého vzorku porovnáním s tabulkovými hodnotami.

Všichni účastníci si rozšířili praktické zkušenosti s polarimetrickou metodou instrumentální analýzy a prokázali obratnost v experimentální činnosti jako takové, tak i v logickém myšlení během úvah nad postupy a možnostmi vyhodnocení.

6 Kontakt na autora

PaedDr. Vladimír Sirotek, CSc.
Katedra chemie, FPE ZČU v Plzni
sirotek@kch.zcu.cz

PODPORA TALENTOVANÝCH ŽÁKŮ V PLZEŇSKÉM KRAJI

CHEMICKÝ KEMP

FÁZOVÝ DIAGRAM TŘÍSLOŽKOVÉHO SYSTÉMU

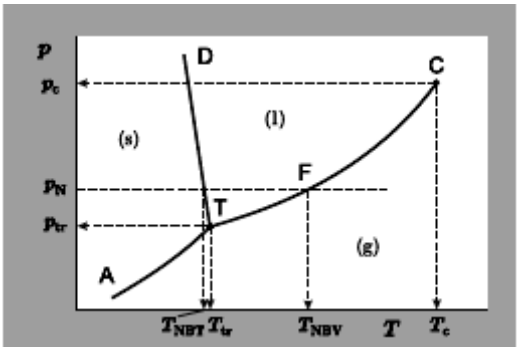
Jitka ŠTROFOVÁ

1 Úvod

Jednou z oblastí zájmu fyzikální chemie je studium fázových rovnováh. Jedná se o velmi rozsáhlou oblast zahrnující fázové rovnováhy v jednosložkových systémech až po vícesložkové systémy. Mají-li být jednotlivé fáze v rovnováze, musí mít stejnou teplotu, ve všech musí být stejný tlak a všechny složky musí mít ve všech fázích stejný chemický potenciál. K jednoznačnému popisu daného systému stačí znát tolik nezávislých veličin, kolik je tzv. stupňů volnosti. Počet stupňů volnosti udává Gibbsův fázový zákon

$$v = k - f + 2 - C$$

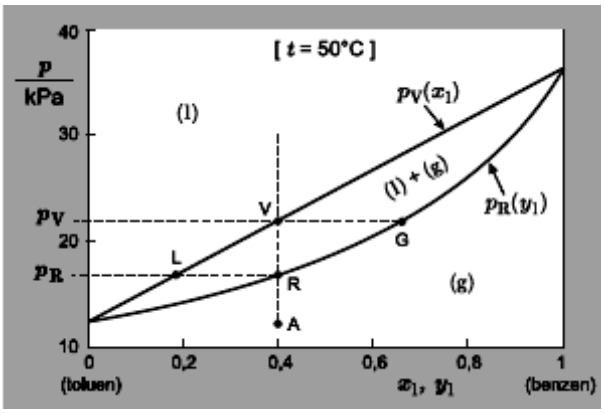
kde v je počet stupňů volnosti, k počet složek, f počet fází a C počet dodatečných vazných podmínek. Máme-li například jednosložkový systém, tak v případě existence systému ve dvou fázích stačí k jeho popisu pouze jediná veličina (v = 1 – 2 + 2 = 1), všechny ostatní jsou již na ní závislé. Stačí tedy znát např. teplotu systému, tlak už je jednoznačně určen. Závislost teploty a tlaku v jednosložkových systémech udávají Clapeyronova a Clausiova-Clapeyronova rovnice. Ke grafickému znázornění fázových rovnováh se používají fázové diagramy. Z nich je možné vyčíst, v jakých fázích existuje sledovaný systém za daných podmínek.



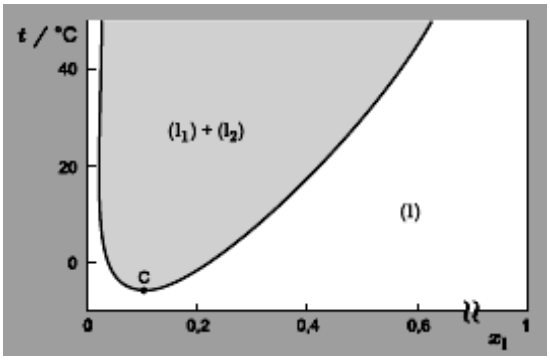
Obr. 1 Schématický fázový diagram vody

Fázový diagram jednosložkového systému lze znázornit v rovině, jak ukazuje obr. 1. Plochy v diagramu odpovídají situaci, kdy daný systém existuje pouze v jediné fázi, hranice mezi fázemi odpovídají fázové rovnováze mezi sousedícími fázemi. Trojný bod T představuje rovnováhu mezi třemi fázemi, počet stupňů volnosti je v tomto případě roven nule. Nad kritickým bodem C neexistuje rozdíl mezi kapalnou a plynou fází.

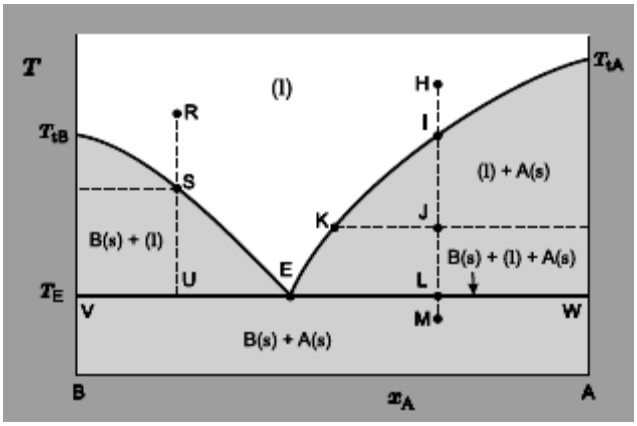
V případě binárních systémů je situace složitější. Fázový diagram by bylo možné znázornit v prostoru, kde by jednotlivé souřadnicové osy odpovídaly teplotě, tlaku a složení daného systému. Chceme-li fázový diagram znázornit v rovině, musíme jednu z veličin udržovat na konstantní hodnotu, ta je dodatečnou vaznou podmínkou. Příklady takových diagramů jsou na obr. 2 – 4, na obr. 2 je znázorněn fázový diagram fázové rovnováhy mezi kapalinou a párou, na obr. 3 diagram odpovídající rovnováze mezi dvěma kapalinami a na obr. 4 mezi kapalinou a tuhou fází.



Obr. 2 Fázový diagram kapalina – pára
převzato (Novák, 2008)



Obr. 3 Fázový diagram kapalina – kapalina
převzato (Novák, 2008)

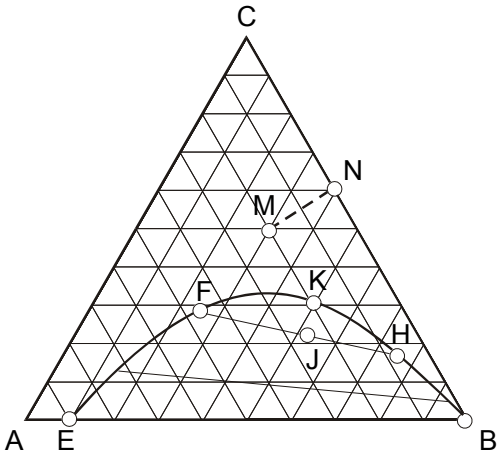


Obr. 4 Fázový diagram kapalina – tuhá fáze
převzato (Novák, 2008)

V letošním roce se účastníci chemického kempu obeznámili s principy znázornění fázové rovnováhy v systému tvořeném třemi omezeně mísitelnými kapalinami a prakticky provedli měření, která vedla k sestrojení takového diagramu.

2 Fázový diagram ternárního systému

Při znázornění fázového diagramu ternárních systémů je situace ještě složitější než ve výše uvedených jednosložkových nebo binárních systémech. Měření se provádějí za konstantní teploty a tlaku, mění se pouze složení systému, aby bylo možné zobrazit příslušný diagram v rovině. Fázové diagramy se v těchto případech nejčastěji zobrazují do rovnostranného trojúhelníka (obr. 5), kde vrcholy odpovídají čistým látkám (body A, B, C), strany vystihují složení binárních systémů (bod N) a všechny vnitřní body trojúhelníka (bod M) složení ternárního systému. Obsah každé složky klesá ve směru od příslušného vrcholu k protilehlé straně.



Obr. 5 Fázový diagram ternárního systému

Nejčastějším typem fázového diagramu ternárního systému tvořeného kapalinami je ten, který je znázorněný na obr. 5. V takovýchto systémech je jedna dvojice kapalin omezeně mísitelných (na obr. 5 kapaliny A, B). Kapaliny A, C a B, C se mísí v libovolném poměru. Křivka EFKHB oddělující heterogenní – dvoufázovou oblast od homogenní – jednofázové se označuje jako binodální křivka.

2.1 Pracovní postup

Vytvořit fázový diagram ternárního systému znamená sestrojit binodální křivku. K tomu je potřeba provést řadu měření s cílem nalézt co nejvíce bodů, které leží na hranici mezi heterogenní a homogenní oblastí. Jednotlivé body získáme tak, že k binární směsi neomezeně mísitelných kapalin přidáváme třetí složku tak dlouho, dokud nevznikne druhá fáze. Vznik heterogenního systému se projeví trvalým zakalením systému. Určíme složení takto připraveného systému v hmotnostních nebo molárních zlomcích a do trojúhelníku zobrazíme příslušný bod. Postupně mícháme binární směsi o různém složení a získáme tak další body binodální křivky.

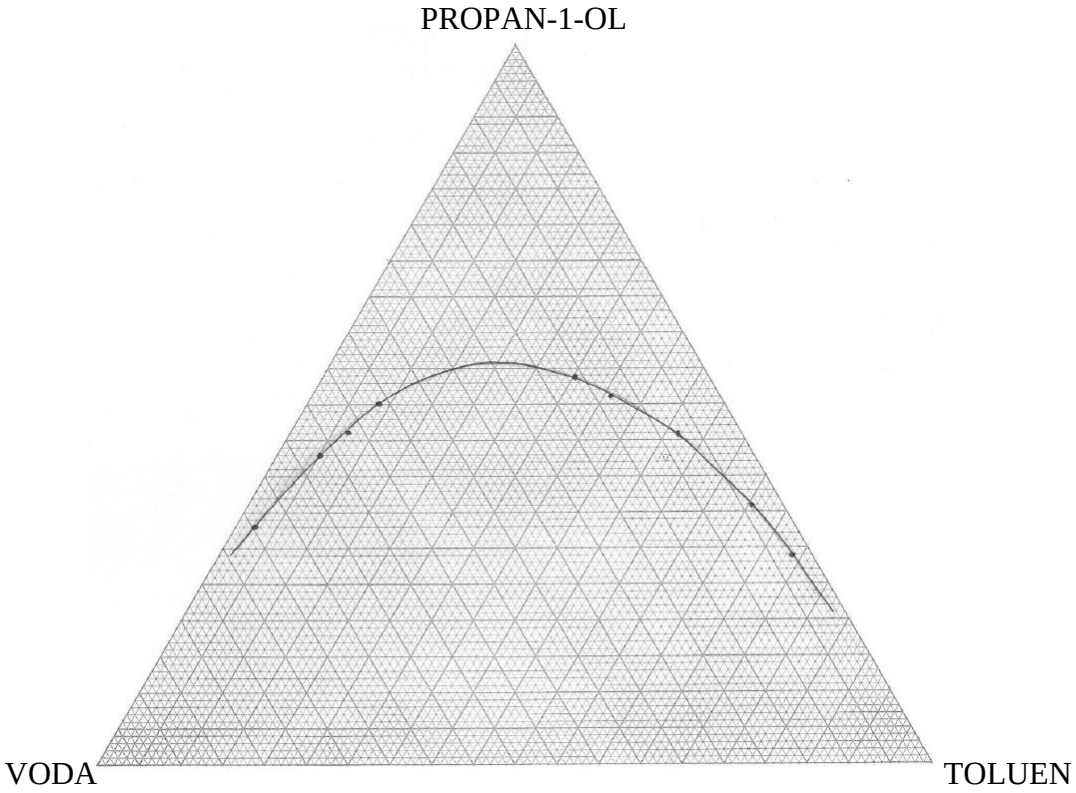
Úkolem studentů bylo sestrojit fázový diagram systému propan-1-ol + toluen + voda. V tomto systému jsou voda a toluen omezeně mísitelné, propanol s toluenem nebo propanol s vodou se mísí v libovolném poměru. První část binodály získáme tak, že binární směs propan-1ol + toluen o různém složení za stálého míchání elektromagnetickou míchačkou postupně titrujeme vodou až do vzniku trvalého zákalu. Po přídavku každé složky systém zvážíme, po ukončení titrace vyjádříme složení systému hmotnostním zlomkem a do diagramu vyneseme příslušný bod. Takto proměříme 4 – 5 bodů. Obdobným způsobem získáme i druhou část binodály. Tentokrát vycházíme ze směsi propan-1-ol + voda a titrujeme toluenem.

Jednotlivé body proložíme křivkou. Plocha pod binodální křivkou představuje heterogenní oblast, v níž jsou v rovnováze dvě kapalné fáze. Křivka bude tím přesnější, čím větší počet bodů budeme mít k dispozici.

2.2 Výsledky měření

Tabulka 1 Složení systému propan-1-ol + toluen + voda vyjádřené hmotnostními zlomky

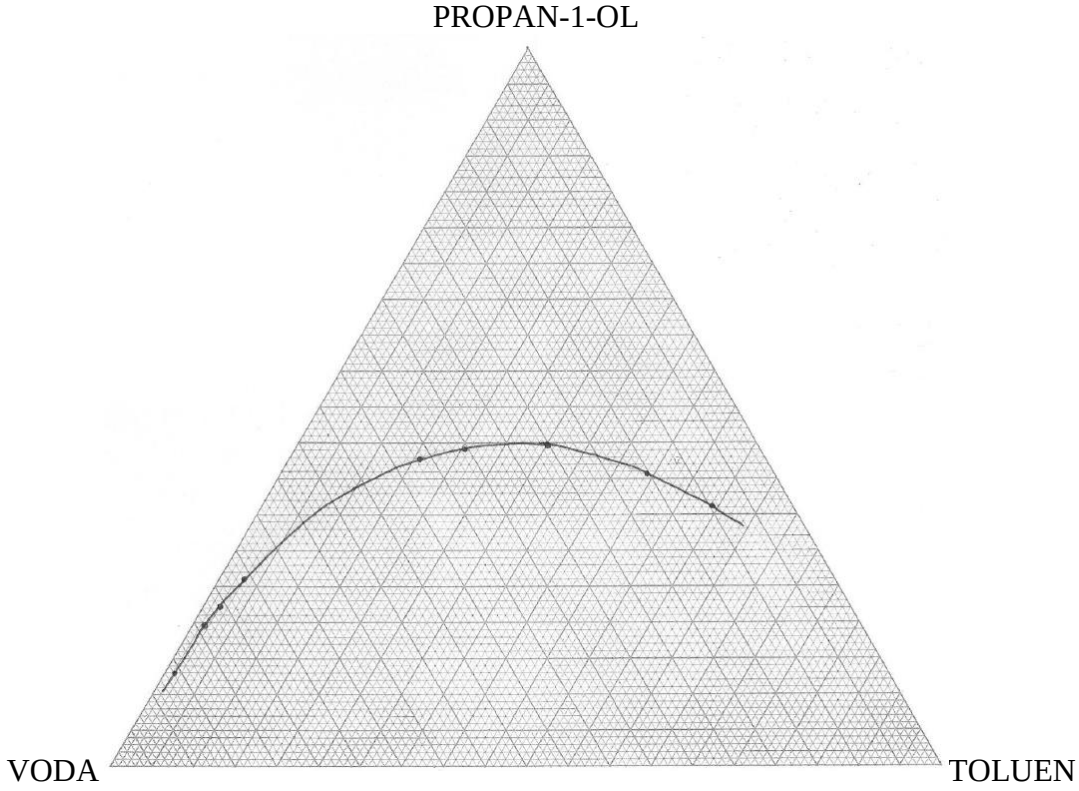
Měření	m_{toluen} [g]	$m_{propanol}$ [g]	m_{voda} [g]	$m_{celk.}$ [g]	w_{toluen}	$w_{propanol}$	w_{voda}
1	28,487	12,131	1,05	41,668	**0,684**	**0,291**	**0,025**
2	24,793	14,929	1,691	41,413	**0,599**	**0,360**	**0,041**
3	19,89	19,634	3,312	42,836	**0,464**	**0,458**	**0,077**
4	16,392	23,147	5,568	45,107	**0,363**	**0,513**	**0,123**
5	13,484	24,438	7,186	45,108	**0,299**	**0,542**	**0,159**
6	0,977	14,918	29,506	45,401	**0,022**	**0,329**	**0,650**
7	2,388	19,592	23,556	45,536	**0,052**	**0,430**	**0,517**
8	2,957	20,549	21,023	44,529	**0,066**	**0,461**	**0,472**
9	3,764	23,369	19,261	46,394	**0,081**	**0,504**	**0,415**



Obr. 6 Fázový diagram systému propan-1-ol + toluen + voda, složení vyjádřeno hmotnostními zlomky

Tabulka 2 Složení systému propan-1-ol + toluen + voda vyjádřené molárními zlomky

Měření	m_{toluen} [g]	$m_{propanol}$ [g]	m_{voda} [g]	$m_{celk.}$ [g]	n_{toluen} [mol]	$n_{propanol}$ [mol]	n_{voda} [mol]	$n_{celk.}$ [mol]	x_{toluen}	$x_{propanol}$	x_{voda}
1	28,487	12,131	1,05	41,668	0,310	0,202	0,058	0,570	**0,543**	**0,355**	**0,102**
2	24,793	14,929	1,691	41,413	0,269	0,249	0,094	0,612	**0,440**	**0,406**	**0,153**
3	19,89	19,634	3,312	42,836	0,216	0,327	0,184	0,727	**0,297**	**0,450**	**0,253**
4	16,392	23,147	5,568	45,107	0,178	0,386	0,309	0,873	**0,204**	**0,442**	**0,354**
5	13,484	24,438	7,186	45,108	0,147	0,407	0,399	0,953	**0,154**	**0,427**	**0,419**
6	0,977	14,918	29,506	45,401	0,011	0,249	1,639	1,898	**0,006**	**0,131**	**0,863**
7	2,388	19,592	23,556	45,536	0,026	0,327	1,309	1,661	**0,016**	**0,197**	**0,788**
8	2,957	20,549	21,023	44,529	0,032	0,342	1,168	1,543	**0,021**	**0,222**	**0,757**
9	3,764	23,369	19,261	46,394	0,041	0,389	1,070	1,500	**0,027**	**0,260**	**0,713**



Obr. 7 Fázový diagram systému propan-1-ol + toluen + voda, složení vyjádřeno molárními zlomky

Výsledky měření jsou shrnuty ve výše uvedených tabulkách 1 a 2. Na jejich základě byly vytvořeny příslušné fázové diagramy (obr. 6, 7). Vzhledem k omezeným časovým možnostem bylo měření provedeno pouze pro 9 bodů a z tohoto důvodu se jedná pouze o odhad pravděpodobného chování zvoleného systému.

3 Závěr

Studenti měli příležitost nahlédnout do oblasti, se kterou se v běžné výuce chemie na střední škole nesetkají. Seznámili se základními pojmy z fázových rovnováh. Během praktického cvičení využili dříve získané teoretické i praktické dovednosti. Jednalo se především o základní laboratorní operace (vážení, míchání, titrace) a vyjadřování složení systému různými způsoby. Pochopili pojem binodální křivka, naučili se zobrazovat složení ternárního systému a na závěr sestrojili dva fázové diagramy. Jeden odpovídal systému propan-1-ol + toluen + voda, jehož složení bylo vyjádřeno hmotnostními zlomky. V druhém diagramu bylo složení téhož systému vyjádřeno v molárních zlomcích.

4 Použitá literatura

NOVÁK, J. a kol. Fyzikální chemie II. 1. vyd. Praha: VŠCHT, 2001. 316 s. ISBN 80-7080-436-X.
NOVÁK, J. a kol. Fyzikální chemie, bakalářský kurz. [online]Praha: VŠCHT, 2008. [cit. 22. 9. 2014], s. 106-141. Dostupné na <http://old.vscht.cz/fch/cz/pomucky/FCH4Bc.pdf>

5 Kontakt na autora

Mgr. Jitka Štrofová, Ph.D.
Západočeská univerzita v Plzni
strofova@kch.zcu.cz

PODPORA TALENTOVANÝCH ŽÁKŮ V PLZEŇSKÉM KRAJI

MATEMATICKÝ KEMP

Dělitelnost v úlohách MO

Jaroslav HORA

1 Úvod

Úlohy o dělitelnosti jsou časté v různých matematických soutěžích. Nejprve zopakujeme základní pojmy a elementární postupy a poté přistoupíme ke komplikovanějším úlohám.

2.1 Příklad

Zjistěte, zda polynom $P(n) = n^2 + n + 41$ nabývá pro všechna celá nezáporná n pouze prvočíselných hodnot.

Řešení: Nejprve to tak vypadá, je totiž P(0) = 41, P(1) = 43, P(2) = 47 a to jsou prvočíselné funkční hodnoty. Totéž platí pro P(3) = 53, P(4) = 61, …, P(10) = 151, … . Je dosti fascinující, že ještě pro n = 39 je P(39) = 1 601 opět prvočíslem.

Jenže pro n = 40 je $P(40) = 40^2 + 40 + 41 = 41.40 + 41$ složeným číslem, neboť je dělitelné číslem 41. Totéž platí pro n = 41. Přesto je dlouhá řada prvočíselných hodnot polynomu P(n) pro n = 0, 1, …39 pozoruhodná. Polynom P nalezl L. Euler.

2.2 Příklad

Rozložte v součin prvočísel následující čísla: a) 111 b) 1 111 c) 11 111, d) 111 111.

Řešení: Je 111 = 3.37, 1 111 = 11. 101, 11 111 = 41.271, 111 111 = 3.7.11.13.37.

Víme, že prvočísel je nekonečně mnoho. Můžeme se domnívat, že „postupně řídnou“. Mohli bychom nacházet libovolně dlouhé posloupnosti po sobě jdoucích složených přirozených čísel?

2.3 Příklad

Dokažte, že v množině všech přirozených čísel N existuje stočlenná posloupnost po sobě jdoucích složených přirozených čísel.

Řešení: Volme posloupnost 100! + 2, 100! + 3,…, 100! + 101.

2.4 Příklad

V Guinnesově knize rekordů je napsáno, že největší známé prvočíslo (tj. takové, které lidé v jistém roce byli schopni konkrétně určit, resp. vyčíslit) je $23021^{377} - 1$. Je to možné?

Řešení: Ne. Každá mocnina čísla končícího cifrou 1 končí též jedničkou, proto číslo $23021^{377} - 1$ musí končit cifrou 0 a tedy jde o složené číslo. Jde o tiskovou chybu, má být $2^{3021377} - 1$. (Čísla tvaru $2^p - 1$, p – prvočíslo studoval M. Mersenne (1588 – 1648). Některá z čísel tohoto tvaru mohou být prvočísly).

3 Příklad (Moskevská MO 1956):

Nechť a, b, c, d, n jsou celá čísla. Dokažte, že pokud lze zlomek $(a\ n + b)/(c\ n + d)$ krátit číslem k, pak je $ad - bc$ dělitelné číslem k.

Řešení: Kdyby $a\ n + b = k.r$, $c\ n + d = k.\ s$, pak po vynásobení první rovnice číslem $-c$ a druhé číslem a a po sečtení takto upravených rovnic máme $ad - bc = k\ (as - cr)$, tj. číslo $ad - bc$ je dělitelné číslem k.

4 Použitá literatura

GALPERIN, G. A., TOLPYGO, A. K.: Moskovskije matematičeskije olympiady, Prosveščenije, Moskva, 1986.

Úlohy z http://problems.ru/.

4 Kontakt na autora

Doc. RNDr. Jaroslav Hora, CSc.
katedra matematiky, fyziky a technické výchovy FPE ZČU, Klatovská 51, Plzeň
horajar@kmt.zcu.cz

PODPORA TALENTOVANÝCH ŽÁKŮ V PLZEŇSKÉM KRAJI

MATEMATIKA, FYZIKA

EXKURZE DO ČESKÉHO HYDROMETEOROLOGICKÉHO ÚSTAVU V PRAZE-LIBUŠI

Naděžda KUBEŠOVÁ

1 Úvod

Počasí jsou neustálé proměny vzduchu kolem nás. Počasí hraje v našem životě velmi důležitou roli. Působí na krajinu všude kolem nás. Sníh vyživuje ledovce, vítr zaobluje skály a z písku dokáže vytvořit obrovské duny. Nejdůležitější úlohu při tvorbě počasí mají Slunce, vzduch a voda. Díky Slunci máme na Zemi teplo a světlo, vzduch zase obaluje naší planetu jako ochranná slupka. Voda zase způsobuje, že mohou vzniknout oblaka, která vidíme téměř denně na obloze, a taky to, že na nás prší a sněží. Protože lidé věděli, že počasí tak hodně ovlivňuje jejich životy a není před ním úniku, chtěli vždy vědět, jak bude aspoň v nejbližších hodinách. Tak se začalo předpovídat počasí. Nejdříve pomocí lidové meteorologie, která byla blízká astrologii, a postupně vědeckými metodami.

2 Český hydrometeorologický ústav v Praze

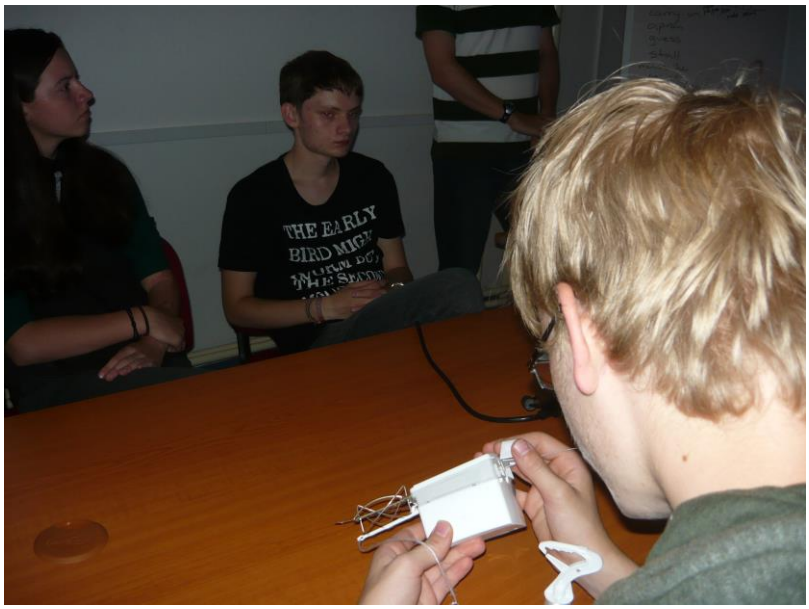
Letošní exkurze navázala na loňskou návštěvu ČHMÚ v Praze - Komořanech. Letos jsme se byli podívat na pracovišti v Praze - Libuši, kde je radarové a aerologické oddělení.

Radarové oddělení odborně zajišťuje provoz radarové sítě ČHMÚ včetně zpracování, archivace a aplikací radarových dat v meteorologické a hydrologické praxi. Meteorologický radiolokátor slouží k detekci výrazné srážkové oblačnosti (bouřky do cca 250 km). Výsledky mohou být použity pro odhad okamžitých intenzit srážek do cca 150 km od radaru.

Princip funkce radaru je založen na zpětném rozptylu mikrovln (cm-vln) na vodních kapkách a ledových krystalcích ve srážkách a oblačnosti. Vysílač generuje krátké vysokoenergetické pulsy elektromagnetického vlnění, které anténa vyzařuje v podobě úzkého svazku do atmosféry. Část energie se "odrazí" (přesněji: zpětně rozptýlí) od cílů meteorologických (srážky) či jiných (terén, letadla apod.). Část zpětně rozptýlené energie je zachycena anténou a zpracována přijímačem radaru. Podle polohy antény (azimut, elevace) a času mezi vysláním a příjmem pulsu se určuje poloha cíle. Množství odražené energie je úměrné intenzitě (radiolokační odrazivosti) cíle.

Meteorologická měření se skládají z cca 15-20 otáček antény v azimutu s proměnným výškovým úhlem (elevací). Tato objemová měření jsou opakována každých 5-15 minut.

Aerologické oddělení zajišťuje aerologická i přízemní meteorologická měření a pozorování na observatoři Praha - Libuš. V aerologii jsou základními a nejčastěji měřenými prvky teplota vzduchu, atmosférický tlak, vlhkost vzduchu a vítr. Vertikální rozložení těchto prvků v atmosféře je na observatoři Praha - Libuš měřeno čtyřikrát denně pomocí radiosond vynášených do vyšších vrstev atmosféry meteorologickými balony. Kromě těchto základních měření se zde v období leden až duben měří třikrát týdně vertikální profily ozonu a jednou ročně i profily radioaktivního záření beta a gama. Naměřené údaje jsou dále zpracovávány, distribuovány uživatelům, archivovány a využívány pro odborné studie i mezinárodní výzkumné projekty.



Též jsme se zúčastnili vypuštění meteorologického balonu se sondou.

V oblasti přízemních pozorování je observatoř Praha-Libuš jednak součástí sítě meteorologických a klimatologických stanic ČHMÚ, jednak se podílí na řadě speciálních měření a pozorování. K těmto aktivitám patří i testování a vyhodnocování kvality měření nových meteorologických přístrojů.

3 Závěr

Exkurze byla vedena poutavou formou. Vzhledem k tomu, že účastníci byli studenti se zájmem o matematiku a fyziku, budou se možná někteří ve své budoucí profesi podobnou problematikou zabývat.

4 Použitá literatura

http://portal.chmi.cz

5 Kontakt na autora

PaedDr. Naděžda Kubešová
Gymnázium L. Pika Plzeň, Opavská 21, 312 00 Plzeň
kubesova@gop.pilsedu.cz

PODPORA TALENTOVANÝCH ŽÁKŮ V PLZEŇSKÉM KRAJI

MATEMATICKÝ KEMP

PŘÍKLADY TÁHNOU

(Vybrané složitější slovní úlohy použité v soutěžích a hrách kempu)

Jana SOUKUPOVÁ

1 Úvod (Zajímavé slovní úlohy nejen na pohyb)

Studenti řešili v rámci pohybových her následující úlohy:

1. Čerstvé houby obsahují 90 % vody ,sušené houby obsahují 12% vody. Kolik kilogramů čerstvých hub musíme usušit, abychom získali 2,5kg sušených hub?

2. Podle plánu měl dělník vyrobit za určitý počet dní 540 výrobků. První čtyři dny pracoval podle plánu. Pak na základě nové technologie vyrobil každý den o 12 výrobků více, a tak již dva dny před termínem překročil původní plán právě o tolik výrobků, kolik jich měl podle plánu vyrobit za 1 den. Určete, kolik výrobků měl podle plánu dělník vyrobit denně.

3. Vlak jede stálou rychlostí po přímé trati, podél níž vede silnice. Po této silnici se pohybují dvě auta, první jede stálou rychlostí 54 km/h proti směru pohybu vlaku a druhé jede stálou rychlostí 72 km/h ve směru pohybu vlaku. První auto projede podél celého vlaku za 12 sekund, druhé za 72 sekund. Vypočítej rychlost vlaku a jeho délku. [54 km/h , 360m]

4. Dva sudy obsahují určité množství vody. Jestliže z prvního nalijeme do druhého právě tolik vody, kolik tam již je, potom z druhého do prvního právě tolik vody, kolik tam již je, a opět z prvního do druhého právě tolik, kolik tam již je, bude v každém sudu 160 litrů vody. Kolik litrů vody bylo v každém sudu na začátku? [100, 220 litrů]

5. V prvním roce splnil první závod výrobní plán na 105% a druhý závod na 104%, přitom oba dohromady vyrobily 52200 strojů. V druhém roce byl zvýšen plán prvního závodu o 5 % a plán druhého závody o 6%. Oba závody zvýšený plán nejen splnily, ale dokonce překročili. První závod v druhém roce splnil zvýšený plán na 102% a druhý závod na 110% a společně vyrobily 56400 strojů. Určete, kolik stojů podle původního plánu měl v prvním roce vyrobit každý z obou závodů. [20000, 30000 strojů]

6. Na železniční trati z A do B je tunel dlouhý 192 m a ve vzdálenosti 933m od tunelu je most délky 350m . Osobní vlak jede z A do B a od okamžiku, kdy jeho lokomotiva vjede do tunelu, až do okamžiku, kdy jeho poslední vagón opustí tunel, uplyne

15 sekund. Z B do A jede po druhé koleji nákladní vlak a přitom od okamžiku, kdy lokomotiva nákladního vlaku vjede na most, až do okamžiku, kdy jeho poslední vagón opustí most, uplyne 34 sekund, Poslední vagóny obou vlaků opouštějí most nebo tunel ve stejný okamžik a od tohoto okamžiku uplyne právě 19 sekund, kdy se lokomotivy setkají. Místo setkání je vzdáleno 488m od tunelu. Určete délky i rychlosti obou vlaků. [os vl. 108m, rychlost 72km/h, nákl. vl. 160m, rychlost 54km/h]

7. Vlak projíždí tunelem dlouhým 220m. Od okamžiku, kdy vjede do tunelu lokomotiva, až do okamžiku, kdy poslední vagón opustí tunel, uplyne 19 sekund. Od tohoto okamžiku uplyne dalších 42 sekund, než lokomotiva přijede k návěsti, která je 1 km od tunelu. Vlak jede stálou rychlostí. Určete tuto rychlost a délku vlaku. [72km/h , 160m]

8. Z místa A do místa B, vzdáleného 9 km, vyšel chodec. Po čtvrt hodině byl za ním z místa A vyslán posel se vzkazem. Posel dohonil chodce a vrátil se zpět do místa A v okamžiku, kdy chodec přišel do místa B. Určete rychlost pohybu chodce a dobu, za kterou posel dohoní chodce, víte-li, že se oba pohybují stálou rychlostí a rychlost pohybu posla je 5 km/h . Přitom dobu potřebnou k předání vzkazu zanedbáváme. [4 km/h , dohoní ho za 1 h]

2 Příklady z olympiád ALGEBRA

V oboru reálných čísel řešte soustavy rovnic:

1. $x^3 + y^3 = 3y + 3z + 4$
   $y^3 + z^3 = 3z + 3x + 4$
   $z^3 + x^3 = 3x + 3y + 4$

Řešení: $(x, y, z) = \{(2; 2; 2); (-1; -1; -1)\}$

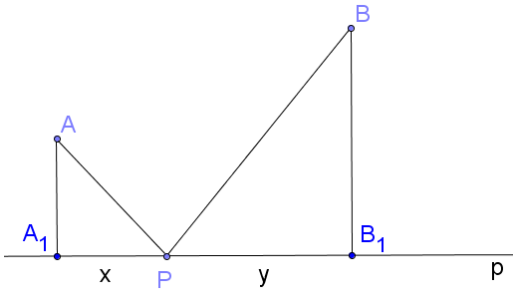
2. $x + \frac{1}{x} = \frac{2}{y^2}$
   $y + \frac{1}{y} = \frac{2}{z^2}$
   $z + \frac{1}{z} = \frac{2}{x^2}$

Řešení: $(x, y, z) = (1; 1; 1)$

3 Zajímavé geometrické úlohy

1. Jsou dány body A a B, které leží v téže polorovině s hraniční přímkou p. Na přímce p sestrojte bod P tak, aby součet druhých mocnin vzdáleností bodu P od bodů A a B byl minimální.

Řešení:



A1, B1 jsou kolmé průměty bodů A a B na přímku p.

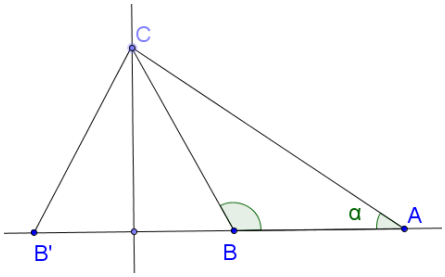
$|AP|^2 + |BP|^2 = (|AA_1|^2 + x^2) + (|BB_1|^2 + y^2)$

Označme $d = x + y$, d *je konstanta.*

Upravíme pravou stranu výrazu a minimální musí být výraz $x^2 + (d-x)^2 = 2\left(x - \frac{d}{2}\right)^2 + \frac{d^2}{2}$.

Tento výraz je minimální pro $x = \frac{d}{2}$. P je střed AB.

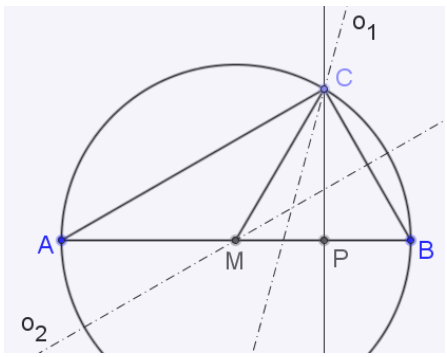
2. V rovině je dána dvojice navzájem kolmých přímek p, q. Nechť AB je úsečka, která leží na přímce q a s přímkou p nemá žádný společný bod. Sestrojte bod C ∈ p tak, aby se velikosti vnitřních úhlů trojúhelníku ABC při vrcholech A a B lišily právě o 60°.



Řešení:
Předpokládejme, že velikost vnitřního úhlu při vrcholu B v trojúhelníku ABC je větší než při A. Označme α úhel při vrcholu A, potom velikost vnitřního úhlu při B je α+60°. Nechť B´je souměrný s B podle p. $|\sphericalangle B'BC| = |\sphericalangle BB'C| = 120° - \alpha$ *a tedy* $|\sphericalangle ACB'| = 60°$. Sestrojíme oblouk kružnice, z nichž je vidět úsečka B´A pod úhlem 60°.

3. Bod M je středem přepony AB daného pravoúhlého trojúhelníku ABC a P je patou jeho výšky z vrcholu C ke straně AB. Dokažte, že se osa úhlu ACB a osa kratší odvěsny trojúhelníku ABC protínají v bodě, který je středem kružnice vepsané trojúhelníku CMP.

Řešení:



Z podobnosti pravoúhlých trojúhelníků ABC a CBP plyne $|\sphericalangle BCP| = |\sphericalangle BAC| |\sphericalangle MCA|$, neboť trojúhelník CAM je rovnoramenný se základnou CA. Je proto osa o_1 vnitřní ho úhlu při vrcholu C v trojúhelníku ABC současně osou vnitřního úhlu při vrcholu C v trojúhelníku MPC. Protože kratší odvěsna BC je základnou v rovnoramenném trojúhelníku BCM, je osa o_2 strany BC současně osou vnitřního úhlu při vrcholu M trojúhelníku BCM, tedy i trojúhelníku MPC. Průsečík přímek o_1 a o_2 je tedy středem kružnice vepsané trojúhelníku MPC.

4 Použitá literatura

ŠVRČEK J., CALÁBEK P. Sbírka netradičních matematických úloh 1. vyd. Prometheus, 2007., ISBN 978-80-7196-341-7.
POLÁK J., Středoškolská matematika v úlohách

HERMAN J.,CHRÁPAVÁ V., JANČOVIČOVÁ E., ŠIMŠA J. MATEMATIKA Rovnice a jejich soustavy, ISBN 978-80-247-1821-7.

5 Kontakt na autora

RNDr. Jana Soukupová
Gymnázium Mikulášské Plzeň
E-mail jana.Soukupova@mikulasske.cz

PODPORA TALENTOVANÝCH ŽÁKŮ V PLZEŇSKÉM KRAJI

MATEMATICKY KEMP

ÚLOHY S NEROVNOSTMI

Jaroslav HORA

1 Úvod

Začneme příkladem, kde se vyžaduje nalezení odhadu jistého součtu, a v dalších příkladech budeme dokazovat nerovnosti. V nich je třeba dokázat, že nerovnost platí pro jisté proměnné.

2.1 Příklad na odhad

Dokažte, že $1/2 - 1/3 + 1/4 - 1/5 + \ldots + 1/98 - 1/99 + 1/100 > 1/5$.

Řešení: Máme odhadnout konečný součet vlevo, ale do sčítání takového počtu zlomků se nám oprávněně nechce. Ozávorkujme výraz na levé straně tak, že do první závorky umístíme čtyři první sčítance, do dalších dvojice, poslední člen pak zůstane sám:

$$L = (1/2 - 1/3 + 1/4 - 1/5) + (1/6 - 1/7) + (1/8 - 1/9) + \ldots + (1/98 - 1/99) + 1/100.$$

Nyní je patrné, že součet v první závorce je 13/60, což je více, než 1/5, a všichni další sčítanci jsou kladní.

2.2 Nerovnost

Dokažte, že pro každé přirozené $n > 1$ platí:

$$1/(n+1) + 1/(n+2) + \ldots + 1/(2n) > 1/2 .$$

Řešení: Vidíme, že nejmenší ze zlomků je poslední a že vlevo je n zlomků. Pro původní levou stranu L tedy platí $L > n.\ 1/2n = 1/2$.

2.3 Příklad: Dokažte, že pro všechna reálná x, y platí $1/2\ (x^2 + y^2) \geq x\,y$. (*)
Řešení: Vynásobme dvěma a uveďme na tvar $(x - y)^2 \geq 0$. Rovnost nastává pro $x = y$. Dosazením $a = x^2$, $b = y^2$ dostáváme známý vztah mezi aritmetickým a geometrickým průměrem dvou nezáporných čísel a, b (AG nerovnost pro dvě nezáporná čísla a, b):
$1/2\ (a + b) \geq \sqrt{ab}$.

2.4 Příklad: Dokažte, že pro všechna reálná x, y, z platí $x^2 + y^2 + z^2 \geq x\,y + x\,z + z\,y$.

Řešení: Stačí sečíst tři nerovnosti typu (*) !

2.5 Příklad: Dokažte, že pro všechna reálná x, y platí $x^2 + y^2 + 1 \geq xy + x + y$.

Řešení: Využijeme výsledku předchozího příkladu a dosadíme $z = 1$.

2.6 Příklad: Dokažte, že pro všechna kladná reálná a, b, c, d platí $\sqrt{(a+c)(b+d)} \geq \sqrt{ab} + \sqrt{cd}$.

Řešení: Umocníme: $(a + c)(b + d) \geq a\,b + c\,d + 2\sqrt{abcd}$, načež po roznásobení a drobných úpravách máme $1/2\ (a\,d + b\,c) \geq \sqrt{abcd}$. To je ovšem AG nerovnost pro čísla $a\,d, b\,c$. Nyní si uvědomme, že užité úpravy byly ekvivalentní.

2.7 Příklad: Dokažte, že pro všechna kladná reálná a, b, c platí

$$\frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a} \leq 1/2\ \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right)!$$

Řešení: Dokažme nejprve, že pro všechna kladná reálná a, b platí $\frac{1}{a+b} \leq \frac{1}{4}\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right)$. To je snadné, např. se můžeme rozšířením zbavit zlomků a dospět k platné nerovnosti. Obdobně také platí

$\frac{1}{b+c} \leq \frac{1}{4}\left(\frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right)$, resp. $\frac{1}{c+a} \leq \frac{1}{4}\left(\frac{1}{c} + \frac{1}{a}\right)$. Sečtením těchto nerovností okamžitě dostáváme nerovnost požadovanou v zadání příkladu 2.7, přičemž rovnost zřejmě nastává pro $a = b = c$.

3 Použitá literatura

GALPERIN, G. A., TOLPYGO, A. K.: Moskovskije matematičeskije olympiady, Prosveščenije, Moskva, 1986.
Úlohy z http://problems.ru/.

4 Kontakt na autora

Doc. RNDr. Jaroslav Hora, CSc.
katedra matematiky, fyziky a technické výchovy FPE ZČU, Klatovská 51, Plzeň
horajar@kmt.zcu.cz

PODPORA TALENTOVANÝCH ŽÁKŮ V PLZEŇSKÉM KRAJI

MATEMATICKY KEMP

SOUSTAVY POLYNOMIÁLNÍCH ROVNIC

Martina KAŠPAROVÁ

1 Úvod

Soustavy rovnic, v nichž vystupují polynomy dvou či více neurčitých, a k jejichž vyřešení stačí několik dobrých nápadů, patří mezi klasické úlohy matematické olympiády.

2 Úlohy

V rámci matematického kempu byly ukázány základní úpravy některých typů soustav polynomiálních rovnic na soustavy snáze řešitelné (sčítání, odčítání či jiné vhodné kombinování rovnic soustavy vedoucí k rovnici o jedné neznámé nebo k polynomům, které lze rozložit na součin, využití linearity v jedné z neznámých a užití dosazovací metody, substituce v „symetrických soustavách“ a vhodné postupy pro cyklické soustavy). Užitečný může být i „geometrický postup“, při němž jednotlivé rovnice soustavy interpretujme jako geometrické objekty či vztahy mezi nimi.

2.1 Soustava řešená vhodným sečtením rovnic

Příklad 1: V oboru reálných čísel řešte soustavu (převzato z [1]):

$$x^2 - 4y + 7 = 0,$$
$$y^2 - 6z + 14 = 0,$$
$$z^2 - 2x - 7 = 0,$$

Každá z rovnic soustavy je lineární v jedné neznámé. Toto zjištění motivuje k užití dosazovací metody. Lze však nahlédnout, že takový postup vede sice k rovnici o jedné neznámé, ale získaná rovnice je osmého stupně bez možnosti snížení stupně rovnice vhodnou substitucí. V každé rovnici je vedle absolutního členu vždy čtverec neznámé a násobek jiné neznámé. Sečtením všech rovnic se získá rovnice:

$$x^2 + y^2 + z^2 - 4y - 6z - 2x + 7 + 14 - 7 = 0$$

Po vhodném přeskupení členů rovnice a doplnění na čtverec zjistíme, že platí:

$$(x - 1)^2 + (y - 2)^2 + (z - 3)^2 = 0$$

Vyhovuje tedy pouze trojice reálných čísel (1, 2, 3).

2.2 Soustava řešená vhodným odečtením rovnic

Příklad 2: V oboru reálných čísel řešte soustavu (převzato z [2]):

$$x^2 + 2yz + 5x = 2,$$
$$y^2 + 2zx + 5y = 2,$$
$$z^2 + 2xy + 5z = 2.$$

Zadaná soustava je tzv. cyklická soustava, tj. druhá a třetí rovnice vzniknou z první cyklickou záměnou neznámých. U takových soustav využíváme poznatku, dle něhož existence řešení (x_0, y_0, z_0) podmiňuje existenci řešení (y_0, z_0, x_0) a (z_0, x_0, y_0). Rovněž může být řešením trojice (x_0, x_0, x_0), přičemž číslo x_0 vypočteme z jedné z rovnic soustavy. Takto lze získat trojice (–2, –2, –2), (1/3, 1/3, 1/3). Vhodným postupem pro zjednodušení soustavy je odečítání rovnic. Rozdíl vždy dvou z nich lze upravit na součin dvou polynomů, které jsou již lineární. Vyřešení soustav lineárních rovnic poskytne vedle již uvedených trojic ještě dalších šest řešení.

2.3 Symetrické soustavy

Příklad 3: V oboru reálných čísel řešte soustavu rovnic (převzato z [3], str. 25/6.12):

$$x + xy + y = 2 + 3\sqrt{2},$$
$$x^2 + y^2 = 6$$

Zapíšeme-li na místa, kde je x, neznámou y a obráceně, zjistíme, že získáme soustavu stejných rovnic. Polynomy příslušné soustavě jsou symetrické a symetrie platí i pro nalezená řešení. Je-li (x_0, y_0) řešením soustavy, pak je jejím řešením i dvojice (y_0, x_0). Použijeme substituci $A = xy$, $B = x + y$. První rovnice pak bude lineární v A, B a v druhé se objeví součet druhé mocniny neznámé B a násobku neznámé A. Takovou soustavu již snadno dořešíme např. dosazovací metodou.

2.4 Úlohy řešené geometrickou interpretací rovnic soustavy

Příklad 4: Určete hodnotu výrazu $xy + 2yz + 3zx$, jestliže $x, y, z > 0$ vyhovují soustavě rovnic:

$$x^2 + xy + \frac{y^2}{3} = 25,$$
$$\frac{y^2}{3} + z^2 = 9,$$
$$z^2 + zx + x^2 = 16$$

(Převzato z [4], str. 91/382.)

Žádná z rovnic není lineární v některé z neznámých x, y, z, proto dosazovací metoda nebude vhodná. Také sčítání či odčítání rovnic nevede k vhodnému polynomu, který by bylo možno upravit na součin. Soustava není ani symetrická ani cyklická, není ani zjevné, jak případně zvolit substituci.

Všimneme si, že absolutní členy jsou čtverce přirozených čísel a toho, že úloha nepožaduje nalezení neznámých x, y, z, ale vypočtení hodnoty zadané výrazu. To nás může přivést k myšlence použít geometrickou interpretaci jednotlivých rovnic. Druhá rovnice popisuje, že součtem dvou druhých mocnin je druhá mocnina, což připomíná Pythagorovu větu pro trojúhelník s odvěsnami $y/\sqrt{3}$, z a přeponou 3. Zbývající rovnice obsahují vedle součtu čtverců neznámých také smíšený člen – součin těchto neznámých. Porovnáním rovnic se zápisy kosinové věty pro trojúhelník se stranami x, $y/\sqrt{3}$, resp. x, z zjišťujeme, že i první, resp. třetí rovnice má pěknou geometrickou interpretaci. Přiložíme-li k sobě vhodné strany tří trojúhelníků, získáme „velký“ trojúhelník se stranami 3, 4, 5. Výraz $xy + 2yz + 3zx$ představuje násobek součtu obsahů tří trojúhelníků. Obsah „velkého“ trojúhelníku je stejný jako tento součet, proto je tím úloha rozřešena.

3 Závěr

Z úloh je patrné, že některé postupy, které nás napadnou pro řešení soustav použít, nevedou k cíli buď vůbec, nebo až po řadě úkonů. V takovém případě je potřeba začít s řešením znovu s novým nápadem.

4 Použitá literatura

[1] *British Mathematical Olympiad*. Dostupné z: http://www.bmoc.maths.org/home/bmo1-2013.pdf.
[2] *Olimpiada Matematyczna*. Dostupné z: http://www.om.edu.pl/sites/default/files/zadania/om/om58_1.pdf.
[3] KOŇAGIN, S. V. et al. Zaruběžnyje matěmatičeskije olympiády. Moskva: Nauka, 1987.
[4] .VASILEV, N. B., JEGOROV, A. A., Zadači vsjesojuznych matmatičeskych olimpiad. Moskva: Nauka, 1988.

5 Kontakt na autora

Mgr. Martina Kašparová, Ph.D.
KMT-M FPE ZČU
Klatovská 51, Plzeň
mernesto@kmt.zcu.cz

PODPORA TALENTOVANÝCH ŽÁKŮ V PLZEŇSKÉM KRAJI

MATEMATICKÝ KEMP

KRUHOVÁ A KULOVÁ INVERZE

Josef KŘIŠŤAN

kde $\varphi(n)$ je Eulerova funkce udávající počet nesoudělných přirozených čísel, která jsou menší než n. Je-li n prvočíslo, $\varphi(n) = n - 1$.

- Zkuste najít explicitní vyjádření funkce $\varphi(n)$ pouze na základě prvočíselného rozkladu n.

V našem případě jsou 3 a 7 nesoudělná a $\varphi(7) = 6$, proto $7|3^6-1$. Využijeme-li poznatku, že z dělitelnosti $m|n$ vyplývá také $(a^m-1)|(a^n-1)$ pro každé celé $a > 1$, je úloha vyřešena. Vidíme totiž, že pro $k \geq 4$ je $6|n_k$, $7|n_k$ a také $(3^6 - 1)|(3^{n_k} - 1)$ a $7|3^6 - 1$.

Závěr: pro $k = 1, 2, 3$ lze původní zlomek krátit pouze 2, pro $k \geq 4$ ho lze krátit 7.

Příklad 2. *Označme $d(k)$ počet všech kladných dělitelů přirozeného čísla k a nechť číslo n je řešením rovnice $d(1,6n) = 1,6d(n)$. Určete hodnotu podílu $d(0,16n) : d(n)$.*

Řešení. Následující úloha nás zavede k rozkladu přirozeného čísla na prvočinitele, což je základní technika v teorii čísel.

- Uměli byste dokázat existenci nebo jednoznačnost takového rozkladu?

Číslo n, splňující zadanou rovnici, zapíšeme v prvočíselném rozkladu,

$$n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_k^{\alpha_k},$$

kde $k \geq 1$ a $2 \leq p_1 < p_2 < \cdots < p_k$ jsou navzájem různá prvočísla. Exponenty α_i, $i = 1, 2, \ldots, k$, jsou nezáporná celá čísla. Tento zápis čísla n je výhodný pro výpočet počtu dělitelů $d(n)$. Dělitelem n je každé číslo ve tvaru

$$p_1^{\beta_1} p_2^{\beta_2} \cdots p_k^{\beta_k}, \quad 0 \leq \beta_i \leq \alpha_i,\ i = 1, 2, \ldots, k.$$

Nyní je snadné určit $d(n) = (\alpha_1 + 1)(\alpha_2 + 1) \cdots (\alpha_k + 1)$.

Na přednášce jsem se snažil, aby mi tento vzorec pomohli odvodit studenti. Za každý dobrý nápad nebo při aktivní účasti před tabulí jsem rozdával body. To byl pro družstva druhý způsob (kromě nematematických kvízů), jak získat body do celkového hodnocení.

Body šlo tedy získávat i za podúlohy typu:

- Dokažte multiplikativnost funkce $d(n)$ pro nesoudělná čísla a, b, tj. $d(a \cdot b) = d(a)d(b)$.
- Odvoďte vzorec $d(n) = (\alpha_1 + 1)(\alpha_2 + 1) \cdots (\alpha_k + 1)$.

Aby měla rovnice $d(1,6n) = 1,6d(n)$ smysl, musí být číslo $1,6n = \frac{8}{5}n$ přirozené, takže $n = 2^\alpha 5^\beta n'$, kde $\beta \geq 1$ a n' je nesoudělné s 2 a 5. Danou rovnici přepíšeme (využijeme multiplikativnost funkce $d(n)$) do tvaru

$$(\alpha + 4)\beta d(n') = \frac{8}{5}(\alpha + 1)(\beta + 1)d(n').$$

Po zkrácení kladných číslem $d(n')$ a další úpravě přepíšeme rovnici do tvaru

$$(3\beta + 8)(4 - \alpha) = 40,$$

nebo

$$3\beta(\alpha-4)+8(\alpha+1)=0.$$

Z prvního vyjádření vidíme, že $3\beta+8\geq 11$ a $3\beta+8\equiv 2 \mod 3$, takže ze všech rozkladů čísla 40 na součin vyhovuje jedině

$$3\beta+8=20, \quad 4-\alpha=2,$$

a tedy $\alpha=2, \beta=4, n=2^2\cdot 5^4 n'$. Pokud využijeme druhého, méně nápaditého vyjádření, vidíme okamžitě, že musí být $\alpha-4<0$. Dosadíme-li postupně $\alpha=1,2,3$, najdeme pouze jednu vyhovující dvojici $\alpha=2$ a $\beta=4$. V obou případech jsme dospěli ke stejnému závěru. Pak podíl $d(0,16n):d(n)$ je roven

$$\frac{d\left(\frac{4}{25}n\right)}{d(n)}=\frac{d(2^4\cdot 5^2)d(n')}{d(2^2\cdot 5^4)d(n')}=\frac{5\cdot 3}{3\cdot 5}=1.$$

2 Základní nerovnosti

V této části jsme si připomněli základní vztahy mezi průměry. Definovali jsme obecný mocninný průměr řádu $\alpha\in\mathbb{R}-\{0\}$ z kladných reálných čísel $x_1,x_2,\ldots,x_n$

$$M_\alpha(x_1,\cdots,x_n):=\left(\frac{x_1^\alpha+\ldots+x_n^\alpha}{n}\right)^{\frac{1}{\alpha}}$$

a pro $\alpha=0$ definujeme

$$M_0:=\sqrt[n]{x_1\cdots x_n}.$$

Dá se ukázat, že funkce $g(\alpha)=M_\alpha(x_1,\cdots,x_n)$ je rostoucí na $\mathbb{R}$ a je omezená,

$$\min\{x_1,\ldots,x_n\}\leq M_\alpha(x_1,\cdots,x_n)\leq\max\{x_1,\ldots,x_n\}.$$

Příklad 3. *V libovolném trojúhelníku ABC označme a,b,c délky jeho stran a t_a,t_b,t_c délky jeho těžnic obvyklým způsobem. Rozhodněte, zda některá z nerovností*

$$a<\frac{b+c}{2}, \quad t_a>\frac{t_b+t_c}{2}$$

je důsledkem druhé, nebo se dokonce jedná o dvě ekvivalentní nerovnosti.

Řešení. Na první pohled by se mohlo zdát, že se jedná o ekvivalenci, ale obecně platí pouze tato implikace

$$a<\frac{b+c}{2}\Rightarrow t_a>\frac{t_b+t_c}{2}. \tag{1}$$

Obrácená implikace obecně platit nemusí. V tomto případě najdeme (což nemusí být úplně snadné) protipříklad: vezmeme známý pravoúhlý trojúhelník s $a=4, b=3, c=5$. Pak $t_a=\sqrt{13}$, $t_b=\frac{\sqrt{73}}{2}$, $t_c=\frac{5}{2}$. Buď pomocí kalkulačky zjistíme, že je splněna nerovnost $2t_a>t_b+t_c$ anebo algebraickými úpravami dokážeme nerovnost

$$5+\sqrt{73}<4\sqrt{13}\Leftrightarrow 5<4\sqrt{13}-\sqrt{73}\Leftrightarrow 25<281-8\sqrt{13\cdot 73}\Leftrightarrow\sqrt{13\cdot 73}<32\Leftrightarrow 949<1024.$$

Buď je předpoklad splněn, platí v tomto trojúhelníku $8 = 2a = b + c = 8$, tj. není splněna nerovnost $2a < b + c$.

Dokážeme, že obecně platí implikace (1). Předpokládejme platnost nerovnosti $2a < b + c$ a dokážeme nerovnost

$$2\sqrt{2b^2 + 2c^2 - a^2} > \sqrt{2a^2 + 2c^2 - b^2} + \sqrt{2a^2 + 2b^2 - c^2}. \tag{2}$$

Zde jsme použili vyjádření délky těžnice pomocí délek stran a, b, c.

- Odvoďte vzorec pro výpočet délky těžnice $t_a = \frac{1}{2}\sqrt{2b^2 + 2c^2 - a^2}$.

V prvním řešení umocníme nerovnost na druhou,

$$2\sqrt{(2a^2 + 2c^2 - b^2)(2a^2 + 2b^2 - c^2)} < 7b^2 + 7c^2 - 8a^2. \tag{3}$$

Levou stranu odhadneme shora pomocí A-G nerovnosti ($2\sqrt{xy} \leq x + y$),

$$2\sqrt{(2a^2 + 2c^2 - b^2)(2a^2 + 2b^2 - c^2)} \leq 4a^2 + b^2 + c^2.$$

Místo nerovnosti (3) dokážeme silnější nerovnost

$$4a^2 + b^2 + c^2 < 7b^2 + 7c^2 - 8a^2 \Leftrightarrow 2a^2 < b^2 + c^2.$$

Z našeho předpokladu postupně dostaneme

$$4a^2 = (2a)^2 < (b + c)^2 = b^2 + c^2 - 2bc \leq 2b^2 + 2c^2,$$

čímž jsme dokázali silnější nerovnost a důkaz je hotov.

V druhém řešení odhadneme pravou stranu (2) pomocí A-H nerovnosti (aritmeticko-harmonický průměr),

$$\sqrt{2a^2 + 2c^2 - b^2} + \sqrt{2a^2 + 2b^2 - c^2} \leq 2\sqrt{2a^2 + \frac{b^2}{2} + \frac{c^2}{2}}$$

a pak postupujeme stejně jako v prvním řešení.

3 Geometrie v rovině a v prostoru

Příklad 4. *Do dané kruhové úseče jsou vepsány kružnice k_1, k_2. Kružnice k_1 se oblouku úseče dotýká v bodě A a její základny v bodě B. Kružnice k_2 se dotýká oblouku úseče v bodě C a její základny v bodě D.*

- *Dokažte, že body A, B, C, D leží na jedné kružnici.*
- *Uvažujme nyní všechny takové dvojice kružnic k_1, k_2, které se navíc dotýkají. Jaký útvar vyplní body jejich dotyku?*

Řešení. Řešení této úlohy přenecháváme laskavému čtenáři. Prozraďme, že hlavní ingrediencí je mocnost bodu ke kružnici.

Příklad 5. *Je dán pevný trojúhelník ABC, bod D probíhá stranu BC. Zjistěte, jakých hodnot může nabývat úhel svíraný kružnicí opsanou ΔABD a kružnicí opsanou ΔACD.*

Řešení. Tato úloha lze řešit mnoha způsoby. Jedna z velmi efektivních metod je kruhová inverze. Stručně zopakujme, že jde o geometrické zobrazení, které je určeno středem S a tzv. poloměrem inverze $r > 0$. V kruhové inverzi se X v rovině zobrazí na bod X' v téže rovině podle těchto pravidel

- X' leží na polopřímce SX
- $|SX'| = \frac{r^2}{|SX|}$

Obraz bodu S definujeme v nekonečnu a naopak.

Kruhová inverze má zajímavé vlastnosti:

- Dvojím provedením téže inverze dostaneme identitu.
- Kružnice se středem v S se zobrazí na kružnici se středem v S. Speciálně kružnice se středem v S a poloměrem r je samodružná.
- Vnitřek samodružné kružnice se zobrazí na její vnějšek a naopak.
- Přímka procházející středem S je samodružná.
- Přímka neprocházející středem S se zobrazí na kružnici procházející středem a naopak.
- Kružnice neprocházející středem S se zobrazí na kružnici neprocházející středem.
- Úhel mezi křivkami se zachovává, pokud průsečík těchto křivek není bod S.

Na přednášce jsem ukázal řešení, kde jsem zvolil bod A počátkem kruhové inverze (na poloměru ani moc nezáleží).

Při zkoumání úlohy použili studenti osobních počítačů a programu Cabri Geometrie. Velmi rychle zjistili, že hledaný úhel je konstantní velikosti a nabývá hodnot

$$\min\{|\angle BAC|, 180^\circ - |\angle BAC|\}.$$

Příklad 6. *V prostoru jsou dány koule k, l, m a to tak, že l, m leží uvnitř k, dotýkají se jí a dotýkají se navzájem. Sestrojíme kouli ϱ, která se dotýká koulí k, l, m. Najděte množinu dotykových bodů ϱ a k.*

Řešení. Tato úloha jde elegantně řešit pomocí tzv. kulové inverze – trojrozměrná analogie kruhové inverze. Vlastnosti kulové inverze jsou velmi podobné kruhové inverzi –

všechno je jen v další dimenzi, takže mluvíme např. o kulové ploše procházející středem kulové inverze, která se zobrazí na rovinu neprocházející středem a tak podobně.

Při řešení můžeme zvolit jako střed S bod dotyku koulí k a l. Při řešení budeme potřebovat ještě tento poznatek

- Kulová inverze je prosté zobrazení, které zobrazuje kružnice neprocházející středem opět na kružnice.

Důkaz takového tvrzení můžeme provést s využitím dvou koulí, které neprochází středem S a které se protínají v původní vzorové kružnici. Další úvahy přenecháme čtenáři.

Závěr a poděkování.

Na přednášce jsem se zabývali úlohami z dělitelnosti, základními nerovnostmi a základními vlastnostmi kruhové a kulové inverze. Největší přínos vidím hlavně v aktivním zapojení studentů do přednášky.

Rád bych poděkovat všem lidem, kteří se podíleli na přípravě Matematického Kempu 2014. Zvláště bych chtěl poděkovat PaedDr. Naděždě Kubešové za pozvání a trpělivost. V neposlední řadě děkuji studentům za skvělou atmosféru při řešení úloh a nematických kvízů.

Literatura.

- Matematický seminář PRASE, *http://mks.mff.cuni.cz/*.
- 46.ročník Matematické olympiády.

Kontakt na autora.

Josef Křišťan
email: kristan1@email.cz
tel.: +420777944564

PODPORA TALENTOVANÝCH ŽÁKŮ V PLZEŇSKÉM KRAJI

MATEMATICKÝ KEMP

KRUHOVÁ INVERZE, APOLLONIOVY ÚLOHY

Josef KUBEŠ

1 Úvod

Tato oblast je nad rámec základních osnov matematiky na střední škole. Přesto kruhová inverze je velmi zajímavé zobrazení, se kterým by se matematicky nadaní žáci měli seznámit. S Apolloniovými úlohami se ovšem žáci seznamují již od základní školy, aniž by bylo řečeno, do jaké skupiny vlastně patří. Například konstrukce kružnice opsané trojúhelníku.

2 Definice kruhové inverze

Je dán bod S a nenulové číslo κ. Kruhová inverze je zobrazení tzv. Möbiovy roviny na Möbiovu rovinu, které každému bodu $X \neq S$ přiřadí bod X', pro který $|SX| \cdot |SX'| = |\kappa|$ a který pro $\kappa > 0$ leží na polopřímce SX a pro $\kappa < 0$ leží na opačné polopřímce k polopřímce SX; bodu $X = S$ přiřazuje nevlastní bod; nevlastnímu bodu přiřazuje bod S.

V kruhové inverzi se středem S platí:

- obrazem přímky procházející středem S je totožná přímka;
- obrazem přímky neprocházející středem S je kružnice procházející středem S;
- obrazem kružnice procházející středem S je přímka neprocházející středem S;
- obrazem kružnice neprocházející středem S je kružnice.

3. Apolloniovy úlohy

Apolloniova úloha má své jméno podle řeckého geometra Apollonia z Pergy (262 – 200 př. n. l.), který se touto úlohou zabýval a řešil ji v díle "O dotycích". Apollonios formuloval úlohu nejprve pro tři zadané kružnice, později byly tyto kružnice postupně nahrazeny bodem (kružnice o nulovém poloměru) a přímkou (kružnice o nekonečně velkém poloměru). Originální znění se nezachovalo. Je však známa reprodukce úlohy v díle "Mathématikai synagogai" (důležitý pramen historie matematiky obsahující výňatky ze ztracených matematických spisů) řeckého matematika Pappose Alexandrijského (3. stol. n. l.). Paposs uvádí úlohu v následujícím znění:

"*Nechť jsou dány tři předměty, z nichž každý může být bodem, přímkou nebo kruhem; má se narýsovat kruh, který prochází každým z daných bodů (jsou-li dány jen body) a dotýká se daných přímek či kruhů.*".

Z výše uvedeného zadání je možno vypozorovat počet možných variant úlohy. Hledáme vždy skupiny tří objektů ze třech druhů (*B*odů, *p*římek, *k*ružnic), přičemž pořadí daných objektů není podstatné. Tvoříme kombinace s opakováním třetí třídy z podmínek $K'(k,n) = K'(3,3) = 10$. Je tedy **10 různých případů** (nových devět jsou zvláštní případy úlohy obecné), přičemž obecná úloha má **nejvýše 8 řešení.**

Existuje tedy devět speciálních případů obecné úlohy kkk, jsou to úlohy BBB, BBp, BBk, Bpp, Bpk, Bkk, ppp, ppk, pkk.

3.1 Řešte úlohu Bpk

Střed řídící kružnice kruhové inverze volíme v bodě B. Tím přímku i kružnici převedeme na dvě kružnice a hledáme jejich společné tečny. Zpětným převodem získáme hledané kružnice.

3.2 Řešte úlohu Bkk

Střed řídící kružnice kruhové inverze opět volíme v bodě B. Tím obě kružnice převedeme na kružnice a hledáme jejich společné tečny. Zpětným převodem získáme hledané kružnice.

3 Závěr

Uvedené téma sleduje splnění dvou cílů. Nejprve rozšířit obzor o další zobrazení a jeho použití na úlohách. Druhý z cílů je propojení matematických poznatků s historickou dobou, ve které se jimi vědci zabývali. Je evidentní, že rozvoj starověké geometrie a formulované úlohy jsou natolik obtížné, že jejich řešení v dnešní době je dáno pouze určité nadané skupině studentů.

4 Použitá literatura

Patáková, E. Apolloniovy úlohy. Diplomová práce. Dostupná na internetu <http://geometrie.kma.zcu.cz/work/AU/apoll/apoll.html>

5 Kontakt na autora

PaedDr. Josef Kubeš
Gymnázium, Plzeň, Mikulášské nám. 23
Josef.Kubes@mikulasske.cz

PODPORA TALENTOVANÝCH ŽÁKŮ V PLZEŇSKÉM KRAJI

MATEMATICKY KEMP

DŮKAZOVÉ TECHNIKY – NEROVNOSTI

Josef KUBEŠ

1 Úvod

Znalost důkazových technik patří k základnímu vybavení každého řešitele matematické olympiády. Ověřování platnosti zadaných nerovnic vždy vyžaduje originální přístup, určitý nadhled a zkušenost.

2 Nerovnosti a jejich ověřování

Základním stavebním kamenem je nerovnost vyplývající z druhé mocniny dvojčlenu $(x-1)^2$. Pro libovolné reálné číslo platí, že $(x-1)^2 \geq 0$. Odtud plyne $x+\frac{1}{x} \geq 2$.

Další důležitá nerovnost je vztah mezi geometrickým a aritmetickým průměrem. Pro libovolnou n- tici reálných kladných čísel $x_1, x_2, \ldots, x_n$ platí: $\sqrt[n]{x_1.x_2.\ldots.x_n} \leq \frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}$.

Poslední nerovností, se kterou se budeme zabývat je Cauchyova nerovnost. Pro libovolné dvě n- tice reálných čísel $x_1, x_2, \ldots, x_n$ a $y_1, y_2, \ldots, y_n$ platí $(x_1y_1 + x_2y_2 + \cdots + x_ny_n)^2 \leq (x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2)(y_1^2 + y_2^2 + \ldots + y_n^2)$.

2.1 Dokažte, že pro každý ostrý úhel α platí

$$\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{cotg}\alpha \geq 2$$

Použijeme vztah mezi funkcemi tangens a kotangens a upravíme na druhou mocninu dvojčlenu.

2.2 Dokažte, že pro libovolnou trojici kladných čísel *a,b,c* platí

$$(a+b)(b+c)(c+a) \geq 8abc$$

Roznásobíme a použijeme nerovnost mezi aritmetickým a geometrickým průměrem.

2.3 Dokažte, že pro libovolnou trojici kladných čísel *a,b,c* platí

$$\left(1+\frac{a}{b+c}\right)\left(1+\frac{b}{c+a}\right)\left(1+\frac{c}{a+b}\right) \geq \frac{27}{8}$$

Upravíme a použijeme nerovnost mezi aritmetickým a geometrickým průměrem pro členy *a+b, b+c, c+a*.

2.4 Dokažte, že pro libovolné přirozené číslo n > 1 platí:

$$n! < \left(\frac{n+1}{2}\right)^n$$

Využijeme rovnost: Pro libovolné přirozené číslo *n* větší než jedna platí: $1 + 2 + 3 + 4 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}$. Dále je potřeba použít vztah mezi aritmetickým a geometrickým průměrem.

2.5 Dokažte, že pro všechna $x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathrm{R}^+$ platí:

$$\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2 \leq n \sum_{i=1}^{n} x_i^2$$

Dosadíme do Cauchyovy nerovnosti za $y_1, y_2, \ldots, y_n$ číslo 1.

2.6 Dokažte, že pro každé reálné číslo *a* platí:

$$3(1 + a^2 + a^4) \geq (1 + a + a^2)^2$$

2.7 Nechť $x, y, z \in R_0^+$. Dokažte, že platí:

$$\sqrt{xy + yz + zx} \leq \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

Obě nerovnosti dokážeme aplikací Cauchyovy nerovnosti.

2.8 Dokažte, že pro libovolnou trojici reálných čísel *a*, *b*, *c* platí:

$$(a + b - c)^2 + (b + c - a)^2 + (c + a - b)^2 \geq ab + bc + ca$$

Upravíme levou stranu a opět šikovně použijeme Cauchyova nerovnost.

2.9 Dokažte, že pro libovolnou trojici kladných reálných čísel *a*, *b*, *c* platí:

$$\frac{1}{b(a+b)} + \frac{1}{c(b+c)} + \frac{1}{a(c+a)} \geq \frac{9}{2(a^2 + b^2 + c^2)}$$

Důkaz nerovnosti je poměrně náročný. Výchozí nerovností je tentokráte vztah mezi harmonickým a aritmetickým průměrem. V dalším řešení pochopitelně budeme potřebovat Cauchyovu nerovnost.

3 Závěr

Uvedené úlohy z velké části přesahují rozsah základního středoškolského učiva matematiky. Pro řešení příkladů matematické olympiády jsou však základní a navazuje se na ně ve vyšších kolech. Řešitele zdokonaluje ve strategii a důslednosti řešení. Důkazové úlohy uvedeného typu také vyžadují precizní znalost v upravování algebraických výrazů.

4 Použitá literatura

ŠVRČEK, J., CALÁBEK, P. Sbírka netradičních matematických úloh. 1. vyd. Praha: Prométheus, spol. s r. o., 2007. 186 s. ISBN 978-80-7196-341-7

KUFNER, A. Nerovnosti a odhady. 1. vyd. Praha: Mladá fronta 1975. 120 s. 508/21/82.6

5 Kontakt na autora

PaedDr. Josef Kubeš
Gymnázium, Plzeň, Mikulášské nám. 23
Josef.Kubes@mikulasske.cz

PODPORA TALENTOVANÝCH ŽÁKŮ V PLZEŇSKÉM KRAJI

MATEMATICKÝ KEMP

CELÁ ČÁST REÁNÉHO ČÍSLA, ABSOLUTNÍ HODNOTA REÁLNÉHO ČÍSLA

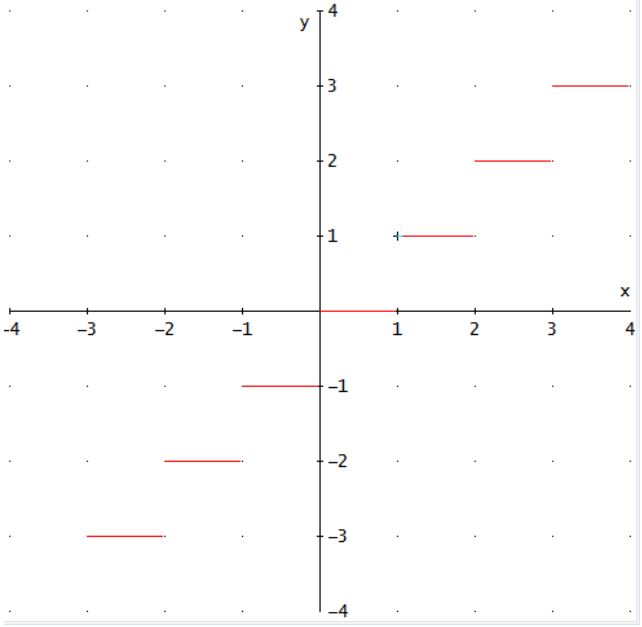
Josef KUBEŠ

1 Úvod

Celá část reálného čísla je partie, která se v klasických hodinách matematiky neprobírá. Ovšem je to vděčné téma ke tvorbě netradičních úloh, ve kterých je nutná individuální strategie. Nelze se naučit univerzální postup, je nutné si předem dobře zvážit postup řešení.

2 Definice celé části reálného čísla a její graf

Výraz $[a]$ znamená celou část z reálného čísla a. Je rovna nejbližšímu nižšímu celému číslu. Tedy $[1] = 1,\ [3{,}5] = 3, [-6{,}2] = -7$. Graf funkce $y = [x]$ má tvar:



2.1 Určete všechna reálná čísla, která vyhovují rovnici $4x - 2[x] = 5$.

2.2 V oboru reálných čísel řešte rovnici

$$[3x - 5] = 5x - 8$$

V obou úlohách využijeme definici celé části, tedy $[x] = x + k$, kde $0 \leq k < 1$.

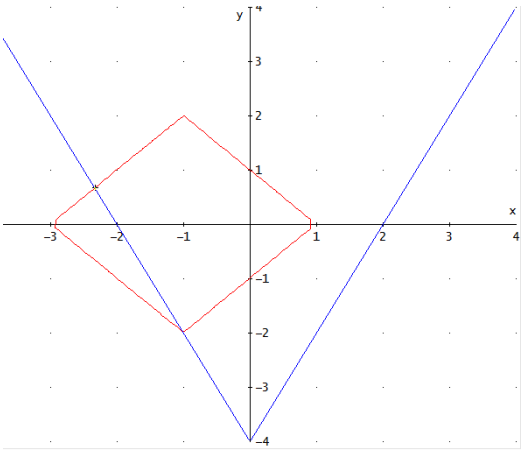
2.3 Určete všechny dvojice reálných čísel, které vyhovují soustavě rovnic

$$|x + 1| + |y| = 2$$

$$y + 4 = |2x|$$

Klíč k řešení je v diskuzi jednotlivých absolutních hodnot. Stanovíme podmínky pro jednotlivé proměnné tak, abychom mohli jednoznačně určit jejich znaménko a pro každý případ řešit zvlášť soustavu dvou rovnic o dvou neznámých.

Pro kontrolu lze úlohu řešit graficky. Z obrázku je patrné řešení: K = {[-1,-2],[$\frac{-7}{3}$, $\frac{-2}{3}$]}



3 Závěr

Uvedené úlohy z velké části přesahují rozsah základního středoškolského učiva matematiky. Pro řešení příkladů matematické olympiády jsou však základní a navazuje se na ně ve vyšších kolech. Řešitele zdokonaluje ve strategii a důslednosti řešení.

4 Použitá literatura

ŠVRČEK, J., CALÁBEK, P. Sbírka netradičních matematických úloh. 1. vyd. Praha: Prométheus, spol. s r. o., 2007. 186 s. ISBN 978-80-7196-341-7

5 Kontakt na autora

PaedDr. Josef Kubeš
Gymnázium, Plzeň, Mikulášské nám. 23
Josef.Kubes@mikulasske.cz

PODPORA TALENTOVANÝCH ŽÁKŮ V PLZEŇSKÉM KRAJI

MATEMATICKÝ KEMP

Soustavy lineárních rovnic

Jaroslav HORA

1 Úvod

Je dobré se seznámit s některými triky používanými při řešení „větších“ soustav lineárních rovnic. Je také užitečné naučit se zapisovat event. nekonečnou množinu řešení takovéto soustavy pomocí parametrů. Také budeme směřovat k ukázce Gaussovy eliminace a rozboru případů, které mohu nastat s ohledem na řešitelnost, resp. na neřešitelnost soustavy lineárních rovnic.

2 Jak se nám povedla Gaussova eliminace

Řešte soustavu rovnic (Moskevská matematická olympiáda 1953)

$$x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 2x_4 + 2x_5 = 1,$$
$$x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 4x_4 + 4x_5 = 2,$$
$$x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 6x_4 + 6x_5 = 3,$$
$$x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 7x_4 + 8x_5 = 4,$$
$$x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 7x_4 + 9x_5 = 5.$$

Řešení: Opišme první rovnici, pod ni zapíšeme druhou rovnici, od které jsme odečetli první, dále napíšeme rovnici třetí, od které jsme odečetli druhou atd. Dostáváme soustavu

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 2x_4 + 2x_5 &= 1,\\ x_2 + 2x_3 + 2x_4 + 2x_5 &= 1,\\ x_3 + 2x_4 + 2x_5 &= 1,\\ x_4 + 2x_5 &= 1,\\ x_5 &= 1. \end{aligned}$$

Nyní okamžitě vidíme, že $x_5 = 1$, $x_4 = -1$, $x_3 = 1$, $x_2 = -1$, $x_1 = 1$.

3 Příklady:

Řešte následující soustavy rovnic:

a)
$x - 3y + 2z - t = 3,$
$2x + 4y - 3z + t = 5,$
$4x - 2y + z + t = 3,$
$3x + y + z - 2t = 10,$

b)
$x + 2y + 3z - t = 0,$
$x - y + z + 2t = 4,$
$x + 5y + 5z - 4t = -4,$
$x + 8y + 7z - 7t = -8,$

c)
$x + 2y + 3z = 2,$
$x - y + z = 0,$
$x + 3y - z = -2,$
$3x + 4y + 3z = 0,$

d)
$x + 2y + 3z - t = 0,$
$x - y + z + 2t = 4,$
$x + 5y + 5z - 4t = -4,$
$x + 8y + 7z - 7t = 6.$

Řešení:

a) $P = \{[2, -1, -3, -4]\}$,

b) dvě poslední rovnice vyplývají z prvních dvou, proto má soustava nekonečně mnoho řešení, k jejich vyjádření potřebujeme dva parametry, např. $P = \{[6 + 5u - 7v, 2u, 3v - 3u, 2v]\}$,

c) poslední rovnice je součtem ostatních. Soustava má jediné řešení $P = \{[-1, 0, 1]\}$,

d) soustava nemá řešení.

4 Použitá literatura

GALPERIN, G. A., TOLPYGO, A. K.: Moskovskije matematičeskije olympiady, Prosveščenije, Moskva, 1986.
Úlohy z http://problems.ru/.

5 Kontakt na autora

Doc. RNDr. Jaroslav Hora, CSc.
katedra matematiky, fyziky a technické výchovy FPE ZČU, Klatovská 51, Plzeň
horajar@kmt.zcu.cz

PODPORA TALENTOVANÝCH ŽÁKŮ V PLZEŇSKÉM KRAJI

MATEMATICKÝ KEMP

Rovnosti a nerovnosti v mezinárodních matematických olympiádách

Petr TOMICZEK

Úvod

S rovnostmi a nerovnostmi se setkáváme nejen při řešení čistých matematických problémů a i v praktickém životě musíme občas použít nerovnost. Například když chceme dostat skříň do patra, je lépe nejdříve počítat a pak pracovat. Obsahem tohoto příspěvku jsou proto příklady na rovnosti a nerovnosti, které se řešily v matematických olympiádách po celém světě.

První kapitola je věnována rovnostem řešeným v oboru celých čísel. Ve druhé kapitole je diskutován vztah mezi aritmetickým a geometrickým průměrem a jeho aplikacemi při řešení nerovností. pro pochopení některých důkazů je vhodné se nejdříve seznámit s principem matematické indukce.

1. Rovnosti

Příklad 1.1 : (New York 1977)
Pro $x, y \in \mathbb{Z}$ řešte rovnici $2^x + 1 = y^2$.

Řešení: Z nerovnosti $0 < 2^x = y^2 - 1$ vyplývá pro $x, y \in \mathbb{Z}$, že $2^x = y^2 - 1 \geq 3$ a $x > 1$. Tedy $2^x + 1$ je liché číslo i y je liché. Pak $y = 2k + 1, k \in \mathbb{Z}$ a $2^x + 1 = (2k + 1)^2$, odtud $2^{x-2} = (k + 1)k$. Tato rovnost nastane pouze pro $k = 1$, neboli $x = 3, y = 3$.

Příklad 1.2: (NDR 1973)
Pro $x, y \in \mathbb{Z}$ řešte rovnici $x(x+1)(x+7)(x+8) = y^2$.

Řešení: Substitucí $z = x + 4$ přejdeme k $(z^2 - 16)(z^2 - 9) = y^2$. Pro $z = 0$ je $y = \pm 12$, pro $z = \pm 3, z = \pm 4$ je $y = 0$, pro $z = \pm 5$, je $y = \pm 12$. Pro $z = \pm 1, \pm 2$ řešení v celých číslech neexistuje. Zbývá uvažovat $|z| \geq 6$. Pak $z^4 - 25z^2 + 144 = y^2 = (z^2 - 12)^2 - z^2$. Tedy $(z^2 - 12)^2 \geq y^2$ a $y^2 > (z^2 - 13)^2 = z^4 - 25z^2 + 144 - (z^2 - 25)$, neboť $(z^2 - 25) > 0$ pro $|z| \geq 6$. Další řešení tudíž neexistují.

Příklad 1.3: (Rumunsko 1981)
Pro $x, y \in \mathbb{Z}$ řešte rovnici

Řešení: Substitucí $z = x^3$ přejdeme ke kvadratické rovnici $z^2 + 3z + 1 - y^4 = 0$, pro jejíž diskriminant musí platit $D = 5 + 4y^4 = n^2$, $n \in \mathbb{N}$, abychom dostali řešení v celých číslech. Položíme $m = 2y^2$, pak $n^2 = m^2 + 5$ a $n \geq m + 1$, tedy $m^2 + 5 \geq (m + 1)^2 = m^2 + 2m + 1$. Odtud plyne $2 \geq m = 2y^2$, tudíž $1 \geq |y|$. Pro $y = 0$ řešení neexistuje, pro $y = \pm 1$ je $x = 0$.

Příklad 1.4: (Jugoslávie 1974)
Pro $x, y \in \mathbb{Z}$ řešte rovnici $x^2 + xy + y^2 = x^2y^2$.

Řešení: Díky symetrii příkladu můžeme bez újmy na obecnosti předpokládat, že $y = ax$, $|a| \geq 1$. Potom $x^2(1 + a + a^2) = a^2x^4$ a $x^2 = \frac{1+a+a^2}{a^2} \leq 3$, tedy pro $x = -1$, je $y = 1$, pro $x = 0$, je $y = 0$, pro $x = 1$, je $y = -1$.

Příklad 1.5: (NDR 1974)
Pro $x, y \in \mathbb{Z}$ řešte rovnici $(x + 2)^4 - x^4 = y^3$.

Řešení: Výpočtem dostaneme $8(x^3 + 2(x+1)^2 + x^2) = y^3$, tudíž y je sudé $y = 2k, k \in \mathbb{Z}$, tedy $x^3 + 2(x+1)^2 + x^2 = k^3$ a $(x+1)^3 + (x+1) = k^3$. Odtud pro $x \geq -1$ vyplývá, že $k \geq x+1$. Pro $k = x + 1$ dostaneme $x = -1$, $y = 0$. Pro $k \geq x + 2$ musí platit $x^3 + 2(x + 1)^2 + x^2 \geq x^3 + 6x^2 + 12x + 8$, neboli $0 \geq 3x^2 + 8x + 6$, což nikdy nenastane. Pro $x < -1$ je $x + 1 > k$, tedy $x \geq k$ a $x^3 \geq (x + 1)^3 + (x + 1)$. Odtud $0 \geq 3x^2 + 3x + 1$, což opět nenastane.

2. Nerovnosti

Vzdálenost dvou čísel a, b na reálné ose se rovná $|a-b| = \sqrt{(a-b)^2}$. Zřejmě $(a-b)^2 \geq 0$, což je ekvivalentní se základní nerovností

$$2ab \leq a^2 + b^2\,, \quad \text{popřípadě} \quad ab \leq \frac{a^2+b^2}{2} \quad \text{nebo} \quad \sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2} \text{ pro } a, b \geq 0\,, \qquad \text{(N1)}$$

kterou lze zobecnit do následující podoby.

Věta 2.1 : (o průměrech)
Nechť $a_i > 0$, $i = 1, 2, \ldots n$, pak platí

$$\frac{n}{\frac{1}{a_1} + \cdots + \frac{1}{a_n}} \leq \sqrt[n]{a_1 \cdot \ldots \cdot a_n} \leq \frac{a_1 + \cdots + a_n}{n} \leq \sqrt{\frac{a_1^2 + \cdots + a_n^2}{n}}\,. \qquad \text{(N2)}$$

Definice 2.1 : Nechť $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$, **aritmetický průměr** se nazývá číslo

$$\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n}\,.$$

Nechť $a_i \geq 0$, $i = 1, 2, \ldots n$, **geometrický průměr** se nazývá číslo

$$\sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n}\,.$$

Nechť $a_i > 0$, $i = 1, 2, \ldots n$, **harmonický průměr** se nazývá číslo

$$\frac{n}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_n}}\,.$$

Nechť $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$, **kvadratický průměr** se nazývá číslo

$$\sqrt{\frac{a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2}{n}}\,.$$

Důkaz věty 2.1: Nejdříve dokážeme vztah mezi geometrickým a aritmetickým průměrem

$$\sqrt[n]{a_1 \cdot \ldots \cdot a_n} \leq \frac{a_1 + \cdots + a_n}{n}\,. \qquad \text{(GA)}$$

Upravíme (GA) do tvaru $n \leq \dfrac{a_1 + \cdots + a_n}{\sqrt[n]{a_1 \cdot \ldots \cdot a_n}}$, a položíme $x_i = \dfrac{a_i}{\sqrt[n]{a_1 \cdot \ldots \cdot a_n}}$, $i = 1, \ldots, n$. Potom $x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_n = 1$ a pomocí matematické indukce budeme dokazovat, že $n \leq x_1 + x_2 + \ldots + x_n$. Pro $n = 1$ tvrzení zřejmě platí. Z využitím indukčního předpokladu $n \leq x_1 + x_2 + \ldots + x_n$ chceme dokázat, že $n + 1 \leq x_1 + x_2 + \ldots + x_n + x_{n+1}$, pokud

$x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_n \cdot x_{n+1} = 1$. Bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že $x_1 \geq 1$ a $x_2 \leq 1$, potom $(x_1 - 1)(x_2 - 1) \leq 0$, tedy $1 + x_1x_2 \leq x_1 + x_2$ a také

$$1 + x_1x_2 + x_3 + \ldots + x_n + x_{n+1} \leq x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_n + x_{n+1}\,.$$

Pro n čísel $x_1x_2, x_3, \ldots, x_{n+1}$ platí $x_1x_2 \cdot x_3 \cdot \ldots \cdot x_{n+1} = 1$ a podle indukčního předpokladu $n \leq x_1x_2 + x_3 + \ldots + x_n + x_{n+1}$. Odtud již dostaneme

$$1 + n \leq 1 + x_1x_2 + x_3 + \ldots + x_n + x_{n+1} \leq x_1 + x_2 + \ldots + x_n + x_{n+1}\,,$$

což jsme měli dokázat.

Pokud položíme $a_i = \frac{1}{b_i}$, $i = 1, \ldots, n$ v nerovnosti (GA), pak dostaneme $\sqrt[n]{\frac{1}{b_1} \cdot \ldots \cdot \frac{1}{b_n}} \leq \frac{\frac{1}{b_1} + \cdots + \frac{1}{b_n}}{n}$. Odtud již snadno plyne nerovnost mezi harmonickým a geometrickým průměrem

$$\frac{n}{\frac{1}{b_1} + \cdots + \frac{1}{b_n}} \leq \sqrt[n]{b_1 \cdot \ldots \cdot b_n}\,. \tag{HG}$$

Nerovnost mezi aritmetickým a kvadratickým průměrem dokážeme také pomocí matematické indukce. Chceme tedy dokázat

$$\frac{a_1 + \cdots + a_n}{n} \leq \sqrt{\frac{a_1^2 + \cdots + a_n^2}{n}}\,, \tag{AK}$$

což pro $n = 1$ zřejmě platí.

Za indukčního předpokladu $(a_1 + \cdots + a_n)^2 \leq n(a_1^2 + \cdots + a_n^2)$, dokážeme platnost $(a_1 + \cdots + a_n + a_{n+1})^2 \leq (n+1)(a_1^2 + \cdots + a_n^2 + a_{n+1}^2)$.
Platí
$(a_1 + \cdots + a_n + a_{n+1})^2 = (a_1 + \cdots + a_n)^2 + 2(a_1 + \cdots + a_n)a_{n+1} + (a_{n+1})^2 \overset{(N1)}{\leq} n(a_1^2 + \cdots + a_n^2) + a_1^2 + a_{n+1}^2 + \cdots + a_n^2 + a_{n+1}^2 + a_{n+1}^2 = (n+1)(a_1^2 + \cdots + a_n^2 + a_{n+1}^2)$, což jsme měli dokázat.

Poznamenejme, že rovnost v (N2) nastane pouze pro $a_1 = a_2 = \ldots = a_n$.

S nerovnostmi z předchozí věty se často setkáme v úlohách z matematických olympiád.

Příklad 2.1: (2.ročník MO kat. A)
Dokažte, že pro $a_i > 0$, $i = 1, 2, \ldots n$, platí nerovnost

$$(a_1 + a_2 + \ldots + a_n)\Big(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_n}\Big) \geq n^2\,.$$

Řešení: Jednoduchou úpravou dostaneme

$$\frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n} \geq \frac{n}{\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n}}, \qquad \text{(HA)}$$

což je nerovnost mezi harmonickým a aritmetickým průměrem, viz (N2).

Řešení však můžeme dostat i jiným postupem s využitím základní nerovnosti (N1).

$$(a_1+a_2+\ldots+a_n)\Big(\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n}\Big) = \sum_{i=1}^{n} a_i\cdot\frac{1}{a_i} + \sum_{\substack{i\neq j\\ i,j=1}}^{n} a_i\cdot\frac{1}{a_j} =$$

$$n + \sum_{1\leq i<j\leq n} \underbrace{\frac{a_i}{a_j}+\frac{a_j}{a_i}}_{\geq 2} \geq n + \binom{n}{2}\cdot 2 = n^2 .$$

Příklad 2.2: (17.ročník MO kat. A)
Dokažte, že pro trojici nezáporných čísel a, b, c, platí nerovnost

$$a(a-\sqrt{bc})+b(b-\sqrt{ac})+c(c-\sqrt{ab}) \geq 0 .$$

Řešení: Podle (GA) nerovnosti je $\sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2}$, tudíž
$a(a-\sqrt{bc})+b(b-\sqrt{ac})+c(c-\sqrt{ab}) \geq a(a-\frac{b+c}{2})+b(b-\frac{a+c}{2})+c(c-\frac{a+b}{2}) = \frac{1}{2}((a-b)^2+(b-c)^2+(a-c)^2) \geq 0$.

Příklad 2.3:
Dokažte, že pro libovolné přirozené číslo n, platí nerovnost

$$n! \leq \Big(\frac{n+1}{2}\Big)^n .$$

Řešení: Platí $1+2+\ldots+n = \frac{n(n+1)}{2}$, pak $\big(\frac{n+1}{2}\big)^n = \big(\frac{1+2+\ldots+n}{n}\big)^n \overset{(GA)}{\geq} n!$.
Poznámka: Lze to dokázat i matematickou indukcí a binomickou větou.

Příklad 2.4: (22.ročník MO kat. A)
Máme posloupnost (a_n) reálných čísel, která splňuje $a_{n-1}+a_{n+1} \geq 2a_n$, pro $n>1$. Označíme $A_n = \dfrac{a_1+\ldots+a_n}{n}$, dokažte že pak platí nerovnost

$$A_{n-1}+A_{n+1} \geq 2A_n .$$

Řešení: Nerovnost $A_{n-1}+A_{n+1} \geq 2A_n$ přepíšeme do tvaru $A_{n+1}-A_n \geq A_n - A_{n-1}$ a dosadíme z definice A_n. Tedy

$$\frac{a_1+\ldots+a_{n+1}}{n+1} - \frac{a_1+\ldots+a_n}{n} \geq \frac{a_1+\ldots+a_n}{n} - \frac{a_1+\ldots+a_{n-1}}{n-1} .$$

Přechodem na společného jmenovatele dostaneme postupně

$$\frac{n\,a_{n+1}-a_1-\ldots-a_n}{(n+1)n}\geq\frac{(n-1)\,a_n-a_1-\ldots-a_{n-1}}{n(n-1)}\,,$$

$$(n-1)[n\,a_{n+1}-a_1-\ldots-a_n]\geq(n+1)[(n-1)\,a_n-a_1-\ldots-a_{n-1}]\,,$$

$$(n-1)\,n\,(a_{n+1}-a_n)\geq 2(n-1)\,a_n-2\,a_1-\ldots-2\,a_{n-1}\,,$$

$$\frac{(n-1)n}{2}(a_{n+1}-a_n)\geq[(n-1)(a_n-a_{n-1})+(n-2)(a_{n-1}-a_{n-2})+\ldots+(a_2-a_1)],$$

$$((n-1)+\ldots+1)(a_{n+1}-a_n)\geq[(n-1)(a_n-a_{n-1})+\ldots+(a_2-a_1)]\,.$$

Z předpokladu $a_{n-1}+a_{n+1}\geq 2a_n$ plyne $a_{n+1}-a_n\geq a_n-a_{n-1}$ i $a_{n+1}-a_n\geq a_{n-1}-a_{n-2}\,,\ldots\,,a_{n+1}-a_n\geq a_2-a_1$. Odtud již zřejmě dostaneme platnost dokazované nerovnosti.

Příklad 2.5: (NewYork 75)
Dokažte, že pro dvě libovolná různá kladná čísla a,b platí nerovnosti

$$\sqrt{ab}<\frac{(a-b)^2}{8(\frac{a+b}{2}-\sqrt{ab})}<\frac{a+b}{2}\,.$$

Řešení: Označíme $A=\frac{a+b}{2}$ a $G=\sqrt{ab}$, pak $\frac{(a-b)^2}{8(\frac{a+b}{2}-\sqrt{ab})}=\frac{(a-b)^2}{8(A-G)}=\frac{(a+b)^2-4ab}{8(A-G)}=\frac{4A^2-4G^2}{8(A-G)}=\frac{A+G}{2}$ a zřejmě $G<\frac{A+G}{2}<A$.

Příklad 2.6: (Jugoslávie 75)
Dokažte, že pro tři libovolná čísla a,b,c větší než 1 platí nerovnost

$$2\Big(\frac{\log_b a}{a+b}+\frac{\log_c b}{b+c}+\frac{\log_a c}{c+a}\Big)\geq\frac{9}{a+b+c}\,.$$

Řešení: Platí odhady $2\Big(\frac{\log_b a}{a+b}+\frac{\log_c b}{b+c}+\frac{\log_a c}{c+a}\Big)\overset{(GA)}{\geq}6\sqrt[3]{\frac{\log_b a\log_c b\log_a c}{(a+b)(b+c)(c+a)}}=\frac{6}{\sqrt[3]{(a+b)(b+c)(c+a)}}\overset{(GA)}{\geq}\frac{18}{(a+b)+(b+c)+(c+a)}$.

Příklad 2.7: (Jugoslávie 1976)
Nechť součin třech čísel se rovná jedné a jejich součet je větší než součet jejich převrácených hodnot. Dokažte, že pak právě jedno z těchto čísel je větší než jedna.

Řešení: Platí $abc=1$ a $a+b+c>\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}$. Potom $a+b+c>\frac{bc+ac+ab}{abc}\overset{abc=1}{\Rightarrow}$ $a+b+c-(bc+ac+ab)+abc-1>0\Rightarrow a-1+b(1-a)+bc(a-1)+c(1-a)>0\Rightarrow$ $(a-1)(1-b+bc-c)\Rightarrow(a-1)(b-1)(c-1)>0$. Odtud již plyne požadované tvrzení.

2.1 Bernoulliova nerovnost

Máme dokázat, že $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall x \in \mathbb{R}$, $x \geq -2$ platí:

$$(1+x)^n \geq 1+nx\,.$$

1. Pro $n=1$ nastane rovnost $1+x=1+x$.
2. Ukážeme, že platí: $(1+x)^{n+1} \geq 1+(n+1)x$. Upravíme uvedenou nerovnost a dostaneme

$$\begin{aligned}(1+x)^n(1+x) &\geq 1+nx+x\,,\\ (1+x)^n+(1+x)^n x &\geq 1+nx+x\,.\end{aligned}$$

Podle indukčního předpokladu je $(1+x)^n \geq 1+nx$ a stačí tedy dokázat, že

$$(1+x)^n x \geq x\,.$$

Pro $x \geq 0$ nerovnost zřejmě platí.

Pokud $x<0$ danou nerovnost vydělíme x a dostaneme $(1+x)^n \leq 1$. Tato nerovnost platí pro $-2 \leq x < 0$. Což jsme měli dokázat.

Věta 2.2: (Bernoulliova nerovnost)
Nechť $x > -1$, $x \neq 0$, pak

$$\begin{aligned}(1+x)^\alpha &< 1+\alpha x\,, \quad \text{pro} \quad 0<\alpha<1\\ (1+x)^\alpha &> 1+\alpha x\,, \quad \text{pro} \quad \alpha \notin [0,1]\end{aligned} \tag{BN}$$

Příklad 2.8: (Kanada 1982)
Dokažte, že pro $x>0$, $x\neq 1$, $a<1$ platí

$$\frac{1-x^a}{1-x} < (1+x)^{a-1}\,.$$

Řešení: Nejdříve budeme předpokládat, že $x \in (0,1)$, potom
$(1+x)^{a-1} - \frac{1-x^a}{1-x} > 0 \Leftrightarrow (1-x)(1+x)^{a-1} - (1-x^a) > 0$.

Nyní využijeme Bernoulliovu nerovnost: $(1-x)(1+x)^{a-1}-(1-x^a) \overset{(BN)}{>} (1-x)(1+(a-1)x) - 1 + x^a = 1+(a-1)x - x - (a-1)x^2 - 1 + x^a = (a-1)(x-x^2) + x(x^{a-1}-1) = (a-1)(x-x^2) + x((1-(x-1))^{a-1}-1) \overset{(BN)}{>} (a-1)(x-x^2) + x(1+(a-1)(x-1)-1) = 0.$

Pro $x>1$ položíme $t=\frac{1}{x}$, pak $t \in (0,1)$ a využijeme dokázanou nerovnost:
$\frac{1-x^a}{1-x} = \frac{1-\left(\frac{1}{t}\right)^a}{1-\frac{1}{t}} = t^{1-a}\frac{t^a-1}{t-1} < t^{1-a}(1+t)^{a-1} = \left(1+\frac{1}{t}\right)^{a-1} = (1+x)^{a-1}$.

Závěr

Příklady použité v tomto textu se již vyskytly v některé národní či mezinárodní matematické olympiádě. Věřím, že budou dobrou přípravou našim talentovaným matematikům. Některá řešení jsou originální a nejsou přejatá z dostupné literatury. Přeji čtenářům, aby se jim dařilo nacházet ještě jednodušší a elegantnější řešení.

Použitá literatura

Alois Kufner : Nerovnosti a odhady, Škola mladých matematiků(39), Nakladatelství Mladá Fronta, Praha 1975
František Veselý: O nerovnostech a nerovnicích, Škola mladých matematiků(48), Nakladatelství Mladá Fronta, Praha 1982
Konjagin, Tonojan, Šarigin, a jiní: Zaruběžnye matematičeskie olimpiady, M. Nauka, Hlavní redakce fiz.-mat. literatury, 1987

Kontakt na autora

RNDr. Petr Tomiczek CSc.
Západočeská univerzita v Plzni
tomiczek@kma.zcu.cz