



INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

**Podpora talentovaných žáků v Plzeňském kraji
Reg. č. CZ.1.07/1.2.03/02.0001**

SBORNÍK

**ODBORNÝ KEMP
PŘÍRODOVĚDNÝCH OBORŮ**

23.-27. SRPNA 2010

Tento projekt je spolufinancován z prostředků ESF a státního rozpočtu České republiky.

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Obsah:

Biologie

Michal Mergl, Invazní druhy měkkýšů v Plzni	3
Jindřich Duras, Rybníky – zajímavé vodní ekosystémy: kvalita vody, potravní řetězec a biomanipulace	9
Tomáš Č. Kučera, Botanická exkurze – botanické mikroskopické praktikum	17
Petra Vágnerová, Algologická pozorování	21

Chemie

Jitka Štrofová, Atraktivní experimenty	23
Vladimír Nápravník, Důkazové reakce v biochemii	26
Milan Kraitr, Vladimír Sirotek, Z historie výroby kyseliny sírové v Čechách	28
Jan Hrdlička, Titrační stanovení v analytické chemii	30
Vladimír Sirotek, Jan Hrdlička, Vladimír Nápravník, Jitka Štrofová, Instrumentální metody v chemické laboratoři	33

Fyzika

Lumír Honzík, Kosmický výzkum a jeho praktické využití.....	38
Lumír Honzík, Základní orientace na noční obloze	41
Lumír Honzík, Jak ovlivňuje Slunce planetu Zemi	44
Lumír Honzík, Zatmění Slunce a Měsíce, fáze Měsíce	47
Petr Mazanec, Řešení obtížnějších úloh z mechaniky	51
Petr Mazanec, Řešení obtížnějších úloh z termiky	55
Miroslav Randa, Černá díra a skrytá hmoty v naší galaxii	59
Miroslav Randa, Řešení obtížnějších úloh-Keplerovy zákony	61
Miroslav Randa, Newtonův gravitační zákon, Keplerovy zákony	62
Miroslav Randa, Pohybové rovnice a jejich využití při řešení úloh	63
Ondřej Trnka, Velké světové a robotické dalekohledy	64
Irena Vlachyňská, Experimenty s magnety	69
Václav Havel, Supravodivost a její využití	73
Josef Jíra, Libor Šmíd, Základy astronomické fotografie	75
Zdeňka Kielbusová, Zajímavé experimenty s kamerou obscurou	78
Zdeňka Kielbusová, Zajímavé experimenty s plyny	81
Robert Kunesch, Teorie barevného vidění a využití v praxi	88
Robert Kunesch, Základy fyzikálních měření	91
Pavel Masopust, Zajímavé experimenty	93
Pavel Masopust, Levitace a létání s fyzikou	98
Marek Česal, Tomáš Meiser, Astronomické pokusy	101
Josef Petřík, Fyzikální děje v klasických hudebních nástrojích	103
Jitka Prokšová, Maticová optika	106
Jitka Prokšová, Řešení složitějších úloh z optiky	108
Jitka Prokšová, Zajímavé jevy vlnové optiky	110
Karel Rauner, Praktická fyzikální měření	112
Karel Rauner, Fyzika v pohádkách	114
Jakub Schwarzmeier, Srážky galaxií	117

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Veronika Nováková, Jaromíra Sudová Šimlová, Nové technologie-výzkumné centrum-jeho kapacita a orientace	119
Jakub Toman, Výzkum Slunce pomocí nejnovější sondy SDO	122
Martin Tomáš, Základní vlastnosti dielektrik, termodielektrický jev	124
Josef Veselý, Řešení obtížnějších úloh z mechaniky I.	126
Josef Veselý, Řešení obtížnějších úloh z mechaniky II.	129

Matematika

Petr Zrostlík, Důkazové úlohy.....	130
Petr Zrostlík, Geometrie v pohybu.....	132
Petr Zrostlík, Komplexní číslo-zavedení, transformace.....	135
Petr Zrostlík, Planimetrie.....	138
Petr Zrostlík, Řešení komplexních úloh	140
Petr Zrostlík, Dynamika v Cabri geometrii	143
Jaroslav Hora, O rozkladech polynomů v součty čtverců (+17.Hilbertův problém)	145
Jaroslav Hora, O rozkladech polynomů s celočíselnými koeficienty	149
Jaroslav Hora, Klasické a moderní metody pro faktorizaci přirozených čísel	152
Josef Kubeš, Netradiční řešení rovnic	158
Josef Kubeš, Rovnice vyšších řádů, numerické řešení rovnic	160
Josef Kubeš, Úvod do fraktální geometrie	162
Josef Kubeš, Důkazové techniky-nerovnosti, celá část čísla	164
Josef Kubeš, Důkazové techniky-planimetrie	167
Josef Křišťan, Geometrie a komplexní číslo	169
Naděžda Kubešová, Exkurze do Českého hydrometeorologického ústavu v Praze-Komořanech	177
Petr Tomiczek, Báječná čísla	179
Světlana Tomiczková, Malá výprava za perspektivou aneb zobrazování světla ve světle geometrických zákonitostí	183
Jiří Potůček, Počátky vědecké matematiky v antických řeckých matematických a filozofických školách	188
Jiří Potůček, Od prehistorie kvantitativního záznamu k počítání v tzv. vodních říších	190

Programování

Václav Kohout, Algoritmizace úloh-rekurzivní algoritmy.....	193
Václav Kohout, Algoritmizace úloh-základy algoritmizace úloh.....	197
Václav Kohout, Algoritmizace úloh-výkonnost algoritmů.....	201
Václav Kohout, Algoritmizace úloh-časová náročnost algoritmů	204
Václav Kohout, Algoritmy užívané v teorii grafů-stromy a kostry, nejkratší cesta	207
Václav Kohout, Algoritmy užívané v teorii grafů-teoretický úvod	210
Václav Kohout, Algoritmy užívané v teorii grafů-prohledávání grafů do šířky	214
Václav Kohout, Algoritmy užívané v teorii grafů-prohledávání grafů do hloubky	217
Václav Kohout, Algoritmy užívané v teorii grafů-backtracking	219
Václav Kohout, Algoritmy numerické matematiky-Gaussův algoritmus	221
Václav Kohout, Algoritmy numerické matematiky-Hornerovo schéma	224
Václav Kohout, Algoritmy numerické matematiky-náhrada funkce speciálním polynomem	227
Václav Kohout, Algoritmy numerické matematiky-nulové body funkce, polynomu	230

ODBORNÝ KEMP PŘÍRODOVĚDNÝCH OBORŮ BIOLOGIE

INVAZNÍ DRUHY MĚKKÝŠŮ V PLZNI

Michal MERGL

1 Úvod

Z území České republiky je v současné době uváděno celkem druhů 245 druhů měkkýšů, z toho 217 plžů a 28 mlžů. Většina těchto druhů je suchozemských, jen z menší části patří i druhům vodním. Řadu druhů měkkýšů je na ústupu, některé druhy patří mezi kriticky ohrožené. Mnohé druhy jsou svým výskytem omezeny na zachovalé lesní biotopy, které jsou plošně velmi omezeny. Fragmentizace krajiny spolu s ústupem původních lesních společenstev a odstraňováním dřevní hmoty z lesů vedlo již od doby bronzové k ústupu citlivých lesních druhů. Výsadba jehličnanových monokultur v 19. století dále vedla k drastickému snížení diverzity lesní malakofauny. Podobně negativní dopady mělo vysušování mokřadů a zasypávání říčních ramen. Na straně druhé, budování rybníků a vznik tzv. kulturní stepi vytvořil podmínky pro existenci a rozšiřování druhů, která by v původní krajině měly jen omezený počet stanovišť.

Na rozdíl od mnoha jiných skupin živočichů, měkkýši nám poskytují dostatek záznamů svém vývoji na našem území v průběhu kvartéru. Jsou totiž velmi citliví na výkyvy mikroklimatu (teploty a vlhkosti) a na změny ve složení rostlinného pokryvu. Dnes máme již velmi podrobné doklady o změnách ve složení malakocenóz (Ložek 2007); velmi pěkně dokumentují klimatické výkyvy v dobách ledových (glaciálech) a teplejších období mezi nimi (interglaciálech). Vliv člověka po ústupu poslední doby ledové je však přinesl novinky na naše území. Pasterectví spojené s odlesňováním krajiny přineslo poprvé na naše území některé původně středomořské helicidní plže, např. suchomilku *Xerolenta obvia*. Jiné středomořské druhy (tmavoretky *Monacha cartusiana*) se na našem území nikdy, ani v teplejších meziledových obdobích nevyskytovaly, a expandují až nyní. Podobně chemické změny ve složení mokřadů, především postupný zánik vápnatých slatin, vedl k ústupu a vymizení některých druhů (např. oblovky *Cochlicella nitens*). Vymizení některých stepních prvků nepochybně souvisí se směnami v zemědělském obhospodařování krajiny. Moderní pohledy na změny ve vývoji kvartérní krajiny přinesl v desítkách prací zejména Vojen Ložek, který tuto tematiku shrnul zcela nedávno (Ložek 2007). Nejdramatičtější změny však přinesla až poslední desetiletí. Expanze silniční dopravy, lodní doprava mezi kontinenty a vznik řady umělých nádrží umožnil expanzi druhů v Evropě nepůvodních nebo dříve omezených na malá území (Ložek 2004).

2 Nepůvodní druhy měkkýšů

Juříčková et al. (2007) uvádí v seznamu celkem 26 nepůvodních druhů měkkýšů (22 plžů a 4 druhy mlžů) na našem území. Některé jsou svým výskytem omezeny na skleníky nebo oteplené vody. Jiné se pozvolna ale i rychle šíří českou krajinou. K takovým rychle se šířícím expanzním druhům na Plzeňsku patří především čtyři druhy: písečník novozélandský

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

(*Potamopyrgus jenkinsi*), levatka ostrá (*Physella acuta*), plzák španělský (*Arion lusitanicus*), a tmavorečka bělavá (*Monacha cartusiana*).

2.1 Písečník novozélandský - *Potamopyrgus antipodarum* (Gray, 1843)

Čeleď: Hydrobiidae – praménkovití.

Popis: Drobný předožábřý plž s relativně silnostěnnou kuželovitou ulitou a špičatým vrcholem. Povrch ulity je hladký, ulita je zbarvená rohově, většinou však bývá tmavě hnědá od nárůstů řas. Víčko je drobné, rohově zbarvené, u lezoucího jedince nesené za ulitou na hřbetní straně nohy. Výška ulity dosahuje maximálně 6,5 mm, většinou je menší. Roste rychlostí 0,1 mm za den, pohlavní dospělosti dosahuje při 3 mm velikosti.

Biologie: Druh se živí nárůsty řas (zejména rozsivek) a pravděpodobně i detritem na písčitém a štěrkopísčitém dně. Druh je živorodý, rozmnožuje se nepohlavně (partenogeneticky). Délka života se pohybuje okolo 6 měsíců. Samička je schopná родit 2-3 mláďata každý den, v průběhu života dá život asi 30 mláďatům. Mláďata jsou dospělá a schopna mít potomky po třech měsících. Populace jsou velmi početné. Partenogenetické rozmnožování tohoto druhu vytváří velmi husté populace: běžná hustota je 100 tis. jedinců na m², ale známo je až 750 tis. jedinců na m². Za příhodných podmínek může vytvářet až 95% celkové biomasy bezobratlých na dně vodní nádrže. Je schopen přežívat vyschnutí a výkyvy teplot. Snáší i mírně slané vody (toleruje až 17-24% salinitu). Vlivem malé velikosti se snadno šíří do nejrůznějších vodních ploch. Může být v říčkách, jezerech, rybnících, přehradních nádržích a estuariích. Jeho namnožení může silně ovlivnit početnost a diverzitu larev vodního hmyzu. Přenos jedinců z nádrže do nádrže se děje s lodní dopravou, bahnem (např. v obuvi), předpokládá se i přenos na peří vodních ptáků.

Výskyt ve světě: Druh je na našem území nepůvodní. Předpokládá se, že byl okolo roku 1850 zavlečen lodní dopravou z Nového Zélandu do Anglie. Poprvé byl z Anglie popsán v roce 1889. Odtud se začal šířit nejprve do brakických vod Velké Británie, Nizozemí, Belgie a Francie a později s vnitrozemskou lodní dopravou i do nitra kontinentální Evropy. Dnes je běžným druhem v celé Evropě (v Norsku, Ukrajině i Španělsku), šíří se v Severní Americe i Austrálii. V Evropě se rozlišují tři genotypy (Euro A: vody kontinentální Evropy; Euro B: Baltické moře; Euro C: Velká Británie). Patří do první stovky nejnebezpečnějších invazních druhů ve světě.

Výskyt v ČR: Druh byl z našeho území popsán v roce 1981. Byl nalezen v bahně dnes již zaniklého Dřínovského jezera u Komořan (Kuchař 1981). V současnosti je znám z mnoha míst v České republice (Beran 1998a, Karasová 1999). Usídluje především opuštěné zatopené pískovny, regulační nádrže, ostavená říční ramena, přehradní nádrže a jezera (Beran 1998b). Na Slovensku jej zaznamenal Čejka (1995) v povodí Dunaje.

Výskyt na Plzeňsku: V okolí Plzně byl poprvé zaznamenán v roce 2005 v Velkém Boleveckém rybníce a později i při ústí Vejprnického potoka. Dá se předpokládat jeho další šíření v Čechách i v okolí Plzně.

2.2 Levatka ostrá - *Physella acuta* (Draparnaud, 1805)

Čeleď: Physidae - levatkovití

Popis: Drobný plž s tenkou levotočivou ulitou a výrazně špičatým kotoučem. Povrch ulity je lesklý, stěna ulity je průsvitná. Barva je žlutavá, s bělavým návalkem na vnitřní straně ústí. Výška ulity dosahuje až 14 mm. Tělo je štíhlé, šedo-zelené, s skvrnami, které prosvítají skrze stěny ulity. Na hlavě jsou dlouhá nitkovitá tykadla vyčníhající za drobnými očima. Plášť je vytažen v podobě klop na povrch ulity.

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Biologie: Druh se živí rostlinnou i živočišnou potravou, zejména nárůsty řas, odumřelými částmi rostlin a rozkládajícími se těly uhynulých živočichů. Je hermafroditem. Vajíčka snáší v rosolovitých obalech ze 7 až 50 vajíček na různé povrchy. Dokáže přežívat extrémní výkyvy teplot, např. bývá v chladicích vodách elektráren.

Výskyt ve světě: Druh byl dlouho považován za původní ve Středomoří. Pravděpodobnější však je, že je totožný s druhem označovaným jako *Physella heterostropha* ze Severní Ameriky. *Physella acuta* je tedy původem druh severoamerický, který byl nejprve zavlečen do Středomoří a až odtud se začal šířit dále do Evropy. V Polsku je běžným druhem a první výskyty byly zaznamenány v roce 2007 i dále ve východně ležícím Bělorusku. Ve Velké Británii je znám jen v jižní a střední části Anglie.

Výskyt v ČR: V Čechách byl tento nepůvodní druh vzácně nalézán od počátku 20. století. Dnes patří k převažujícímu druhu v zatopených pískovnách, ve kterých je doprovázen dalšími nepůvodními druhy (Beran 1998).

Výskyt na Plzeňsku: Druh je na Plzeňsku velmi hojný na vodních stanovištích. Vyskytuje se téměř ve všech rybnících Bolevecké rybniční soustavy, kde je dominantním druhem na ponořených předmětech (kmenech, větvích, kamenech). Je rovněž hojný z betonových koupalištích (např. Losiná, Čížice, Letkov), přítomen je i v zatopených pískovnách v meandru Berounky u Chlumku. Je možno ho nalézt i v proudících vodách (Úslava).

2.3 Plzák španělský - *Arion lusitanicus* (Mabille 1868)

Čeleď: Arionidae - plzákovití

Popis: Tzv. „nahý“ plž bez ulity, s protaženým 8-15 cm dlouhým tělem. Barva těla je proměnlivá, hnědočervená až hnědooranžová; může být i sytě hnědá. Nikdy není sytě oranžová jako má původní a většinou větší lesní druh plzák lesní (*Arion rufus* (Linnaeus, 1758)). Okraje nohy jsou výrazně oranžové u většiny jedinců. Zbarvení mladých jedinců je odlišné; jsou žlutohnědí, s žlutými pásy nad tmavými pásy po stranách nohy. Přední část hlavy a tykadla u dospělých jedinců jsou tmavé, někdy až černá.

Štít leží v přední třetině těla, dýchací otvor je přibližně v polovině délky štítu. Zadní část nohy je v průřezu oblá. Povrch nohy je hustě zbrázděný. Sliz je vazký; plž za sebou zanechává zřetelnou stopu.

Biologie. Druh je hermafroditický. Je schopen rychlého přemnožení. Vajíčka klade do skrytých vlhkých prostor (pod ležící dřevo). Během života vyprodukuje asi 400 vajíček, která jsou ve snůškách po 20-30. Po 3,5 – 5 týdnech se líhnou mladí jedinci. Dožívá se jen jednoho roku. V našich podmínkách není dospělec schopen přežít zimu, pokud není schován ve vyhříváném prostředí (např. u skleníků).

Plži je aktivní s rozbřeskem nebo za deště, před den jsou skryti v zastíněných místech. Je významným škůdcem, v současnosti neškodlivějším plžem na našem území. Škodí okusem na zelenině a pěstovaných rostlinách. V potravě je nenáročný, dokáže spást i silně aromatické nebo jedovaté rostliny (aksamitníky, lilkovité rostliny), je vážným škůdcem na jahodách. V případě větších pozemků je vážné poškození omezeno na 2- 3 m široký pruh, dále do pozemků škody klesají.

K jeho predátorům patří ježci, vrány, krkavci a snad i menší kunovité šelmy. Je napadán i kosem. Je však tužší a produkuje více slizu nežli *A. rufus*, což jej činí hůře požitelným. Častý je kanibalismus na jiných odumřelých jedincích. Při manipulaci s ním je potřeba opatrnosti, protože jeho sliz může být zdrojem infekce (obsahuje koliformní bakterie, především *Escherichia coli*)

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Druh obývá kulturní krajinu (okraje polí, zahrady, ruderální porosty), koseným loukám a lesu se víceméně vyhýbá.

Výskyt ve světě: Druh má původní areál výskytu v jižní Evropě na západě pyrenejského poloostrova (v severním Španělsku a přilehlé části Francie). Odtud se začal nekontrolovaně šířit do centrální a severní Evropy ke konci sedmdesátých let 20. století. V roce 1975 byl zaznamenán jeho výskyt ve Švédsku, v roce 1987 v Polsku, 1988 v Norsku, 1990 ve Finsku, 1991 v Dánsku. V letech 2003 a 2004 byl dokonce objeven na Islandu. Jeho expanze je vysvětlitelná transportem vajíček v zemině do nových lokalit (např. v květináčích okrasných rostlin), předpokládá se i přímý transport zejména mladých jedinců se zeleninou nebo přímo na dopravních prostředcích. Se zbožím byl zavlečen do všech evropských zemí včetně Islandu, dokonce byl zavlečen i na Falklandské ostrovy v jižním Atlantiku.

Ochrana spočívá ve vysbírávání jedinců, zejména dospělců, likvidování snůšek vajíček. Vhodné se ukázaly pastě (položená prkna na trávě) pod kterými se plži schovávají přes den a kde bývají snůšky vajíček. Chemická likvidace je problematictější. Biologická ochrana proti tomuto druhu spočívá v postřicích s parazitickou hlísticí *Phasmarhabditis hermaphroditina*. Bohužel tato hlístice napadá i původní druhy plžů a proto její použití je problematické.

Lesní krajině se povětšinou vyhýbá i když nepochybně zatlačuje původní velké druhy plžáků. Druh je klasickým příkladem invazního druhu, jehož expanze byla způsobena člověkem. Předpokládá se, že na rychlé expanzi i do chladných částí Evropy se podílí i křížení (hybridizace) s původním druhem *Arion ater*, který je původní v západní a střední Evropě, a která způsobila, že druh je schopen přežít i relativně mrazivé zimy a expandovat dále Evropou.

Výskyt v ČR: Na našem území byl druh zaznamenán poprvé na Plzeňsku v roce 1994 (Juříčková 1995). Od této doby se masově šíří a dnes patří k nejhojnějším a nejškodlivějším druhům plžů v kulturní krajině, zahradách, v ruderální vegetaci v okolí měst. Bývá přítomen i ve sklenících a okrasných zahrádkách.

Výskyt na Plzeňsku: Druh je velmi hojný v nivách podél plzeňských řek, při okrajích sídlišť, v zahrádkářských koloniích, v parcích a okolí Boleveckých rybníků. V lesních kulturách prozatím chybí.

2.4 Tmavorečka bělavá – *Monacha cartusiana* (O.F. Müller, 1774)

Čeleď: Hygromiidae - vlahovkovití

Popis: Suchozemský plž, s relativně tenkostěnnou ploše kuželovitou ulitou, nápadně úzkou píštělí. Poslední závit převažuje. Obústí je jen mírně rozšířené a slabě směřuje dolů. Ulita je slabě prosvítavá, barvu světle rohové, s bělavým pruhem na vnitřní straně závitů. S názvem druhu kontrastuje tmavý okraj obústí, který je na vnitřní straně lemovým světlejším pyskem. Povrch ulity je hladký. Ulita dosahuje běžně velikosti 9 mm, jako maximum se udává až 16 mm. Samotné tělo plže je šedožluté, slabě prosvítavé, s tmavými tykadly přecházejícími to postupně mizících tmavých pásek za tykaly na noze. Plášť je skvrnitý a u živých jedinců prosvítá přes stěnu ulity.

Biologie: Druh obývá nivní louky, úpatí křovinatých strání a okraje lužních hájů. Dožívají se většinou jen jednoho roku, výjimečně žijí dva roky.

Výskyt ve světě: Druh je ve střední Evropě nepůvodní. Centrum rozšíření má ve Středozemí, kde je rozšířen po celém evropském pobřeží. Znám je také z jihu Velké Británie, Belgie, Holandska. V průběhu 20. století dochází k expanzi tohoto druhu. Jeho výskytu jsou známy z Rakouska, Německa, Slovenka a Polska. Na expanzi se pravděpodobně podílí

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

doprava a převoz zeleniny, ovoce a hrnkových rostlin. Z těchto dálkových výsadků dochází k rychlé expanzi druhu do okolí, která však, pokud nejsou příznivé podmínky, ustává a druh na takovém místě zase rychle vymizí.

Výskyt v ČR: V České republice je výskyt tohoto druhu znám ze středních a západních Čech. První výskyt uvádí již v roce Petrbok již v roce 1937. Další nález u Chlumce nad Cidlinou byl až v roce 1970. Do té doby byl druh znám z populací jen na jižní Moravě a v Podunají. Počet nálezů se začal zvyšovat v devadesátých letech 20. století. Pozornost upoutala práce Koloucha (1996) o silné populaci na Královohradecku. Další nálezy pochází z Českého krasu (Ložek 1999) a počet lokalit začal prudce narůstat po roce 2000: tmavorečka byla zjištěna na řadě lokalit v okolí Prahy, na Berounsku, Plzeňsku a v jižních Čechách (Pech a Pechová 2009). V okolí Berouna a v Prokopském údolí u Prahy patřil v letech 2005-2006 k nejhojnějším druhům plžům.

Výskyt na Plzeňsku: Na Plzeňsku byl zaznamenán v roce 2000 přímo v centru Plzně, kde byly zjištěny jeho prázdné ulity na místě později vystavěného Kauflandu. Mnohem početnější populace prosperovala okolo roku 2005 v opuštěné pískovně u Chlumku v Plzni-Bukovci. Na tento druh lze narazit na různých ruderalních stanovištích, populace se však neudrží dlouhodobě a za několik let obvykle mizí.

3 Závěr

Kulturní krajina plzeňské kotliny hostí, stejně jako další místa v České republice, kromě běžných původních druhů měkkýšů i nové přistěhovalce: invazní druhy. Tyto druhy se rychle šíří z bodových výskytů, které vznikly dálkovými výsadky na peří ptáků, dopravou, transportem zboží či jiným způsobem. Sledování výskytu a expanze těchto druhů může mít velký dokladový význam pro budoucí analýzy šíření nepůvodních druhů (rostlin a živočichů) českou krajinou. Některé výsadky jsou jen dočasné a jejich lokální populace mohou rychle mizet, ale mohou se stát i novými centry šíření těchto druhů po České republice.

4 Použitá literatura

- BERAN, L. Pískovny v Polabí a měkkýši. Ochrana přírody, 1998a. roč. 53, č. 5, s. 148-149.
- BERAN, L. Vodní měkkýši ČR. - Metodika ČSOP č. 17, 1998b, 113 s. ISBN 80-902469-4-X.
- ČEJKA, T. Prvé nálezy novozélandského ulitníka v slovenskom úseku Dunaja. Živa, 1995, roč. 43, č. 1, s. 30.
- JUŘIČKOVÁ, L. Škůdci mezi měkkýši - plzák *Arion lusitanicus* v ČR. Živa, 1995, roč. 43, č. 1, s. 30.
- JUŘIČKOVÁ, L., HORSÁK, M., BERAN, L., DVOŘÁK, L. Check-list of the molluscs (Mollusca) of the Czech Republic. 2007. Dostupné na internetu <<http://mollusca.sav.sk/malacology/checklist.htm>>
- KARASOVÁ, H. Měkkýši povodí řeky Chomutovky. Sborník Okresního muzea v Mostě, řada přírodovědná, 1999, roč. 20/21, s. 5-21.
- KOLOUCH, L. Hojný výskyt plže tmavorečky bělavé. Živa, roč. 44, č. 3, s. 126-127.
- KUCHAŘ, P. *Potamopyrgus jenkinsi* poprvé v Českoslovenku. Živa, 1983, roč. 31 č. 1, s. 23.
- LOŽEK, V. Jihoevropský plž *Monacha cartusiana* v Českém krasu. Živa, 1999, roč. 47, č. 4, s. 175.
- LOŽEK, V. Vetřelci o jedné noze. Vesmír, 2004, roč. 83, č.10, s. 558-561.



INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

LOŽEK, V. Zrcadlo minulosti. Česká a slovenská krajina v kvartéru. Dokořán. 198 s. ISBN 978-80-7363-095-9.

PECH, P., PECHOVÁ, H. *Monacha cartusiana* (Gastropoda: Hygromiidae) in South Bohemia. *Malacologica Bohemoslovaca*, 2009, r. 8, s. 28.

5 Kontakt na autora

Doc. RNDr. Michal Mergl, CSc.

Katedra biologie

Fakulta Pedagogická

Západočeská univerzita v Plzni

Klatovská 51

306 19 PLZEŇ

mmergl@kbi.zcu.cz

ODBORNÝ KEMP PŘÍRODOVĚDNÝCH OBORŮ BIOLOGIE

BIOLOGIE

RYBNÍKY – ZAJÍMAVÉ VODNÍ EKOSYSTÉMY: KVALITA VODY, POTRAVNÍ ŘETĚZCE A BIOMANIPULACE

Jindřich DURAS

1 Úvod

V České republice se můžeme setkat vzácně s jezery vzniklými přírodní cestou (ledovcová a rašelinná jezera) a celkem běžně s jezery vytvořenými člověkem, tedy s přehradními nádržemi a rybníky. Rybníky v našich krajích zastupují ekosystémy mělkých jezer, jak je známe například ze severní Evropy či Severní Ameriky.

Hlavní faktory řídící kvalitu vody v rybnících jsou dva: (i) vstup znečištění venčí a (ii) procesy uvnitř rybničního ekosystému.

- Vstup znečištění do rybníků, který se u nás uplatňuje nejvíce, jsou špatně vyčištěné odpadní vody z měst a obcí, případně např. z velkochovů prasat či potravinářského průmyslu. Za znečišťování ovšem můžeme považovat i krmení a hnojení rybníků při intenzivním chovu ryb.
- Uvnitř rybničního ekosystému se uplatňuje zejména sediment (bahno), plankton, rybí obsádka a vodní vegetace. Sediment je obrovská zásobárna, která uvolňuje nebo odebírá živiny planktonu, plankton je konzumován rybami, které ale svým vylučováním (trus, exkrementy) zase vodu o živiny obohacují (tím podporují růst planktonu). Vodní rostliny fosfor neuvolňují, ale naopak jej pohlcují. Také skrývají zooplankton před rybami a poskytují útočiště dravcům (štiky, okouni), kteří likvidují běžné planktonožravé ryby jako je plotice, perlín, ouklej, cejn a další. Vidíme tedy, že rybí obsádka svým působením zvyšuje úživnost rybníka, zatímco rostliny působí opačně a úživnost rybníka snižují. Podle toho, jak rybník (mělké jezero) funguje, lze rozlišit dva základní vyhraněné typy ekosystému:
 - ~ Pelagický typ (pelagiál je tzv. „volná voda“), kde dominují planktonožravé ryby a rostliny chybí. Voda je bohatá živinami, zakalená rozvojem planktonních řas a sinic, ke koupání se nehodí, je to znehodnocený ekosystém s nízkou ekologickou hodnotou.
 - ~ Litorální typ (litorál je „příbřeží“), kde důležitou roli hrají vodní rostliny (zejména ponořené) a kde rybí obsádka je řídká s vysokým podílem dravců. Voda je průhledná s minimálním množstvím řas a sinic. Je to původní a přirozený stav mělkých jezer s vysokou ekologickou hodnotou a s výbornými podmínkami pro rekreaci.

V dalším textu se budeme zabývat výhradně živinami, neboť živiny mají pro fungování vodních ekosystémů zásadní význam. Klíčovou živinou v našich podmínkách je v naprosté většině případů fosfor – jeho nedostatek omezuje rozvoj planktonu i na něm potravně závislých článků, tedy i ryb. Dusík je u nás obvykle ve vodách zastoupen v nadbytku, takže

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

rozvoj vodních společenstev neomezuje. Fosfor můžeme přirovnat k penězům vodního ekosystému, protože je to prvek, který spolu směřují všechny jeho články: bahno, plankton, bakterie, vodní rostliny, ryby, organismy žijící na dně (bentos). V zásadě platí, že čím více je ve vodě k dispozici fosforu, tím je rybník úživnější – obsahuje více planktonu, uživí více ryb. To ale zároveň znamená, že voda v něm bude zakalená rytím ryb (kapr, cejn) a vegetačním zákalem (husté populace zelených řas, rozsivek...) a také že bude docházet k masovému rozvoji sinic (viz pelagický typ ekosystému). Sinice jsou známé vytvářením jedovatých látek a hráškově zelených hladinových povlaků (vodní květy), takže jimi hustě osídlená voda není vhodná ke koupání, ale snižuje i rekreační hodnotu lokality pro turisty, cyklisty a další návštěvníky. Můžeme říci, že čím více bude ve vodě fosforu, tím intenzivnější bude rozvoj sinic a tím horší bude kvalita vody.

V poslední době stoupá poptávka po čisté vodě ke koupání. Protože ale naprostá většina stojatých vod je u nás silně úživná, tedy se sinicemi, otevřel se prostor pro snahy zlepšit kvalitu vody. Bohužel ale zatímco zhoršit kvalitu vody v rybnících bylo snadné, zlepšit ji už tak jednoduché není. Uplatnit zde musíme postupy ekotechnologické a biomanipulaci.

- Ekotechnologie – technologické zásahy do vodního ekosystému s cílem zlepšení kvality vody; např. provzdušňování, těžba bahna, vypouštění vody ode dna, dávkování látek do vodního prostředí.
- Biomanipulace – zásah do potravních vztahů (trofický řetězec) s cílem ovlivnit charakter vodního ekosystému; např. vysazení býložravého amura k potlačení vodní vegetace nebo naopak odstranění amura, aby růst vodních rostlin byl podpořen.

2 Jednoduchá biomanipulace na příkladu městské nádrže Mlýnská strouha v Plzni

Jezírko Mlýnská strouha (2000 m²) bylo napuštěno v dubnu 2010, aby dotvářelo charakter parkové úpravy ve středu města Plzně. Požadavek na kvalitu vody byl zásadní – čistá voda působí psychologicky velmi příznivě, a tak výrazně zvyšuje atraktivitu území pro lidi. Úkol byl dosáhnout čisté vody pokud možno bez použití složitých technologií a chemických látek.

Mlýnská strouha je velmi zjednodušeným ekosystémem, a tak byla uplatněna biomanipulace tzv. „klasická“. Klasická biomanipulace využívá vztahu:

živiny (fosfor) ⇒ fytoplankton ⇒ filtrující zooplankton (perloočky) ⇒ planktonožravé ryby ⇒ dravé ryby

Uvedené schéma je typický příklad tzv. „bottom up“ (zdola) regulace. Omezením dostupnosti fosforu se zastaví růst fytoplanktonu, zooplankton strádá nedostatkem potravy a ani ryby pak nemají co žrát. Jinak řečeno: Množství fosforu určuje rozvoj řas, zooplanktonu i rybí obsádky.

V praxi ovšem působí v uvedeném schématu místo šipek jednosměrných (⇒) vždy šipky obousměrné (⇔), neboť ovlivňování je u všech článků tohoto potravního řetězce vzájemné. V praxi se setkáváme zejména s tím, že planktonožravé ryby se dokážou ve stojatých vodách rychle rozmnožit a zdecimovat svým predčním (vyžírácím) tlakem velké druhy zooplanktonu. Tím je ovšem zásadně oslaben i filtrační tlak zooplanktonu a dochází k rozvoji fytoplanktonu, který se rychle vymkne kontrole, zvláště když je podporován přísunem živin z exkrementů planktonožravých ryb. Pak lze ve vodě pozorovat hustý vegetační zákal: hnědý (rozsivky), zelený (zelené řasy).

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

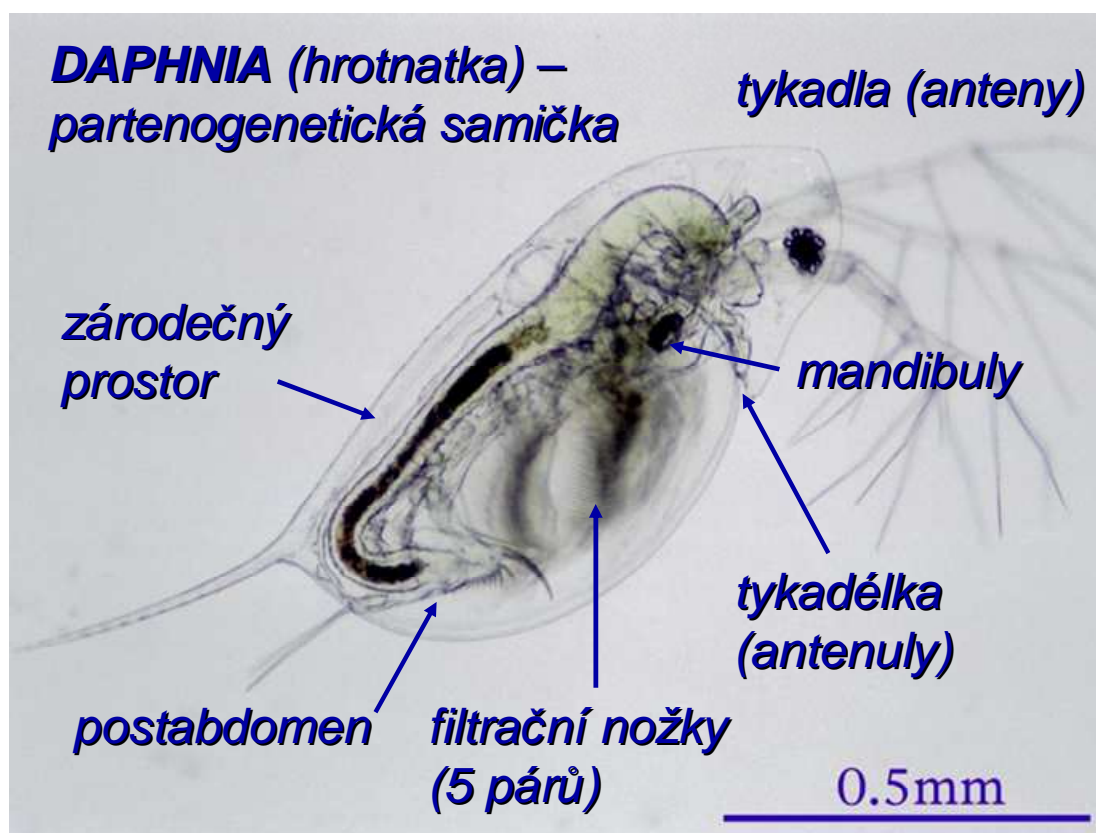
Cílem klasické biomanipulace je čirá voda bez fytoplanktonu, která je vhodná ke koupání či k vodárenskému využití. Zde využíváme ale opačného směru regulace, tzv. „top-down“ (shora):

živiny (fosfor) ⇔ fytoplankton ⇔ filtrující zooplankton (perloočky) ⇔ planktonožravé ryby ⇔ dravé ryby

V praxi se snažíme prostřednictvím vysazování dravců udržet na uzdě rozvoj planktonožravých ryb tak, aby byla umožněna existence bohatého velkého perloočkového zooplanktonu, který odfiltruje vegetační zákal a voda zůstane čirá.

V jezírku Mlýnská strouha dravé ryby sice nejsou, ale celá rybí obsádka je kontrolována člověkem. Bylo tedy vysazeno pouze 11 ks koi kapra a asi 10 ks zlatého jesena. Už měsíc před vysazením ryb byly vysazeny velké perloočky: hrotnatky *Daphnia pulicaria* a *Daphnia galeata*, aby stačily vytvořit hustou populaci dřív, než začnou být spotřebovávány rybami. Vodní rostliny mají v jezírku funkci spíše okrasnou, nicméně kořeny alespoň odčerpávají část živin. Sediment zatím není vytvořen, a tak situaci nijak nekomplikuje.

Mlýnská strouha je příkladem, jak vysoce může být biomanipulace účinná, a to i v jednoduché verzi: fytoplankton ⇔ perloočky ⇔ ryby. Voda v jezírku je trvale vysoce průhledná. Populace perlooček je sice hustá, ale není pouhým okem zřetelná, takže neruší vnímání průzračné vody. Hodnota tohoto umělého ekosystému může být sice mírně sporná, ovšem už teď je jezírko místem výskytu desítek druhů vodních živočichů, například jsou zde larvy vážek, pakomárů jepic, chrostíků... – a to je jistě obohacením biodiverzity parku.



Obr. 1.: Perloočka rodu hrotnatka (*Daphnia*), jako zástupce filtrujícího zooplanktonu.

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

V rámci exkurze byly demonstrovány:

- ~ Zelené vláknité řasy – jejich chomáče mají pozitivní vliv na kvalitu vody, protože odnímají z vody fosfor. Zároveň, pokud by se rozrostly příliš, jsou hrozbou pro estetické působení jezírka. V rámci mikroskopování byly pozorovány dva rody: spájivka *Spirogyra* a zelená vláknitá řasa *Cladophora*. Na vláknech *Cladophora* byly pozorovány bohaté nárosty rozsivek a také vlákna bakterií a sinic.
- ~ Perloočky rodu *Daphnia* – odlov planktonní sítí, v laboratoři stereomikroskop: pozorování základních částí těla (tykadla, tykadélka se smyslovými brvami, složené oko, střevo, srdce, 10 párů filtračních nožek), epizooticky žijící zelená řasa *Colacium*.
- ~ Máloštětinatý červ rodu *Stylaria* s typickým „chobotem“ na hlavovém konci těla.
- ~ Mechovka rodu *Plumatella* – mikrofiltrátor žijící v koloniích zvaných zoarium, pod stereomikroskopem jsou jasně patrná odolná rozmnožovací stádia, tzv. statoblasty.

3 Soustava boleveckých rybníků v Plzni – příklad různých zásahů do rybníčního ekosystému

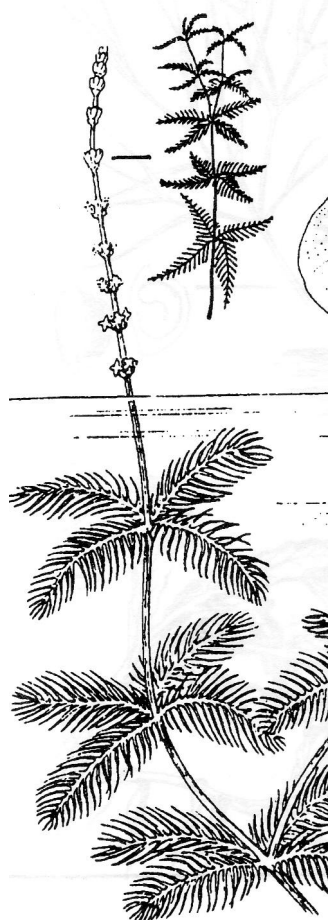
Bolevecká rybníční soustava na okraji Plzně byla vybudována už kolem roku 1450. Největší z rybníků se zachovaly dodnes, přičemž jejich hlavní účel se od ledování (těžba ledu pro pivovar) a chovu ryb posunul k rekreaci. Proto je zde kladen velký důraz na kvalitu vody, zejména na její průhlednost. Zároveň je třeba zachovat také ekologickou hodnotu celého území. Mapa je v příloze na konci tohoto článku.

3.1 Třemošenský rybník

Třemošenský rybník je dnes, po skončení intenzivního chovu kaprů, ve stavu typického litorálního ekosystému s řídkou rybí obsádkou (řídce okoun, perlín, lín a kapr), drženou na uzdě štikou a především sumcem. Bohaté jsou porosty ponořené vegetace, která se vyznačuje výraznou patrovitostí:

- ~ Úpor peprný (*Elatine hydropiper*) je drobná rostlinka porůstající kobercovitě dno, její porosty jsou vysoké 1-3 cm. Má velmi pozitivní vliv na kvalitu vody, protože vyrábí kyslík těsně u povrchu bahna, kde je ho obvykle nedostatek.
- ~ Bahnička jehlovitá (*Eleocharis acicularis*) dosahuje výšky 10-15 cm. Je velmi odolná a porůstá mělké plochy dna, zvláště tam, kde se dno při kolísání hladiny obnažuje. Doprovází úpor peprný.
- ~ Řasy parožnatky (*Nitella flexilis*) vytvářejí porosty vysoké 10-30 cm, produkují kyslík i ve velkých hloubkách, kde je nedostatek světla, protože jsou na nízké intenzity světla adaptovány. Účinně zachycují sedimentující částičky (odumřelý plankton) a zabraňují tak uvolňování fosforu zpět do vodního sloupce. Vyrábějí a uvolňují do vody dokonce chemické látky proti sinicím.
- ~ Rdest tupolistý (*Potamogeton obtusifolius*) roste do výšky až 60 cm, vytváří načechrané porosty, v nichž se daří např. škeblím. V ČR je tento druh zařazen na tzv. Červeném seznamu v kategorii ohrožených druhů.
- ~ Stolístek klasnatý (*Myriophyllum spicatum*) dokáže prorůst vodní sloupec až 5-7 m vysoký. To znamená, že za dostatku živin je tato rostlina schopna zarůst hustě celou mělkou vodní nádrž, tedy prakticky každý rybník. V Třemošenském rybníce čelí stolístek konkurenci všech druhů popsaných výše a navíc je jeho růst regulován mechanicky, viz dále. Pro kvalitu vody jsou důležité také nárosty na prýtech (řasy, bakterie, prvoci...), které odebírají živiny z vodního sloupce a konkurují tak fytoplanktonu – cílem je zabrzdit jeho růst, aby vodní rostliny nezastiňoval.

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ



Obr. 2: Stolístek klasnatý
(*Myriophyllum spicatum*)

Šídlovský rybník byl ve stavu podobném dnešnímu Třemošenskému rybníku už v letech 2007-2008, a to včetně plně rozvinuté patrovitosti ponořené vegetace s účastí úporu i parožnatek. Biomasa stolítku však nebyla nijak redukována, a tak tento druh ovládl téměř celý prostor rybníka – rostliny stolítku vytvořily hustě zapojené porosty větvením při hladině, zastínily tak nižší patra a vykonkurovaly ostatní druhy rostlin. Teprve od roku 2009 jsou porosty stolítku pravidelně koseny obdobně jako na rybníce Třemošenském. Absolutní dominance stolítku však přetrvává. Na jaře 2010 byli do Šídlovského rybníka vysazeni větší kapři (o kusové hmotnosti cca 3 kg) a také amur bílý (kusová hmotnost kolem 1 kg), poměrně početná populace perlína již byla přítomna. Násada kapra a amura byla zvolena střední, aby podpořila úsilí o omezování stolítku vodními kosami: kapr dokáže porosty rostlin rozrušovat rytím, amur žírem, zvýšený obsah živin ve vodě vylučováním ryb podpoří rozvoj fytoplanktonu a sníží dostupnost světla pro stolístek v hlubších partiích dna.

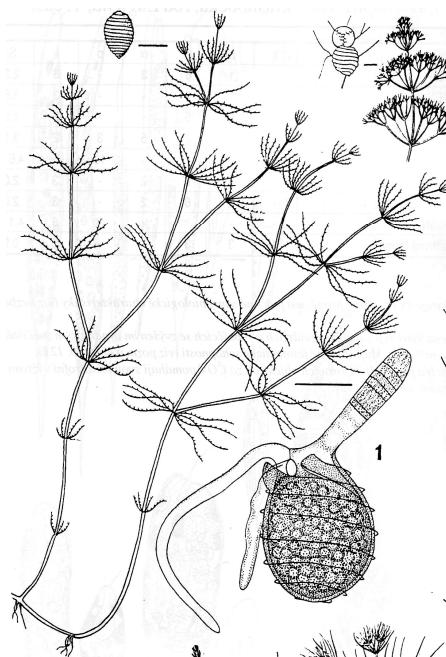
V době exkurze už se působení ryb zřetelně projevilo: voda byla částečně zakalená vegetačním zákalem, na hladině plavaly rostliny zničené kapry a amury. Přechodně se zhoršily podmínky pro rekreaci koupáním (snížená průhlednost vody), i když současná kvalita vody je stále přijatelným standardem pro obdobné lokality.

Na příkladu Šídlovského rybníka byl ukázán rozdíl mezi rybníkem téměř bez ryb (Třemošenský) s vysokou průhledností vody a rybníkem s hustší rybí obsádkou (Šídlovský), která jakost vody negativně ovlivňuje, i když může pomáhat s omezením vodních rostlin.

Přestože je Třemošenský rybník živinami velmi chudý, bylo nutné přikročit k omezování rozvoje vodních rostlin kosením vodními kosami. Vegetace je kosena ve hloubce 150-180 cm, rostliny vyplavou po odstřížení ke hladině (přítomnost vzduchu v aerenchymatickém pletivu je nadlehčuje), kde jsou shrabovány ke břehu a biomasa je následně kompostována. Protože je sklízen především stolístek, který prorůstá i vodu vysoko nade dnem, tedy v dosahu žacích lišt, předpokládá se, že takto pojatá údržba vodní vegetace pomůže zachovat její různorodost a ekologicky cenné patrovitě uspořádání. Toto uspořádání je optimální i pro kvalitu vody (voda je vysoce průhledná) – a tedy i pro rekreaci.

3.2. Šídlovský rybník

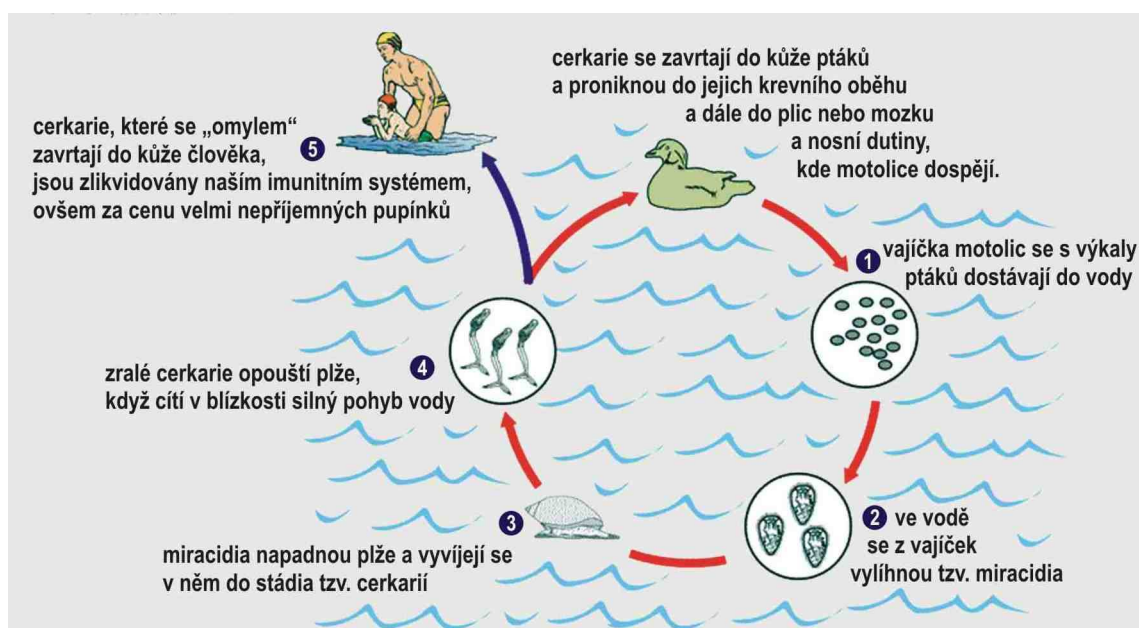
Šídlovský rybník byl ve stavu podobném dnešnímu Třemošenskému rybníku už v letech 2007-2008, a to včetně plně rozvinuté patrovitosti ponořené vegetace s účastí úporu i parožnatek. Biomasa stolítku však nebyla nijak redukována, a tak tento druh ovládl téměř celý prostor rybníka – rostliny stolítku vytvořily hustě zapojené porosty větvením při hladině, zastínily tak nižší patra a vykonkurovaly ostatní druhy rostlin. Teprve od roku 2009 jsou porosty stolítku pravidelně koseny obdobně jako na rybníce Třemošenském. Absolutní dominance stolítku však přetrvává. Na jaře 2010 byli do Šídlovského rybníka vysazeni větší kapři (o kusové hmotnosti cca 3 kg) a také amur bílý (kusová hmotnost kolem 1 kg), poměrně početná populace perlína již byla přítomna. Násada kapra a amura byla zvolena střední, aby podpořila úsilí o omezování stolítku vodními kosami: kapr dokáže porosty rostlin rozrušovat rytím, amur žírem, zvýšený obsah živin ve vodě vylučováním ryb podpoří rozvoj fytoplanktonu a sníží dostupnost světla pro stolístek v hlubších partiích dna.



Obr. 3: Parožnatka (*Nitella flexilis*)

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Byl také vysvětlen vztah mezi vodními vrubozobými ptáky (labuť, kachna) a tzv. cercariovou dermatitidou plavců: Trusem vodních ptáků se do vody dostávají vajíčka motolic, jež jako mezihostitele využívají vodní plže. Z plžů se pak uvolňují cercarie, které se chtějí dostat opět do svého hlavního hostitele, vrubozobých ptáků. Omylem se ovšem zavrtají i do kůže koupajících se lidí, kterým způsobují vytrvale svědivé pupínky (dermatitidu). Závěr: V lokalitách ke koupání se nesmí krmit vodní ptáci a vodní vegetace osídlená plži se musí omezovat.



Obr. 4: Schéma vývojového cyklu motolice ptačí.

3.3. Rybník Košinář

Rybník Košinář byl prvním z rybníků Bolevecké soustavy, na němž se začalo hospodařit s nízkými rybími obsádkami. Protože ale vodní rostliny nebyly nijak regulovány, zarostly celý rybník do té míry, že rekreace koupáním nebyla možná. Na jaře 2010 byli vysazeni obdobně jako v případě Šídlovského rybníka větší kapři a amuři, ovšem ve zhruba dvojnásobné hustotě. Cílem bylo nechat rybí obsádku zlikvidovat vodní vegetaci, po té ryby slovit a nadále se snažit vodní vegetaci regulovat mírnějšími prostředky (kosením).

V době exkurze byla voda v Košináři neprůhledná se zřetelným zákalem, který byl způsoben intenzivním rytím kaprů do dna rybníka – hladoví kapři si hledali potravu. Při pohledu ze břehu nebyla patrná ani žádná vodní vegetace, ačkoli ještě v jarních měsících zhruba polovina plochy rybníka byla zarostlá kvetoucími lakušníky (*Batrachium sp.*).

Na příkladu Košináře byl ukázán významný vliv rybí obsádky na vodní ekosystém – schopnost kaprů a amurů v krátké době zcela změnit podmínky v rybníce a zlikvidovat vodní vegetaci.

3.4. Velký a Malý bolevecký rybník

Na Velkém boleveckém rybníce (43 ha) probíhá od roku 2006 projekt na zlepšení kvality vody. Projekt je zaměřen na ovlivnění všech základních složek vodního ekosystému:

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

rybí obsádky, vodních rostlin a sedimentu. Cílem projektu bylo převést rybník z pelagického na litorální typ ekosystému (charakteristiky viz. kap. Úvod).

Rybí obsádka byla ovlivňována především hromadnými odlovy ryb (odloveno 80-90% nedravých ryb) a vysazováním dravců (štika, sumec, candát, bolen). Vodní rostliny, v rybníce dříve nepřítomné, byly vysazovány a pěstovány po dva roky v ohradách, aby byly chráněny před zničením rybami.

Sediment byl několikrát ošetřován chemicky (ekotechnologie), a to látkami (tzv. koagulanty) obsahujícími hliník, protože tento prvek pevně váže fosfor. Plankton včetně sinic tak získal silnou chemickou konkurenci v boji o fosfor – fosfor byl pevně zavázán v sedimentu a nebyl k dispozici pro rozvoj fytoplanktonu. Působení hliníku v sedimentu dokonce omezilo dostupnost živin i pro kořeny vodních rostlin. Stolístek, který hrozil zarůst celý rybník podobně jako v ostatních případech, výrazně zpomalil růst a v rostlinném společenstvu se v současnosti prosazují druhy čistomilnější, například vodní mor kanadský (*Elodea canadensis*).

V rámci exkurze byl ukázán rozdíl mezi Malým boleveckým rybníkem (bez dávkování chemických látek a s hustší rybí obsádkou, úživnější), kde byl patrný silný hnědý vegetační zákal, a Velkým boleveckým rybníkem s vodou průhlednou s namodralým nádechem. Velký Bolevecký rybník nikdy nemá hnědé vegetační zbarvení, a to pro nedostatek křemíku. Křemík je důležitý pro růst jednobuněčných řas rozsivek (*Bacillariophyceae*), které si budují křemité schránky – a také vytvářejí hnědé vegetační zákaly.

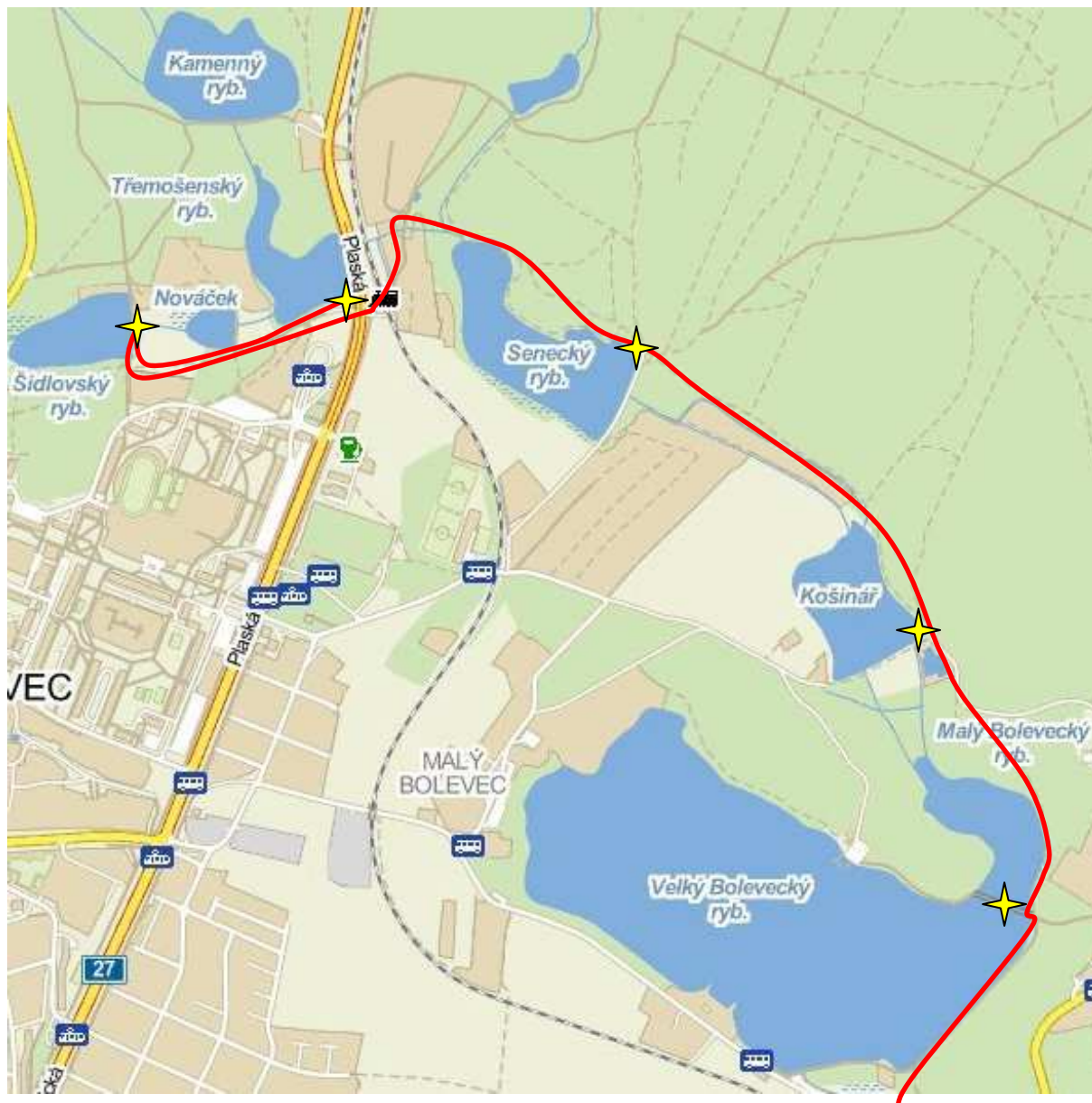
Na místě byly z Malého boleveckého rybníka odebrány planktonní sítě vzorky síťového planktonu a také vzorky hnědého nárostu z kamenů. Při mikroskopování byly dominantami síťového planktonu obrněnky trojrožec (rod *Ceratium*) a rod *Peridinium*. Nárosty byly tvořeny hustým společenstvem rozsivek přichyceným na kostře ze zelených vláknitých řas.

Z Velkého boleveckého rybníka byl den před exkurzí odebrán vzorek stolítku, který v tomto rybníce po dávkách hlinitého koagulantu zpomalil růst. Pod stereomikroskopem byly pozorovány bezobratlé organismy osidlující rostlinu: vodule, lasturnatky, larvy jepice rodu *Caenis*, máloštětinatí červi, larvy chrostíků, kokony s housenkami motýlka rodu *Acentria*. Housenky motýlků jsou patrně další z příčin, proč stolítky zpomalily svůj růst – housenky se totiž živí vzrůstnými vrcholy stolítku, čímž velmi brzdí nejen celkový růst rostlin, ale také jejich větvení. Ještě je třeba poznamenat – abychom ukázali složitost vazeb uvnitř vodního ekosystému - že rozvoj populace motýlka rodu *Acentria* byl mimo jiné umožněn řídkou obsádkou ryb, zejména perlína a plotice, kteří by jinak působili jako účinní predátoři housenek. A řídká rybí obsádka je výsledkem biomanipulace...

4 Závěr

V průběhu exkurze a její laboratorního pokračování byly předvedeny nejen jednotliví důležití zástupci vodních živočichů a rostlin, ale zejména jsme se věnovali otázkám, jak vodní ekosystémy typu rybník vlastně fungují. Nejdůležitějším cílem tedy bylo přemýšlet o chování přírodních systémů.

Na příkladu Velkého boleveckého rybníka jsme ukázali, že značně důležité jsou i vazby každého vodního ekosystému na okolní krajinu. Tento rybník například zástavbou panelových domů, odkanalizovaných včetně dešťových vod na centrální čistírnu odpadních vod, ztratil téměř 20 % rozlohy svého povodí! Tím se celá soustava dostala do potíží s hydrologickou bilancí: V běžných letech se více vody odpaří než kolik se sem dostane srážkami. To značně komplikuje hospodaření na rybnících, protože rybníky nelze libovolně vypouštět (například kvůli výlovu ryb). Po vypuštění mohou totiž rybníky natékat až několik let...



Příloha: Mapka oblasti Bolevecké rybníční soustavy s vyznačenou trasou exkurze a nejdůležitějšími zastaveními.

5 Kontakt na autora

RNDr. Jindřich Duras, Ph.D.
Povodí Vltavy, státní podnik
durasj@seznam.cz

ODBORNÝ KEMP PŘÍRODOVĚDNÝCH OBORŮ BIOLOGIE

BOTANICKÁ EXKURZE BOTANICKÉ MIKROSKOPICKÉ PRAKTIKUM

Tomáš Č. KUČERA

1 Úvod

Úvodní den odborného kempu byl věnován botanice, a to jak terénní tak laboratorní. Účastníci se nejprve seznámili s problematikou ruderalní vegetace, poznali nejčastější druhy rostlin v plzeňských ulicích, ale také druhy říčních břehů. Odpolední část programu proběhla v laboratoři katedry biologie a soustředila se na mikroskopickou stavbu rostlin.

2 Exkurze

Exkurzní trasa vedla od místa srazu před Střední průmyslovou školou elektrotechnickou v Částkově ulici přes Mikulášské nám., dále přes „papírenskou“ lávku k Chodskému náměstí. Exkurze měla dvě tematicky odlišné části – delší část, zabývající se ruderalními druhy, a jednu zastávku na břehu Radbuzy, zaměřenou na druhy říčních břehů a mokřadů.

2.1 Rostliny ruderalních stanovišť

Jako ruderalní označujeme druhy rostlin vyskytující se na člověkem narušovaných stanovištích. Současně se také používá termín synantropní druhy – tj. druhy provázející člověka. Ruderalní druhy se tradičně dělí do dvou skupin: 1) vlastní ruderalní druhy – to jsou druhy, které zahrnují rostliny např. sešlapávaných míst, zasolených stanovišť či jinak ovlivněných člověkem, a 2) druhy segetální – plevelné, jejichž životní strategie je ovlivněna pravidelným obhospodařováním půdy.

Ruderalní druhy mohou být původní druhy v naší flóře – takové označujeme jako apofyty. Pokud se jedná o druhy zavlečené, nepůvodní, může se jednat o archeofyty (druhy zavlečené na naše území prvním zemědělcem, obecně druhy, které se k nám dostaly před rokem 1500), nebo může jít o neofyty (druhy k nám zavlečené po velkých objevitelských cestách, obecně po roce 1500).

Počet jedinců některého druhu může v daném území stoupat. Pokud jde o druh v území původní, označuje se toto lavinovité šíření jako expanze, jde-li o druh zavlečený, nazýváme tento jev invazí.

Během naší exkurze jsme viděli následující typy biotopů (či ekologických skupin rostlin) s charakteristickými druhy.

2.1.1. Sešlapávaná stanoviště, šterbiny v dlažbě a asfaltu

Rostliny těchto stanovišť musí odolávat velkému stresu (dlouhodobému negativnímu působení prostředí) i disturbancím (krátkodobým, ale intenzivním negativním vlivům prostředí): ztuhnutí půdy, špatné dostupnosti vody, mechanickému poškozování, ale i působení solí ze zimního ošetřování silnic. Rostliny proto mají výrazně vyvinutá mechanická pletiva (např. truskavec obecný), ale ovládají často také i různé způsoby hospodaření se

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

solemi. Setkali jsme se s druhy: zblochanec oddálený (*Puccinellia distans*) – halofilní (slanomilná) tráva, kuřinka červená (*Spergularia rubra*) – snese sešlap i mírné zasolení, jitrocel větší (*Plantago major*) – odolný vůči sešlapu, truskavec obecný (*Polygonum arenastrum*) – na intenzivně sešlapávaných místech, lipnice roční (*Poa annua*), lipnice smáčknutá (*Poa compressa*) či jetel plazivý (*Trifolium repens*).

2.1.2. Trávníky s ruderálními druhy

Jde o sečené trávníky, které jsou často dosívané travními směsmi, ve kterých se uplatňují také druhy segetální či invazní. V exkurzní trase byly tyto porosty složené z druhů jako jsou jetel luční (*Trifolium pratense*), jetel rolní (*Trifolium arvense*), jitrocel prostřední (*Plantago media*), jitrocel kopinatý (*Plantago lanceolata*), pampeliška podzimní (*Leontodon autumnalis*), řebříček obecný (*Achillea millefolium*) a další.

2.1.3. Pionýrská vegetace na substrátech bez zapojené vegetace

Pionýrské druhy obsazují substráty, které jsou zbavené vegetace – nejrůznější navážky apod. Druhy jsou konkurenčně málo zdatné, ale jsou schopné vytvořit bohaté populace, a tím substrát rychle kolonizují. Tato společenstva jsme mohli vidět v narušených trávnících mezi komunikacemi, podél silnic apod. Dominantní složkou jsou druhy z čeledi merlíkovitých. Skutečným pionýrem je lebeda lesklá (*Atriplex sagittata*), která tyto substráty osidluje jako první. Dále nastupují další druhy lebed – např. lebeda rozkladitá (*Atriplex patula*) a merlíků – merlík bílý (*Chenopodium album*) nebo merlík mnohosemenný (*Chenopodium polyspermum*).

2.1.4. Dřeviny

Do tohoto odstavce jsou zařazeny zajímavější druhy dřevin, s nimiž jsme se na exkurzi setkali: pustoryl věncový (*Philadelphus coronarius*) – „český jasmín“, javor jasanolistý (*Acer negundo*) – invazní druh javoru s lichozpeřenými listy, douglaska tisolistá (*Pseudotsuga menziesii*) – jehlice tohoto stromu mají krátké řapíky a po přetržení voní po pomerančích, borovice vejmutovka (*Pinus strobus*) – pětijehličkatá invazní borovice, původem (stejně jako dva předchozí druhy) ze Severní Ameriky, pámelník bílý (*Symphoricarpos albus*) – notoricky známý keř s bílými bobulemi a jeho drobnější příbuzný – pámelník červenoplodý (*Symphoricarpos orbiculatus*); dále morušovník černý (*Morus nigra*) – plodenství připomínají ostružiny (které jsou ale souplodí, nikoli plodenství!). Pajasan žláznatý (*Ailanthus altissima*) je v teplejších oblastech nebezpečným invazním druhem, pochází z východní Asie.

2.1.5. Liány

Mezi liány se řadí rostliny popínavé (k opoře se přichycují úponkami) a ovíjivé (ovíjejí se stonkem kolem opory). Chmel otáčivý (*Humulus lupulus*) je pravotočivá ovíjivá liána, setkali jsme se s méně běžným samčím jedincem. Plamének plotní (*Clematis vitalba*) má úponky listového původu, přísavník pětistý (*Partenocissus quinquefolia*) – „psí víno“ zase stonkového původu. Další druhy lián jsou uvedeny u rostlin říčních břehů.

2.1.6. Invazní druhy

Kromě již zmíněných invazních druhů jsme se setkali ještě se dvěma dalšími: křídlatkou japonskou (*Reynoutria japonica*) z čeledi rdesnovitých (charakteristický znak čeledi: botky na bázi listů) a turankou kanadskou (*Conyza canadensis*) z čeledi hvězdnicovitých. Traduje se, že se turanka do Evropy dostala coby vycpávkový materiál v živočišných preparátech.

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

2.2 Rostliny říčních břehů

Pobřežní rostliny jsou zařazovány do dvou ekologických skupiny. Jde buď o hygrofyty – tj. rostliny vlhkých stanovišť (vlastně nejvlhkomilnější suchozemské rostliny), anebo o helofyty – rostliny, které vyrůstají z vody, ale jejich asimilační orgány (listy) vyčnívají nad vodní hladinu. Pro všechny tyto rostliny jsou společné velké nároky na půdní dusík a přítomnost provzdušňovacích pletiv, zejména v kořenech a podzemních (či podvodních) částech. Kromě těchto dvou ekologických skupiny rostlin jsou součástí břehových porostů také některé liány.

Na břehu Radbuzy jsme měli možnost vidět pobřežní rákosiny tvořené chrasticí rákosovitou (*Phalaris arundinacea*), ostřicemi (*Carex* sp.), z vody vyrůstal zevar vzpřímený (*Sparganium erectum*) a kosatec žlutý (*Iris pseudacorus*). Na vyšších částech břehu se vyskytovaly druhy jako mydlice lékařská (*Saponaria officinalis*), kyprej vrbice (*Lythrum salicaria*), silenka širokolistá (*Silene latifolia*). Z ovíjivých rostlin jsme našli opletník plotní (*Calystegia sepium*) z čeledi svlačcovitých a opletku svlačcovitou (*Fallopia convolvulus*) z čeledi rdesnovitých.

3 Mikroskopické praktikum

Praktikum, které proběhlo v laboratoři katedry biologie, bylo zaměřeno na stavbu rostlinné buňky a následně rostlinného těla. Účastníci si vyrobili několik nativních preparátů, v nichž sledovali orgány: jádro a zejména různé typy plastidů. V jádrech (nucleus) jsou často viditelná světlolomná tělíska – jadérka (nucleolus). Jejich počet obvykle odpovídá ploidii (počtu chromozomových sádek) – tedy diploidní druhy mají obvykle dvě jadérka. Plastidy představují semiautonomní orgány s vlastním genetickým aparátem (DNA, RNA) i aparátem proteosyntetickým (vlastní ribosomy). Předpokládá se jejich endosymbiotický původ – s ohledem na jejich stavbu i způsob uložení genetického materiálu byly jejich předchůdkyněmi buňky sinic. Rozdělení plastidů:

- barevné
 - fotosynteticky aktivní – chloroplasty (zelené)
 - fotosynteticky neaktivní – chromoplasty (oranžové až červené)
- bezbarvé („bílé“)
 - leukoplasty – obvykle zásobní funkce
 - amyloplasty (uložen škrob)
 - proteoplasty (uloženy bílkoviny)
 - etioplasty – vznikají v zastíněných částech rostlin (etiolizace)
 - proplastidy – předstupeň všech typů plastidů, vyskytují se v mladých pletivech

V závěrečné části praktik jsme se potom soustředili na typy pletiv podle tvaru (na příkladu příčného řezu stonkem begonie) – parenchym (tenkostěnné buňky), kolenchym (buňky nesouvisle ztlustlé) a sklerenchym (pletivo tvořené buňkami celoplošně ztlustlými).

Pozorované preparáty

- list vodního moru kanadského (*Elodea canadensis*) – dvě vrstvy parenchymatických buněk, obsahujících chloroplasty (asimilační funkce), někdy viditelná jádra.
- buňky dužniny bobule rajčete (*Lycopersicon edule*) – parenchymatické buňky s výrazným jádrem, viditelnými vakuolami a chromoplasty.
- amyloplasty z různých materiálů: obilek pšenice (*Triticum* sp.), žita (*Secale* sp.), ječmene (*Hordeum* sp.), ovsa (*Avena* sp.), semen fazolu (*Phaseolus* sp.), dužniny hlízy bramboru (*Solanum tuberosum*) a latexu pryšců (*Euphorbia* sp. – „hnátovitá“ zrna ☺)

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

- řez stonkem begonie (*Begonia* sp.) – na povrchu jednovrstevná nezelená pokožka (epidermis), pak primární kůra (zde je zelené asimilační pletivo – chlorchym, dále kolenchymatická pletiva), pericykl (původně dělivé pletivo, následně má funkci mechanickou – buňkám ztloustnou stěny – vzniká sklerenchym), střední válec (vodivá pletiva – dřevo + lýko) a parenchymatická dřev uprostřed.

4 Závěr

Během exkurze měli účastníci možnost se seznámit s nejčastějšími zástupci ruderalní flóry v Plzni a s klasifikací ruderalních druhů do několika kategorií podle původu či chování. Ruderalní druhy představují důležitou složku prostředí lidských sídel, jde ostatně o rostliny, s nimiž se člověk setkává nejčastěji. Narazili jsme rovněž na problematiku rostlinných invazí a demonstrovali si některé invazní druhy i s jejich přizpůsobeními k invaznímu chování. Mokřadní a částečně i vodní druhy rostlin jsme měli možnost poznat na břehu Radbuzy.

Praktikum bylo zaměřeno na vnitřní stavbu rostliny a stavbu rostlinné buňky, a jeho úkolem bylo dovést účastníky k poznání, že ne vše v rostlinném těle je zelené. Neboli, že fotosyntézy je schopná pouze malá část rostlinného těla. Produkty fotosyntézy (sacharidy) jsou uloženy ve formě zásobního škrobu ve škrobových zrnech (amyloplastech), které se mohou (i dost výrazně) mezi jednotlivými druhy rostlin odlišovat. Poslední preparát pak ukázal typy pletiv podle tvaru rostlinných buněk.

5 Kontakt na autora

Mgr. Tomáš Kučera
Katedra biologie FPE ZČU v Plzni
Klatovská 51, 306 14 Plzeň
tomkucer@kbi.zcu.cz

ODBORNÝ KEMP PŘÍRODOVĚDNÝCH OBORŮ BIOLOGIE

ALGOLOGICKÁ POZOROVÁNÍ

Petra VÁGNEROVÁ

1 Úvod

Pozorování sinic a řas v laboratoři probíhalo na biologickém kempu především v rámci hydrobiologie a dále jako součást dne věnovaného různým metodám v laboratoři. Studenti měli možnost se seznámit především se sinicemi a řasami rybníků Bolevecké soustavy.

2 Pozorování sinic a řas v laboratoři

Sinice a řasy jsou organismy, jimiž se zabývá věda zvaná algologie (jinak fykologie). Zatímco sinice jsou prokaryotní organismy, taxonomicky vlastně gramnegativní bakterie, které jsou schopny fotosyntézy, řasy jsou organismy eukaryotní, taxonomicky patří do různých skupin.

2.1 Sinice

Sinice (Cyanobacteria) jsou organismy, které zdokonalily fotosyntézu (fotosystém II) a zasloužily se o kyslíkatou atmosféru Země. Jako první osidlují nově vzniklé biotopy, například sopečné ostrovy, a připravují tak podmínky pro další organismy. Vyskytují se také v extrémních biotopech, jako jsou horké minerální prameny, jeskyně nebo srst ledních medvědů. Velký význam mají také pro člověka: při nadbytku živin ve vodních nádržích se mohou sinice přemnožit a vytvořit tak vodní květ. Pozitivní význam mají sinice, které jsou schopné vázat vzdušný dusík – některé z nich jsou v Asii používány jako hnojivo při pěstování rýže. Ze sinic rodu *Arthrospira* se vyrábějí různé potravinové doplňky.

Na stélce sinic můžeme pozorovat některé zajímavé struktury nebo typy buněk. Aerotopy jsou váčky, které jsou naplněny směsí plynů. Mají válcovitý tvar a na průřezu připomínají včelí plást. Sinice umí měnit množství aerotopů v buňce a tím také svoji pozici ve vodním sloupci, mohou tedy klesat nebo se vznášet podle potřeby. Heterocyty jsou specializované buňky, které dokážou fixovat vzdušný dusík. V těchto buňkách je udržováno anaerobní prostředí a fotosyntéza zde probíhá jen v rámci fotosystému I. Akinety jsou buňky, které slouží k přežití nepříznivých podmínek, vznikají z jedné nebo více vegetativních buněk.

V rámci praktických cvičení v laboratoři se studenti seznámili s těmito sinicemi:

Microcystis aeruginosa je sinice, která za příhodných podmínek tvoří vodní květ. Do vody uvolňuje toxické látky (microcystin), které mohou ohrozit zdraví člověka, především malých dětí a alergiků.

Phormidium sp. je vláknitá sinice příbuzná s podobným rodem *Oscillatoria*. Tyto sinice se vyznačují zvláštním drkavým či klouzavým pohybem vláken, jenž dal název i rodu *Oscillatoria* – česky drkalka. Pohyb vláken zřejmě umožňuje slizová pochva na povrchu vláken, ale přesný mechanismus pohybu není dosud znám.

Nostoc patří mezi sinice, které vytvářejí heterocyty a akinety. Jeho stélka je slizovitá, makroskopická a roste na vlhkých podkladech, například na půdě.

2.2 Řasy

Řasy jsou eukaryotní organismy schopné fotosyntézy, které se dnes řadí do různých taxonomických skupin (Plantae, Chromalveolata, Rhizaria, Excavata). Jejich systém se neustále mění s přibývajícím daty získanými pomocí molekulárních analýz. Jsou to organismy jednobuněčné i mnohobuněčné, s různými typy stélky (bičíkatá, kokální, vláknitá ...), vyhledávající nejruznější stanoviště.

Při praktických cvičeních na biologickém kempu měli studenti možnost seznámit se se zástupci některých skupin:

Rody *Ceratium* a *Peridinium* ze skupiny Dinophyta (obrněnky) byly nalezeny ve vzorcích z Malého Boleveckého rybníka. Obecně lze říci, že pro obrněnky je charakteristický – jak už název napovídá – pancířek, který je na povrchu buňky. Je tvořen celulozními destičkami, které se nacházejí těsně pod cytoplazmatickou membránou. Buňky se pohybují pomocí dvojice bičíků.

Další hojně zastoupenou skupinou byla třída Bacillariophyceae (rozsivky), řasy s křemitou schránkou na povrchu. Byly pozorovány nejen planktonní druhy (*Asterionella formosa*), ale také druhy epifytické (*Cocconeis* sp.), které porůstají ponořené rostliny či jiné řasy (žabí vlas *Cladophora* sp.).

Ze zelených řas jsme si všimli především známého žabího vlasu, *Cladophora* sp., a šroubatky, *Spirogyra* sp., které jsou v našich rybnících hojné a hojně se vyskytují také v učebnicích přírodopisu a biologie, takže je většina žáků zná.

3 Závěr

Ačkoli času, který mohl být věnován sinicím a řasám, nebylo mnoho, jednalo se určitě o zajímavou exkurzi do světa organismů, které nejsou na první pohled patrné. Jsou to však organismy zajímavé a pro člověka často mají nezanedbatelný praktický význam.

4 Kontakt na autora

Mgr. Petra Vágnerová
Katedra biologie FPE ZČU v Plzni
Klatovská 51, 306 14 Plzeň
vagnerov@kbi.zcu.cz

ODBORNÝ KEMP PŘÍRODOVĚDNÝCH OBORŮ CHEMIE

ATRAKTIVNÍ EXPERIMENTY

Jitka ŠTROFOVÁ

1 Úvod

Nedílnou součástí chemie je experimentální činnost a práce v laboratoři, což by se mělo promítnout i do výuky chemie na základních a středních školách. Bohužel s reálným experimentem se žáci setkávají velmi málo. Neuspokojivé materiální podmínky na mnoha školách spolu s nízkými hodinovými dotacemi nedávají naději na výraznější zlepšení této situace. Pokud se učitel i přesto snaží do výuky zařadit pokusy, ve většině případů se jedná o pokusy demonstrační a k vlastní experimentální činnosti se žáci dostanou sporadicky.

Účastníci chemického kempu měli příležitost vyzkoušet si v laboratořích katedry chemie FPE ZČU řadu experimentů, které mají zajímavý průběh a jsou doprovázeny barevnými, světelnými nebo zvukovými efekty. Mezi atraktivní experimenty zcela jistě patří ty, při nichž dochází k výrazným barevným změnám.

V dalším textu je velmi stručně uveden postup a princip vybraných pokusů, kompletní návody včetně dávkování byly součástí materiálů, které měli účastníci kempu k dispozici.

2 Redukční účinky glukosy

Glukosa patří mezi sacharidy s redukčními účinky, které je možné demonstrovat jednoduchým experimentem. K alkalickému roztoku glukosy přidáme několik kapek vodného roztoku barviva, jehož oxidovaná a redukováná forma mají různé zbarvení. Příkladem takového barviva je methylenová modř nebo indigokarmín.

2.1 Modrý roztok

V roztoku hydroxidu sodného rozpustíme glukosu a přidáme několik kapek vodného roztoku methylenové modři. Původně modré zbarvení postupně mizí. Po chvíli se roztok úplně odbarví, po protřepání opět zmodrá. Glukosa redukuje methylenovou modř, což se projeví odbarvením roztoku. Vzdušný kyslík, který se do roztoku vhání mícháním a protřepáváním, oxiduje methylenovou modř – modré zbarvení se obnoví. Ke změně barvy dochází opakovaně, alkalický roztok glukosy spolehlivě účinkuje několik hodin (Richtr, 1995, s. 40).

Jiného barevného přechodu docílíme, přidáme-li kromě methylenové modři ještě pár kapek fenolftaleinu (Richtr, 2000, s. 69). V této variantě dochází k přechodu růžovofialového roztoku na roztok temně fialový. Kombinuje se zde růžovofialové zbarvení fenolftaleinu v alkalickém prostředí s barvou oxidované a redukováné formy methylenové modři.

2.2 Semafor

Tento pokus je založen na stejném principu jako předchozí. Rozdíl je v použitém barvivu. Methylenová modř je nahrazena indigokarmínem. V tomto případě je barevná změna ještě zajímavější, protože oxidace je dvoustupňová. Redukovaná forma indigokarmínu je

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

žlutá. Mírným mícháním dosáhneme prvního stupně oxidace – roztok zčervená. Druhého stupně, v němž roztok zezelená, docílíme silným protřepáváním.

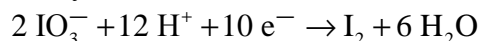
3 Oscilační reakce

Barevnými změnami jsou doprovázeny také oscilační reakce, jejich princip je ale zcela jiný. Dále popsané oscilační reakce se řadí k Bělousovovým – Žabotinského reakcím. Tvoří je složitý reakční systém se simultánními a následnými reakcemi, mezi nimiž se uplatňují jak vztahy kinetické (různé reakční rychlosti), tak rovnovážné (konkurenční rovnováhy) (Richtr, 1996, s. 56).

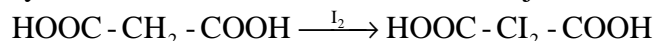
Společným jmenovatelem vybraných oscilačních reakcí je kyselina malonová, na níž se aduje brom nebo jod. Dané reakce se liší barevnými přechody, které záleží na halovém prvku a na iontech přítomných v roztoku (Mn^{2+} , Mn^{3+} , Ce^{3+} , Ce^{4+}). Barevné změny se pravidelně opakují, a to i tehdy, je-li daný roztok v klidu.

3.1 Modré oscilace

V tomto případě dochází k adici jodu, který vzniká redukcí jodičnanu draselného v silně kyselém prostředí manganatými ionty.

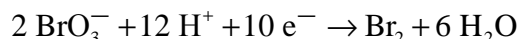


Komplex jodu se škrobem barví roztok modře. Odbarvení reakční směsi je naopak způsobeno adicí jodu na kyselinu malonovou, vzniká mono- či diiodmalonová kyselina.



3.2 Růžové oscilace

Růžové zbarvení je u této reakce způsobeno bromem, který vzniká redukcí bromičnanu manganatými ionty (opět v silně kyselém prostředí)



K odbarvení roztoku dochází v okamžiku, kdy se brom aduje na kyselinu malonovou.

3.3 Zeleno-modro-červené oscilace

Příkladem vícebarevných oscilací je reakce bromičnanových iontů v kyselém prostředí s ionty Ce^{4+} a Ce^{3+} , které působí jako oxidační a redukční činidla. Dochází k redukcí bromičnanu a oxidaci bromidu na brom, který se aduje na kyselinu malonovou. Katalyzátorem je ferroin.

Původně zelené zbarvení přechází přes modrou, fialovou až do červené a zpět. Barevné změny se opakují po dobu dvou až tří hodin.

4 Závěr

Všechny uvedené atraktivní pokusy jsou vhodné zejména jako motivační prvky ve výuce. V rámci chemického kempu bylo možné podrobněji objasnit i jejich mechanismu a úspěšní řešitelé chemické olympiády tak získali nové zajímavé informace.

5 Použitá literatura

RICHTER, V., KRAJČEK, M.: Atraktivní pokusy ve výuce chemie II. In: Chemie XV, Sborník PF ZČU v Plzni. Plzeň: PF ZČU, 1995.

RICHTER, V., KRAJČEK, M., ŠTROFOVÁ, J.: Atraktivní pokusy ve výuce chemie III. In: Chemie XVI, Sborník PF ZČU v Plzni. Plzeň: PF ZČU, 1996.



evropský
sociální
fond v ČR



EVROPSKÁ UNIE



MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ,
MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY



OP Vzdělávání
pro konkurenceschopnost



INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

RICHTR, V., KRAITR, M., ŠTROFOVÁ, J.: Atraktivní pokusy ve výuce chemie IV. In: Chemie XVIII, sborník katedry chemie. Plzeň: ZČU, 2000.

6 Kontakt na autora

Mgr. Jitka Štrofová

Katedra chemie, FPE ZČU

strofova@kch.zcu.cz

ODBORNÝ KEMP PŘÍRODOVĚDNÝCH OBORŮ CHEMIE

DŮKAZOVÉ REAKCE V BIOCHEMII

Vladimír NÁPRAVNÍK

1 Úvod

V biochemii jsou velice zajímavé náměty na experimenty a laboratorní cvičení zaměřené na identifikaci sacharidů a bílkovin (Barthová, Sofrová, Tichá, 1980), stanovení čísla zmydlnění a stupně kyselosti tuků, izolaci látek z přírodních materiálů (kasein a laktosa z mléka, mannan z droždí aj.) a na studium enzymatických reakcí včetně přístrojových metod stanovení.

2 Důkazové reakce sacharidů

Biochemická praktika, která probíhala v rámci Chemického kempu, byla zaměřena na důkazové reakce sacharidů. Všichni účastníci měli nejprve k dispozici známé vzorky zástupců sacharidů – glukosa (zástupce hexos), arabinosa (zástupce pentos), sacharosa (zástupce neredukujícího disacharidu) a škrob (zástupce polysacharidů). Na těchto známých vzorcích si účastníci vyzkoušeli používané důkazové reakce.

Obecnou reakcí sacharidů je *Molischova reakce*. Reakcí sacharidu s kyselinou sírovou H_2SO_4 a α -naftolem je vytvořeno intenzivně fialového zbarvení vznikem di- α -naftohydroxyfurylmetanu, který se oxiduje na příslušné trifenylmethanové barvivo. Tuto reakci poskytují všechny sacharidy.

Pro důkaz přítomnosti redukujících sacharidů lze využít dvě reakce – *Fehlingovu* a *Tollensovou*. *Fehlingovou* reakcí sacharidy s volným poloacetalovým hydroxylem (tedy redukující sacharidy) redukují komplexně vázané soli měďnaté Cu^{2+} Fehlingova roztoku na červeně zbarvený oxid měďný Cu_2O . U *Tollensovy* reakce redukuje sacharid z Tollensova činidla oxid stříbrný Ag_2O v přítomnosti hydroxidu amonného NH_4OH na kovové stříbro Ag, které vytváří na stěnách zkumavky stříbrné zrcátko.

Potřebuje-li se rozlišit přítomnost monosacharidu a disacharidu, využije se *Barfoedovy reakce*. Octan měďnatý se v prostředí kyseliny octové (Barfoedovo činidlo) redukuje na oxid měďný. Za podmínek reakce reagují přednostně redukující monosacharidy, disacharidy teprve po delším zahřívání na vodní lázni.

Reakce pentos jsou založené na vzniku furalu a jeho derivátů, který se kondenzuje s fenoly nebo aromatickými aminy za vzniku barevných sloučenin. K tomuto účelu slouží dvě reakce, *Tollensova-Wheelerova* a *Bialova*. U prvně jmenované reakce zahřátím vzorku sacharidu na vodní lázni (několik minut) s kyselinou chlorovodíkovou HCl a krystalem fluoroglucinolu vzniká purpurové zbarvení. Bialovo činidlo, jehož podstatnou složkou je

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

orcinol, se zahřívá se vzorkem sacharidu na vodní lázni za vzniku zeleného zbarvení. Později se tekutina kalí a vylučuje se sraženina.

Důkaz škrobu, jako zástupce polysacharidů, se provádí reakcí s vodným roztokem jodu. Škrob je zbarven do tmavě modrého až fialového odstínu. Toto zbarvení zmizí přidáním hydroxidu nebo zahřátím, naopak k obnovení zbarvení dojde přidáním kyseliny nebo ochlazením. Účastníci si tak ověřili, jaké barevné produkty při jednotlivých reakcích vznikají.

V další části zaměstnání následovala identifikace neznámého vzorku. Neznámý vzorek obsahoval 1 až 2 vzorky příslušných sacharidů a účastníci měli za úkol tyto sacharidy určit právě pomocí důkazových reakcí. Návodů se všemi potřebnými postupy a chemikáliemi obdrželi účastníci předem vytištěné. Chemikálie a potřebná činidla již měli připravené.

3 Závěr

Všichni účastníci se úkolu zhostili s umem jejich vlastním a prokázali svoji obratnost jak v experimentální činnosti jako takové, tak i v logickém myšlení během úvah nad postupy, jak neznámé vzorky identifikovat.

4 Použitá literatura

BARTHOVÁ, J., SOFROVÁ, D., TICHÁ, M. Základní praktikum z biochemie. 1. vyd. Praha: SPN, 1980. 184 s.

5 Kontakt na autora

Mgr. Vladimír Nápravník, Ph.D.
Katedra chemie Fakulty pedagogické ZČU v Plzni
napravni@kch.zcu.cz

ODBORNÝ KEMP PŘÍRODOVĚDNÝCH OBORŮ CHEMIE

Z HISTORIE VÝROBY KYSELINY SÍROVÉ V ČECHÁCH

Milan KRAITR, Vladimír SIROTEK

1 Úvod

Kyselina sírová bezesporu patří k nejdůležitějším chemikáliím vůbec. Přestože v uplynulých 20 letech její význam poněkud klesl, výroba v některých vyspělých zemích se snížila při současném vzestupu produkce v rozvojových zemích, zůstává stále vedle amoniaku jedinou individuální chemikálií s roční světovou produkcí přes 100 mil. t. V České republice, která tradičně patřila k významným výrobcům této chemikálie, došlo v uplynulém desetiletí k výraznému poklesu roční produkce až pod 300 kt, což představuje 30 % produkce r. 1990. Přesto má výroba kyseliny sírové v českých zemích v historickém kontextu mimořádný význam, protože v 70. letech XIX. století byly Čechy dominantním světovým producentem některých druhů této chemikálie, konkrétně olea neboli dýmavé kyseliny sírové. Především se to týká západních Čech, kde se zachovaly četné památky na zaniklou výrobu kyseliny sírové. Nejvýznamnější českou knižní publikací je široce pojatá monografie J. Fleka (1977) shrnující výsledky jeho celoživotních výzkumů a podávající vyčerpávající přehled tematiky. V nedávné době se historií diskutované výroby zabývala i naše publikace (Chemie XX, 2004, s. 103).

2 Výroba kyseliny sírové z vitriolového kamene

Odlišné suroviny a specifické výrobní postupy se uplatňovaly při výrobě H_2SO_4 termickým postupem v západních Čechách - v širším okolí Plzně (na sever od Plzně a na Rokycansku, v malé míře i na Rakovnicku). Tyto postupy zaznamenaly velký rozmach a byly realizovány v průmyslovém měřítku počátkem XIX. století. V menší míře se využívalo ložisek kompaktního pyritu (např. Kamenec u Radnic), který byl zpracován analogicky jako ve Velké Lukavici; malý význam měla na Plzeňsku i výroba vitriolu spojená s výrobou kamence.

Jako surovina byly užity hlavně tzv. *vitriolové břidlice*, tj. pyritické břidlice algonkického stáří s poměrně vysokým obsahem jemně rozptýleného pyritu, který se podle různých analýz pohyboval zhruba od 6 do 12% FeS_2 , což odpovídá asi 3-6% síry. Tyto břidlice měly malý obsah jílových minerálů, takže nebyly vhodné pro výrobu kamenců. Z vitriolových břidlic se důmyslným, i když zdoluhavým postupem získával tzv. *vitriolový kámen*, v podstatě $Fe_2(SO_4)_3$. Bezvodý vitriolový kámen obsahoval až 24% síry a poskytoval při termickém rozkladu větší výtěžek SO_3 než vitriol. Vitriolový kámen se koncem XVIII. století také vyvážel do Saska, po rozmachu výroby olea v západních Čechách byl vesměs zpracován v místních výrobnách. V okolí Plzně bylo v provozu několik desítek dolů na vitriolovou břidlici s výrobnami vitriolového kamene a desítky výroben olea (kyseliny sírové).

Výroba „české kyseliny sírové“ z vitriolových břidlic je zjednodušeně znázorněna v naší práci (Chemie XX, 2004, s. 109). Technologie zahrnuje dvě etapy: výrobu vitriolového kamene a vlastní výrobu olea tepelným rozkladem (suchou destilací) vitriolového kamene.

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

"Minerální závody" na výrobu olea nemusely zahrnovat obě výrobní fáze v jedné lokalitě. První etapa výroby se vždy prováděla v místě těžby pyritických břidlic, druhá etapa často probíhala v samostatných provozech - olejových hutích, tzv. *olejnách*, kam byl vitriolový kámen dovážen. Výroba vitriolového kamene vyžadovala vydatné zdroje vody. Obě fáze výroby pak byly energeticky náročné a jejich provoz byl podmíněn blízkostí zdrojů uhlí, které shodou okolností v oblasti výskytu vitriolových břidlic bylo k dispozici (karbonská pánev u Radnic, ale i menší pánvičky na Kaznějovsku). Výroba v olejnách vyžadovala rovněž velké množství keramických nádob (žárovzdorné a kyselinovzdorné rozkladné retorty a destilační předlohy na oleum, transportní nádoby i skladovací nádrže). Bylo tedy možné ji provozovat jen v blízkosti zdrojů vhodných keramických surovin a jejich zpracování, což bylo (i s výskytem uhlí pro keramické výroby) splněno ideálně zejména v Břasích a Kaznějově.

Pevný odpadní produkt z olejen byl ke zpracování na pigmenty zpravidla přivážen do specializovaných výroben (především Břasy).

3. Závěr

Historie výroby kyseliny sírové termickým způsobem patří k tematice, která má v naší zemi mimořádný a specifický význam. Je to problematika, která může být atraktivní pro kohokoliv, kdo se zajímá o chemii, ale v řadě aspektů i pro příznivce geologie, geografie, dějin techniky a historie obecně, zvláště pak regionální historie západních Čech, zejména Plzeňska. Teoretické informace je možné rozšířit o terénní pozorování. Jde především o exkurzi na dobře přístupnou lokalitu Hromnice asi 15 km severně od Plzně, která sehrála v období výroby „české kyseliny sírové“ klíčovou roli zejména jako největší ložisko vitriolových břidlic a největší výroba vitriolového kamene pro výrobu kyseliny sírové (olea). Vzhledem k dlouhému cyklu zpracování vitriolové břidlice na vitriolový kámen zůstala v této lokalitě velká halda vytěžené břidlice, která již nebyla loužena a několik desetiletí zamořovala blízké vodní toky kyselými výluhy. Tato halda se dodnes zachovala spolu s vylouženými haldami a zatopenou těžební jámou, která tvoří mezi haldami jezírko hnědočervené barvy o ploše asi 2,5 hektaru. Jsou to nejvýraznější a nejrozsáhlejší zachované památky připomínající dobu, kdy západní Čechy byly regionem se světovým monopolem výroby olea.

4. Použitá literatura

FLEK, J. Česká kyselina sírová a vitriolový průmysl v Čechách, sborník VŠCHT v Praze, A 14. SPN, Praha 1977.

KRAITR, M., SIROTEK, V., RICHTER, V., CHEMIE XX sborník katedry chemie, ZČU, Plzeň 2004. s. 103-115. ISBN 80-7043-296-9.

5 Kontakt na autora

Prof. Ing. Milan Kraitr, CSc.

Katedra chemie FPE ZČU v Plzni

kraitr@kch.zcu.cz

ODBORNÝ KEMP PŘÍRODOVĚDNÝCH OBORŮ CHEMIE

TITRAČNÍ STANOVENÍ V ANALYTICKÉ CHEMII

Jan HRDLIČKA

1 Úvod

Titrace (odměrná analýza) je stanovení látek založené na měření objemu roztoku činidla právě potřebného k úplnému zreagování stanovované složky ve známém objemu analyzovaného roztoku, tj. k dosažení bodu ekvivalence. Známe-li přesnou látkovou koncentraci roztoku činidla (tzv. titr), můžeme na základě stechiometrie reakce vypočítat množství nebo koncentraci stanovované složky v roztoku.

Dosažení bodu ekvivalence zjišťujeme vhodnou indikací, která je založena na pozorování změn v roztoku, který může pro zviditelnění změn obsahovat látku, která výrazně změní barvu v bodě ekvivalence. Tato látka se nazývá indikátor. Jinou možností je objektivní měření určité vlastnosti roztoku, např. vodivosti nebo pH.

2 Titrace se subjektivním určením bodu ekvivalence

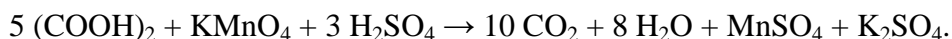
Titrace s určením bodu ekvivalence pomocí barevné změny indikátoru jsou závislé na barevném cítění oka pracovníka. Jednodušší situace je u tzv. jednobarevných indikátorů, kdy je jedna z forem indikátoru bezbarvá. Příkladem jsou třeba titrace manganometrické. Postřehnutí změny barvy indikátoru v bodě ekvivalence je naopak náročnější např. u titrací argentometrických nebo chelatometrických. Pro kemp byly vybrány titrace, které jsou ověřené a jsou užívány v laboratorních cvičeních.

2.1 Manganometrie

Manganometrické titrace patří mezi titrace oxidačně-redukční a jako odměrného činidla využívají roztoku KMnO_4 . Při stanovení iontů Fe^{2+} v síranu železnatém byla k dispozici odměrná baňka s předem odměřeným množstvím standardního roztoku síranu železnatého. Připravený vzorek si studenti doplnili v odměrné baňce vodou do celkového objemu 100 cm^3 a důkladně promíchali. K titraci pak pipetovali 25 cm^3 tohoto pracovního roztoku do titrační baňky, okyselili jej zředěnou H_2SO_4 a titrovali odměrným roztokem KMnO_4 ($0,02 \text{ mol} \cdot \text{dm}^{-3}$) do prvního trvale růžového zbarvení, které je způsobeno prvním nezreagovaným přídatkem manganistanu. Jedná se o reakci



Protože odměrný roztok manganistanu je nestabilní, je třeba určit jeho přesnou koncentraci, tzv. titr. Ten je při manganometrii stanovován titrací standardního roztoku kyseliny šťavelové, který je připraven o předem určené koncentraci. Jedná se o reakci

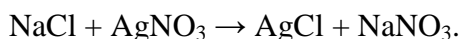


Při stanovení titru studenti odpipetovali 25 cm³ standardního roztoku (COOH)₂ (c=0,05 mol.dm⁻³) do titrační baňky a přidali vodu a zředěnou H₂SO₄. Připravený roztok pak zahřáli na 70°C a titrovali odměrným roztokem KMnO₄ do prvního trvale růžového zbarvení.

Tato reakce je autokatalytická – její rychlý průběh vyžaduje přítomnost iontů Mn²⁺, které jsou přítom reakčním produktem a reakce probíhá rychle až po vytvoření dostatečné koncentrace iontů Mn²⁺. Proto po přidání prvních podílů KMnO₄ roztok zůstává nejprve trvale zbarven a teprve po 10 – 20 vteřinách se počíná odbarvovat, odbarví se zcela a další přídavky se již při míchání odbarvují ihned.

2.2 Argentometrie

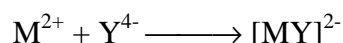
Argentometrie patří mezi titrace srážecí a jako odměrné činidlo je užíván roztok AgNO₃. Při postupu titrace podle Mohra je jako indikátor používán chroman draselný, který s AgNO₃ poskytuje červenou sraženinu Ag₂CrO₄. Tato sraženina je však rozpustnější než vznikající AgCl, a proto se začne vylučovat až po úplném vysrážení chloridů. Konec srážení chloridů je tedy indikován vystoupením červeně zbarveného Ag₂CrO₄ a roztok původně zbarvený chromanem žlutě začne měnit barvu na oranžovou. Při stanovení probíhá reakce



Při stanovení iontů Cl⁻ byla k dispozici odměrná baňka s předem odměřeným množstvím standardního roztoku chloridu sodného, který si studenti doplnili vodou do 250 cm³. Do kádinky si odpipetovali 25 cm³ zásobního roztoku, přidali destilovanou vodu a 1 cm³ 5% roztoku K₂CrO₄. Připravený roztok pak titrovali odměrným roztokem AgNO₃ (c=0,05 mol.dm⁻³) za intenzivního míchání.

2.3 Chelatometrie

Chelatometrie patří mezi titrace komplexotvorné a odměrným činidlem je obvykle roztok Chelatonu III. Situace v chelatometrii je pro výpočty zjednodušena tím, že chelaton reaguje s kationtem vždy v látkovém poměru 1:1, tedy 1 mol chelatonu zreaguje přesně s jedním molem stanovovaného kationtu. Obecně lze reakci dvojmocného kationtu popsat rovnicí



kde M je obecný symbol pro kov a Y je anion odvozený od Chelatonu III odštěpením dvou iontů sodíku a dvou iontů vodíku.

Studenti odměřili 100 cm³ vodovodní vody, kterou nechali předem odstát. Ke vzorku přidali 5 cm³ amonného tlumivého roztoku a po zahřátí na 50°C přidali indikátor eriochromčern T. Vínově červeně zbarvený roztok pak titrovali roztokem Chelatonu III (c = 0,02 mol.dm⁻³) do čistě modrého zbarvení. Výsledek je pak udáván jako celková tvrdost vody, vyjádřená v mg CaO na 1 l vody (tzv. německé stupně tvrdosti, 1°dH odpovídá 10 mg CaO na litr vody).

3 Titrace s objektivním určením bodu ekvivalence

Při titračním stanovení lze využít i instrumentální metody určení bodu ekvivalence. Ty mají tu výhodu, že výsledek není zatížen chybou způsobenou subjektivním vnímáním barevných změn. Nejčastěji jsou k tomuto účelu využívány metody elektrochemické. Zde byly zvoleny indikace potenciometrická a konduktometrická při acidobazických stanoveních.

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

3.1 Potenciometrická titrace

Při potenciometrickém stanovení byl jako odměrný roztok použit NaOH ($c=0,05 \text{ mol}\cdot\text{dm}^{-3}$). Indikace byla prováděna potenciometricky, kdy byly pomocí skleněné elektrody sledovány změny pH v průběhu titrace.

Studenti si do kádinky odpipetovali 20 cm^3 roztoku HCl a upevnili opláchnutou skleněnou pH elektrodu. Roztok v kádince doplnili destilovanou vodou tak, aby byla fritra referentní elektrody ponořena. Za stálého míchání přidávali postupně po 1 cm^3 roztoku NaOH až do celkového objemu 40 cm^3 a po každém přidavku odečetli hodnotu pH. Ze získaných hodnot pak byla odhadnuta oblast, kde se nachází bod ekvivalence.

Pak provedli druhou titraci tak, že v okolí bodu ekvivalence v rozsahu 3 až 4 cm^3 byly přidávky roztoku NaOH $0,1 \text{ cm}^3$. Získané hodnoty byly zaznamenány a vyhodnoceny v programu MS Excel. Několika způsoby byla z dat určena spotřeba odměrného roztoku v bodě ekvivalence. Ze znalosti hodnoty spotřeby roztoku NaOH v bodě ekvivalence, jeho koncentrace a objemu HCl byla vypočtena koncentrace roztoku HCl.

3.2 Konduktometrická titrace

Při konduktometrickém stanovení byl jako odměrný roztok použit NaOH ($c=1,00 \text{ mol}\cdot\text{dm}^{-3}$). Indikace byla prováděna sledováním vodivosti roztoku pomocí vodivostní sondy a konduktometru.

Studenti si připravili z octa zásobní roztok odměřením 10 cm^3 octa a doplněním destilovanou vodou do 250 cm^3 . Do kádinky odpipetovali 50 cm^3 zásobního roztoku octa, do roztoku upevnili elektrodu a do kádinky doplnili tolik destilované vody, aby byly ponořeny všechny tři platinové kroužky sondy. Postupně přidávali přidávky po $0,2 \text{ cm}^3$ do celkového přidavku 5 cm^3 . Po každém přidavku je třeba počkat na ustálení signálu a zaznamenat hodnotu vodivosti do tabulky spolu s celkovým přidaným objemem roztoku NaOH.

Jednotlivé hodnoty byly vyneseny do grafu jako závislost $G = f(V)$ v programu MS Excel. Z grafu byla odečtena odpovídající hodnota spotřeby v bodu ekvivalence, vypočteno složení octa a porovnáno s údajem na etiketě (obsah kyseliny octové by měl být vyšší nebo roven 8 %).

4 Závěr

Studenti si během práce v laboratoři osvojili základy práce při odměřování roztoků pomocí pipety a byrety. Zároveň si díky znalosti složení stanovovaných roztoků mohli ověřit i kvalitu svojí práce, tj. s jakou přesností byli schopni určit správnou hodnotu obsahu stanovovaných složek v roztoku.

5 Použitá literatura

KRAITR M. Příručka pro laboratorní cvičení z analytické chemie. PF Plzeň, 1965

6 Kontakt na autora

Ing. Jan Hrdlička, PhD.
Katedra chemie FPE ZČU v Plzni
hrdlicka@kch.zcu.cz

ODBORNÝ KEMP PŘÍRODOVĚDNÝCH OBORŮ CHEMICKÝ KEMP

INSTRUMENTÁLNÍ METODY V CHEMICKÉ LABORATOŘI

Vladimír SIROTEK, Jan HRDLIČKA, Vladimír NÁPRAVNÍK, Jitka ŠTROFOVÁ

1 Úvod

Charakteristickým rysem dnešních průmyslových, vědeckých i dalších typů laboratoří je využívání přístrojů a přístrojové techniky s podporou počítače k analýze a zkoumání látek. V rámci řešeného projektu „Podpora talentovaných žáků v Plzeňském kraji“ katedra chemie FPE ZČU v Plzni umožnila talentovaným studentům chemie seznámit se s moderními metodami instrumentální analýzy a v praxi si vyzkoušet práci v laboratoři na přístrojovém vybavení katedry chemie. Náplní připraveného kurzu byla tematika instrumentálních metod v chemické laboratoři, zaměřená na prezentaci *chromatografických metod* (vysokoúčinná kapalinová chromatografie HPLC), *optických metod* (UV spektrofotometrie, polarimetrie) a *elektrochemických metod* (konduktometrie). Studenti po teoretickém seznámení s principy jednotlivých metod absolvovali vybraná laboratorní cvičení podle dostupných pracovních návodů, které obsahovaly i podrobný popis obsluhy přístrojů. Úlohy byly zaměřeny na analýzu látek kolem nás.

2 Vysokoúčinná kapalinová chromatografie HPLC

Chromatografie je separační proces, při kterém se látky rozdělují mezi dvě nemísitelné fáze, jednu pohyblivou (*mobilní*) a druhou nepohyblivou (*stacionární*), na základě fyzikálně-chemických interakcí, jako jsou adsorbce, rozpouštění, iontová výměna apod. Složky směsi látky, přítomné v mobilní fázi, se pohybují podél stacionární fáze různou rychlostí, protože jsou interakcí se stacionární fází více či méně zpomalovány v závislosti na hodnotách distribučních konstant (rovnovážných konstant příslušné interakce). Látky, které interagují silněji se stacionární fází, se pohybují pomaleji, než látky, jejichž interakce jsou slabší. Pokud je dráha, kterou směs látek urazí podél stacionární fáze, dostatečně dlouhá a distribuční konstanty dostatečně rozdílné, rozdělí se směs látek na zóny jednotlivých složek. Chromatografická separace látek v koloně je provedena *eluční technikou*, při které systémem protéká konstantní rychlostí mobilní fáze o konstantním složení, tedy o konstantní eluční síle (tzv. *isokratická eluce*). Doba, kterou chromatografovaná látka stráví v koloně, se nazývá *retenční (eluční) čas*.

Kolony WATREX Polymer IEX H form jsou vhodné pro dělení cukrů, alkoholů a organických kyselin nejrůznějších přírodních produktů. Separace probíhá mechanismem iontové exkluze. Náplní je sulfonovaný styren-divinylbenzenový sorbent ve vodíkové formě (organický měnič iontů).

Závislost koncentrace solutů (látek rozpuštěných v mobilní fázi) na čase (na objemu protéké mobilní fáze) se nazývá *eluční křivka*. Tvar eluční křivky je dán složitou kombinací řady vlivů, které na látku procházející chromatografickým systémem působí (gaussovská distribuce koncentrace solutů).

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Studenti měli za úkol metodou HPLC stanovit vybrané organické kyseliny ve vzorcích červeného a bílého vína. Některé organické kyseliny jsou přirozenou složkou moštů a vín. Vznikají většinou při fotosyntéze, růstu a zrání hroznů. V moštu a ve víně jsou nejvíce zastoupené *kyselina vinná* a *jablečná*. Během kvašení a zrání vína se obsah kyselin mění a vznikají i kyseliny, které se v moště původně nenacházely, jako *mléčná*, *jantarová* a jiné. Celkový obsah kyselin ve víně je **5–7 g/l**. Obsah kyseliny vinné se po kvasném procesu sníží v důsledku vysrážení ve formě hydrogenvinanu draselného a vinanu vápenatého. Kyselina jablečná se odbourává mléčnými bakteriemi na kyselinu mléčnou a jiné produkty, zejména kyselinu octovou. Kromě uvedených kyselin se vytváří ve víně i kyselina jantarová a mravenčí, které vznikají jako vedlejší produkty alkoholového kvašení činností kvasinek, ale zejména činností bakterií.

3 UV spektrofotometrie

Soubor fyzikálně-chemických metod, jejichž společným znakem je mechanismus založený na reakci hmoty a záření, nazýváme optické metody. Hmotou zde rozumíme atomy, molekuly nebo ionty zkoumané látky v homogenním prostředí „průchodném“ pro elektromagnetické záření. Hmota a záření si vyměňují energii, přičemž u *absorpční spektroskopie* je mechanismus interakce mezi hmotou a zářením založen na schopnosti atomů, molekul nebo iontů přecházet ze stavů s menší energií do stavů energeticky bohatších a využívat k těmto přechodům dodanou zářivou energii. Naopak u *emisní spektroskopie* může atom, molekula nebo iont při přechodu v opačném smyslu energii vyzářit.

Soubor všech elektromagnetických vln, uspořádaných podle rostoucí vlnové délky se nazývá elektromagnetické spektrum. Pokrývá oblast od vysokofrekvenčního (VF), infračerveného (IČ), viditelného (VIS), ultrafialového (UV) po rentgenové (RTG) záření. Vlnové délky elektromagnetického záření se pohybují v rozmezí více než 15 řádů. Mezi jednotlivými oblastmi není ostrá hranice, jedno záření přechází plynule v druhé.

Polychromatické záření obsahuje interval vlnových délek, naopak monochromatické záření obsahuje pouze jednu vlnovou délku z elektromagnetického spektra. *Spojité spektrum* získáme, necháme-li procházet polychromatické záření disperzním prvkem. Vznikne barevné spektrum (ve kterém jsou zastoupeny všechny vlnové délky), které vydávají všechny rozpálené tuhé a kapalné látky (např. rozžhavená wolframová žárovka, rozžhavený platinový drátek). Atomy par a plynů při nízkých tlacích vydávají *čárové spektrum*, které je složeno z ostře oddělených čár. Molekuly vydávají *pásové spektrum*, které je složeno z jednotlivých čar ležících hustě u sebe. *Ultrafialová a viditelná spektra* jsou způsobena přechody elektronů ve vnější obalové slupce atomů nebo v elektronových orbitalech molekul. V prvním případě získáváme atomová optická spektra, ve druhém případě molekulová optická neboli elektronová spektra.

Zdroje záření jsou děleny podle vysílaného spektra na spojitě, čárově případně pásové zdroje záření a podle oblasti vlnových délek vydávaného záření. Pro oblast *UV záření* ($\lambda = 200\text{--}400\text{ nm}$) se používá vodíková a deuteriová výbojka. Poskytují spojitě záření v rozsahu 200–380 nm. Výhodou je možnost volby monochromatického záření jakékoliv vlnové délky v uvedeném rozsahu.

Vztah mezi absorbcí a koncentrací analytu udává Lambert-Beerův zákon. Je vyjádřen rovnicí

$$A = \varepsilon \cdot c \cdot l,$$

kde A je absorpce při dané vlnové délce, ε je molární absorpční koeficient [$\text{dm}^3 \cdot \text{mol}^{-1} \cdot \text{cm}^{-1}$] pro danou vlnovou délku a daný analyt, l je délka optické dráhy, na které

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

dochází k absorpci (tloušťka květy) [cm] a c je molární koncentrace stanovovaného analytu [$\text{mol} \cdot \text{dm}^{-3}$].

Lambert – Beerův zákon je limitní, tzn. že platí pouze za určitých podmínek:

- pro přesně monochromatické záření
- pro zředěné roztoky ($c \ll 10^{-2} \text{ mol/l}$)
- absorbující částice nepodléhají žádným změnám (interakcím)
- v měřeném systému existuje pouze 1 absorbující složka (je-li v měřeném systému více absorbujících složek absorbující při dané λ , pak je absorbance součtem všech složek).

Studenti měli za úkol stanovit koncentraci dusičnanů ve vzorku vody. Stanovení je založeno na srovnání absorbance vzorku se standardními roztoky dusičnanu draselného v koncentračním intervalu od 0 do 20 mg/l dusičnanů při vlnové délce 220 nm. tzn. odečítání absorbance mimo vrchol píku. Pro vyhodnocení je používán Microsoft Excel, který z naměřené hodnoty absorbance při 220 nm (A) přepočte na koncentraci dusičnanů v mg/l (c).

Dusičnany jsou používány jako *anorganická hnojiva* a jsou konečným produktem mineralizace organických látek. Dále jsou, spolu s dusitany, využívány jako *konzervační prostředky* při nakládání masa a výrobě sýrů (dusitan sodný E 250, dusitan draselný E 249, dusičnan sodný E 251 a dusičnan draselný E 252).

Obsah dusičnanů a dusitanů v pitné vodě je legislativně upraveno vyhláškou ministerstva zdravotnictví zákona č. 252/2004 Sb. Reguluje obsah dusičnanů v pitných vodách veřejného zásobování na 50 mg/l a obsah dusitanů na 0,5 mg/l. V České republice byla v r. 1958 norma pro dusičnany 35 mg/l. Je tedy zřejmý dlouholetý trend zvyšování povolených koncentrací dusičnanů v neprospěch zdraví spotřebitele. Dnes vlivem lidské činnosti není reálné tuto normu dodržet, proto byla hranice posunuta pro dospělého na 50 mg/l a pro kojence na 20 mg/l. Liga proti rakovině doporučuje koncentraci dusičnanů maximálně 5 mg/l!

Toxické účinky dusičnanů u člověka jsou dány hlavně jejich redukcí na dusitany a následnou tvorbou methemoglobinu (metHb). Vzniká stav tzv. *dusičnanové alimentární methemoglobinémie (DAM)*, na který jsou nejcitlivější kojenci do tří měsíců věku.

4 Polarimetrie

Polarimetrie je optická fyzikální metoda, která využívá schopnost některých sloučenin stáčet rovinu polarizovaného záření. Látky se schopností stáčet rovinu polarizovaného záření nazýváme sloučeninami *opticky aktivními*. *Optická aktivita* je jedna z nejdůležitějších a nejznámějších vlastností látek, která bezprostředně souvisí se strukturou molekul. Optická aktivita může být přechodná, způsobená zvláštním uspořádáním částic v krystalové mřížce (roztavením látky zmizí), nebo trvalá, daná zvláštní strukturou molekul. Příčinou trvalé optické aktivity látek je nesymetrie v molekule nebo iontu. Mohou existovat dva druhy molekul (iontů), z nichž jeden je zrcadlovým obrazem druhého – tzv. optické antipódy, které dělíme podle směru polarizovaného světla buď na pravotočivé nebo levotočivé.

Úhel stočení roviny polarizovaného světla α závisí nejen na charakteru látky, na vlnové délce světla a na teplotě, ale také na množství opticky aktivních částic, se kterými se paprsek polarizovaného záření setká, tedy na tloušťce vrstvy a na složení roztoku (koncentraci).

$$\alpha = k \cdot l \cdot c \quad \text{kde } c - \text{složení roztoku } \text{g/cm}^3$$

k - konstanta úměrnosti
 l - tloušťka vrstvy [dm]

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Specifická otáčivost $[\alpha]_{\lambda}^t$ roztoku se číselně rovná úhlu α , o který by se za teploty t stočila rovina polarizovaného světla (o vlnové délce λ) při jeho průchodu 1 dm tlustou vrstvou roztoku, v němž by na každý 1 dm³ roztoku připadal 1 g rozpuštěné látky.

Při měření specifické otáčivosti se zpravidla užívá monochromatické světlo, sodíkového dubletu označovaného D o vlnové délce 589,6 nm a při teplotě 20 °C. Specifickou otáčivost pak značíme $[\alpha]_D^{20}$.

Složení roztoku v g/100 cm³ vypočítáme podle vztahu:

$$c = \frac{100 \cdot \alpha}{[\alpha]_D^{20} \cdot l}$$

l ... délka polarimetrické trubice v dm
 c ... složení roztoku v g/100 cm³
 α ... naměřená hodnota úhlu optické otáčivosti ve stupních
 $[\alpha]_D^{20}$... specifická otáčivost (tabulková hodnota)

Stočení roviny polarizovaného záření měříme polarimetry. V našem případě budeme používat kruhový polarimetr METRA. Tento přístroj je vybaven stabilně nastaveným polostínovým zařízením (polarizátorem je dvojhnanol Jellet-Cornu). Otočný analyzátor je pevně spojen s kruhovou stupnicí dělenou na 360°, na níž odečítáme úhel otočení analyzátoru potřebný k dosažení optické rovnováhy.

Studenti měli za úkol v předložených vzorcích cukru určit hmotnostní zlomek sacharosy, polarimetricky stanovit koncentraci cukerného roztoku a určit neznámý vzorek porovnáním s tabulkovými hodnotami.

5 Konduktometrie

Elektrická vodivost je nejcharakterističtější vlastností roztoků elektrolytů. Kvantitativním měřítkem elektrické vodivosti je tzv. *konduktivita* (měrná vodivost) κ , která je definována vztahem

$$R = \frac{1}{\kappa} \cdot \frac{L}{A},$$

kde R je naměřený odpor v Ω , L je vzdálenost elektrod a A jejich plocha. Poměr L/A je tzv. vodivostní konstanta nádoby, která se určuje kalibrací roztokem o známé vodivosti (nejčastěji roztokem KCl).

Konduktivita κ je při nízkých koncentracích téměř přímo úměrná koncentraci přítomných iontů. Pro zjednodušení koncentrační závislosti byla Kohlrauschem definována *molární konduktivita* (molární vodivost) λ vztahem

$$\lambda = \frac{\kappa}{c}.$$

Protože konduktivita κ má rozměr S m⁻¹, je při výpočtu molární konduktivity nutno uvažovat molární koncentraci v mol m⁻³ a rozměr molární konduktivity je S m² mol⁻¹.

Podle závislosti $\lambda = f(c)$ rozdělujeme roztoky elektrolytů na silné a slabé. U silných elektrolytů molární vodivost (molární konduktivita) klesá jen pozvolna s rostoucí koncentrací. U slabých elektrolytů, které jsou jen z části disociovány na své ionty, je pokles molární vodivosti s koncentrací elektrolytu velmi výrazný a obvykle dosahuje jen několika procent nejvyšší hodnoty.

Při nekonečném zředění, kdy se ionty ve svém pohybu v elektrickém poli navzájem neovlivňují, dosahuje molární vodivost maximální hodnoty a platí pro ni vztah

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

$$\lambda^{\infty} = \nu_K \lambda_K^{\infty} + \nu_A \lambda_A^{\infty},$$

kde ν_K a ν_A představují počet kationtů a aniontů, které tvoří molekulu daného elektrolytu, λ_K^{∞} a λ_A^{∞} jsou tabelované molární vodivosti při nekonečném zředění příslušných iontů.

Podle Arrhenia platí pro disociační stupeň α slabého elektrolytu vztah

$$\alpha = \frac{\lambda}{\lambda^{\infty}},$$

kde λ je naměřená molární vodivost při dané koncentraci a λ^{∞} je molární vodivost při nekonečném zředění, kterou určíme na základě tabelovaných hodnot molárních vodivostí jednotlivých iontů. Známe-li stupeň disociace α , můžeme určit i disociační konstantu K slabého elektrolytu.

$$K = \frac{c}{c_{st}} \cdot \frac{\alpha^2}{1 - \alpha}$$

Molární koncentrace c v mol dm^{-3} , standardní molární koncentrace $c_{st} = 1 \text{ mol dm}^{-3}$.

Studenti měli za úkol stanovit konduktivitu a molární vodivost vybraných roztoků (slabého a silného elektrolytu) a porovnat je mezi sebou.

6 Závěr

Všichni účastníci si rozšířili praktické zkušenosti s moderními a často využívanými metodami instrumentální analýzy a prokázali obratnost v experimentální činnosti jako takové, tak i v logickém myšlení během úvah nad postupy a možnostmi vyhodnocení u vybraných instrumentálních metod.

7 Kontakt na autora

PaedDr. Vladimír Sirotek, CSc.
Katedra chemie FPE ZČU v Plzni
sirotek@kch.zcu.cz

ODBORNÝ KEMP PŘÍRODOVĚDNÝCH OBORŮ FYZIKA

KOSMICKÝ VÝZKUM A JEHO PRAKTICKÉ VYUŽITÍ

Lumír HONZÍK

Počátky kosmonautiky dnešní doby lze datovat do začátku minulého století. Mezi průkopníky patřil ruský vědec E. K. Ciolkovskij, americký raketový technik R. H. Goddard, který prováděl praktické pokusy a německý technik H. J. Oberth.

Raketová technika se začala vyvíjet v období II. světové války. Bohužel ne pro civilní, ale pro válečné účely. Pro civilní použití se začala využívat až v poválečném období. Mezi první milníky kosmonautiky patří vypuštění první umělé družice Země Sputniku 1 dne 4. 10. 1957, start prvního člověka do vesmíru J. A. Gagarina 12. 4. 1961 a později i přistání prvních lidí na Měsíci v létě 1969. Zatímco první dva triumfy si připsal tehdejší SSSR, přistání lunárního modulu Apollo 11 na Měsíci bylo úspěchem USA. Kromě pilotovaných letů však kosmonautika slouží i pro praktické účely. Svědčí o tom i značné množství družic, sond a laboratoří vyslaných do vesmíru. Tato zařízení jsou v současné době vynášena buď pomocí raket, nebo pomocí raketoplánů.

Výhodou kosmického průzkumu je, že není ovlivňován atmosférou Země. Ta totiž část dopadajícího záření zcela pohltí, takže k povrchu se dostává pouze viditelné záření a radiové. Ostatní druhy záření je možné detekovat pouze z kosmického prostoru. Během průchodu záření atmosférou navíc dochází vlivem neklidu v atmosféře k částečnému znehodnocení obrazové informace. Tento problém mimo atmosféru nenastane. Velkým problémem pozemských astronomických pozorování je i tzv. světelné znečištění. To je způsobeno rozptylem světla na drobných prachových zrnkách a vodních kapičkách v atmosféře. Světelné znečištění má na svědomí rychlý rozvoj veřejného osvětlení, nevhodné pouliční lampy, které nemají usměrněný světelný tok, prosklené osvětlené budovy, velké množství světelných reklam apod. V důsledku silícího světelného smogu nelze pozemskými dalekohledy sledovat některé slabé a vzdálené objekty.

Kosmické sondy a družice lze rozdělit podle účelu do několika skupin. Pro oblast astronomie jsou důležité vědecké a průzkumné (astronomické a geofyzikální). Ty zabezpečují průzkum blízkého i vzdáleného vesmíru.

V oblasti blízkého vesmíru, tedy naší sluneční soustavy sondy sledují celou řadu těles. Je monitorována aktivita Slunce v několika spektrálních oborech. Průzkumné sondy a družice přiblížily terén a podmínky na jednotlivých planetách sluneční soustavy. Při té příležitosti byla zkoumána většina přirozených měsíců, které obíhají kolem svých mateřských planet. Během výzkumu nebyla opomenuta ani meziplanetární hmota. V této oblasti probíhá kosmický výzkum asteroidů (planetek) a komet. Do budoucna budou zkoumány i trpasličí planety.

V oblasti vzdáleného vesmíru je rovněž zkoumáno velké množství objektů. Vzhledem k nesmírným vzdálenostem většinou probíhá průzkum pomocí různých typů dalekohledů umístěných na sondách. Tyto dalekohledy pracují v různých spektrálních oborech. Zřejmě nejznámějším dalekohledem je Hubbleův kosmický dalekohled (HST). Ten přinesl řadu informací o objektech vzdáleného vesmíru, jako jsou otevřené a kulové hvězdokupy, různé

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

typy kulových a spirálních galaxií včetně jejich hierarchie, svítících i temných mlhovin, různých typů hvězd apod. Tento přístroj ukázal i místa, kde vznikají nové hvězdy, srážky galaxií a celou řadu dalších exotických objektů a úkazů.

Ke zkoumání naší planety slouží družice pro dálkový průzkum Země a kosmické laboratoře (Skylab, Saljut, MIR, ISS). Tyto umělé objekty dlouhodobě sledují určité projevy jak přírodního, tak i civilizačního charakteru a pomáhají tak tyto jevy vyhodnocovat.

Kromě družic pro astronomické účely existuje celá řada dalších, jako jsou geofyzikální, geodetické a biologické družice.

Pro účely přenosu informací jakéhokoliv charakteru již po mnoho let slouží družice komunikační. Pomocí těchto družic se přenáší různé druhy signálu (zvukového (telefonní), obrazového (televizní) apod.) na velké vzdálenosti. Družice totiž dokáží pokrýt mnohem větší oblasti než by mohly obsáhnout pozemní zařízení (vysílače, retranslační stanice atd.).

Pro meteorologické a klimatologické účely jsou běžné družice meteorologické. Kvalitní synoptické mapy získané z jejich údajů dnes slouží nejen odborným meteorologickým pracovištím, ale můžeme je spatřit v televizi při předpovědích počasí a lze je získat s určitým zpožděním i na internetu. Meteorologické družice mohou sledovat a vyhodnocovat některé nebezpečné meteorologické jevy jako jsou např. cyklóny, Jižní oscilaci (El Niño, La Niña) a spustit systém včasného varování.

Neobyčejně velký význam v poslední době je připisován bezchybné kosmické navigaci (GPS). Ta lze uskutečnit pomocí sítě navigačních družic. Významný je americký systém NAVSTAR, který byl původně určen pro vojenské účely. Později byl uvolněn i pro použití v civilní sféře. Ruská federace připravuje obnovit chátrající systém s názvem GLONASS. Ten by měl sloužit nejenom Ruské federaci a státům, které spadaly pod bývalý SSSR, ale i státům, které spadaly pod bývalý východní vojensko – hospodářský blok. Pozadu nezůstává ani Evropa a připravuje svůj vlastní navigační systém Galileo. Ten by měl být založen na čistě komerční bázi.

Pro zpravodajské účely se dnes využívají zpravodajské, vojenské a špiónážní družice. Jejich činnost je většinou zahalena tajemstvím, ale je jisté, že tato vyspělá zařízení mají neobyčejně velkou rozlišovací schopnost a bývají zaměřena do konfliktních oblastí.

Kosmonautika má však význam i v oblastech, kde to není na první pohled patrné. Při vývoji nových materiálů pro kosmické lety se zjistilo, že se nechají aplikovat v některých odvětvích (např. lékařství). Na ISS probíhají pokusy, při nichž jsou vyráběny nové materiály s vynikajícími vlastnostmi, které by se mimo stav beztláče nenechaly vyrobit. Také některé technologické poznatky a postupy používané v kosmu se využívají v civilní sféře. V kosmu také vznikla řada nových účinnějších léků. Rovněž skutečnost, že astronauti se dlouhodobě pohybují v omezeném prostoru, se využívá při léčení dlouhodobě nemocných, lidí s psychickými poruchami apod. Problémy se získáváním el. energie v kosmickém prostoru vedou k vývoji technologií, při kterých je získávána solární energie i v pozemských podmínkách. Velký význam měly potřeby kosmického průmyslu v oblasti elektroniky. Požadavek, že elektronická zařízení musí být konstruována tak, aby byla co nejméně hmotná, co nejmenší, s nízkými příkony ale co největším výkonem se odrazila po létech např. v počítačové technice, komunikačních systémech a celé řady dalších aplikací. Z kosmického prostoru lze také sledovat některé nebezpečné jevy, jako jsou sopečné erupce, znečištění ovzduší, vodní hladiny, narušení ozónové vrstvy atd. Při použití vhodné techniky je také možné provádět kartografické práce a geologický průzkum.



INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Kosmický průmysl stále více zasahuje do běžného života lidské civilizace, přestože si to většinou neuvědomuje. Je ale faktem, že civilizace už nyní do značné míry závislá na rozvoji kosmonautiky a do budoucna bude míra této závislosti narůstat.

4 Použitá literatura

Malá encyklopedie KOSMONAUTIKY, Petr Lála, Antonín Vítek, Mladá fronta Praha, 1982
Člověk a vesmír (z ang. orig. Man In Space), Ilustrovaná historie kosmických letů,
H. J. P. Arnold, C. Peebles, A. Wilson, Nakladatelství a vydavatelství CESTY, 1996
Dostupné na internetu: <<http://www.lib.cas.cz/space.40/index.html>>.

5 Kontakt na autora

Lumír Honzík
Hvězdárna a planetárium Plzeň, příspěvková organizace
lumir.honzik@seznam.cz

ODBORNÝ KEMP PŘÍRODOVĚDNÝCH OBORŮ FYZIKA

ZÁKLADNÍ ORIENTACE NA NOČNÍ OBLOZE

Lumír HONZÍK

Pro člověka, který se nezajímá o astronomii je orientace, na noční hvězdné obloze velmi problematická. Pohledem na oblohu je vidět v dobrých podmínkách na celé zeměkouli asi 6 až 10 tisíc hvězd. To znamená, že z určitého místa lze spatřit kolem asi 3 tisíc hvězd. Samozřejmě, že v podmínkách přesvětlených městských a průmyslových aglomerací se počet hvězd na obloze prudce snižuje.

Aby bylo možné se na obloze orientovat, pospojovali si lidé nejjasnější hvězdy do obrazců, kterým říkáme souhvězdí. Tyto obrazce představují např. bohy, zvířata nebo věci. Každý národ měl na obloze své obrazce souhvězdí, která se v některých rysech shodovala s jinými národy, v některých případech byly obrazce odlišné. Většina názvů pro souhvězdí a jasné hvězdy v nich obsažené pochází od Arabů, Peršanů, Římanů, Řeků a dalších národů. V roce 1925 Mezinárodní astronomická unie souhvězdí sjednotila. Od té doby máme na obloze celkem 88 souhvězdí, která mají přesně definovány latinské názvy, hranice a objekty v nich obsažené. Kromě latinského názvu má každé souhvězdí definovanu i latinskou zkratku. Souhvězdí má kromě mezinárodního latinského názvu i svůj národní název v příslušném jazyce.

Souhvězdí na obloze lze dělit podle různých kritérií např.: na severní a jižní souhvězdí, na cirkumpolární (nezapadající), vycházející a zapadající (pro určitou zeměpisnou šířku) a na souhvězdí nevycházející (opět pro určitou zeměpisnou šířku). U nás se také používá dělení na souhvězdí cirkumpolární, jarní, letní, podzimní, zimní a nevycházející. Toto orientační dělení platí pro večerní oblohu.

Trochu zvláštní skupinu tvoří tzv. zvířetníková souhvězdí. Pásem těchto souhvězdí prochází ekliptika, což je zdánlivá dráha Slunce po obloze. V oblasti zvířetníkových souhvězdí se kromě Slunce také po obloze pohybuje Měsíc a planety sluneční soustavy. Zvířetníková souhvězdí se používají nejen pro účely astronomické, ale v určitém smyslu i astrologické. V astrologickém smyslu se však používají spíše znamení zvířetníkových souhvězdí, neboť vlivem precesního pohybu zemské osy se znamení vůči souhvězdím posunula.

Kromě souhvězdí se pro účely orientace na obloze používají i výrazné skupiny hvězd. Do této skupiny patří např. Velký vůz, který není samostatným souhvězdím, ale pouze známou výraznou skupinou hvězd, která ve skutečnosti patří do souhvězdí Velké medvědice. Podobným případem je Malý vůz, což je součást souhvězdí Malého medvěda. U zimního souhvězdí Orion máme dokonce několik menších výrazných obrazců. Jedná se např. o Orionův pás, tvořený třemi výraznými hvězdami, dále Orionův štít, dýku a kyj. Další výrazná skupina např. na jarní obloze je jarní nebo letní trojúhelník. Konkrétně letní trojúhelník je tvořen třemi hvězdami z různých souhvězdí, konkrétně hvězdou Deneb z Labutě, Vegou z Lyry a Altairem z Orla. Na zimní obloze je zase obrazec, kterému se říká zimní G.

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Viditelnost jednotlivých souhvězdí je závislá na několika faktorech. Prvním faktorem je poloha pozorovacího stanoviště, druhým faktorem je datum pozorování a třetím je čas pozorování. Při znalosti uvedených faktorů můžeme plánovat pozorovací akce, nebo můžeme zpětně zjistit, zda např. byl určitý astronomický objekt pozorovatelný.

Souhvězdí je pro pozorovatele plošným obrazcem na obloze. Při běžném pohledu si většinou neuvědomíme, že se jedná o obrazec prostorový. Navíc až na některé výjimky spolu jednotlivé hvězdy vůbec fyzicky nesouvisí. Jedná se o náhodnou projekci hvězd na obloze. Pokud bychom ale proměřili vzdálenosti jednotlivých hvězd, došli bychom k poznání, že jsou od nás v různých vzdálenostech. Jasnost jednotlivých hvězd je ale daná nejen jejich vzdáleností, ale i třeba jejich velikostí a povrchovou teplotou. Ta ovlivňuje i jejich barvu.

Rovněž tvary souhvězdí nejsou neměnné. Při pohledu okem nebo dalekohledem změny nezaznamenejeme. Ale při přesných astrometrických měření v časově delším horizontu lze zjistit, že každá hvězda se pohybuje určitým směrem a určitou rychlostí. Takže např. před 50 tisíci lety mělo souhvězdí Cassiopeia zcela jiný tvar a jiné jasnosti hvězd než má dnes a za 50 tisíc let bude mít zase jiný tvar. Hvězdy, které se budou pohybovat směrem k naší planetě se zjasní, ty které se budou pohybovat v opačném směru zeslábnou.

Zajímavý je také zdánlivý pohyb hvězd po obloze způsobený rotací Země. Hvězdy v blízkosti např. SSP (severního světového pólu), tedy v našich zeměpisných šířkách hvězdy cirkumpolární opisují kružnice, jejichž poloměr závisí na úhlové vzdálenosti od SSP. Ostatní hvězdy opisují oblouky podobné dráze Slunce. Během pohybu souhvězdí dochází i k jeho pootáčení, což je důležité si uvědomit např. při astronomickém fotografování.

Viditelnost hvězd, souhvězdí, objektů v jednotlivých souhvězdích lze nastavit na otáčivé mapě oblohy. Tato astronomická pomůcka při správném nastavení ukazuje aktuální situaci na obloze. Stačí správně nastavit požadovaný čas vůči datu a pak mapu správně zorientovat podle světových stran. Ve výřezu mapy se ukáže aktuální obloha, mimo výřez jsou objekty pod obzorem. Při použití této pomůcky musíme brát ohled na aktuálně platný čas.

Při orientaci na obloze a vyhledávání objektů se také používají souřadnicové systémy. Je jich několik druhů, ale nejčastěji jsou používány dva: azimutální (obzorníkový) a II. ekvatoreální (rovníkový).

Azimutální (obzorníkový) souřadnicový systém udává azimut a výšku tělesa nad ideálním horizontem. Počátek systému je v průsečíku ideálního horizontu (vodní hladina) a spojnice jižního bodu na obzoru a zenitu (místo kolmo nad hlavou a úhlově vzdálené 90° od ideálního obzoru). První souřadnici tvoří azimut A narůstající od jižního bodu směrem na západ. Jeho hodnota je v intervalu od 0° do 360°. Druhou tvoří výška tělesa nad obzorem. Výšková souřadnice narůstá od 0° do 90° (0° je ideální horizont, 90° je zenit). Azimutální souřadnice se mění v závislosti na čase, a proto tyto souřadnice není možné zaznamenat do mapy.

Druhý používaný systém jsou II. ekvatoreální (rovníkové) souřadnice (existují i I. ekvatoreální souřadnice). Počátek souřadnicového systému je v průsečíku světového rovníku a ekliptiky. Tyto průsečíky jsou dva, jarní a podzimní bod. Počátek se nachází v jarním bodě. První souřadnici tvoří azimut rektascenze narůstající od jarního bodu v matematicky kladném směru. Jeho hodnota je v intervalu od 0 do 24 hodin. Druhou tvoří výška tělesa nad světovým rovníkem. Výšková souřadnice narůstá od 0° do 90° (0° je na světovém rovníku, 90° severní světový pól). Světové póly jsou místa, na která míří pomyslná rotační osa Země. Na severní polokouli se toto místo nachází v současné době poblíž hvězdy Polárky (Severky). Tato oblast se v důsledku precesního pohybu mění. Je-li těleso pod úrovní světového rovníku, má výška



INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

zápornou hodnotu. Jižní světový pól má hodnotu -90° . Druhé ekvatoreální souřadnice se nemění v závislosti na čase, a proto v těchto souřadnicích mohou být tisknuty astronomické mapy.

V astronomických mapách jsou zpravidla kromě hlavních spojnic souhvězdí a hranic zaznamenány i jednotlivé objekty stanovenou symbolikou, vysvětlenou v legendě k mapám. Ta se může u různých typů astronomických map poněkud lišit.

Pro určení úhlových vzdáleností se mohou buď provádět odhady např. pomocí natažené ruky (šířka prstu asi $2,5^\circ$, pěsti $9^\circ - 10^\circ$, roztažené prsty ruky 22°) nebo využít znalosti úhlových vzdáleností některých známých hvězd. Pro přesnější určení úhlové vzdálenosti je zapotřebí použít některý z astrometrických přístrojů (sextant, teodolit).

Pro dobrou orientaci na obloze je také nutné se naučit základní tvary obrazců souhvězdí. Nestačí se tyto tvary naučit jen teoreticky z knih, ale je zapotřebí si toto ozkoušet v praxi přímo pod hvězdnou oblohou.

4 Použitá literatura

Cesty za poznáním Astronomie 1, David H. Levi, nakladatelství Svojtka&Co, 1999

Průvodce noční oblohou, Joachim Ekrutt, nakladatelství Svojtka&Co

Průvodce přírodou, Hvězdy, Joachim Hermann, Knižní klub Praha ve spolupráci s Ikar Praha, 1997

Dostupné na internetu: <<http://hvezdy.astro.cz/souhvezdi/793-seznam-souhvezdi>>

5 Kontakt na autora

Lumír Honzík

Hvězdárna a planetárium Plzeň, příspěvková organizace

lumir.honzik@seznam.cz

ODBORNÝ KEMP PŘÍRODOVĚDNÝCH OBORŮ FYZIKA

JAK OVLIVŇUJE SLUNCE PLANETU ZEMI

Lumír HONZÍK

Slunce je pro planetu Zemi zdrojem tepla a světla. Jedná se o dominantní energetický a zároveň ekologický zdroj s celkovým výkonem $3,7 \times 10^{23}$ kW. Země zachytí ovšem jen zlomek tohoto záření – přibližně $1,7 \times 10^{14}$ kW. To je výkon, který by se přibližně rovnal asi 85 000 jaderným elektrárnám v Temelíně, které by pracovaly na plný výkon (2000 MW). Dopadající energie stačí např. na zajištění koloběhu vody v přírodě, fotosyntézy rostlin a tím i udržování potravinového řetězce, akumulaci sl. energie v prehistorických dobách (vznik uhlí, ropná naleziště, proudění v atmosféře apod. Slunce je ale i zdrojem dalšího záření v celé šířce energetického spektra. Země se pohybuje ve vzdálenosti 1 AU (astronomické jednotky – 149,6 mil. km), tedy v oblasti, kde jsou vlivy tohoto záření velmi intenzivní.

Mimo běžného energetického vyzařování se na Slunci odehrávají poměrně složité procesy související s aktivitou Slunce. Tyto projevy sluneční činnosti vznikají ve sluneční atmosféře v aktivních oblastech. Za určitých podmínek se následky aktivity mohou dostat i k Zemi a pro civilizaci mohou být nebezpečné.

Při astronomickém pozorování Slunce lze detekovat aktivní oblasti a lze vytvořit i jistou předpověď.

V oblasti fotosféry, což je nejnižší vrstva sluneční atmosféry, jsou nejmarkantnějším projevem aktivity skupiny slunečních skvrn. Jedná se o aktivní projevy v oblasti fotosféry generované lokálními magnetickými poli. Skvrna je tedy oblast, kde magnetické siločáry vyvěrají nad povrch. Samotná skvrna je v podstatě depresí na „slunečním povrchu“. Má tmavý střed zvaný umbra (stín) a kolem ní je světlejší vláknitá struktura - penumbra (polostín). Teplotu okolní fotosféry dosahuje asi 5700 K. Teplota ve skvrnách je nižší asi o 1500 K a tím se jeví skvrny tmavší. Každá skvrna začíná svůj život jako drobná tmavá skvrna, kterou označujeme jako pór. Ten po krátké době (minuty) většinou zanikne. Z některých se ale vyvinou skvrny, které mají mnohem delší životnost. Ta se pohybuje od 1 dne do několika dnů až měsíců. Skvrna se postupně vyvíjí, mohutní a poté zase slábne a zaniká. Může mít různou velikost a tvar. V okolí skvrn lze pozorovat i světlejší oblasti s vyšší teplotou. Jedná se o fakulová pole. Životnost těchto útvarů je zpravidla o něco delší než u skvrn, které obklopují. Skvrny se na Slunci objevují jak osamocené, tak i ve skupinkách. Jsou období, kdy na Slunci žádné skvrny nejsou – období tzv. minima a pak se začnou objevovat stále častěji. Období, kdy je jich na Slunci nejvíce, je označeno jako maximum. Poté začne aktivita zase slábnout až do dalšího minima. Období od jednoho minima ke druhému se nazývá jeden sluneční cyklus. Průměrná délka se pohybuje kolem 11 let, proto se nazývá jedenáctiletým cyklem sluneční aktivity. Skvrny se během cyklu nevyskytují na celém disku, ale nejvíce v oblastech tzv. Královských pásů (asi +/- 5° až +/- 35° heliografické šířky).

Další intenzivní projevy sluneční aktivity lze pozorovat v chromosféře, což je střední vrstva sluneční atmosféry. Některé z těchto projevů jsou pozorovány i v koróně, tedy svrchní vrstvě sluneční atmosféry. I tato aktivita souvisí s magnetickým polem. Pozorování projevů

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

v chromosféře a v koróně není možné okem (kromě velmi krátké doby během úplného zatmění Slunce), ale pomocí speciálně upravených dalekohledů (chromosférický dalekohled, koronograf). Pozorování se provádí většinou na čáře H alfa.

V chromosféře dochází ke zjasnění určité oblasti. Toto zjasnění několika chromosférických vláken je chromosférickou erupcí. Jedná se v podstatě o výron energie. Mohutnost erupce se odvozuje z plochy zasažené oblasti a z doby trvání erupce.

Dalším projevem aktivity jsou protuberance. V tomto případě se jedná o výron hmoty nad sluneční disk. Pokud tento úkaz pozorujeme na okraji slunečního disku, hovoříme o protuberanci. Pokud se nám však protuberance promítne přímo na disk Slunce ve formě tmavého vlákna, mluvíme o filamentu. Ten je tmavší než okolní chromosféra, protože je chladnější. V mnoha případech ale dochází ke spojení projevů erupčních a protuberančních. Pak dochází k tzv. eruptivním protuberancím, což jsou nejsilnější a nejnebezpečnější projevy sluneční aktivity, neboť dochází k uvolnění jak energie, tak i hmoty. Pokud se takový energetický oblak částic odtrhne od Slunce, putuje do okolního prostoru a může zasáhnout i planetu Zemi.

Země je naštěstí chráněna geomagnetickým polem, které vytváří účinný nárazník pro energetické částice ze Slunce a zároveň dochází k vychýlení trajektorie částic. V praxi většina částic je tedy magnetickým polem Země odkloněna. Nicméně v oblasti magnetických pólů Země může určité množství částic vniknout do vysoké atmosféry Země. V tomto případě dojde k rekombinaci částic, což se projeví světélkováním, pozorovatelným hlavně v oblasti severního a jižního polárního kruhu polární záře.

Projevy slunečních bouří však mohou mít i jiné důsledky. Ovlivňují např. ionosféru Země. Mohou do značné míry rušit až znemožnit příjem radiových vln. Může dojít k poškození rozvodných sítí el. energie a elektráren. V minulosti se to stalo např. v USA a Kanadě. Na dlouhých trasách, kde jsou souběžné vodiče el. energie totiž došlo k indukci a vzniku přepětí. Může dojít k zesílení tzv. bludných proudů, které mohou negativně ovlivnit např. signalizační a poruchové okruhy. Silné sluneční bouře mohou ovlivnit elektronická zařízení, což může vést ke katastrofám v letecké dopravě. Mohou být také zničující pro kosmické družice a sondy, které se pohybují nechráněné ve volném kosmickém prostoru. Civilizace totiž kosmickou techniku v současnosti používá mnohem intenzivněji než v minulosti. Tato technika dnes do značné míry zajišťuje např. telekomunikaci, meteorologii, navigaci, zpravodajství, zbrojní průmysl atd. Proto se při předpovědi silné sluneční aktivity, mířící k naší Zemi, družice a sondy natáčí vůči Slunci tak, aby nevystavovaly své nejcitlivější přístroje a zařízení. Silná aktivita může být nebezpečná i pro pilotovanou kosmonautiku a představuje i omezení pro uvažovaný pilotovaný let k Marsu.

Proto je nutné neustále pomocí slunečních dalekohledů a slunečních družic monitorovat, co se na Slunci odehrává. Je také nutné se snažit porozumět těmto projevům a správně tyto jevy interpretovat a předpovídat.

4 Použitá literatura

Odhalená tajemství Slunce, Rudolf Kippenhahn, Nakladatelství Mladá fronta, Edice Kolumbus, 1999

Ilustrovaný slovník termínov slnečnej a slnečno-zemskej fyziky, vydalo Slovenské ústredie amatérském astronomie Urbanovo, 1983

Dostupné na internetu: <<http://hvezdy.astro.cz/slunce/727-slunce>>

Dostupné na internetu: <<http://www.astro.cz/obloha/slunce/>>



INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

5 Kontakt na autora

Lumír Honzík

Hvězdárna a planetárium Plzeň, příspěvková organizace

lumir.honzik@seznam.cz

ODBORNÝ KEMP PŘÍRODOVĚDNÝCH OBORŮ FYZIKA

ZATMĚNÍ SLUNCE A MĚSÍCE, FÁZE MĚSÍCE

Lumír HONZÍK

Problematika zatmění a fází měsíce se týká tří těles. Prvním a největším tělesem je Slunce, které představuje přirozený zdroj světla (samozřejmě i tepla). Slunce má průměr necelých 1 400 000 km a nachází se v průměrné vzdálenosti od země 149,6 miliónu km, což je 1 AU (astronomická jednotka). Z této vzdálenosti se Slunce jeví pod úhlem přibližně $0,5^\circ$.

Druhým tělesem je Měsíc, což je přirozená družice Země. Měsíc nesvítí vlastním světlem, ale pouze odráží světlo od Slunce. Jeho průměr dosahuje 3 476 km a okolo Země se pohybuje v průměrné vzdálenosti přibližně 385 000 km. I on se z této vzdálenosti jeví pod úhlem kolem $0,5^\circ$, tedy přibližně stejným jaké má Slunce. Dráha Měsíce je velmi komplikovaná. Nejen že je excentrická, ale je i skloněna pod úhlem $5,2^\circ$.

Třetím tělesem je planeta Země, pátá největší planeta sluneční soustavy. Její průměr dosahuje 12 756 km.

Planeta Země rotuje kolem své osy, čímž dochází ke střídání dne a noci. Její rotační perioda vůči hvězdám (siderická rotace), trvá 23 h 56 m 32 s. Vůči Slunci (synodická rotace) trvá otočka 24 hod. Rotační osa je skloněna o úhel $23,5^\circ$. Země vykonává ještě další pohyb. Tím je oběh Země kolem Slunce. Ten trvá přibližně 365,25 dne a je od něj odvozena délka kalendářního roku. Kolem Země obíhá Měsíc a spolu se Zemí společně putují kolem Slunce. Měsíc má vázanou rotaci, což znamená, že doba oběhu kolem Země je totožná s dobou jeho rotace. To mimo jiné znamená, že vůči Zemi přivrací stále stejnou stranu a tím je možné spatřit pouze jednu polovinu jeho povrchu. V praxi však lze spatřit více jak polovinu povrchu (asi 57%). Je to tím, že se Měsíc v prostoru trochu kolébá. Tomuto kolébání se odborně říká librace a ty nastávají jak v selenografické délce, tak i v selenografické šířce. V praxi existuje několik typů librací. Tím jak Měsíc obíhá Zemi, dostává se geometricky do různých poloh a mohou nastat některé pozorovatelné úkazy. Jedním z nich je pravidelné střídání měsíčních fází. Dalším úkazem mohou být zatmění Slunce nebo Měsíce, které však nastanou jen při splnění některých podmínek.

Střídání měsíčních fází

Tím, jak Měsíc obíhá kolem naší planety, mění se nasvětlení jeho povrchu a tedy i jeho fáze. Doba jednoho oběhu kolem Země je siderická rotace a trvá 27 d 7 h 43 m 11,5 s. Aby se však Měsíc dostal do stejné fáze, tedy natočil se do určité polohy i vůči Slunci, je zapotřebí delšího času. Touto dobou je rotace synodická, která trvá 29 d 12 h 44 m 2,8 s.

Z této rotace je odvozena doba jednoho kalendářního měsíce. Týden je přibližně odvozen z doby od jedné fáze k druhé, což je přibližně 7,2 dne.

Do novu se dostává Měsíc, nachází-li se přibližně mezi Sluncem a Zemí. Je proto na denní obloze, ale má nasvícenou opačnou polokouli (odvrácenou stranu) a proto ho nelze po dobu asi 3 dnů spatřit.

Pak se objeví ve formě slabého srpečku, který s postupem času mohutní. Asi po sedmi dnech se Měsíc dostane do první čtvrti a na obloze připomíná písmeno D (D jako dorůstá). Je

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

totiž nasvětlena jeho pravá polovina (platí pro severní polokouli, na jižní je to opačně). V této fázi je přibližně viditelný od odpoledne, velmi dobře na večer (vysoko nad jihem) a pak až skoro do půlnoci.

O dalších sedm dní později se dostává přibližně za Zemi a na obloze má tvar kolečka. Měsíc je v úplňku a lze ho spatřit po celou noc. Nejvýše nad jižním obzorem je kolem půlnoci.

Za další týden bude mít Měsíc nasvětlenou pouze levou polovinu (opět platí pro severní polokouli, na jižní je to opačně). Na obloze připomíná písmeno C (C jako couvá). V tomto období je přibližně viditelný od půlnoci, velmi dobře ráno (vysoko nad jihem) a pak až skoro do odpoledne.

Po dalším týdnu je měsíc opět v novu a cyklus se opakuje.

Zatmění Měsíce

Nepříliš často dochází k úkazu, kterému říkáme zatmění Měsíce. Během něho dochází na určitou dobu k potměnění jeho povrchu.

Zatmění Měsíce je možné z těchto důvodů:

1. Planeta Země vrhá do prostoru sbíhavý kužel plného stínu a rozbíhavý kužel polostínu.
2. Kužel plného stínu má délku kolem 1 380 000 km, což je dostatečná hodnota proto, aby byl stín v úrovni dráhy Měsíce dosti široký a tudíž se do něj mohl celý Měsíc ponořit.
3. Měsíční dráha má sklon vůči ekliptice $5,2^\circ$.
4. Dráha Měsíce protíná ekliptiku ve dvou bodech – vzestupném a sestupném uzlu.
5. Spojnice vzestupného a sestupného uzlu se v prostoru pomalu stáčí.

Aby zatmění Měsíce mohlo nastat, musí být splněno několik podmínek:

1. Měsíc se musí nacházet za planetou Zemí, tedy na opačné straně než je Slunce.
2. Je jasné, že v tu chvíli je ve fázi úplňku.
3. Spojnice obou jeho uzlů musí být natočena ke Slunci.
4. Měsíc se musí zároveň nacházet v blízkosti jednoho z uzlů na straně od Slunce, tedy za Zemí.

U měsíčních zatmění nastávají tři typy:

1. Polostínové zatmění Měsíce – nastává v okamžiku, kdy Měsíc vstoupí do rozbíhavého kužele polostínu. V praxi nemá význam, protože je nepozorovatelné. Lze ho zaznamenat pouze přístrojovou technikou.
2. Částečné zatmění Měsíce – nastává v okamžiku, kdy sbíhavý kužel plného stínu dopadne na část měsíčního povrchu. Tento typ lze pozorovat i okem.
3. Úplné zatmění Měsíce – nastává v okamžiku, kdy se celý Měsíc ponoří do plného stínu Země. Je pozorovatelné pouhým okem. Během úplného zatmění bývá Měsíc někdy velmi tmavý, jindy dostává různě intenzivní cihlově oranžové zbarvení. Zbarvení Měsíce během úplné fáze zatmění je závislé na znečištění atmosféry Země, neboť ta část paprsků pohlcuje a část paprsků rozptyluje.

Měsíční zatmění jsou méně častá než sluneční. Lze je však pozorovat z celé přivrácené polokoule (pokud není zataženo), takže je většina lidí již viděla. Pro vědecké účely nemají již žádný praktický význam.

Zatmění Slunce

Nepříliš často dochází i k dalšímu úkazu, kterému říkáme zatmění Slunce. Během něho dochází k postupnému překrývání slunečního disku Měsícem. V případě úplného zatmění se disk Slunce na určitou dobu schová za disk Měsíce.

Zatmění Slunce je možné z těchto důvodů:

1. Měsíc vrhá do prostoru sbíhavý kužel plného stínu a rozbíhavý kužel polostínu.
2. Kužel plného stínu má dostatečnou délku, aby dopadl až na zemský povrch.
3. Měsíc má na obloze přibližně stejný úhlový průměr jako Slunce (úhlové průměry závisí na okamžité vzdálenosti Slunce – Země, Země – Měsíc).
4. Měsíční dráha má sklon vůči ekliptice $5,2^\circ$.
5. Dráha Měsíce protíná ekliptiku ve dvou bodech – vzestupném a sestupném uzlu.
6. Spojnice vzestupného a sestupného uzlu se v prostoru pomalu stáčí.

Aby zatmění Slunce mohlo nastat, musí být splněno několik podmínek:

1. Měsíc se musí nacházet mezi Sluncem a planetou Zemí.
2. Je jasné, že v tu chvíli je ve fázi novu.
3. Spojnice obou jeho uzlů musí být natočena ke Slunci.
4. Měsíc se musí zároveň nacházet v blízkosti jednoho z uzlů na straně u Slunce.

Rovněž u slunečních zatmění nastávají tři typy:

1. Částečné zatmění Slunce – nastává v okamžiku, kdy Měsíc začne zakrývat sluneční disk. V praxi nemá celkem žádný vědecký význam, pro cvičnou odbornou činnost lze řešit některé matematické úlohy. Je dobře pozorovatelné i okem přes vhodný filtr.

Během částečné fáze ale lze pozorovat pokles osvitů, pokles teploty, změny v barvách okolní krajiny. Těchto změn si ale povšimneme až po určité době při větší fázi zatmění.

2. Prstencové zatmění Slunce – jedná se o speciální typ částečného zatmění Slunce, kdy Měsíc nedokáže zcela zakrýt sluneční disk a na krátkou dobu (několik sekund) je pozorovatelný pouze světelný kroužek. Tento typ zatmění nastane, je-li Země vůči Slunci v relativně malé vzdálenosti a tím má na obloze o něco větší úhlový průměr. Zároveň ale Měsíc je vůči Zemi v relativně velké vzdálenosti a tím má na obloze o něco menší úhlový průměr. Nedokáže proto zcela zakrýt disk Slunce. Prstencové zatmění začíná a končí jako částečné. Podobně jako částečné, nemá ani prstencové zatmění žádný vědecký význam a hodí se spíše pro cvičné úlohy.

3. Úplné zatmění Slunce – nastává v okamžiku, kdy Měsíc zcela zakryje disk Slunce. I tento typ zatmění začíná a končí částečným zatměním. Úplné zatmění Slunce je pozorovatelné pouze v místě, kam dopadá kužel plného stínu. Tato stopa se nazývá stopou totality. Její šířka se pohybuje kolem 150 až 250 km, délka několik tisíc km. Tento typ zatmění trvá jen několik minut (max. 7,5 min.) a je pozorovatelný pouhým okem. Během úplné fáze je viditelná horní vrstva sluneční atmosféry – koróna, v dalekohledu i protuberance. V průběhu jsou viditelné i jasné hvězdy a planety.

V okamžiku před a těsně po úplném zatmění lze pozorovat po krátký čas i další úkazy jako jsou Bayliho perly, efekt diamantového prstenu, letící stíny apod. Na částečnou a hlavně úplnou fázi zatmění může reagovat příroda (fauna i flóra).



INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Zatmění Slunce) jsou sice častější než měsíční, ale jejich sledování (hlavně úplná zatmění) jsou omezená pouze na oblast pásu tzv. totality. Proto je sleduje jen malý počet lidí. Úplné zatmění pro jedno místo na Zemi nastává v průměru jednou za 200 let. Pro vědecké účely mají dodnes velký význam.

Perioda saros

Po určité době dochází k opakování stejných typů slunečních i měsíčních zatmění. Tato perioda se nazývá saros a trvá 223 synodických měsíců což je 18 roků a 10 dní.

4 Použitá literatura

Cesty za poznáním Astronomie 1, David H. Levi, nakladatelství Svojtka&Co, 1999

Přehled astronomie, RNDr. Oldřich Hlad, Ing. Jaroslav Pavloušek, Polytechnická knihnice, Věda a technika populárně, Praha 1990

Astronomie I., V. Guth, F. Link, J. M. Mohr, B. Šternberk, Nakladatelství Československé akademie věd, Praha 1954

Dostupné na internetu: <<http://hvezdarna.plzen.eu/zatmeni/index.html>>

Dostupné na internetu: <<http://hvezdarna.plzen.eu/zatmeni/semm/index.html>>

Dostupné na internetu: <<http://astro.sci.muni.cz/zatmeni/>>

Dostupné na internetu:

<http://www.google.cz/imgres?imgurl=http://www.astro.cz/_data/images/news/2009/06/11/tse2008_500h_mo1.png&imgrefurl=http://www.astro.cz/clanek/3855&usg=__dKkeZQp2o9Gu5M7VuMItAzq5br4=&h=1243&w=1797&sz=2660&hl=cs&start=40&zoom=1&um=1&itbs=1&tbnid=ty6PzMhKOo_LJM:&tbnh=104&tbnw=150&prev=/images%3Fq%3DZatm%25C4%259Bn%25C3%25AD%25Bslunce%26start%3D21%26um%3D1%26hl%3Dcs%26sa%3DN%26rls%3Dcom.microsoft:en-US%26ndsp%3D21%26tbs%3Disch:1>

5 Kontakt na autora

Lumír Honzík

Hvězdárna a planetárium Plzeň, příspěvková organizace

lumir.honzik@seznam.cz

ODBORNÝ KEMP PŘÍRODOVĚDNÝCH OBORŮ FYZIKA

ŘEŠENÍ OBTÍŽNĚJŠÍCH ÚLOH Z MECHANIKY

Petr Mazanec

1 Úvod

Na třech příkladech z klasické mechaniky bylo ukázáno využití základních zákonů zachování a matematické řešení těchto úloh.

2 Obsah

Příklad 1 – člověk na rotující desce

Člověk stojí s upaženýma rukama na vodorovné desce, která bez tření rotuje s frekvencí $f_0 = 1,2 \text{ ot} \cdot \text{s}^{-1}$. V každé ruce drží závaží. Moment setrvačnosti člověka, závaží a desky vzhledem k ose otáčení je $J_0 = 6,0 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$. Člověk připaží a zmenší tak moment setrvačnosti na $J_1 = 2,0 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$.

- Jak se změní frekvence rotace desky?
- Vypočítejte, jak se změní kinetická energie soustavy.
- Jak vysvětlíte případnou změnu kinetické energie?

Řešení:

a) Na desku a člověka působí pouze tíhová síla, jejíž vektor je rovnoběžný s osou rotace. V rovině rotace nepůsobí žádná vnější síla a platí proto zákon zachování momentu hybnosti vzhledem k ose otáčení. Tento zákon vyjádříme jednoduchou rovnicí

$$J_0 \cdot \omega_0 = J_1 \cdot \omega_1$$

kde ω_0 je počáteční úhlová rychlost a ω_1 je výsledná úhlová rychlost poté, co člověk připažil. Takže dostáváme

$$J_0 \cdot 2\pi \cdot f_0 = J_1 \cdot 2\pi \cdot f_1$$

$$f_1 = \frac{J_0 \cdot f_0}{J_1} = 3,6 \text{ ot} \cdot \text{s}^{-1}$$

b) Kinetická energie rotačního pohybu je $E_k = \frac{J \cdot \omega^2}{2}$. Poměr kinetické energie po připažení a před ním je

$$\frac{E_{k1}}{E_{k0}} = \frac{J_1 \cdot \omega_1^2}{J_0 \cdot \omega_0^2} = \left(\frac{J_1}{J_0}\right) \cdot \left(\frac{J_0}{J_1}\right)^2 = \frac{J_0}{J_1} = 3$$

Kinetická energie rotačního pohybu se tedy zvýšila třikrát, vypočítejme ještě, o kolik se zvýšila.

$$\Delta E_k = E_{k1} - E_{k0} = \frac{J_1 \cdot \omega_1^2 - J_0 \cdot \omega_0^2}{2} = J_0 \cdot \omega_0^2 = 4\pi^2 \cdot f_0^2 \cdot J_0 = 340 \text{ J}$$

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

c) Kinetická energie soustavy se zvětší o práci vykonanou člověkem při přiblížení závaží k ose dostředivou silou. Ta se koná na úkor jeho vnitřní energie. Také vás může napadnout, jaký moment síly způsobil roztočení desky. Přiblížením závaží ke středu zmenšujeme jejich okamžitou rychlost. Paže tedy na závaží působí kromě dostředivé síly ještě silou namířenou proti jejich okamžité rychlosti, kterou je brzdí. Podle principu akce a reakce působí závaží na paži reakcí namířenou ve směru jejich okamžité rychlosti a tím zvětšují úhlovou rychlost celé soustavy.

Příklad 2 – bungee-jumping

Vyznavač bungee-jumpingu se chystá skočit z mostu vysokého $H = 45,0$ m na pružném laně dlouhém $L = 25,0$ m, jehož tuhost je $k = 160 \text{ N} \cdot \text{m}^{-1}$. Hmotnost skokana je $m = 61,0$ kg. Lano má skokan přivázané ke kotníkům, sledujeme trajektorii právě kotníku. Výšku skokana zanedbejte.

- Jaká bude výška skokana nad hladinou řeky v nejnižším bodě jeho trajektorie po seskočení z mostu?
- Jaká síla působí na skokana v nejnižším bodě?
- V jaké výšce má skokan největší rychlost? Určete tuto rychlost.

Řešení:

a) Využijeme zákon zachování energie, ztráty dané odporem vzduchu a napínáním pružiny zanedbáme. V nejnižším bodě trajektorie (ve výšce h nad hladinou) se skokan na chvíli zastaví, jeho kinetická energie je zde nulová. Úbytek potenciální energie skokana (hmotnost lana zanedbáme) se projeví nárůstem energie pružnosti lana. Tuto myšlenku vyjádříme následující rovnicí

$$m \cdot g \cdot (H - h) = \frac{k \cdot (H - h - L)^2}{2}.$$

Skokan totiž vzduchem proletí svislou vzdálenost $H - h$ a lano se protáhne o $H - h - L$ vůči své klidové délce L . Z této rovnice stačí vyjádřit h a máme první část úlohy vyřešenou. Rovnice je však kvadratická, a tak dostáváme dvě řešení

$$h = H - l - \frac{m \cdot g}{k} \pm \sqrt{\frac{m \cdot g \cdot \left(2 \cdot L + \frac{m \cdot g}{k} \right)}{k}}$$

Jistě víme, že se lano natáhlo, proto musí být $h < H - L$. Výraz pod odmocninou je větší než $(mg/k)^2$, takže fyzikálně správné řešení je se znaménkem minus. Nejnižší výška skokana nad hladinou řeky vychází $h = 2,08$ m, právě, aby se nenamočil.

b) Na skokana působí dvě síly – tíhová $F_g = mg$ a síla pružnosti $F_p = kx$. Celková síla působící na skokana v nejnižším bodě míří vzhůru (neboť je skokan urychlován směrem nahoru) a má velikost

$$F = k(H - h - L) - mg = 2 \text{ 270N}.$$

Taková síla uděluje skokanovi v nejnižším bodě zrychlení $a = F/m = 37,2 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$, což je asi čtyřnásobek tíhového zrychlení.

c) Do okamžiku, než se začne napínat lano, je skokan urychlován tíhovou silou. Následně začíná síla pružnosti lana růst, skokan však neustále zrychluje, dokud

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

se síla pružnosti nevyrovná tíhové síle (ve výšce h_0)

$$k(H - h_0 - L) = mg.$$

Po tomto okamžiku síla pružnosti převládne a skokan zpomaluje. Nejvyšší rychlost má tedy skokan ve výšce

$$h_0 = H - L - \frac{m \cdot g}{k} = 16,3m.$$

Rychlost skokana v této výšce určíme snadno ze zákona zachování energie

$$m \cdot g \cdot (H - h_0) = \frac{m \cdot v^2}{2} + \frac{k \cdot (H - h_0 - L)^2}{2}$$

$$v = \sqrt{2gL + \frac{mg^2}{k}} = 23,0m \cdot s^{-1}$$

Příklad 3 – pružná srážka

Na vodorovné vzduchové dráze se mohou volně pohybovat dva vozíky. Jeden z nich je na počátku v klidu a druhý do něho narazí. Dojde k pružné srážce, po níž se oba vozíky rozjedou na opačné strany rychlostmi stejné velikosti. Jaký je poměr jejich hmotností?

Řešení:

Vzhledem k tomu, že se vozíky pohybují po vzduchové dráze, zanedbejme odpor proti jejich pohybu. Po celou dobu tedy platí zákon zachování hybnosti i mechanické energie, neboť se jedná o pružnou srážku.

Hmotnost prvního vozíku, který je v klidu, označme m_1 , hmotnost druhého označme m_2 a velikost jeho rychlosti v_2 . Po srážce budou mít oba vozíky opačnou rychlost o velikosti v . Zákon zachování hybnosti vyjadřuje rovnice

$$m_2 v_2 = m_1 v - m_2 v$$

a zákon zachování energie

$$\frac{m_2 \cdot v_2^2}{2} = \frac{m_1 \cdot v^2}{2} + \frac{m_2 \cdot v^2}{2}$$

Z první rovnice vyjádříme $v_2 = (\mu - 1)v$, kde symbolem μ jsme označili poměr hmotností $\mu = m_1/m_2$, a dosadíme do rovnice druhé. Rovnici pokrátíme kvadrátem rychlosti v^2 a dostaneme

$$\frac{m_2 \cdot (\mu - 1)^2}{2} = \frac{m_1 + m_2}{2}$$

$$(\mu - 1)^2 = \mu + 1$$

Z této již snadno vyjádříme hledaný poměr $\mu = 0$ nebo $\mu = 3$. První možnost zřejmě nemá fyzikální smysl, výsledek tedy je $m_1 = 3m_2$.



INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

3 Závěr

Ve třech úlohách bylo ukázáno využití zákonů zachování v klasické mechanice při kvantitativním popisu různých pohybů a určování změn veličin při vzájemné interakci dvou těles.

4 Použitá literatura

PRACHAŘ J. Úlohy z mechaniky III (zákony zachování), knihovnička FO, studijní text

5 Kontakt na autora

Mgr. Petr Mazanec
Základní škola Sušice, Komenského 52
mpetr@seznam.cz

ODBORNÝ KEMP PŘÍRODOVĚDNÝCH OBORŮ FYZIKA

ŘEŠENÍ OBTÍŽNĚJŠÍCH ÚLOH Z TERMIKY

Petr Mazanec

1 Úvod

Na třech příkladech z klasické termodynamiky bylo ukázáno využití základních zákonů termodynamiky a matematické řešení těchto úloh.

2 Obsah

Příklad 1 – teplotní roztažnost

Dilatometr, na kterém je vyznačen objem $V_1 = 100 \text{ cm}^3$ a vztažná teplota $t_1 = 20 \text{ }^\circ\text{C}$, je vyroben ze skla SIMAX, jehož teplotní součinitel délkové roztažnosti je $\alpha_s = 3,7 \cdot 10^{-6} \text{ K}^{-1}$. Při teplotě $t_2 = 26 \text{ }^\circ\text{C}$ byl naplněn měřenou kapalinou a na stupnici kapiláry byl odečten objem $V_{k2} = 0,3 \text{ cm}^3$. Po zvětšení teploty na $t_3 = 61 \text{ }^\circ\text{C}$ byl na stupnici kapiláry odečten objem $V_{k3} = 5,6 \text{ cm}^3$. Určete teplotní součinitel objemové roztažnosti měřené kapaliny β .

Řešení:

Teplotní součinitel objemové roztažnosti skla je $\beta_s = 3\alpha_s = 11,1 \cdot 10^{-6} \text{ K}^{-1}$.

$$V = (V_1 + V_k)[1 + \beta_s(t - t_1)] \quad (1)$$

Podle vzorce (1) vypočítáme objemy kapaliny při teplotách t_2 a t_3 :

$$V_2 = 100,30668 \text{ cm}^3, \quad V_3 = 105,64806 \text{ cm}^3.$$

Platí:

$$V_2 = V_1 [1 + \beta(t_2 - t_1)], \quad V_3 = V_1 [1 + \beta(t_3 - t_1)],$$

kde V_1 je objem měřené kapaliny při teplotě t_1 . Úpravou dostaneme:

$$\beta = \frac{V_3 - V_2}{V_2 \cdot (t_3 - t_1) - V_3 \cdot (t_2 - t_1)} = 1,54 \cdot 10^{-3} \text{ K}^{-1}$$

Zjednodušené řešení:

Zanedbáme-li teplotní roztažnost samotné kapiláry, můžeme napsat

$$V_k = V_{k3} - V_{k2} = V_1\beta \Delta t - V_1\beta_s \Delta t = V_1(\beta - \beta_s)(t_3 - t_2) \approx V_1\beta(t_3 - t_2)$$

$$\beta \approx \frac{V_{k3} - V_{k2}}{V_1 \cdot (t_3 - t_2)} = 1,51 \cdot 10^{-3} \text{ K}^{-1}$$

Oba výsledky se v mezích přesnosti měření shodují. Měřená kapalina má teplotní součinitel objemové roztažnosti $\beta \approx 1,5 \cdot 10^{-3} \text{ K}^{-1}$.

Příklad 2 – ohřívání ledu s vodou

V zimě nabral turista do rychlovarné konvice vodu s ledem o teplotě $0\text{ }^{\circ}\text{C}$, vody bylo 900 g , ledu 600 g . Za jak dlouho se bude voda vařit při středním výkonu konvice $2,0\text{ kW}$ a účinnosti $85\text{ }%$?

Řešení:

Hmotnost vody $m_1 = 0,90\text{ kg}$, hmotnost ledu $m_2 = 0,60\text{ kg}$, teplota $t_1 = t_2 = 0\text{ }^{\circ}\text{C}$,

výsledná teplota $t = 100\text{ }^{\circ}\text{C}$. Měrná tepelná kapacita vody $c = 4200\text{ J/kg}\cdot^{\circ}\text{C}$,

měrné skupenské teplo tání ledu $l_t = 332\text{ kJ/kg}$, $P = 2,0\text{ kW}$, účinnost $\eta = 85\text{ }%$,

hledaná doba je τ .

Teplo na roztátí ledu $Q_2 = m_2 \cdot l_t$, teplo na ohřátí vody $Q_1 = (m_1 + m_2) \cdot c \cdot (t - t_1)$.

$Q = P \cdot \eta \cdot \tau$ je teplo dodané konvicí za dobu τ .

Sestavíme kalorimetrickou rovnici pro tepelnou výměnu:

$$Q = Q_1 + Q_2$$

$$P \cdot \eta \cdot \tau = m_2 \cdot l_t + (m_1 + m_2) \cdot c \cdot (t - t_1).$$

Odtud pak dostaneme

$$\tau = \frac{m_2 \cdot l_t + (m_1 + m_2) \cdot c \cdot (t - t_1)}{P \cdot \eta} = 488\text{ s} = 8,1\text{ min}$$

Voda se bude vařit asi za 8 minut.

Příklad 3 – klasický aerostat

Navrhněte balón kulového tvaru plněný heliem (klasický aerostat), který má sloužit k výstupu do výšky $h = 1\,500\text{ m}$. Předpokládaná hmotnost konstrukce balónu (bez plynové náplně) a zátěže je $m_b = 1\,200\text{ kg}$. Balón bude mít ve spodní části otvor, který umožní vyrovnávání tlaku s okolním atmosférickým tlakem (jinak by mohl aerostat po výstupu působením přetlaku prasknout).

Pro zjednodušení předpokládejte, že teplota vzduchu $t_0 = 20,0\text{ }^{\circ}\text{C}$ se s výškou nemění a tlak se mění podle barometrické rovnice z počáteční hodnoty $p_{a0} = 1,01 \cdot 10^5\text{ Pa}$ na hodnotu $p_a = 0,85 \cdot 10^5\text{ Pa}$.

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

- a) Určete potřebný objem V balonu, jeho poloměr r a hmotnost $m_{\text{He}0}$ heliové náplně pro výšku $h_0 = 0$ m.
 b) Jaký bude relativní úbytek hmotnosti helia po výstupu do výšky h , jestliže ve výšce $h_0 = 0$ m byl celý objem V balónu vyplněn heliem o tlaku $p_{a0} = 1,01 \cdot 10^5$ Pa a teplotě $t_0 = 20$ °C okolního vzduchu?

Při řešení předpokládejte, že termodynamické děje, při nichž se bude rovnoměrně vyrovnávat tlak helia s tlakem okolního vzduchu, probíhají dostatečně pomalu, a že přitom nebude do balónu vnikat vzduch.

Molární hmotnost vzduchu $M_m = 28,96 \cdot 10^{-3}$ kg.mol⁻¹, molární hmotnost helia $M'_m = 4,003 \cdot 10^{-3}$ kg.mol⁻¹. Předpokládejte konstantní tíhové zrychlení $g = 9,81$ m.s⁻². Molární plynová konstanta $R = 8,314$ J · mol⁻¹ · K⁻¹.

Řešení:

- a) Ve výšce h musí nastat rovnováha tíhových sil se vztlakovou silou. Označíme-li m_v hmotnost vzduchu vytlačeného balónem o objemu V ve výšce h a m_{He} hmotnost heliové náplně v této výšce, musí z rovnováhy sil a podle Archimédova zákona platit

$$F_{vz} - F_{g\text{He}} - F_{gb} = 0$$

$$(m_v - m_{\text{He}} - m_b)g = 0.$$

$$m_b = m_v - m_{\text{He}}$$

Hmotnosti plynů ve výšce h určíme užitím stavové rovnice:

$$m_v = \frac{p_a \cdot V \cdot M_m}{R \cdot T_0}$$

$$m_{\text{He}} = \frac{p_a \cdot V \cdot M'_m}{R \cdot T_0}$$

$$T_0 = t_0 + 273,15 = 293,15 \text{ K}$$

Pak z podmínky rovnováhy sil vychází

$$m_b = \frac{V \cdot (M_m - M'_m) \cdot p_a}{R \cdot T_0}$$

neboli potřebný objem balonu je

$$V = \frac{m_b \cdot R \cdot T_0}{(M_m - M'_m) \cdot p_a} = 1380 \text{ m}^3$$

a jeho poloměr je

$$r = \sqrt[3]{\frac{3 \cdot V}{4\pi}} = 6,91 \text{ m.}$$

Hmotnost helia ve výšce $h_0 = 0$ m je dána stavovou rovnicí pro vypočtený objem V :

$$m_{\text{He}0} = \frac{p_{a0} \cdot V \cdot M'_m}{R \cdot T_0} = 229 \text{ kg.}$$

- b) Úbytek hmotnosti helia ve výšce h bude úměrný úbytku tlaku:

$$\Delta m_{\text{He}} = m_{\text{He}} - m_{\text{He}0} = \frac{V \cdot M'_m \cdot (p_a - p_{a0})}{R}$$

Relativní úbytek hmotnosti helia je

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

$$\frac{\Delta m_{He}}{m_{He0}} = \frac{P_a - P_{a0}}{P_{a0}} \approx -0,158 = -15,8\%.$$

3 Závěr

Ve třech úlohách bylo ukázáno využití zákonů termodynamiky při kvantitativním popisu fyzikálních dějů v látkách všech skupenství (teplotní roztažnost kapalin a pevných látek, tlak plynu) a při skupenských přeměnách a změnách teploty při tepelné výměně.

4 Použitá literatura

ŠEDIVÝ P. Teplotní závislosti fyzikálních veličin, knihovnička FO, studijní text

VYBÍRAL B. Mechanika ideálních plynů, knihovnička FO, studijní text

5 Kontakt na autora

Mgr. Petr Mazanec

Základní škola Sušice, Komenského 52

mpetr@seznam.cz

ODBORNÝ KEMP PŘÍRODOVĚDNÝCH OBORŮ FYZIKA

ČERNÁ DÍRA A SKRYTÁ HMOTA V NAŠÍ GALAXII

Miroslav Randa

1 Úvod

S rozvojem pozorovací techniky se výrazně v posledních letech vyvíjejí poznatky i o naší Galaxii. Na nových poznatcích se podílejí jak pozemní dalekohledy v rádiovém oboru a optickém oboru vybavené živou, tedy aktivní a adaptivní optikou, tak také dalekohledy na oběžné dráze kolem Země, pracující v optickém, infračerveném a rentgenovém oboru elektromagnetického záření. Dostáváme tak široké spektrum informací o Galaxii. Tím dnes víme o naší Galaxii výrazně více, než věděli astronomové ještě před deseti lety.

2 Černé díry hvězdných hmotností a jejich vlastnosti

Hvězdy vznikají z prachoplynných mračen, pokud dojde ke stlačení mračna vnější silou, například výbuchem blízké supernovy. Po klidném dlouhém období hvězdy na hlavní posloupnosti, kdy se v nitru hvězdy přeměňuje vodík na helium, se hvězda rozepne na mnohonásobek původní velikosti, stane se obrem. V této neklidné fázi vývoje hvězdy se v nitru postupně přeměňuje helium na uhlík a kyslík, hořčík, síru, další prvky až po železo.

Závěrečný vývoj hvězd pak závisí na hmotnosti. Nejméně hmotné hvězdy končí jako bílí trpaslíci, hvězdy velikosti naší Země, které postupně přestávají zářit a stávají se tak černými trpaslíky. Hmotnější hvězdy končí jako neutronové hvězdy o velikosti několika málo desítek kilometrů. Nejhmotnější hvězdy pak končí jako hvězdné černé díry, které svou gravitací neumožní opuštění hvězdy ani světlu.

2.1 Černá díra v Galaxii

Jak vyplývá z pozorování centrálních oblastí naší Galaxie pomocí Velmi velkého teleskopu ESO v Chile, ale i pozorování v rentgenovém a rádiovém oboru, nachází se v centru Galaxie supermasivní černá díra s hmotností několika milionů hmotností Slunce. O její existenci víme jednak z pohybu hvězd v centrální hvězdokupě, jednak z rentgenových snímků centrální oblasti Galaxie. Hmotnost černé díry je v současné době odhadována na asi 4 miliony hmotností Slunce.

2.1 Skrytá hmota v Galaxii

Existenci skryté hmoty v Galaxii předpověděl již koncem 30. let minulého století Fritz Zwicky. Její existence byla prokázána z rozboru oběžných rychlostí hvězd kolem středu Galaxie. Přestože by na základě rozložení svítící hmoty v Galaxii měla s rostoucí vzdáleností hvězd od středu Galaxie rychlost prudce klesat, ve skutečnosti jsou oběžné rychlosti v Galaxii přibližně konstantní a ve velké vzdálenosti dokonce rostou. To znamená, že kromě svítící hmoty je v naší Galaxii (a zřejmě i v dalších galaxiích) velké množství hmoty, kterou nevidíme, tedy skryté hmoty.



INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

3 Závěr

Naše Galaxie má překvapivé objekty jak ve svém centru, tak i ve větších vzdálenostech od centra. Ukazuje se, že o ní víme mnohem méně, než jsme si mysleli. I v dalších letech nás tak čekají jistě další objevy, které jednak zpřesní naše znalosti o Galaxii, jednak přinesou další otázky.

4 Použitá literatura

5 Kontakt na autora

RNDr. Miroslav Randa
Západočeská univerzita v Plzni
randam@kof.zcu.cz

ODBORNÝ KEMP PŘÍRODOVĚDNÝCH OBORŮ FYZIKA

ŘEŠENÍ OBTÍŽNĚJŠÍCH ÚLOH – KEPLEROVY ZÁKONY

Miroslav Randa

1 Úvod

Keplerovy zákony jsou základními zákony, které popisují pohyb těles ve sluneční soustavě, ale také pohyby dvojhvězd a pohyby hvězd v galaxiích.

2 Využití Keplerových zákonů

Keplerovy zákony umožňují určit základní charakteristiky pohybu těles sluneční soustavy, zejména planet, trpasličích planet, planetek a komet, ale rovněž pohyb měsíců a pohyb družic a sond.

V rámci fyzikálního kempu jsou řešeny úlohy z předchozích ročníků fyzikální a astronomické olympiády, dále úlohy ze sbírek úloh z astronomie a astrofyziky (Široký, Široká, 1973 a Štefl, Krtička, 2002) a ze studijních textů FO (Ungermann, Volf, 1985 a Volf, Jarešová, 2009).

4 Použitá literatura

ŠIROKÝ, J., ŠIROKÁ, M. Základy astronomie v příkladech. 2. vyd. Praha: Státní pedagogické nakladatelství, 1973. 158 s.

ŠTEFL, V., KORČÁKOVÁ, D., KRTIČKA, J. Úlohy z astrofyziky. 1. vyd. Brno: Masarykova univerzita, 2002. 82 s.

UNGERMANN, Z., VOLF, I.: Pohyb tělesa v radiálním gravitačním poli. Praha: SPN, 1985.

VOLF, I., JAREŠOVÁ, M. Fyzika je kolem nás (Pohyby těles v planetární soustavě). 1. vyd. Hradec Králové. MAFY, 2009.

5 Kontakt na autora

RNDr. Miroslav Randa

Západočeská univerzita v Plzni

randam@kof.zcu.cz

ODBORNÝ KEMP PŘÍRODOVĚDNÝCH OBORŮ FYZIKA

NEWTONŮV GRAVITAČNÍ ZÁKON, KEPLEROVY ZÁKONY

Miroslav Randa

1 Úvod

Newtonův zákon a Keplerovy zákony jsou základními zákony, které popisují pohyb těles ve sluneční soustavě, ale také pohyby dvojhvězd a pohyby hvězd v galaxiích. I když historicky vznikly v odlišné době, jsou ve skutečnosti ekvivalentní.

2 Využití Newtonova gravitačního zákona a Keplerových zákonů

Keplerovy zákony umožňují určit základní charakteristiky pohybu těles sluneční soustavy, zejména planet, trpasličích planet, planetek a komet, ale rovněž pohyb měsíců a pohyb družic a sond. Kromě toho je možné je využít ke stanovení energie uvedených těles. Z historického hlediska je navíc důležitá Keplerova rovnice umožňující z pozorování nebeských těles přejít k popisu jejich pohybu ve vhodné souřadné soustavě.

V rámci fyzikálního kempu jsou řešeny úlohy z předchozích ročníků fyzikální a astronomické olympiády, dále úlohy ze sbírek úloh z astronomie a astrofyziky (Široký, Široká, 1973 a Štefl, Krtička, 2002) a ze studijních textů FO (Šedivý, Volf, 1999, Ungermann, Volf, 1985 a Volf, Jarešová, 2009).

4 Použitá literatura

ŠIROKÝ, J., ŠIROKÁ, M. Základy astronomie v příkladech. 2. vyd. Praha: Státní pedagogické nakladatelství, 1973. 158 s.

ŠTEFL, V., KORČÁKOVÁ, D., KRTIČKA, J. Úlohy z astrofyziky. 1. vyd. Brno: Masarykova univerzita, 2002. 82 s.

UNGERMANN, Z., VOLF, I.: Pohyb tělesa v radiálním gravitačním poli. Praha: SPN, 1985.

VOLF, I., JAREŠOVÁ, M. Fyzika je kolem nás (Pohyby těles v planetární soustavě). 1. vyd. Hradec Králové. MAFY, 2009.

ŠEDIVÝ, P., VOLF, I.: Pohyb tělesa po eliptické trajektorii v radiálním gravitačním poli. 1. vyd. Hradec Králové. MAFY, 1999.

5 Kontakt na autora

RNDr. Miroslav Randa

Západočeská univerzita v Plzni

randam@kof.zcu.cz

ODBORNÝ KEMP PŘÍRODOVĚDNÝCH OBORŮ FYZIKA

POHYBOVÉ ROVNICE A JEJICH VYUŽITÍ PŘI ŘEŠENÍ ÚLOH

Miroslav Randa

1 Úvod

Pohybové rovnice spojují příčiny pohybu (silová působení) s charakteristikami pohybu. Jsou tedy spojujícím článkem mezi dynamikou a kinematikou. Z rozboru působících sil umožňují určit zrychlení těles, následně pak i jejich rychlosti a dráhy.

2 Využití pohybových rovnic

V rámci fyzikálního kempu jsou řešeny úlohy z předchozích ročníků fyzikální a astronomické olympiády, dále úlohy ze sbírek úloh z fyziky a ze studijních textů FO (Vybíral, 2000, Horáková, 2002 a Volf, Jarešová, 2008).

4 Použitá literatura

VOLF, I., JAREŠOVÁ, M. Fyzika je kolem nás (Pohyb a síla). 1. vyd. Hradec Králové.

MAFY, 2008.

HORÁKOVÁ, R.: Pohyb soustavy těles spojených vláknem. 1. vyd. Hradec Králové. MAFY, 2002.

VYBÍRAL, B.: Kinematika a dynamika tuhého tělesa. 1. vyd. Hradec Králové. MAFY, 2000.

5 Kontakt na autora

RNDr. Miroslav Randa

Západočeská univerzita v Plzni

randam@kof.zcu.cz

ODBORNÝ KEMP PŘÍRODOVĚDNÝCH OBORŮ FYZIKA

VELKÉ SVĚTOVÉ A ROBOTICKÉ DALEKOHLEDY

Ondřej TRNKA

1 Úvod

Populární přednáška o pozorovací technice v astronomii. Sestává se ze čtyř navazujících částí: mezníky ve vývoji optických dalekohledů; velké optické dalekohledy minulosti i současnosti; na co se můžeme těšit – příslib současné astronomie do budoucna; Robotické dalekohledy. Tato poslední část je doplněna ukázkou využití webového rozhraní jednoho veřejně přístupného robotického dalekohledu k vytvoření a odeslání objednávky na pořízení fotografie tímto dalekohledem.

2 Mezníky ve vývoji optických dalekohledů

Během času se objevilo mnoho důležitých mezníků a objevů ve vývoji optických dalekohledů. Nejdůležitější byl samotný jeho objev Hansem Lippersheyem v roce 1608. Již o rok později s ním Galileo Galilei poprvé pozoroval oblohu a činil díky němu velké objevy.

Brzy následovaly další mezníky. Některé z nich vylepšovaly stávající typy dalekohledů, jiné přicházely se zcela novými konstrukcemi. Již pár let po samotném objevu spatřil světlo světa Keplerův dalekohled, který výrazně zlepšil vlastnosti oproti původnímu Galileovu. V Druhé polovině 17. století pak přišly dalekohledy zrcadlové – 1667 Newtonův dalekohled a 1672 Cassegrainův dalekohled. Tyto dalekohledy netrpěly barevnou vadou. Ta byla velikým nedostatkem čočkových dalekohledů. Poprvé se ji pokusil eliminovat Brit Chester Moore Hall okolo roku 1730. Navrhl dvojčočkový objektiv z různých typů skla, který byl navržen takovým způsobem, aby se efekty barevné vady v obou čočkách navzájem vyrušily. Princip nebyl zcela dokonalý, ale poprvé úspěšně tuto nevýhodu čočkových dalekohledů řešil. Postupně se vyvinuly složitější konstrukce, eliminující více optických vad dalekohledů.

V historii najdeme také několik velice důležitých doplňků dalekohledů. Obrovským přínosem byl pro astronomii spektroskop. Jednoduché zařízení, které dokáže rozložit světlo na spektrum. Právě z vlastností spekter kosmických objektů se podařilo získat nepřeberné množství informací, jež bychom jinak nebyli schopni odhalit. Například chemické složení hvězd, jejich teplotu, stáří a typ. Další přínosnou pomůckou byla fotografie. Ve druhé polovině 19. století se poprvé začala využívat i v astronomii a okamžitě si vydobyla nezastupitelné místo v průzkumu vesmíru. Před příchodem fotografie se mohli astronomové spolehnout jen na svůj vlastní zrak. Teprve fotografie umožnila pořizování přesných a opakovatelných záznamů. Posunula také dosah astronomů mnohem dále, protože na rozdíl od lidského oka fotografická emulze mohla střídat světlo i dlouhé hodiny a odhalit tak mnohem slabší objekty. Práce astronomů se tím také změnila. Již méně sledovali vesmír pouhýma očima, ale místo toho trávili dlouhé hodiny u pointačních dalekohledů, kde neustále kontrolovali, zda se vybraná hvězda nepohnula ze středu záměrného kříže a tím zajišťovali, že

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

po celou dobu expozice se hvězdy promítají na stejné místo fotografické desky, připojené k fotografickému dalekohledu. Přibýlo jim také mnoho denní práce, protože fotografie pořízené během noci bylo nutné vyvolat a následně proměřit.

Dvacáté století pak bylo ve znamení intenzivního vylepšování všeho, co do astronomické přístrojové techniky patří. Došlo i k několika průlomům, které doslova učinily nemyslitelné skutečností. Kromě úzce specializovaných odvětví astronomie se veliké dalekohledy budovaly pouze zrcadlové a jejich průměr rostl velice rychle. V roce 1918 byl vybudován 2,5 metrový dalekohled na Mt. Wilson a o 30 let později jej překonal hned 2 krát větší pětiměr na Mt. Palomar. Technické a finanční nároky jeho stavby však byly tak velké, že se soudilo, že větší dalekohled již nebude možné postavit. Hlavní zrcadlo tohoto dalekohledu bylo z důvodu snížení hmotnosti žebrované. V roce 1976 Sověti zprovoznili 6 metrový dalekohled na hoře Pastuchovo na Kavkaze, ale jen se tím přesvědčili, že takhle veliké dalekohledy se skutečně nevyplatí dělat. Naštěstí se však již tehdy se vývojáři zabývali tím, jak vytvořit větší dalekohled za stejně, nebo i méně peněz. První vyzkoušenou metodou bylo vytvoření tenkého zrcadla. To by samo nedávalo dobrý obraz, protože díky malé mechanické tuhosti by se prohýbalo a optické vlastnosti by byly horší než mizerné. Součástí dalekohledu však byl aktivně řízený systém podpůrných bodů, na kterých bylo zrcadlo uloženo. Těmto bodům se říká aktuátory a přesným řízením udržují ideální tvar i polohu zrcadla v dalekohledu. Tomuto systému se říká aktivní optika. Další možností, je vytvořit veliké zrcadlo z menších segmentů, tvořících dohromady větší celek. I zde je nutné přesné řízení, které zajišťuje perfektní návaznost jednoho segmentu na druhý. Zvláštní variantou jsou také tekutá zrcadla, tvořená obvykle rotující nádobou se rtutí. Povrch hladiny se při rovnoměrném otáčení vytvaruje do přesné paraboly. Takováto zrcadla lze vyrábět velice levně, mají však mnoho nedostatků. Odhlédneme-li od faktu, že rtuťové výpary jsou jedovaté, tak takový dalekohled může být namířen pouze do zenitu. Přesto jsou taková zrcadla v některých případech použitelná.

Během dvacátého století se také mohutně rozvinuly detektory používané na dalekohledech. K fotografické emulzi se v roce 1934 připojil také fotonásobič. Elektronický snímač, který se vyznačoval svojí citlivostí. Největší zlom však nastal v roce 1983, kdy se na dalekohledech poprvé začaly používat elektronické CCD snímače (CCD – Charged couple device – zařízení s vázaným nábojem bylo poprvé sestrojeno Wilardem Boylem a Georgem S. Smithem v Bellových laboratořích roku 1969). CCD snímače se vyznačují vysokou citlivostí, širokým rozsahem spektrální citlivosti a perfektní linearitou. Jejich největší předností je však velice snadné zpracování získaných dat počítačem.

Na konci dvacátého století se podařilo vyřešit i problém, který sužoval dalekohledy již od počátku: výsledný obraz v dalekohledu byl vždy závislý na atmosféře, kterou paprsek musel nejdříve projít. To mělo veliký vliv hlavně na rozlišovací schopnost, protože i veliké dalekohledy měly v naprosté většině případů rozlišení odpovídající jen cca 30cm dalekohledu, který by nebyl zatížen vlivy atmosféry. Drahé a také dokonale účinné řešení bylo umístění dalekohledu na oběžnou dráhu, mimo atmosféru Země. Jde však o řešení velice drahé a technicky náročné. Má však tu výhodu, že dalekohled může pozorovat i vlnové délky, pro které je jinak atmosféra neprůhledná (např. ultrafialové záření). Pozemské dalekohledy se již také dokážou s tímto problémem vyrovnat pomocí adaptivní optiky. Jde o zatím poslední

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

a technicky nejnáročnější vylepšení dalekohledu. Do optické dráhy dalekohledu je zařazeno zařízení, které zjišťuje jak je světelná vlnoplocha vzdáleného objektu deformována průchodem naší atmosférou a zpětně řídí nastavení aktuátorů na malém zrcadle umístěném v chodu dalekohledu. Tvar tohoto zrcadla vyrovnává deformaci a do detektoru již vstupuje světlo zbavené deformací od atmosféry. Aby celý systém dobře fungoval, je nutné velice přesně měnit deformace zrcátka. Korekcí navíc musí být provedeno asi 500 – 700 za sekundu. Čím více tím lépe. To klade obrovské technologické nároky jak na senzor tvaru vlnoplochy, tak i na výpočetní techniku řídicího systému a mechaniku atkuátorů.

3 Velké optické dalekohledy minulosti i současnosti

V této části by měl být popis cca 16 dalekohledů (Heveliusův 150stopý; Herschelův 120cm; Clarkův 1m refraktor; Hookerův 100palcový reflektor, Halleův 200palcový reflektor; BTA; NTT; Švédský sluneční dalekohled; HST; Keck; Gemini north & south; VLT; LBT; HET; SALT; GTC) Bohužel popis by byl prostorově velice náročný a přesto velice kusý. V závěru sylabu naleznete odkazy týkající se většiny z nich.

4 Na co se můžeme těšit – příslib současné astronomie do budoucna

Některé cíle, vytyčené současným a budoucím dalekohledům naznačují, že během nadcházejícího desetiletí dosáhneme úžasných objevů. Dalekohledy jsou zaměřeny mnoha směry výzkumu. Mezi nejčastěji pokládanými otázkami se však objevují tyto:

Kde žijeme? Jsme sami? Jsme v bezpečí?

Dalekohledy se tedy zaměřují na to, jak vlastně vypadá náš vesmír, zda je život i jinde a zda není naše Země ohrožena srážkou s planetkou dostatečně velkou, aby ohrozila náš druh. Pro tento průzkum se chystá řada nových dalekohledů jak pozemních, tak i kosmických. Zkušenost z dřívějšíka nám však říká, že nejúžasnější objevy jsou ty nečekané. Doufejme proto, že i těch bude mnoho.

Do výběru připravovaných pozemních dalekohledů bezesporu patří LSST – Veliký synoptický přehledový dalekohled. Po jeho dokončení v roce 2015 se bude jednat o největší přehlídkový dalekohled světa. Obraz z jeho 8 metrového zrcadla bude snímat největší CCD kamera světa o rozlišení 3,2 Gpix. Během tří nocí zvládne nasnímat celou dostupnou oblohu a začne znovu. Očekává se od něj obrovské množství objevů nejen ve sluneční soustavě, ale i ve vzdáleném vesmíru.

V roce 2018 mají být zprovozněny minimálně dva další obří dalekohledy. Oba budou stát v Chile a svými rozměry zdaleka předčí všechny dosud postavené dalekohledy. Menší z nich ponese název Giant Magellan Telescope – Obří Magellanův dalekohled a na jediné montáži ponese 7 zrcadel o průměru 8,4 m. Ta budou opticky spřažena od jediného dalekohledu. Rozlišovací schopnost bude odpovídat dalekohledu o průměru 24,5 m a plocha zrcadel bude odpovídat dalekohledu o průměru 21,4 m. Umístěn bude na Las Campanas Observatory. Větší z dalekohledů plánuje vybudovat Evropská jižní observatoř ESO. Bude se jmenovat Evropský velmi velký dalekohled (E-ELT). Jeho hlavní zrcadlo, složené téměř z 1000 segmentů, bude mít v průměru 42 m. Dalekohled bude na hoře Cerro Amazonas. Ačkoli jsou pro tento dalekohled připraveny základní oblasti výzkumu, nechá se očekávat, že



INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

díky obrovskému výkonu dalekohledu s ním budou provedeny zcela nečekané a převratné objevy.

Z kosmických observatoří chystaných k vypuštění během následujícího desetiletí lze také vybrat řadu ambiciózních projektů. Na rok 2012 je naplánován start evropské astrometrické sondy Gaia, která by měla vytvořit trojrozměrnou mapu galaxie. Předpokládá se, že přesně změří vzdálenosti nejméně miliardy hvězd. Kosmický dalekohled Jamese Webba, následovník Hubbleova kosmického dalekohledu, by měl odstartovat v roce 2014. V roce 2015 začnou pracovat i dvě kosmické observatoře zaměřené na hledání exoplanet podobných Zemi. Americký Terrestrial Planet Finder bude schopen přímo pozorovat tyto planety. Evropský Darwin by měl být schopen dokonce pořizovat jejich spektra a na jejich základě zjišťovat chemické složení a možné podmínky k životu na těchto planetách. O rok později Evropa vyše observatoř Euclid, zaměřenou na mapování velkorozměrné struktury temné hmoty ve vesmíru. V roce 2018 by měl být zprovozněn americký projekt LISA, pátrající po gravitačních vlnách.

5 Robotické dalekohledy

Robotizace a automatizace prostupuje náš život již řadu desetiletí a rozsah robotizovaných zařízení v našem okolí neustále roste. Tento fenomén se nevyhnul ani astronomickým dalekohledům. V dnešní době je i řada amatérských dalekohledů více či méně robotizována. Může se jednat o částečnou robotizaci, kdy je na dalekohledu například systém automatického zaostřování (autofocuser), či systém automatického sledování zvoleného objektu na obloze (autopointer). Tyto pomůcky jsou využívány hlavně při astrofotografii, ale dalekohled také může být vybaven automatickým naváděním na zvolený objekt (Go-To systém), který může být dobře využíván jak pro vizuální pozorování, tak i při astrofotografii.

Filozofie celkové robotizace dalekohledu vychází z myšlenky, že je potřeba co nejlépe využít možný pozorovací čas a schopnosti dalekohledu. Při plné robotizaci se obvykle jedná o značně složitý systém, který se stará nejen o řízení dalekohledu a CCD kamery, ale i o správné nastavení kopule hvězdárny, otevření šterbiny atd. Systém navíc bývá doplněn o kvalitní meteorologickou stanici, která vyhodnocuje podmínky nad pozorovatelnou a podle jejich výsledků povoluje, či zakazuje dalekohledu pozorovat. Řídicí program obvykle rozhoduje o nejhospodárnějším pozorovacím programu, aby byl dalekohled co možná nejlépe využit. Výhodou je, že kromě běžné údržby takový dalekohled nevyžaduje takový dalekohled ke své činnosti žádnou obsluhu. Může být umístěn na odlehlém místě, kde jsou lepší pozorovací podmínky, než v blízkosti civilizace a provozovatel jej může ovládat přes internet.

Myšlenka tohoto systému, který je nyní dostupný i pro amatéry, se původně zrodila v sedmdesátých letech a začala se využívat u velikých dalekohledů v Chille, které patří Evropské jižní observatoři. Díky robotizaci nemuseli evropští astronomové létat kvůli každé pozorovací kampani do Chille, ale ovládali dalekohledy na dálku z Německa. U dalekohledů zůstal jen malý tým techniků, kteří se starali o jejich bezchybný provoz.

Robotizace byla od začátku nepostradatelná také u kosmických dalekohledů, kde je z logických důvodů lidská asistence vyloučena.



INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

6 Závěr

Za 400 let prošly optické dalekohledy dlouhým vývojem. Z původních kukátek se staly doslova obří oči, namířené do vesmíru. Využívají nejmodernější technologie a samy posunují technický krok kupředu. Zdá se, že právě v dnešní době zažívá vývoj těchto přístrojů opravdovou renesanci. Je způsobenou řadou nových postupů, které umožňují stavbu větších a při tom levnějších dalekohledů a také obrovský potenciál, který v sobě tyto přístroje skrývají. Doufejme, že tento trend bude pokračovat i nadále a my budeme moci díky nim objevovat další a další tajemství vesmíru.

7 Použitá literatura

Dostupné na internetu: <<http://www.eso.org/public/czechrepublic/>>.

Dostupné na internetu: <<http://medusa.as.arizona.edu/lbto/>>.

Dostupné na internetu: <<http://www.keckobservatory.org/>>.

Dostupné na internetu: <<http://www.esa.int/esaCP/Czech.html>>.

Dostupné na internetu: <<http://www.nasa.gov/>>.

Dostupné na internetu: <<http://amazing-space.stsci.edu/resources/explorations/groundup/>>.

Dostupné na internetu:

<http://en.wikipedia.org/wiki/List_of_largest_optical_reflecting_telescopes>.

Dostupné na internetu:

<http://en.wikipedia.org/wiki/List_of_largest_optical_refracting_telescopes>.

8 Kontakt na autora

Bc. Ondřej Trnka

Hvězdárna planetárium Plzeň, příspěvková organizace

trakie@seznam.cz

ODBORNÝ KEMP PŘÍRODOVĚDNÝCH OBORŮ FYZIKA

EXPERIMENTY S MAGNETY

Irena VLACHYNSKÁ

1 Úvod

Magnetovec se svými charakteristickými vlastnostmi byl znám již odpradávná. První vlastností magnetovce je obecně známé přitahování látek s obsahem železa. Druhou velmi využívanou vlastností, při možnosti volného pohybu, například při zavěšení, je natočení se do určitého směru. Magnetismus se stal součástí každodenního života. Ve svém příspěvku představím krátce možný způsob zjištění základních vlastností magnetu a vlastnoruční sestavení jednoduchého modelu magnetického vlaku.

2 První krůčky v magnetismu

Připravený soubor experimentů provází studenty od přirozeného magnetismu magnetovce, přes základní vlastnosti umělých magnetů (působení na různé materiály, kovy, působení magnetu na větší dálku, části magnetů), vzájemné působení dvou magnetů, modelování magnetického pole různými způsoby i pro netradiční tvary magnetu s různě umístěnými magnetickými póly.

2.1 Levitující magnety ve zkumavce

Úkolem experimentu, ke kterému potřebujeme zkumavku a několik školních magnetů na tabuli, je zjistit, co drží horní magnety ve zkumavce ve vzduchu. K dispozici je také analogický experiment magnetů na dřevěné tyčce.

Pokud jsou magnety orientovány vždy stejnými póly k sobě, jsou od sebe odpuzovány a horní magnety levitují („sedí“ na vzduchovém polštáři). Díky odpudivé magnetické síle mohou horní magnety levitovat.

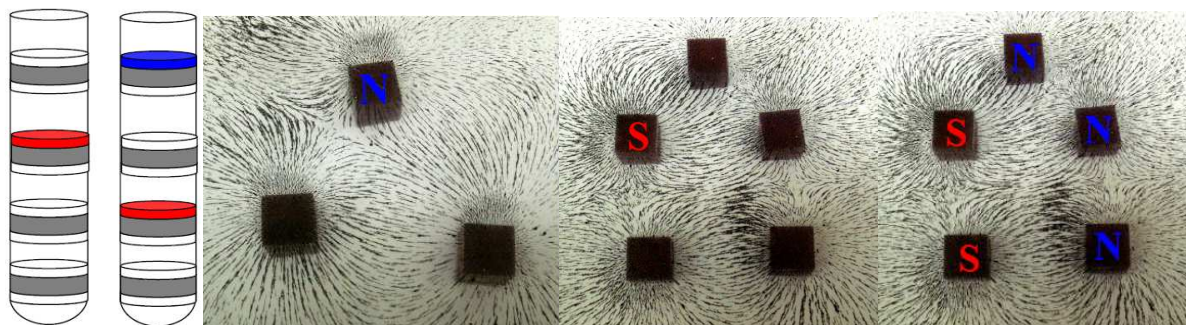
2.2 Problémové úlohy s magnety

Po předchozím experimentu je k dispozici řada problémových a kontrolních úloh, ať už se jedná přímo o experiment s levitací, či další kontrolní úlohy na magnetické pole skupiny magnetů.



Magnety ve zkumavce [1]

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ



Příklady kontrolních úloh a ukázka správného řešení [1]

3 Magnetický vlak

Maglev není město v Maďarsku, jak by se mohlo mnohým zdát, ale název staronového dopravního prostředku. Jedná se o vlak, který se „vznáší“ na magnetickém polštáři. Ačkoli jeho princip je znám téměř sto let, realizace se dočkal až nyní, i když řeší základní otázky, které by bez její realizace nebyly vyřešeny a klasická železnice by tak byla odsouzena k zániku. [2]

Proč? Veřejnost od železnice totiž dnes očekává, že bude přátelská k životnímu prostředí, méně hlučná a s menší spotřebou energie. Obvyklé železniční systémy využívají k dosažení hnací síly tření mezi koly a kolejnicemi. S rostoucí rychlostí soupravy dochází ke ztrátě adheze.

Řešením by měly být nové soupravy, které by měly splňovat nízkou energetickou náročnost, vysokou bezpečnost a to vše s vysokou spolehlivostí i komfortem cestujících.

3.1 Něco z historie

Počátkem dvacátého století přemýšlel americký fyzik Robert Goddard o působení magnetických sil a při té příležitosti jej napadla zajímavá myšlenka. Spočívala v jednoduchém zjištění: stejné póly magnetů se odpuzují silou pozoruhodné velikosti. Této síly je možné využít. Pokud bychom jednu řadu permanentních magnetů umístili do země a druhou do spodní části vozu lehké konstrukce, dostali bychom dopravní prostředek, který by se mohl doslova vznášet. Tak se zrodil pojem magneticky nadnášený (magnetically levitated) dopravní prostředek, zkráceně MAGLEV. [2]

Dalším krokem vpřed byl patent francouzského vynálezce Emila Bacheleta, jehož MAGLEV byl poháněn elektromagnety napájenými střídavým proudem. Ty jsou mnohem účinnější než permanentní magnety. Pozadu nezůstali ani Němci. V třicátých letech dvacátého století se inženýr Hermann Kemper pokusil spojit výhody letadel a vlaků a zkonstruoval nový druh vysokorychlostního dopravního prostředku. Vznikl tzn. Transrapid – železniční systém na principu magnetické levitace, kdy se rychlost pohybující soupravy dá plynule regulovat změnou frekvence třífázového střídavého proudu. [2,3]

Následovala 70. a 80. léta, kdy byly v Německu a Japonsku postavené první prototypy Maglevů. Na přelomu 60. a 70. Let byla v Japonském Miyazaki postavena 7 km dlouhá trať

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

podle amerických plánů. Na této trati probíhaly testy vlaků se supravodiči. Byl zde vytvořen i rekord 517 km/h. Další tratí byla 42 km dlouhá trať blízko Tokia, kde se ukázalo, že systém při vysokých rychlostech zvládá i prudké stoupání trati. Počátkem 80 let byla v Berlíně vybudována magnetická dráha částečně využívající starou trasu berlínského metra U2, která byla v důsledku rozdělení města mimo provoz. Tato magnetická dráha přepravovala cestující od roku 1989. Nejprve bych zahájen zkušební provoz a po dvou letech přešel v provoz komerční. Díky politické situaci došlo k opětovnému využívání původní trasy metra U2 a provoz magnetické dráhy v Berlíně byl zrušen. [4]

3.2 Současnost a další vývoj

Jaká je hlavní výhoda Maglevu? Především tu chybí jakékoli tření. Vlak se nikdy nedostane do kontaktu s kolejí - není tu žádné drncání typické pro železnice. Jedinou brzdicí sílu představuje odpor vzduchu. Maglev se může pohybovat tak rychle, jak je potřeba. Bohužel je tu však ještě jeden faktor, který jízdě vlaků brání, a tím jsou vysoké náklady. Maglev se pohybuje po speciálních kolejích a potřebuje proto i zvláštní stanice u těchto drah. Protože Evropa je protkána sítí obyčejných železnic, zdá se rozumnější investovat do nákupu vysokorychlostních vlaků klasického typu, které se dostanou všude. [2]

Zemí, která se nákladných drah nebojí, je trochu překvapivě Čína. Ve spolupráci s německými společnostmi Siemens a Thyssen-Krupp, které vytvořily konsorcium nazvané Transrapid International, tam vzniká trať o délce třiceti kilometrů. Spojí stanici metra Long Yang Road v centru Šanghaje a letiště Pudong. Maglev se bude pohybovat rychlostí 430 kilometrů v hodině a doba potřebná k překonání vzdálenosti se zkrátí z pětačtyřiceti minut na osm. Vlaky by měly mít tři až šest vozů a odjíždět by mohly každých deset minut. V roce 2005 převezou podle propočtů 10 milionů lidí za rok a toto množství by se mělo do roku 2010 zdvojnásobit. Očekává se, že počet návštěvníků cestujících za zábavou i obchodem stále poroste.

I když se to nezdá, maglev spotřebuje mnohem méně energie než třeba německý elektrický rychlovlak ICE. To proto, že pod proudem je vždy jen jedna část tratě, ostatní jsou vypnuté až do chvíle, kdy se vlak přiblíží. Největší spotřebu energie má na svědomí udržení rychlosti přes čtyři sta kilometrů v hodině, protože je třeba překonat značný odpor vzduchu. I tak je však spotřeba o třicet procent nižší. Dalším přínosem maglevu je nízká hlučnost. Podle údajů konsorcia Transrapid je hluk vlaku jedoucího rychlostí tři sta kilometrů v hodině ve vzdálenosti dvaceti pěti metrů o polovinu nižší než u elektrických rychlovlaků, jakým je třeba francouzské TGV.

Stavba tratí pro elektromagnetické pole je nejméně o polovinu dražší než tradiční železnice. Přesto například Japonsko uvažuje o stavbě vlastní tratě o délce pěti set padesáti kilometrů, spojující Tokio s Ósakou. Na dlouhé vzdálenosti by vlaky mohly převážet náklad i cestující rychleji než letecké linky. Technologie vznášejících se vlaků byla vyvinuta pro delší tratě, ale ani městské použití není pro její tvůrce nezajímavé. Pro hovoří hlavně skutečnost, že městské letištní linky, které se pohybují na vzdálenosti nepřekračující padesát kilometrů, by neměly zatěžovat okolí přílišným hlukem. Tuto podmínku maglev bezpochyby splňuje a jeho výhodou je větší rychlost, než dokážou nabídnout jiné vlaky. A právě z tohoto důvodu si magnetické vznášedlo své místo na slunci zřejmě uhájí.

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

3.4 Příklady praktických realizací

Čína

[http://www.techtydenik.cz/detail.php?action=show&id=39&mark=
http://www.novinky.cz/koktejl/84239-cinane-zkonstruovali-vlastni-magneticky-
rychlovlak.html](http://www.techtydenik.cz/detail.php?action=show&id=39&mark=http://www.novinky.cz/koktejl/84239-cinane-zkonstruovali-vlastni-magneticky-rychlovlak.html)

Německo

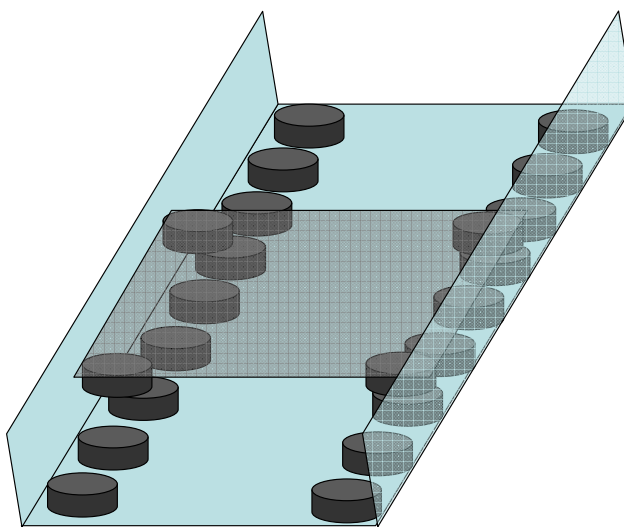
[http://www.czcen.org/z-medii/databaze/1-databaze/366-nemecko-obnovi-zkousky-
magnetickych-supervlaku.pdf](http://www.czcen.org/z-medii/databaze/1-databaze/366-nemecko-obnovi-zkousky-magnetickych-supervlaku.pdf)
<http://technik.ihned.cz/c1-22241270>

3.5 Vlastní model magnetické dráhy

Studenti si sestaví vlastní model magnetické dráhy a model vlaku. Využijí přitom teoretické vlastnosti působení magnetických pólů magnetu. K dispozici je sada školních magnetů na tabuli, karton, papíry, čtvrtky, lepidlo, oboustrannou lepicí pásku, nůžky, pravítko a tužku.

4 Závěr

Při praktické výuce je připravena řada jednoduchých experimentů, při kterých si účastníci mohou snadno ověřit základní vlastnosti magnetovce, magnetů různých tvarů, modelovat mnoha způsoby magnetické pole jednotlivých magnetů a ověřit si své znalosti v připravených kontrolních úlohách. Experiment s levitací magnetů je inspirací, a také ukázkou praktického využití magnetismu, pro vlastnoruční sestavení modelu magnetického vlaku.



Model magnetické dráhy a vlaku

5 Použitá literatura

- [1] VLACHYNSKÁ, I. Historie a experiment jako motivační prvek ve výuce magnetismu. Plzeň, 2008. 108 s. Rigorózní práce. Západočeská univerzita v Plzni.
- [2] Japonsko – Zázrak jménem Maglev [cit. 26. 8. 2008] Dostupné na internetu: http://www.japonsko.tnet.cz/maglev_01.htm/.
- [3] Wikipedia – Transrapid [cit. 26. 8. 2008] Dostupné na internetu: <http://cs.wikipedia.org/wiki/Transrapid>
- [4] Berliner Verkehrsseiten [cit. 26. 8. 2008] Dostupné na internetu: <http://www.berliner-verkehrsseiten.de/m-bahn/>.

6 Kontakt na autora

PhDr. Irena Vlachynská
Západočeská univerzita v Plzni
renkav@rek.zcu.cz

ODBORNÝ KEMP PŘÍRODOVĚDNÝCH OBORŮ FYZIKA

SUPRAVODIVOST A JEJÍ UŽITÍ

Václav HAVEL

1 Úvod

Objev supravodivosti, ke kterému dospěl Heike Kammerlingh-Onnes v roce 1911, ukázal nový směr fyzikálního výzkumu. V poměrně krátkém časovém období se uskutečnilo několik významných objevů, objasňujících základní vlastnosti supravodičů. Souběžně s tím vznikaly i první pokusy o teoretické vysvětlení tohoto záhadného jevu. Zprvu šlo o teorie fenomenologického charakteru. Mikroskopickou teorii supravodivosti, opírající se o kvantovou mechaniku a řadu poznatků fyziky pevných látek, vypracovali až na sklonku padesátých let američtí fyzikové Bardin, Cooper a Schrieffer. Dalším významným mezníkem ve vývoji nauky o supravodičích byl objev tzv. vysokoteplotní supravodivosti, který v roce 1986 uskutečnili Bednorz a Miller. Supravodivost podněcovala zájem teoretiků, ale umožnila i řadu aplikací, které se uplatnily ve vědě i technické praxi.

2.1 Základní vlastnosti supravodičů

Kritická teplota, nutné podmínky pro existenci supravodivého stavu. Které prvky, slitiny a sloučeniny mohou přejít do supravodivého stavu? Vliv magnetického pole a protékajícího elektrického proudu.

2.2. Tepelné vlastnosti supravodičů

Entropie a volná energie supravodičů a normálních vodičů ukazují, že supravodivost je spojena s vyšším uspořádáním elektronového plynu a se vznikem tzv. energetické mezery. Stabilizační energie supravodičů.

2.3. Elektrodynamika supravodičů

Objev Meissnerova-Ochsenfeldova jevu. Rozdělení supravodičů podle jejich chování v magnetickém poli. Vytlačení magnetického pole z vnitřku jednoduše souvislého supravodiče. Hloubka průniku magnetického pole pod povrch. Elektrodynamika Londonových. Kvantování magnetického toku, fluxoid.

2.4. Izotopický jev

Kritická teplota závisí na atomové hmotnosti izotopu. Jev prokázán poprvé u izotopů rtuti. Existence tohoto jevu ukazuje, že mechanismus supravodivosti souvisí s vlastnostmi krystalické mřížky.

2.5. BCS teorie supravodivosti

Tvralo víc než 40 let než se podařilo podat uspokojivou mikroskopickou teorii supravodivosti. Bylo to zásluhou amerických fyziků Bardina, Coopera a Schrieffera. Tato

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

mikroskopická teorie dokáže vysvětlit všechny základní jevy v supravodičích na základě kvantové mechaniky.

2.6. Objev vysokoteplotní supravodivosti

Fyzikové se snažili nalézt materiál s co nejvyšší kritickou teplotou. Dlouhou dobu byla rekordmankou slitina Nb_3Ge . V roce 1986 se Johannesu Georgu Bednorzovi a Karlu Alexi Müllerovi podařilo vytvořit supravodivý keramický materiál na bázi oxidů Cu, Y, Ba. Kritická teplota se přiblížila 100K. Práce na hledání vysokoteplotních supravodičů rychle pokračovala a dnes je známo mnoho takových látek.

2.7 Užití supravodivosti

1. Aplikace výkonové:

- kabely pro přenos velkých proudů
- magnety pro laboratorní a technické užití
- transformátory
- generátory a motory
- magnetické pumpy
- akumulace energie

2. Aplikace elektronické

- supravodivé spínače (kryotrony)
- paměťové prvky
- modulátory a zesilovače
- aplikace Josephsonových jevů
- tepelné ventily a objemové rezonátory

3 Závěr

Objev supravodivosti, který se z počátku jevil jako čistě akademická záležitost, přerostl během sta let ve významný fyzikální obor. Dílčí vlastnosti supravodičů byly postupně užity v četných aplikacích.

4. Použitá literatura

BUCKEL, W. Supraleitung, Weinheim, 1993

TAKÁCS, S., CESNAK, L. Supravodivost't, Alfa, Bratislava 1979

ODEHNAL, M., Supravodivost a jiné kvantové jevy, Academia, Praha 1992

KITTEL, CH. Úvod do fyziky pevných látek, Academia, Praha 1993

5 Kontakt na autora

Doc. PaedDr. Václav Havel, CSc.

katedra obecné fyziky, Fakulta pedagogická, ZČU v Plzni

havelv@kof.zcu.cz

ODBORNÝ KEMP PŘÍRODOVĚDNÝCH OBORŮ FYZIKA

ZÁKLADY ASTRONOMICKÉ FOTOGRAFIE

Josef JÍRA, Libor ŠMÍD

1 Úvod

Fotografie se stala nepostradatelnou součástí práce astronomů. Vynález fotografie posunul naše možnosti poznání a chápání vesmíru o pořádný kus dopředu. Možnost použití dlouhých expozic vede ke zvýšení počtu detailů zobrazených na snímku než je tomu při pozorování pouhým okem. Výhody astronomické fotografie se uplatňují také při archivaci napozorovaných dat při jejich dalším využití. V některých archivech naleznete více než 100 let staré materiály, které jsou pro astronomy neocenitelným zdrojem informací. I když je v současné době klasická astronomická fotografie vytlačována CCD fotografiemi, je i nadále nenahraditelným pomocníkem při fotografování velkých hvězdných oblastí, jak je tomu například v případě bolidové sítě. Díky vývoji techniky a fotografických materiálů může téměř každý zájemce i v amatérských podmínkách dosáhnout poměrně kvalitních astronomických snímků. Cílem našeho příspěvku bylo seznámit účastníky kurzu poutavou formou s problematikou astronomické fotografie.

2 Fotografujeme s pomocí pevného stativu

Jedná se o nejjednodušší metodu astronomické fotografie pro získání snímků noční oblohy. Mezi základní vybavení patří jednooká zrcadlovka na klasický formát negativu nebo DSLR zrcadlovka s vyměnitelným objektivem. Využití objektivů o různých ohniskových vzdálenostech nám umožní zvolit si takový objektiv, který vykreslí požadovanou velikost zorného pole. Zcela nevhodným typem pro tento způsob astronomické fotografie jsou moderní automatické fotoaparáty (kompaktní).

Nedílnou součástí každého fotoaparátu je objektiv. Standardní ohnisková vzdálenost objektivu u zrcadlovek je 50 mm, ale při tomto způsobu fotografie můžeme používat i objektivy s ohniskovou vzdáleností od 28 mm do cca 135 mm. Značnou výhodou je, když vlastníme kvalitní objektiv, protože kvalitní objektiv můžeme plně odclonit a výsledný snímek je bez optických vad. Naopak u méně kvalitního objektivu vzniká při plném otevření clony horší kresba hvězd, a to zejména u okrajů, kde se hvězdy mohou jevit jako rozmazané.



INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Dále budeme potřebovat drátěnou spoušť, pevný stativ a rosnici, která může být i vytápěná.

Pomocí tohoto jednoduchého vybavení jsme schopni fotografovat velké oblasti oblohy, celá souhvězdí, meteory, umělé družice, polární záře, jasné komety a zajímavé konjunkce s okolní krajinou. Kompozice snímku je tedy ovlivněna volbou ohniskové vzdálenosti objektivu. S objektivem kolem 28 mm si můžeme dovolit fotografovat velké oblasti noční oblohy, jako např. souhvězdí Ryb, a na druhou stranu pomocí objektivu 135 mm můžeme fotografovat zajímavá seskupení planet s Měsícem, kde již máme jistotu, že na snímku zachytíme i fázi Měsíce. Pomocí základního objektivu jsme schopni zachytit na film nejenom souhvězdí noční oblohy, ale i přelety družic, západy a východy hvězd, Slunce, či stopy meteorů. Určit si správnou ohniskovou vzdálenost objektivu pro daný objekt na obloze je náročné. Správný objektiv zvolíme především podle úhlové vzdálenosti fotografovaných objektů nebo podle celkové kompozice, do které můžeme samozřejmě zahrnout i okolní krajinu.

Při fotografování noční oblohy si musíme uvědomit, že vlivem zemské rotace dochází k pohybu hvězd po obloze. Tento pohyb je pro lidské oko v krátkém časovém úseku lehce přehlédnutelný, ale na fotografii z pevného stativu nikoliv. Chceme-li mít hvězdy zachycené jako „bodové zdroje světla“, musíme tomu proto přizpůsobit i expozici, která se samozřejmě mění s deklinací fotografované oblasti. Na nebeském rovníku nebo v rovině ekliptiky bude expozice co nejkratší, zatímco u pólu bude mnohem delší. Při fotografování hvězdné oblohy s expozicí delší než 10 s, zejména v oblasti rovníku, dochází ke zkreslení obrazu hvězd. Hvězdy zachycené na film mají podobu soustředných oblouků se středem kolem hvězdy Polárky, kde se nachází nebeský pól. Tento zajímavý jev je častým motivem pro fotografy. Zejména fotografie bezprostředního okolí pólů s expozicí dlouhou desítky minut až hodin nechá vyniknout nádherný tvar soustředných oblouků. Fotografii takto pořízenou je vhodné při expozici trochu zaclonit, zejména za použití širokouhlých objektivů, kde často dochází ke zkreslení v okrajích zorného pole.



Výběr citlivosti filmu pro fotografování z pevného stativu je značně komplikovaný, protože je ovlivněn především fotografovaným tématem. Fotografujeme-li některé části oblohy, jako jsou souhvězdí, a chceme-li, aby hvězdy byly zobrazeny jako body, musíme používat krátký expoziční čas s citlivostí filmu minimálně 400 ISO. Pokud budeme fotografovat např. oblast kolem rovníku s expozicí i desítky minut, je vhodnější použít méně



INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

citlivý film z důvodů jasů oblohy. Zároveň se tak vyhneme projevům zrnitosti filmu. Nejvhodnější je si vyzkoušet různě dlouhé expozice na stejném fotografickém materiálu.

Zároveň bychom neměli zapomenout, poznamenat si u jednotlivých snímků údaje o expozici, datum, druh filmu a jeho citlivost, jakým objektivem jsme fotografovali, pozorovací místo a v neposlední řadě, co je zachycené na snímku. Tyto údaje nám pomohou při zpracování snímku.

3 Závěr

Cílem příspěvku bylo seznámit účastníky s problematikou astronomické fotografie. Text obsahuje základní informace o fotografii s pomocí pevného stativu. Jedná se o jednoduchý návod, který by měl umožnit pořízení astronomického snímku i s poměrně jednoduchým vybavením. Nemusíme tedy hned na začátku investovat desítky tisíc korun do kvalitní digitální techniky, neboť pro dosažení kvalitních astronomických snímků není třeba mít až tak špičkové fotografické vybavení, ale spíše nápad, štěstí a zkušenosti.

4 Kontakt na autora

Bc. Josef Jíra
josef.jira@seznam.cz
Ing. Libor Šmíd
smid@civ.zcu.cz

ODBORNÝ KEMP PŘÍRODOVĚDNÝCH OBORŮ FYZIKA

Zajímavé experimenty s camerou obscurou

Zdeňka KIELBUSOVÁ

1 Úvod

Camera obscura, neboli dírková komora je: „temná místnost, později skříňka mající v jedné stěně malý otvor, kterým procházejí světelné paprsky zvenku a vytvářejí na protilehlé stěně poněkud nejasný obrácený obraz předmětu; starobylý, ale značně nedokonalý předchůdce dnešního fotografického aparátu.“ (Klimeš, 1995) Tyto řádky si můžeme přečíst ve slovníku cizích slov.

2 Camera obscura

2.1 Historie camery obscury

S obrazem, který je vytvořen malinkou dírkou se můžeme setkat nejen v přírodě, ale i v běžném životě. Snad od pradávna jej pozorovali lidé v různých koutech světa. Mezi první dochované popisy a záznamy patří nález z 5. století př. n. l., který zapsal čínský filosof Muo Ti.

Jen o století později se v Řecku Aristoteles zabírá problémy: Proč sluneční světlo procházející čtyřúhelným otvorem, například mezerou v proutěném předmětu, nevytváří hranatý obraz? Proč obraz zatmění slunce, který prochází skrz síto, listy stromů či mezery přes sebe křížem položených prstů vytváří na zemi srpek?

Další kdo studoval převrácený obraz vytvořený malou dírkou (Cameru obscuru) a poukazoval na přímočaré šíření světla, je arabský fyzik a matematik Abu Ali al-Hasan, známý jako Alhazen, který žil v 10. století n. l.

Ve středověku zná a používá princip camery obscury anglický vědec, filosof a mnich Roger Bacon.

První detailní popis Camery obscury nalezneme kolem roku 1485 v rukopise *Codex atlanticus* italského umělce a vynálezce Leonarda da Vinci, který ji často používal ke studiu perspektivy.

2.2 Vývoj camery obscury

Camera obscura byla nejdříve reálnou místností, kde byl obraz promítán na protější stranu, než byla malá dírka ve stěně. Byla hojně využívána k pozorování zatmění slunce a ke zkoumání zákonů zobrazování.

Později byla camera obscura vylepšena spojnou čočkou a stal se z ní přenosný přístroj. Takto upravená camera obscura byla často využívána jako kreslířská pomůcka a stála na zrodu dějin fotografie, kde se stala základem konstrukce fotoaparátu.

Camera obscura si našla své místo i v moderní vědě, protože v polovině 20. století vědci objevili, že se dá využít k fotografování rentgenového záření a paprsků gama, které normální

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

objektiv absorbuje. Camera obscura se díky tomu dostala na palubu kosmických lodí a do vesmíru.

2.3 Fotografie

První fotografii camerou obscurou pořídil roku 1850 skotský vědec sir David Brewster. Bohužel se camera obscura začala více prosazovat až koncem 19. stol., kdy byla velice kladně hodnocena její měkčí kresba oproti dokonalým ostře kreslícím objektivům. Později začala upadat do zapomnění, až v 60. letech zažila opětovný rozmach, který v mírných vlnách trvá dodnes.

2.4 Princip a vlastnosti

Obraz v kameře obscuře vzniká na základě přímočarého šíření světla. Každý bod na povrchu osvětleného předmětu odráží světelné paprsky všemi směry. Část těchto paprsků dírka propustí. Paprsky pokračují ve své dráze, až narazí na průmětnu, kde vytvoří převrácený obraz předmětu. Bod se proto nezobrazuje jako bod, ale jako malý kroužek, což je příčinou nepatrné neostrosti. Z tohoto výkladu by se zdálo, že čím menší dírka, tím ostřejší obraz. Světlo je ale vlnění, a proto jakmile je rozměr dírky srovnatelný s rozměrem vlnové délky použitého světla, uplatní se ohyb. Pro každou obrazovou vzdálenost existuje optimální velikost dírky pro dosažení co nejostřejšího obrazu. Výpočet pro optimální průměr dírky, navrhl již Josef Petzval a později jej zdokonalil britský držitel Nobelovy ceny Lord Rayleigh. Na vzorci pracoval 10 let a je dodnes platný, publikoval jej ve své knize *Nature* v roce 1891.

Výpočet navržený Rayleighem upravený tak, aby výsledkem byl průměr, nikoli poloměr, můžeme zapsat takto:

$$d = 1,9 \cdot \sqrt{f \cdot l},$$

d – průměr dírky

f – obrazová vzdálenost

l – vlnová délka světla (často se používá vlnová délka žlutozeleného světla 0,00055 mm)

Obraz vytvořený camerou obscurou má vlastnosti, které u klasické fotografie s objektivem nenajdeme. Jelikož jde o reálný středový průmět, mají obrázky v kameře obscuře dokonalé perspektivní podání.

Další pozoruhodnou vlastností je úplná hloubka ostrosti, která umožní na jednom snímku zachytit stejně ostře jak předměty velmi blízké tak i velmi vzdálené.

Camera obscura vykreslí extrémně široký úhel. Paprsky světla pak ale mají ke krajům negativu mnohem delší cestu než ke středu, snímek je tedy na okraji méně exponovaný, a proto se ztmavuje.

2.5 Návod na kameru obscuru

Pomůcky:

2 ks A3 černý karton, nůžky, lepidlo, špendlík, černá lepenka, pravítko, fotopapír, pozitivní vývojka, ustalovač, destilovaná voda, 4 fotomisky, odměrný válec

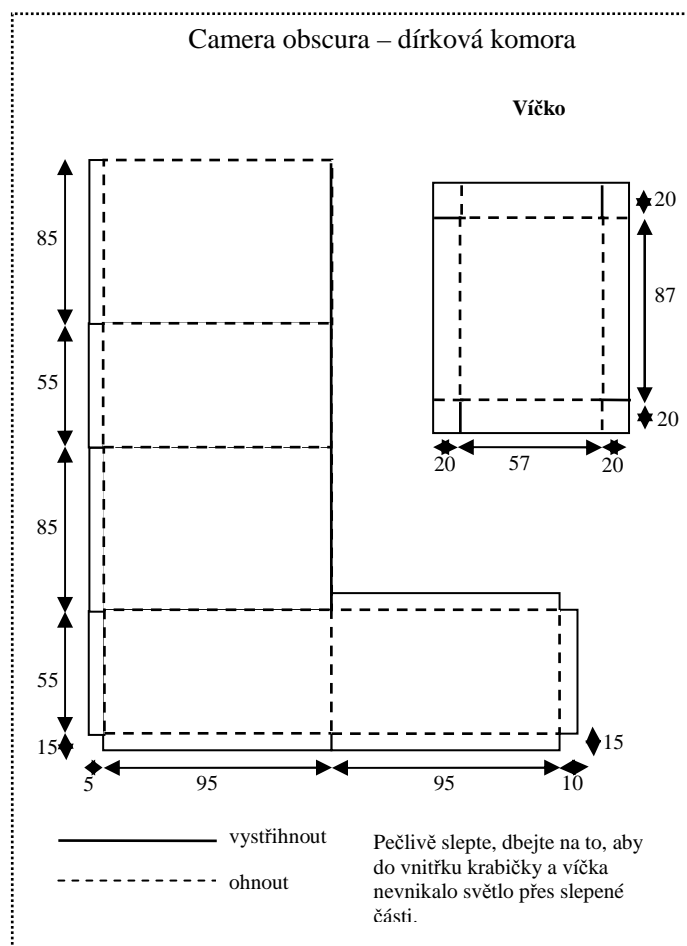
Postup:

Podle nákresu narýsujeme, vystříháme a slepíme krabičku (kameru obscuru). Na střed dna krabičky uděláme malou dírku, kterou překryjeme krytkou (kousek černého kartonu s izolepou). V temné místnosti vložíme do víčka fotopapír a přiklopíme jej na spodek krabičky. Černou lepenkou přichytíme víčko ke spodku krabičky tak, aby dovnitř nevnikalo žádné světlo. Vybereme vhodný objekt k fotografování a umístíme kameru obscuru do vhodné

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

pozice. Odkryjeme krytku, počkáme stanovený čas a opět díрку zakryjeme krytkou. V temné místnosti si připravíme roztoky na vyvolání fotografií. V pořadí pozitivní vývojka, destilovaná voda, ustalovač a poslední je opět destilovaná voda. V temné místnosti vyndáme fotonáhodník a postupně jej ponořujeme do připravených roztoků.

Nákres:



3 Použitá literatura

RENNER, E.: *Pinhole Photography: Rediscovering a Historic Technique*, 1995, Focal Press, Butterworth-Heinemann, Newton, MA, USA ISBN 0-240-80237-3

BALIHAR, D.: Co je dírková komora (cit. 20.8.2010) Dostupné na internetu:

<http://www.pinhole.cz/cz/pinholecameras/whatis.html>

What is a camera obscura? 8/2004 (cit. 20.8.2010) Dostupné na internetu:

<http://brightbytes.com/cosite/what.html>

4 Kontakt na autora

Jméno a příjmení s tituly: PhDr. Zdeňka Kielbusová

Název instituce: Západočeská univerzita v Plzni, Fakulta pedagogická, katedra obecné fyziky

E-mail: kielbus@kof.zcu.cz

ODBORNÝ KEMP PŘÍRODOVĚDNÝCH OBORŮ FYZIKA

ZAJÍMAVÉ EXPERIMENTY S PLYNY

Zdeňka KIELBUSOVÁ

1 Úvod

Existuje mnoho experimentů, které se užívají k demonstraci podtlaku a jeho účinků. Klasické pokusy, které můžeme najít v různých typech učebnic jsou: zpola nafouknutý balónek ve vývěvě, var vody za sníženého tlaku, zhasínání svíčky ve vývěvě, balónek ve vývěvě, scvrklé jablíčko ve vývěvě, přečerpávání vody ve vývěvě, zvonek či budík ve vývěvě, rozsvícená žárovka ve vývěvě, Newtonova trubice, aj. Provedeme nejen tyto tradiční experimenty, ale i některé méně tradiční, které jsou níže popsány.

2 Netradiční experimenty s vývěvou

Návody na několik netradičních experimentů s vývěvou.

2.1 Nasávání vody

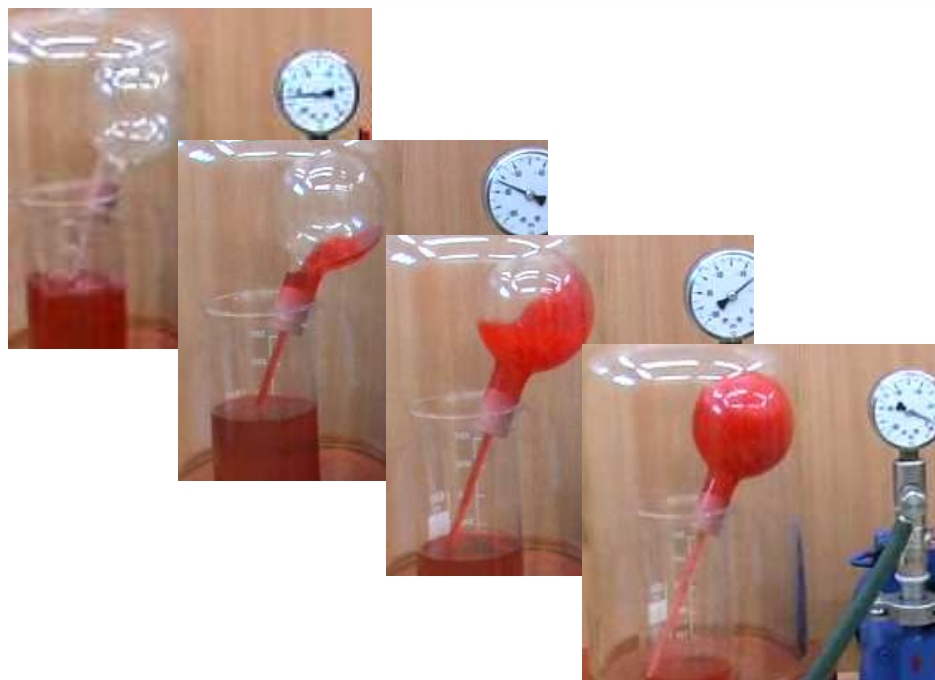
Pomůcky:

vývěva s recipientem a příslušenstvím, voda, potravinářské barvivo, plastová láhev, kádinka, skleněná trubička dlouhá cca 20 cm, gumová zátka s dírou (kterou vzduchotěsně projde skleněná trubička), kulová baňka.

Provedení:

Plastovou láhev naplníme vodou a přidáme potravinářské barvivo. Pod recipient vývěvy vložíme kádinku, do které jsme nalili obarvenou vodu. Do zátky zasuneme skleněnou trubičku tak, jak je vidět na obrázku. Zátku se skleněnou trubičkou vzduchotěsně zasuneme do kulové baňky. Do kádinky vložíme konec skleněné trubičky na jejímž druhém konci se nachází zátka s kulovou baňkou. Spustíme vývěvu. Jakmile začneme odčerpávat vzduch z pod recipientu, začne ze skleněné trubičky unikat rozpínající se vzduch, probublává skrz vodu. Jakmile začneme opět napouštět vzduch zpět pod recipient (vyrovnávat tlak s okolím), začne skrz skleněnou trubičku tryskat do kulové baňky obarvená voda.

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ



Průběh experimentu nasávání vody

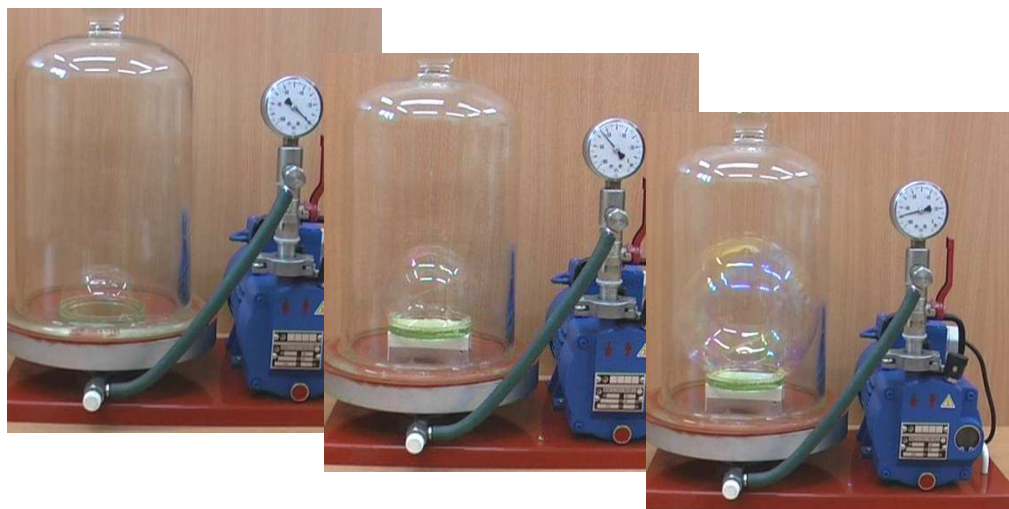
Vysvětlení:

Při odčerpávání vzduchu zpod recipientu vývěvy klesá tlak v okolí kulové baňky, vzduch uvnitř ní se tedy začne rozpínat a unikat ven skrz skleněnou trubičku a vodu. Jakmile začneme pod recipient vývěvy opět napouštět vzduch (vyrovnáme tlak s okolním), tlak na hladinu vody se zvětší a vtlačuje vodu skrz skleněnou trubičku do kulové baňky, ve které je tlak vzduchu nižší.

2.2 Bublina a vývěva

Pomůcky:

vývěva s recipientem a příslušenstvím, Petriho miska, roztok na bubliny, brčko



Průběh experimentu bublina ve vývěvě

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Provedení:

Pod recipient vývěvy umístíme Petriho misku s roztokem na tvorbu bublin, na které jsme brčkem vyfoukli bublinu. Spustíme vývěvu a jakmile začneme odčerpávat vzduch, bublina se začne zvětšovat.

Vysvětlení:

Při odčerpávání vzduchu zpod recipientu vývěvy klesá tlak v okolí bubliny. Bublina se začne rozpínat a tlak uvnitř ní se začne zmenšovat (snaží se vyrovnat s klesajícím tlakem pod recipientem).

2.3 Hrnečku, vař!

Pomůcky:

vývěva s recipientem, sliz, hrneček, Petriho miska

Provedení:

Pod zvon vývěvy umístíme hrneček, do nějž vložíme sliz. Spustíme vývěvu a sledujeme, jak sliz expanduje z hrnečku. Vypneme vývěvu a otevřeme ventil, kterým vpustíme pod recipient vývěvy vzduch. Tlak se začne zvyšovat až na hodnotu atmosférického tlaku. Souběžně se stoupajícím tlakem se sliz opět začne smršťovat až na původní objem, ovšem nenasouká se zpět do hrnečku, což výsledný vizuální efekt poněkud kazí. Průběh experimentu včetně hodnot na vakuometru lze sledovat na obrázku.

Vysvětlení:

Sliz obsahuje uzavřené vzduchové komůrky, které se vlivem snižování okolního tlaku pod recipientem rozpínají, čímž se zvětšuje jeho celkový objem.



Průběh experimentu Hrnečku, vař!

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

2.4 Panáček z marshmallow

Pomůcky:

vývěva s recipientem, klasické marshmallow, stojánek, špejle nebo párátka

Příprava:

Z klasických bonbónů marshmallow a špejlí vytvoříme panáčka.

Provedení:

Pod recipient vývěvy umístíme na stojánek vyrobeného panáčka. Spustíme vývěvu a sledujeme, jak panáček v průběhu snižování tlaku pod recipientem zvětšuje svůj objem. Po vypnutí vývěvy otevřeme ventil, kterým vpustíme pod recipient vývěvy vzduch. Tlak se zvyšuje až na hodnotu atmosférického tlaku, panáček zmenšuje svůj objem, až se úplně zborstí. Průběh experimentu včetně hodnot na vakuometru, lze sledovat na obrázku.

Vysvětlení:

Pěnové bonbóny marshmallow obsahují uzavřené vzduchové komůrky, které se vlivem snižování okolního tlaku pod recipientem rozpínají, čímž se zvětšuje celkový objem bonbónu. Po vyrovnání se marshmallow zmenší oproti původnímu objemu díky popraskání některých vzduchových komůrek.



Průběh experimentu panáček marshmallow ve vývěvě

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

2.5 Protržení blány

Pomůcky:

vývěva s recipientem a příslušenstvím, skleněná trubka, mikrotenový pytlík, gumičky

Provedení:

Na skleněnou trubku napneme mikrotenový pytlík jako blánu a gumičkou ji zajistíme. Dbáme, aby blána byla vzduchotěsně upevněna. Takto připravenou skleněnou trubku s blánou umístíme na talíř vývěvy přímo nad výpusť. Spustíme vývěvu a pozoruje, jak se blána prohýbá dovnitř, až se nakonec protrhne.

Vysvětlení:

Zředěním vzduchu v trubce vznikne podtlak, jehož působením se mikroténová blána nejdříve silně prohne a nakonec se protrhne.



Protržená blána

2.6 Pivo ve vývěvě

Pomůcky:

vývěva s recipientem, Petriho miska, sklenička, pivo

Provedení:

Pod zvon vývěvy umístíme na Petriho misku skleničku, kterou naplníme do dvou třetin jejího obsahu pivem. Spustíme vývěvu a sledujeme, jak z piva v průběhu snižování tlaku pod recipientem unikají bublinky CO_2 , čímž roste pěna. Po vypnutí vývěvy otevřeme ventil, kterým vpustíme pod recipient vývěvy vzduch. Tlak se začne zvyšovat až na hodnotu atmosférického tlaku a pěna na pivo klesne. Průběh experimentu včetně hodnot na vakuometru lze sledovat na obrázku.



Průběh experimentu s pivem ve vývěvě

Vysvětlení:

Bublínky CO_2 se začnou velmi rychle uvolňovat z piva jakožto následek snižujícího se okolního tlaku.

2.7 Vajíčko ve vývěvě

Pomůcky:

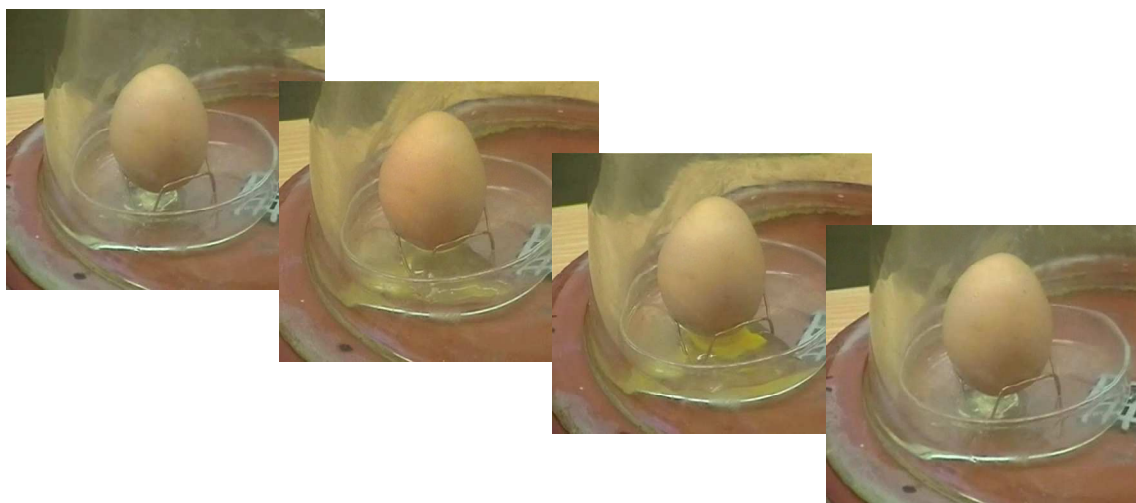
vývěva s recipientem, Petriho miska, stojánek na vajíčko vyrobený z drátku, syrové vajíčko, jehla

Provedení:

Pod zvon vývěvy umístíme na Petriho misku stojánek s vajíčkem, do nějž jsme píchnutím jehlou vytvořili zespodu díрку. Spodní část vajíčka by se měla ocitat cca 0,5 cm nad dnem Petriho misky. Spustíme vývěvu a sledujeme, jak z vajíčka v průběhu snižování tlaku pod recipientem začne vytékat bílek a posléze i žloutek. Pozor!!! Nesmí dojít k úplnému vytlačení obsahu vajíčka. Po vypnutí vývěvy otevřeme ventil, kterým vpustíme pod recipient vývěvy vzduch. Tlak se začne zvyšovat až na hodnotu atmosférického tlaku a vyteklý obsah vajíčka je vtlačen zpět do skořápky. Průběh experimentu lze sledovat na obrázku.

Vysvětlení:

Bílek a posléze i žloutek jsou z vajíčka vytlačovány v důsledku rozpínání pouku (vzduchové bubliny uvnitř každého vajíčka). Když vpustíme pod recipient vývěvy vzduch, jeho vzrůstající tlak opět vtlačí obsah vajíčka zpět do skořápky



Průběh experimentu s vajíčkem ve vývěvě

3 Závěr

Pevně věřím, že netradičními experimenty jsem přispěla a podpořila získané poznatky o plynech. Návody na další experimenty s plyny naleznete na těchto internetových stránkách <http://kdf.mff.cuni.cz/veletrh/sbornik/>, <http://www.ceskatelevize.cz/program/port/michaelovy-experimenty/143-sklenikovy-efekt-snadno-a-rychle/>.

4 Použitá literatura

KIELBUSOVÁ, Z., Motivace a aktivizace žáků ve výuce fyziky [rigorózní práce] : experimenty s plyny, Plzeň : 2009.



INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

5 Kontakt na autora

Jméno a příjmení s tituly: PhDr. Zdeňka Kielbusová

Název instituce: Západočeská univerzita v Plzni, Fakulta pedagogická, Katedra obecné fyziky

E-mail: kielbus@kof.zcu.cz

ODBORNÝ KEMP PŘÍRODOVĚDNÝCH OBORŮ FYZIKA

TEORIE BAREVNÉHO VIDĚNÍ A VYUŽITÍ V PRAXI

Robert KUNESCH

1 Úvod

Student získá představu o přeměně barevného podnětu v barevný vjem. Osvojí si poznatky, že barva předmětu vzniká složením odraženého světla a závisí proto i na barvě dopadajícího světla.

2 Cíle

Seznámí se s aditivním a subtraktivním skládáním barev, jejich využití v barevných systémech a tyto poznatky dokáže využít k analýze vjemů získaných na základě vlastních zkušeností.

Student si prohloubí vědomosti získané ve vzdělávacích oblastech Biologie, Výtvarná výchova, Informatika a informační a telekomunikační technologie

Student pochopí souvislost mezi barevným viděním a využitím míchání barev v RGB a YMC zařízeních (scannery, monitory, tiskárny), a mezi ústrojím oka a funkcí televizní kamery.

Na základě samostatně provedených experimentů získá povědomí o psychologickém aspektu barev.

3 Tématické celky průřezového tématu

Média a mediální produkce, Mediální produkty a jejich významy

4 Mezioborové vztahy

4.1 Biologie

Využívá znalosti o nervové soustavě pro pochopení teorie barevného vidění

4.2 Výtvarná výchova

Dokáže vystihnout nejpodstatnější rysy dnešních proměn a na příkladech uvést jejich vliv na proměnu komunikace v uměleckém procesu

Využívá znalosti aktuálních způsobů vyjadřování a technických možností zvoleného média pro vyjádření své představy

Charakterizuje obsahové souvislosti vlastních vizuálně obrazných vyjádření a konkrétních uměleckých děl a porovnává výběr a způsob užití prostředků

V konkrétních příkladech vizuálně obrazných vyjádření vlastní i umělecké tvorby identifikuje pro ně charakteristické prostředky

4.3. Informatika a informační a telekomunikační technologie

Využívá teoretické i praktické poznatky o funkcích jednotlivých složek hardwaru a softwaru k tvůrčímu a efektivnímu řešení úloh

5 Rozvíjené klíčové kompetence (RVP G, 2007)

5.1 Kompetence k učení

Kriticky přistupuje ke zdrojům informací, informace tvořivě zpracovává a využívá při svém studiu a praxi

5.2 Kompetence k řešení problémů

Uplatňuje při řešení problémů vhodné metody a dříve získané vědomosti a dovednosti, kromě analytického a kritického myšlení využívá i myšlení tvořivé s použitím představivosti a intuice

Kriticky interpretuje získané poznatky a zjištění a ověřuje je, pro své tvrzení nachází argumenty a důkazy, formuluje a obhajuje podložené závěry;

5.3 Kompetence komunikativní

Efektivně využívá moderní informační technologie aktivně spolupracuje při stanovování a dosahování společných cílů

5.4 Kompetence občanská

Rozšiřuje své poznání a chápání kulturních a duchovních hodnot, spoluvytváří je a chrání

6 Použitá literatura

- CRHÁK, F. Prostor a perspektiva. 1. vyd. Praha: SPN, 1975. č. 67-62-40/1
ČESKÝ, M. Barevná televize jasně a jednoduše. 1. vyd. Praha: SNTL, 1975.
Typové č. L26-A-IV-32/52277
ECKERTO VÁ, L. Cesty poznávání ve fyzice. 1. vyd. Praha: Prometheus, 2004.
ISBN 80-7196-293-7
FEYNMAN, R. P. Přednášky z fyziky s řešenými příklady. 1. vyd. Havlíčkův Brod: Fragment, 2000. ISBN 80-7200-405-0
FRASER, B. Murény, Ch. Bunting, F. Správa barev. 1. vyd. Brno: Computer Press, 2003. ISBN 80-722-6943-7
FUKA, J. HAVELKA, B. Optika a atomová fyzika. 1. vyd. Praha: SPN, 1961.
č. 7422/60-III/I
HANUŠ, K. O barvě. 3. vyd. Praha: SPN, 1969. č. 85-80-21/3
HANSEL, H. NEUMANN, W. Physik. 1. vyd. Berlin, Oxford: Spektrum Akademischer Verlag GmbH Heidelberg, 1993. ISBN 3-86025-304-2
CHURCHILL, E. R. Kouzelná knížka optických iluzí. 1. vyd. Praha: Portál, 2004.
ISBN 80-7178-842-2
PARRAMÓN, J. M. Světlo a stín. 1. vyd. Svojtka a Vašut, 1995. ISBN 80-7180-044-9
PARRAMÓN, J.M. Teorie barev. 2. vyd. Praha: Jan Vašut, 1998. ISBN 80-7236-046-9.
PLESKOTOVÁ, P. Svět barev. 1. vyd. Praha: Albatros, 1987. č. 13-806-87
ZDENĚK, M. Základy výtvarné výchovy. 1. vyd. Praha: SPN, 1983.
č. 16-05-13/1

V prezentaci byly použity obrázky z internetových zdrojů:



INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

martinpetracek.com/images/hracky/viewsonic_vx2835wm_lcd_monitor.png

http://tiskarny.hledej ceny.cz/data/images/81/img_81834.jpg

<http://www.vseprobydleni.cz/inspirace/7487.jpg>

[http:// users.skynet.be/J.Beever/](http://users.skynet.be/J.Beever/)

[http:// www.beipeters.de/Bilder/Aquarell.jpg](http://www.beipeters.de/Bilder/Aquarell.jpg)

<http://mfweb.wz.cz/fyzika/images/571.gif>

http://i.idnes.cz/07/103/nesd/JLB1e9eab_spektrum.jpg

<http://www.volny.cz/zrak/images/spc/Okol1.jpg>

7 Kontakt na autora

Mgr. Robert Kunesch

Katedra obecné fyziky

kotal@kof.zcu.cz

ODBORNÝ KEMP PŘÍRODOVĚDNÝCH OBORŮ FYZIKA

ZÁKLADY FYZIKÁLNÍCH MĚŘENÍ

Robert KUNESCH

1 Úvod

Student získá znalost z oboru měření základních mechanických a elektrických veličin. Bude mu za podpory řádné motivační složky vysvětlena důležitost zjišťování vypočítávání různých druhů chyb měření. Provede se ukázka možných způsobů zpracovávání naměřených záležitostí pomocí tabulek, grafů, předpisů a předepisovaných požadavků formou protokolů.

2 Cíle předmětu

Student se seznámí se základními pojmy v měřicí technice a se základními přístroji pro měření mechanických a elektrických veličin.

3 Požadavky na studenta

Aktivní účast na seminářích, odměřen demonstrační úlohy, vysvětlení vypracování referátu z této úlohy.

4 Obsah přednášky

1. Pojem fyzikální experiment, fyzikální měření a fyzikální zákon 2. Fyzikální veličiny a jednotky 3. Metody řešení 4. Chyby měření 5. Teorie elementárních chyb 6. Početní a grafické metody zpracování výsledků měření 7. Základní mechanické měřicí přístroje a mechanická měření 8. Základní elektrické měřicí přístroje a elektrická měření 9. Přístrojové vybavení pro realizaci elektrických měření 10. Analogový a digitální způsob zpracování signálu.

Hlavní důraz bude kladen na poznatky o základních fyzikálních veličinách

Některé z těchto fyzikálních veličin byly vybrány jako základní a jsou to:

Délka, hmotnost, čas, elektrický proud, termodynamická teplota, látkové množství a svítivost.

Takovou typickou základní fyzikální veličinou je délka, kde mnoho dalších fyzikálních veličin můžeme převést na měření délky například ve rtuťovém teploměru je měřítkem fyzikální veličiny teploty délka rtuťového sloupce atd.

Veličiny které nepatří mezi základní se nazývají odvozené a měří se pomocí základních veličin.

5 Předpoklady

Předpokládá se znalost měřicích přístrojů a jejich obsluhy na úrovni střední školy.



INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

6 Použitá literatura

HAVEL, Václav; PETŘÍK, Josef; RAUNER, Karel. Fyzikální praktikum I : Určeno stud. 1. a 2. roč. učitelství VVP [všeobecně vzdělávací předměty]. Plzeň : Západočeská univerzita, 1992. ISBN 80-7043-047-8.

PROCHÁZKOVÁ, E. Úvod do teorie a praxe fyzikálního měření I. PF České Budějovice, 1984.

BROŽ, Jaromír. Základy fyzikálních měření : Vysokošk. učebnice pro fakulty přírodověd., pedagog. a pro fakultu matematicko-fyz. 1. 1. vyd. Praha : SPN, 1983.

VYBÍRAL, B. Zpracování dat fyzikálních měření. Hradec Králové, 200. ISBN 80-86148-54-

7 Kontakt na autora

Mgr. Robert Kunesch
Katedra obecné fyziky
kotal@kof.zcu.cz

ODBORNÝ KEMP PŘÍRODOVĚDNÝCH OBORŮ FYZIKA

ZAJÍMAVÉ EXPERIMENTY

Pavel Masopust

1 Úvod

Přednáška předvedla studentům několik zajímavých experimentů, především z oblasti moderní fyziky, které jsou měřeny v rámci fyzikálních praktik na katedře obecné fyziky FPE ZČU. Kromě toho byly předvedeny experimenty s transformátory.

2 Pokusy s transformátory

Transformátor je zařízení, jež je, zjednodušeně řečeno, schopno měnit velikost napětí nebo proudu. Transformátor má většinou dvě cívky, primární a sekundární. Poměr mezi počtem závitů na sekundární a primární cívce určuje chování transformátoru.

Pokud je např. počet závitů sekundární cívky dvakrát větší než primární, je přiložené napětí na primární cívce zdvojnásobeno – to se pak objeví na sekundární cívce.

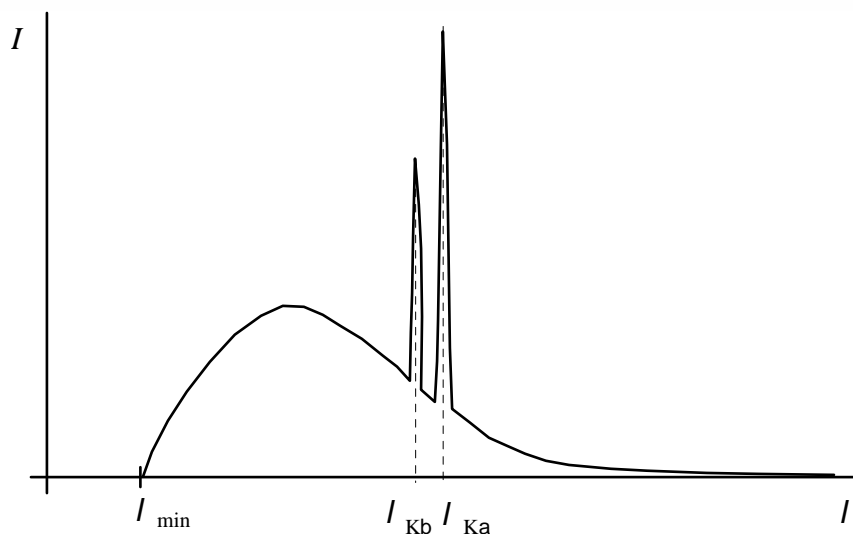
Byl demonstrován pokus s tzv. Jakobovým žebříkem. Na primární cívce bylo 600 závitů a na sekundární 12000. Došlo tedy k dvacetinásobnému zvýšení napětí. Z přiložených 230 na primární cívce se stalo cca 4600 V. Takové napětí je schopno vytvořit ve vzduchu obloukový výboj. Více na <http://fyzmatik.pise.cz/90955-jakobuv-zebrik.html>.

Pokud se naopak jako sekundární cívka použije cívka s menším počtem závitů (v našem zapojení 6 závitů ze silného drátu) je zvýšen proud v sekundární cívce. Tohoto principu může být použito při ohřívání materiálů. V našem zapojení došlo k rozžhavení hřebíku. Více např. http://cs.wikipedia.org/wiki/Induk%C4%8Dn%C3%AD_oh%C5%99ev.

3 Měření s rentgenovým spektrometrem

Autoři Karel Rauner, Jitka Prokšová, Václav Havel v [1]: „Dopadají-li v rentgence na antikatodu elektrony s určitou energií, emituje se z antikatody brzdné rentgenové záření se spojitým spektrem, na které je superponováno charakteristické záření s čárovým spektrem, určené energiemi kvantových přechodů v materiálu antikatody. Příklad takového spektra – závislost intenzity I emitovaného rentgenového záření na vlnové délce λ – je na obr. 1.

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ



obr. 1

Zde λ_{\min} je minimální vlnová délka emitovaného brzdného záření, pro kterou platí:

$$\lambda_{\min} = \frac{h \cdot c}{e \cdot U}, \quad (1)$$

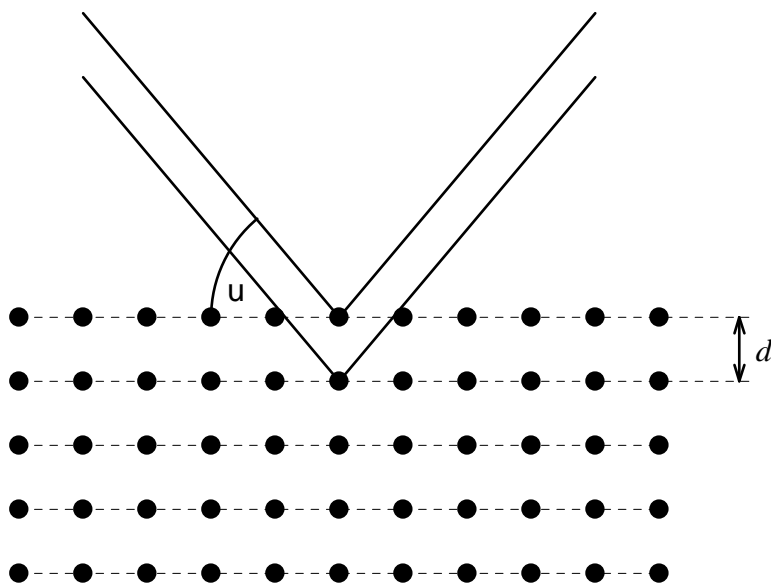
kde h je Planckova konstanta, c rychlost světla ve vakuu, e elementární náboj a U napětí na rentgence. $\lambda_{K\alpha}$ a $\lambda_{K\beta}$ jsou vlnové délky odpovídající charakteristickému záření vznikajícímu přechody elektronů ze slupek L a M na uvolněnou slupku K.

Nejužívanější metodou měření spektra z obr. 1 je metoda Braggovy reflexe, tj. metoda, využívající interferenčního odrazu od různých planparalelních krystalových rovin. Princip této metody je znázorněn na obr. 2. Je-li dopadající rentgenový paprsek monochromatický s vlnovou délkou λ , nastane po odrazu interferenční maximum, je-li dráhový rozdíl paprsků odražených od sousedních rovin celistvým násobkem vlnové délky λ :

$$n \cdot \lambda = 2 \cdot d \cdot \sin \vartheta_n, \quad (2)$$

$n = 1, 2, 3, \dots$ je řád maxima, d je vzdálenost dvou sousedních krystalových rovin a ϑ_n je úhel dopadu i odrazu, při kterém dochází k n -tému maximu.

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

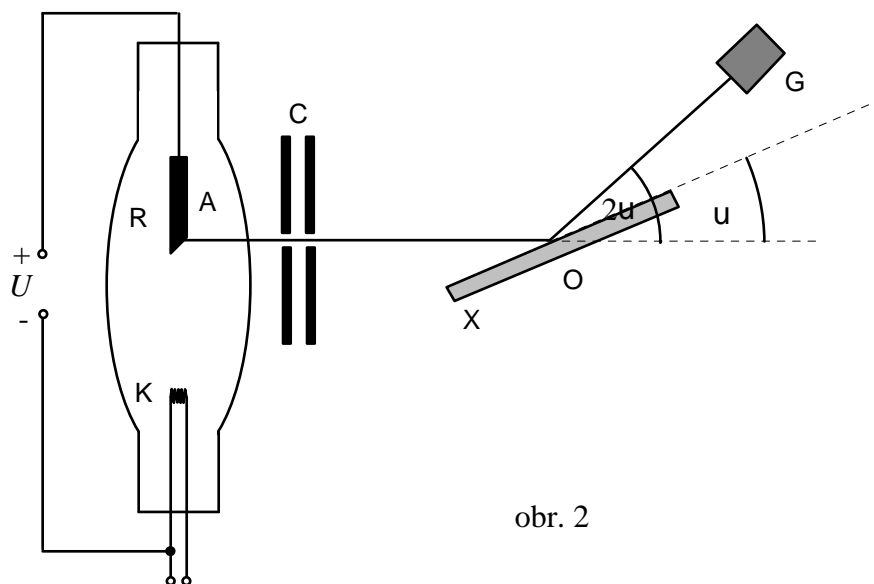


obr. 2

Celkové uspořádání rentgenového spektrometru, pracujícího na popsaném principu, je na obr. 3. R je rentgenka, K její katoda, A její antikatoda, C jsou clony vymezující úzký paprsek, X je krystal otáčivý kolem osy O kolmé k nákresně a G je detektor (Geigerův-Müllerův počítač), otáčivý rovněž kolem osy O tak, že úhel jeho natočení 2ϑ je dvojnásobný proti úhlu natočení krystalu ϑ . Při měření se krystal i detektor otáčejí konstantními rychlostmi v intervalu

$$\vartheta \in \left\langle 0, \frac{\pi}{4} \right\rangle.$$

Je-li d tak malé, že v uvedeném intervalu dojde jen k maximum prvního řádu, je



obr. 2

možné měření získat obrázek podobný grafu na obr. 1. K tomu se na vodorovnou osu souřadnicového zapisovače přivádí napětí úměrné úhlu ϑ , na svislou osu se přivádí napětí úměrné počtu impulzů registrovaných Geigerovou-Müllerovou trubicí za 1 s. Je-li d větší, budou na takto získaném grafu i maxima vyšších řádů.“ (Karel Rauner, Jitka Prokšová, Václav Havel, 1999). Studenti si mohli prohlédnout měřicí aparaturu a získali představu o možnostech rentgenové materiálové spektroskopie.

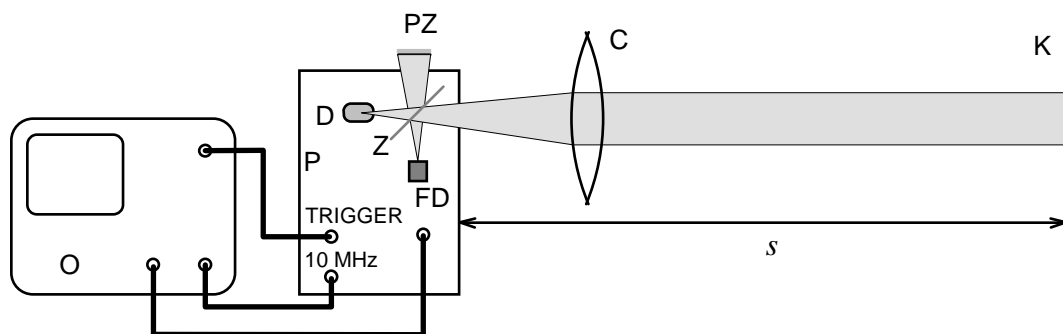
Více o rentgenech např. v

http://cs.wikipedia.org/wiki/Rentgenov%C3%A9_z%C3%A1m%C5%99en%C3%AD.

2 Měření rychlosti světla

Autoři Karel Rauner, Jitka Prokšová, Václav Havel v [1]: „Ve středoškolských učebnicích se často jako nejnázornější způsob měření rychlosti světla uvádí Fizeauova metoda. K jejímu laboratornímu ověření ve škole však nedocházelo, protože potřebná vzdálenost zrcadla musí být i při rychle rotujícím přerušovači světla (ozubené kolečko) několik kilometrů. S prostředky moderní elektroniky však lze tuto metodu použít i ve fyzikální praktikě.

K přerušování světelného paprsku nelze samozřejmě používat ozubených kol, protože nejsme schopni dosáhnout potřebných otáček řádově až tisíce za sekundu. Pro vysílání krátkých impulsů světla nemůžeme ani použít žárovky pro její velkou teplotní setrvačnost a dokonce ani polovodičový laser z ukazovátka. Ten potřebuje k dosažení stavu inverze poměrně velké proudové hustoty a při značné kapacitě přechodu nelze modulovat jeho světlo frekvencí vyšší než několik desítek kHz. Mnohem větší frekvencí lze modulovat světlo



obr. 1

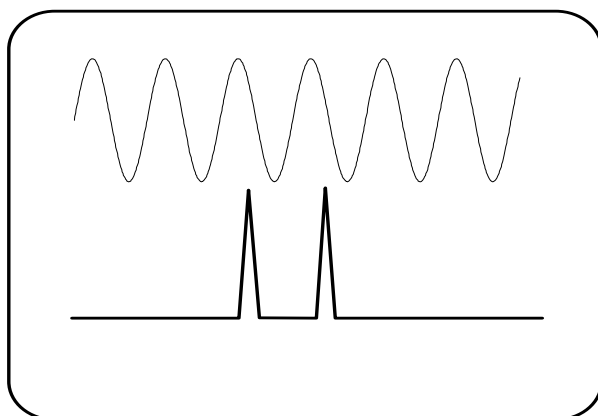
běžných svítivých diod (LED), světlo však není kolimováno a je příliš slabé na to, aby bylo možné zachytit odražené světlo od zrcadla vzdáleného několik metrů.

Základem úspěchu je vysokovýkonová svítivá dioda, která je napájena velmi krátkými proudovými impulsy. V použité aparatuře firmy LEYBOLD jsou tyto proudové impulsy tak krátké, že dioda svítí záblesky přibližně 20 ns dlouhými. Světlo z diody D (obr. 1) prochází v přístroji P polopropustným zrcadlem Z a je kolimováno čočkou C do svazku rovnoběžných paprsků. Část odraženého světla od polopropustného zrcadla se po odrazu od pomocného zrcadla PZ vede na fotodiodu FD, z ní je napětí vedeno na jeden z kanálů osciloskopu O. Svazek rovnoběžných paprsků dopadá na vzdálené zrcadlo K, tvořené koutovým odražečem. Ten vrací svazek paprsků zpět k čočce C, která jej po odrazu na polopropustném zrcadle Z fokusuje na fotodiodě FD. Do osciloskopu tedy vstupují dva impulsy: první po odrazu od PZ, druhý po odrazu od K. Protože vzdálenost PZ i okénka

přístroje od polopropustného zrcadla je stejná, bude druhý impuls zpožděn o čas $\tau = \frac{2 \cdot s}{c}$, kde s je vzdálenost koutového odražeče K od přístroje P, c je rychlost světla ve vzduchu. Známe-li τ , je možné vypočítat

$$c = \frac{2 \cdot s}{\tau} \quad (1)$$

Dobu τ můžeme určit ze vzdálenosti impulsů z fotodiody na osciloskopu. Mohli bychom přitom vycházet z cejchované časové základny, přesnější je však jako měřítka použít harmonického signálu s kmitočtem 10 MHz, který je z P veden na druhý kanál osciloskopu. Protože je časová základna osciloskopu synchronizována výstupem TRIGGER, máme na obrazovce osciloskopu průběhy podle obr. 2. Porovnáním vzdálenosti obou impulsů s periodou 100 ns průběhu 10 MHz je možné zjistit časovou odlehlost τ . Změříme-li s pásmem, můžeme podle (1) vypočítat rychlost světla.“ (Karel Rauner, Jitka Prokšová, Václav Havel, 1999). Studenti sami popsali jim známé metody měření rychlosti světla a seznámili se s výše popsanou metodou.



obr. 2

3 Závěr

Studenti si na několika pokusech z vyšší fyziky ověřili své fyzikální znalosti a rozšířili si znalost o několik nových, na střední škole zřejmě nedemonstovaných experimentech.

4 Kontakt na autora

PhDr. Pavel Masopust
Katedra obecné fyziky, FPE, ZČU Plzeň
pmasop@kof.zcu.cz

ODBORNÝ KEMP PŘÍRODOVĚDNÝCH OBORŮ FYZIKA

LEVITACE A LÉTÁNÍ S FYZIKOU

Pavel Masopust

1 Úvod

Přednáška poutavým způsobem demonstuje jednotlivé síly jež mohou působit jako antigravitační, a tedy umožnit levitaci. Za normálních podmínek tělesa padají působením tíhové síly k zemi, aby se těleso vznášelo, je na něj nutné působit silou, jež bude namířena proti této tíhové síle. Možné levitační (proti tíze působící) síly jsou představeny na několika experimentech.

2 Vztlková síla

Na historickém příkladu vzletu bratří Montgolfierů v balónu lze posluchačům představit vztlkovou sílu. Pokud existuje rovnováha tíhové a vztlkové síly (a těleso není podrobno vlivu jiných sil), těleso se vznáší. Více o vztlkové síle viz <http://cs.wikipedia.org/wiki/Vztlak>. Princip vznášení balónu lze popsat podobně jako plavání tělesa v kapalině. Popsaný princip byl demonstrován na balónu vyrobeném z plastických sáčků do koše, ohřev vzduchu obstaral fén, např. <http://fyzweb.cz/materialy/debrujari/modely/balon.php>. Více o balónovém létání: <http://cs.wikipedia.org/wiki/Balon>.

2 Magnetická síla

Existence magnetů s dvěma druhy pólů (severním a jižním) je jistě téměř všem známa. Ovšem použít jeden magnet a čekat, že druhý, přiblížený opačným pólem, se bude nadnášet a setrvávat na místě, by bylo naivní. Earnshawův teorém stanovuje (http://en.wikipedia.org/wiki/Earnshaw's_theorem), že nelze vytvořit systém ve stabilní rovnováze jen čistou magnetickou, nebo elektrostatickou interakcí. Aby tedy magnety mohly „viset“ jeden nad druhým a druhý se vznášel v magnetickém poli prvního magnetu, je potřeba nějak magnet stabilizovat. Tohoto využívá i množství komerčních přístrojů (spíše hraček), např. <http://fyzmatik.pise.cz/98309-levitron-levitující-disk.html>. Hračka *levitron* popsána na této stránce využívá pro stabilizaci „setrvačnickového efektu“ (toho, že se rotující setrvačnick snaží udržet orientaci své osy v prostoru). Jiná předváděná hračka, levitující globus (<http://www.levitron.cz>), zase stabilizace pomocí přídavných magnetických polí řízených zřejmě magnetorezistory.

3 Elektrostatická síla

Další předváděná hračka (<http://www.thinkgeek.com/geektoys/science/af4c/>) předvádí elektrostatické odpuzování pomocí náboje vytvořeného miniaturním Van de Graafovým generátorem. Náboj je přenesen na lehký proužek hliníkové fólie, tento je pak odpuzován od

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

tyčky se zabudovaným generátorem. Pohybem hůlky je možné i „řídit“ pohyb hliníkového proužku.

4 Lifter, asymetrický kondenzátor

Předváděný jev byl poprvé pozorován ve dvacátých letech dvacátého století Thomasem Townsendem Brownem při pokusech s Coolidgeovou trubicí. Pozoroval, že při zapnutí trubice se tato snaží pohybovat směrem zpět, proti směru emitovaného záření.

Jev lze v laboratorních podmínkách demonstrovat konstrukcí tzv. lifteru.

Lifter je asymetrický kondenzátor, tedy takový kondenzátor, u něž je velká geometrická odlišnost kladné a záporné elektrody. Jedna z možných konstrukcí je na obrázku 1. Právě pro tuto odlišnost nazýváme lifter asymetrickým kondenzátorem.



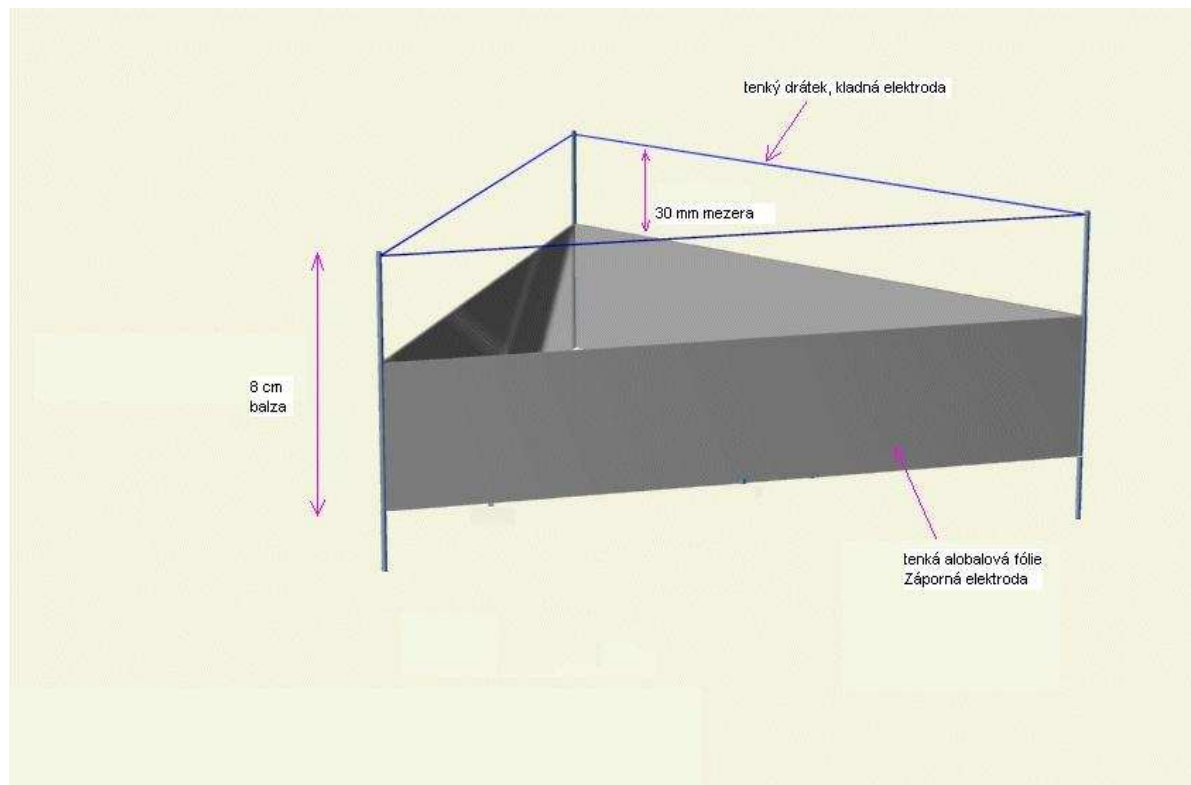
Obr. 1: Princip lifteru

Samotnou konstrukci pak ukazuje obrázek 1. Funkci malé kladné elektrody plní tenký měděný drátek, funkci záporné elektrody alobalový obal lifteru.

Pokud na tenký drátek přiložíme kladný a na alobal záporný pól vysokého napětí, vznikne silný proud vzduchu směrem dolů od lifteru, a s trochou štěstí se lifter vznese. Jako zdroj vysokého napětí byl použit počítačový monitor. Více o konstrukci lifterů např. na <http://jnaudin.free.fr/lifters/main.htm>.

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Hotový lifter ukazuje obrázek 2.



Obr. 2: Hotový lifter

3 Závěr

Příspěvek demonstroval různé fyzikální principy a síly jež umožní působit proti tíhové síle a s jejich pomocí odlehčit, nebo vznést různé předměty.

4 Kontakt na autora

PhDr. Pavel Masopust
Katedra obecné fyziky, FPE, ZČU Plzeň
pmasop@kof.zcu.cz

ODBORNÝ KEMP PŘÍRODOVĚDNÝCH OBORŮ FYZIKA

ASTRONOMICKÉ POKUSY

Marek Česal, Tomáš Meiser

1 Úvod

Astronomické pokusy slouží k jednoduché demonstraci něčeho tak nekonečného jako je vesmír. Pomocí jednoduchých a nenáročných experimentů, lze nasimulovat spoustu úkazů probíhajících ve vesmíru.

Většina pomůcek je snadno dostupná a proto nejsou pokusy ničím omezeny a většinu jich může připravit každý i v domácích podmínkách.

2 Popisy pokusů

Jednotlivé pokusy mají jasný chemikální nebo fyzikální základ, ale astronomickými je činí pak spojení se stejnými jevy ve vesmíru. Proto je základem všech těchto pokusů i astronomické porovnání se skutečností.

2.1 Simulace sopky

Nejenom na Zemi, ale i na jiných tělesech sluneční soustavy nalezneme sopečnou činnost, např. na Jupiterovo měsíci IO. Simulace lávy vytékající z jícnu se dá vytvořit pomocí malé lahvičky a modelu sopky z plastelíny (může se použít i sádra a nebo dokonce obyčejná zem). Do lahvičky se nasype jedlá soda. Pak se ve víčku od PET láhve rozmíchá ocet s červeným potravinářským barvivem a nalije se do lahvičky. Při reakci směsi s jedlou sodou se vytvoří červená pěna, která začne vytékat a připomíná tekoucí lávu z jícnu sopky.

2.2 Seeing

Seeing znamená kvalitu teleskopického obrazu hvězdy vlivem nestálosti zemské atmosféry. Laicky se tak také nazývá neklid atmosféry. Na jeho simulaci potřebujeme meotar, přes který položíme karton ve kterém bude jeden malý otvor simulující hvězdu. Ideální případ bez atmosféry je, když v cestě paprsku nic nepřekáží, tzn. obraz na stěně je klidný, nechvěje se. Na předvedení atmosféry použijeme skleničku s vodou, kterou postavíme na otvor. Obraz na zdi se nám mírně rozostří. Pokud ještě pomocí špejle vodu promícháme, dostaneme rozklepaný obraz hvězdy, který simuluje průchod obrazu přes neklidnou atmosféru. V dnešní době se již tento problém odstraňuje pomocí adaptivní optiky a nebo vyvezením dalekohledu nad atmosféru (např. HST).

2.3 Simulace granulace Slunce

Pokud pozorujeme za dobrých podmínek dalekohledem Slunce, můžeme spatřit jemnou síť tmavších a světlejších skvrnek po celém jeho povrchu – granulaci. Granulace je projevem proudění slunečního plazmatu v konvektivní vrstvě. Jasnější skvrnky představují vrcholky vzestupných proudů, které do fotosféry přinášejí teplejší materiál z podpovrchových vrstev. Poté co se materiál díky intenzivnímu vyzařování ochladí, projeví se nám ve fotosféře jako tmavší skvrnka a klesá zpět pod povrch. Pozor nezaměňovat se slunečními skvrnami.

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Rozměry těchto útvarů jsou řádově 1000 – 2000 km. Sluneční granulaci si můžeme vyrobit pomocí jedlého oleje a stříbřenky. V kádince nebo konvici rozmícháme olej se stříbřenkou a uvedeme do varu. Na hladině pak pozorujeme vzestupné proudy, které nám simulují sluneční granulaci. Vznikající buňky se jmenují podle H. Bénarda, který je v roce 1900 poprvé pozoroval, podle něj byly později také pojmenovány Bénardovými buňkami.

2.4 Mapování povrchu Venuše

Povrch Venuše se díky velmi husté atmosféře planety, neprostupné pro optické pozorování, nemůže stát cílem pozemských dalekohledů. Mapování jejího povrchu proto převzaly sondy, podmínky panující na povrchu planety nejsou vhodné ani pro sondy je zde příliš vysoký tlak a teplota. Přesto se to některým podařilo (Veněra 7) a na několik minut snímkovaly povrch planety. Jako lepší varianta se ukázalo radarové snímkování povrchu a jeho následná počítačová modelace. S moduritu si vytvoříme model povrchu Venuše, který budeme snímkovat. Radarový svazek paprsků nasimulujeme svazkem 300 špejlí. Pokud špejle nasadíme na vytvořený model, objeví se na druhém konci svazku tvar snímaného povrchu.

3 Závěr

Pokusy se dají použít ve školách při výuce astronomie, ale i v astronomických kroužcích pro přiblížení jednotlivých úkazů. Jejich použití při přednášce může daný problém více přiblížit. V dnešní moderní době není problém nalézt na internetu další návody na zajímavé pokusy a stačí pak je jen převést do astronomie spárováním s vhodným astronomickým úkazem.

4 Použitá literatura

MEISER T., Jednoduché experimenty demonstrující jevy a procesy ve vesmíru, bakalářská práce, 2008

MEISER T., Demonstrace astrofyzikálních procesů a jevů a jejich použití pro žáky základních škol, diplomová práce, 2010

KERROD, Robin, SPARRROW, Giles. Jak funguje Vesmír. Pavel Příhoda, Universum, 2005. 160 s. ISBN 80-242-1373-7.

MIKULÁŠEK, Zdeněk, MIŠ, Leon, RUMLER, Josef. Návod na použití vesmíru [online]. 2004 [cit. 2008-02-02].

Dostupné na internetu: <<http://navod.hvezdarna.cz/navod/konvekce.htm>>.

5 Kontakt na autora

Mgr. Marek Česal, Bc. Tomáš Meiser

KOF ZČU

mcesal@volny.cz, Makkinen@seznam.cz

ODBORNÝ KEMP PŘÍRODOVĚDNÝCH OBORŮ FYZIKA

FYZIKÁLNÍ DĚJE V KLASICKÝCH HUDEBNÍCH NÁSTROJÍCH

Josef Petřík

1 Úvod

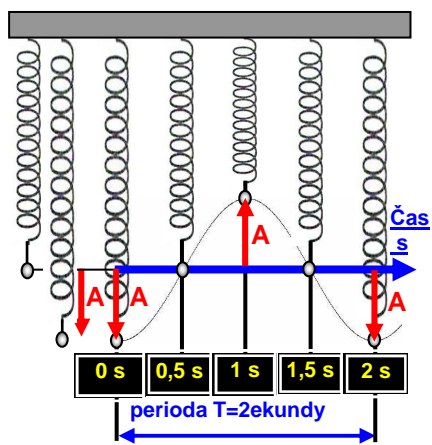
Příspěvek pojednává o fyzikálních dějích, které probíhají v klasických hudebních nástrojích. Jedná se většinou o kmitavé a vlnové děje v rozsahu výuky na středních školách.

2 KMITAVÝ POHYB, PERIODICKÝ KMITAVÝ POHYB, TÓN A NĚKTERÉ FYZIKÁLNÍ VELIČINY CHARAKTERIZUJÍCÍ JEHO VLASTNOSTI,

2.1 kmitavý pohyb

Kmitavý pohyb je takový, při kterém pohybující se těleso opakovaně prochází tzv. rovnovážnou polohou.

Rovnovážná poloha je taková, při které všechny vnější síly působící na těleso jsou v rovnováze a těleso je v klidu.



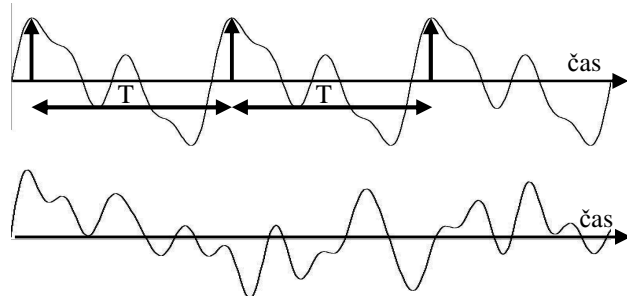
Zařízení které vykonává kmitavý pohyb se nazývá oscilátor. Na obrázku je zdroj kmitavého pohybu tvořen kuličkou určité hmotnosti, zavěšené na pružině. Pokud se kmitající těleso pohybuje v jedné přímce, říkáme takovému pohybu říkáme lineární kmitavý pohyb. Závislost vzdálenosti kmitajícího tělesa na čase nazýváme časovým rozvinutím kmitavého pohybu. Maximální vzdálenosti pohybujícího se tělesa od rovnovážné polohy se říká amplituda kmitavého pohybu A .

Z obrázku časového rozvinutí kmitavého pohybu lze vidět, že po určitém čase se kmitající těleso dostane do stejné vzdálenosti od rovnovážné polohy co se týká velikosti i směru. Nejkratší době mezi stejnými

vzdálenostmi od rovnovážné polohy se říká perioda kmitavého pohybu a označuje se T .

Říkáme, že pohybující se kulička vykonala jeden kmit.

Převrácená hodnota periody T se nazývá frekvence (nebo také kmitočet) kmitavého pohybu a označuje se $f=1/T$. Její jednotkou je hertz, ve zkratce Hz. Frekvence v hertzech udává počet period kmitavého pohybu za jednu sekundu.



Jiný příklad časového rozvinutí periodického kmitavého pohybu. Z obrázku je vidět, že se po určitém čase, periodě kmitů, průběh opakuje.

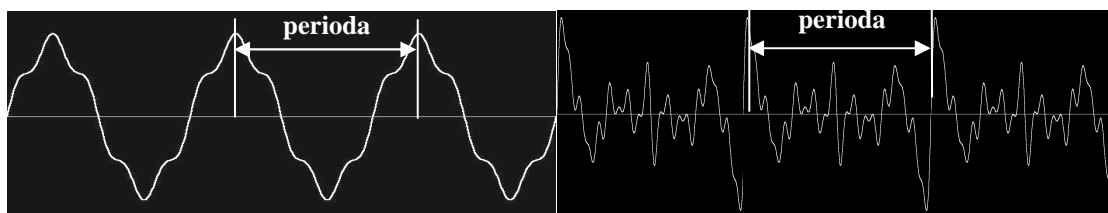
INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Časové rozvinutí jen kmitavého pohybu. V průběhu není žádná pravidelnost, kmitající těleso pouze opakovaně prochází rovnovážnou polohou.

2.2 TÓN A NĚKTERÉ FYZIKÁLNÍ VELIČINY CHARAKTERIZUJÍCÍ JEHO VLASTNOSTI

- Tónem nazýváme zvuk, vznikající v klasických hudebních nástrojích periodickým kmitáním:
 - pružných dřevěných plátků (klarinet, hoboje)
 - listových pružin (Harmonika)
 - umělých či přírodních blan (Tympány, buben)
 - strun (housle, klavíry, kytary, loutny, vozembouch)
 - hudebníkových rtů (Horny, trubky, pozoun).
 - Ale také lidských hlasivek (nebo i zvířecích-zpěv ptáků apod.)
 - Tóny vznikají i nárazem proudu vzduchu na ostrou hranu otvoru (píšťaly u varhan).
- **Výška tónu**

Zvuky vyvolané periodickými kmity (zvláště částí hudebních nástrojů) nazýváme **tóny**. Jak vypadá časové rozvinutí periodických kmitů vytvořených hudebními nástroji?

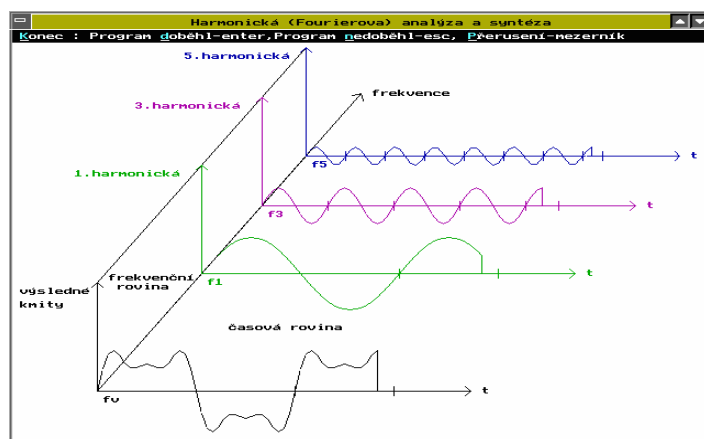


Na obrázku jsou příklady časového rozvinutí tónu **h1** varhanní píšťaly (vlevo) a stejného tónu kytarové ladičky (vpravo).

Z obou časových rozvinutí vidíme, že průběh je opravdu periodický, tvar kmitů se po určitém čase (periodě) opakuje. Jak bylo již uvedeno, převrácená hodnota periody je frekvence f v Hz. Ta určuje jednu z veličin popisujících hudební zvuk tón nazývanou **absolutní výška tónu**.

- **Barva tónu**

Jestliže slyšíte zahrát tón stejné výšky dva různé hudební nástroje, třeba housle a klarinet, rozeznáte nástroje i tehdy, jestliže hudebníky přímo nevidíte. Přestože výšky tónů jsou stejné,



odlišují se v tak zvané **barvě tónu**.

Z časových rozvinutí tónu varhanní píšťaly a kytarové ladičky vidíme, že perioda (tedy i výška tónu) je stejná. Časové průběhy obou tónů jsou ale různé, oba tóny se liší v barvě zvuku.

Takové průběhy nazýváme *složené tóny* a můžeme je sestavit podle principu superpozice z jednoduchého základního tónu s frekvencí $f1$ stejnou jako je výška složeného tónu a vyšších

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

harmonických tónů, jejichž frekvence jsou k násobkem frekvence základního tónu f_1 .

Na obrázku jsou časové osy všech průběhů vodorovné, na svislých osách pak jsou vyneseny amplitudy (maximální hodnoty) jednotlivých harmonických tónů. Prostorová osa zpředu dozadu je osou frekvence a se svislou osou vyjadřuje *závislost amplitud jednotlivých harmonických tónů na frekvenci*, tzv. *amplitudové spektrum*. Průběh na obrázku dole je složen z první, třetí a páté harmonické

Amplitudy vyšších harmonických udávají jednoznačně barvu tónu jednotlivých typů hudebních nástrojů a dokonce i barvu tónu hudebních nástrojů stejného typu.

- **Hlasitost tónu**

Další veličinou charakterizující hudební zvuk-tón je jeho hlasitost, jak silně působí zvuk na lidský sluchový orgán. Ta je určena velikostí amplitud jednoduchého základního tónu i všech vyšších harmonických tónů.

- **Časový průběh tónu**

Ze zkušenosti je známo, že stiskneme-li klávesu piana nebo drkneme na strunu kytary, zvuk se zpočátku zesiluje s určitou strmostí, nějaký čas může trvat a zase s určitou strmostí zaniká.

Je tedy důležitý pro charakter zvuku jednotlivých hudebních nástrojů časový průběh trvání tónu tzv. *obálka tónu*. Během trvání tónu se u většiny hudebních nástrojů mění barva zvuku a tedy i amplitudové spektrum.

Na vzniku a trvání tónu se u klasických hudebních nástrojů podílejí další fyzikální děje jako :

- **mechanická rezonance ozvučných skříněk nástrojů**
- **stojaté vlnění vznikající v trubicích dechových nástrojů**
- **Helmoltzovy rezonátory.**

Tyto fyzikální děje zesilují některá pásma kmitočtů (formanty).

3 Závěr

V příspěvku jsou popsány fyzikální děje probíhající v klasických hudebních nástrojích na úrovni odpovídající středoškolské výuce fyziky.

4 Použitá literatura

Prezentace části výuky předmětu Kmity, vlny, akustika ve druhém ročníku studia na PeF.

5 Kontakt na autora

Dr. Ing. Josef Petřík
PeF ZČU Plzeň
petrik@kof.zcu.cz

ODBORNÝ KEMP PŘÍRODOVĚDNÝCH OBORŮ FYZIKA

MATICOVÁ OPTIKA

Jitka PROKŠOVÁ

1 Úvodní poznámky

V optice existují dva možné způsoby zápisu událostí neboli dva způsoby stanovení průchodu paprsků optickou soustavou. Prvním – a častěji užívaným – je zobrazovací rovnice, druhým pak přenosová matice paprsku.

V současnosti se však právě k druhému způsobu zápisu obrací čím dál více pozornosti, uplatnění lze totiž najít především v moderních složitých systémech s rovinnou geometrií.

2 Zobrazení maticí přenosu

Předpokládáme osově symetrickou optickou soustavu, která je tvořená posloupností lámavých a odrazných ploch, centrovaných kolem stejné osy.

Zápisem soustavy dvou lineárních rovnic (pozdější přepis do matice) sledujeme průsečíky paprsku s příčnými rovinami v různých vzdálenostech na optické ose.

2.1 Přenosová matice (ABCD matice)

V paraxiálním přiblížení (Gaussův nitkový prostor) jsou poloha úhel na vstupní (index 1) a výstupní (index 2) rovině navzájem spjaty dvěma lineárními algebraickými rovnicemi:

$$y_2 = Ay_1 + B\vartheta_1 \qquad \vartheta_2 = Cy_1 + D\vartheta_1$$

K formálně jednoduššímu zápisu uvedených rovnic je možné užít maticovou symboliku.

$$\begin{bmatrix} y_2 \\ \vartheta_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ \vartheta_1 \end{bmatrix}$$

Prvky přenosové matice A,B,C,D jsou pak účastníky kempu cvičně sestavovány pro rozdílné situace a optické události spojené se zákonitostmi geometrické optiky.

3 Závěr

Na základě sestavení přenosových matic pro jednotlivé optické situace (lom a odraz na sférickém rozhraní, lom a odraz na rovinném rozhraní, tenká čočka aj.) si účastníci kempu vytvoří představu o užitečnosti tohoto maticového formalismu především v případech složitých optických systémů jako je laserový rezonátor.

4 Použitá literatura

MALÝ, P. Optika. 1. vyd. nakladatelství Karolinum, UK v Praze, 2008. 361 s. ISBN 978-80-246-1342-0.



INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

5 Kontakt na autora

Jitka Prokšová, RNDr. Ph.D.

KOF FPE ZČU v Plzni

proksovj@kof.zcu.cz

ODBORNÝ KEMP PŘÍRODOVĚDNÝCH OBORŮ FYZIKA

ŘEŠENÍ SLOŽITĚJŠÍCH ÚLOH Z OPTIKY

Jitka PROKŠOVÁ

1 Úvodní poznámky

Soubor příkladů, který slouží k procvičení složitějších optických situací, je uveden níže. Výsledky řešení jsou vždy v závorce za příkladem.

2 Příklady na procvičení

1. Obraz předmětu umístěného před spojkou je vzpřímený a třikrát zvětšený. Vzdálenost mezi předmětem a obrazem je 40 cm. Určete ohniskovou vzdálenost čočky. (30 cm)

2. Vzdálenost mezi předmětem a stínítkem je 30 cm. Čočka umístěná mezi nimi dá ostrý obraz předmětu ve dvou polohách, jejichž vzdálenost je 10 cm. Určete Z obrazu v obou těchto polohách. (-2; -0,5)

3. Tenká ploskovypuklá čočka ($R = 10$ cm) z korunového skla o indexu lomu 1,5 má být kombinována v těsném spojení s ploskodutou tenkou čočkou z flintového skla o indexu lomu 1,75 tak, aby soustava působila jako spojka s optickou mohutností 0,5 dioptrie. Jaký má mít rozptylka poloměr křivosti? Jakou má optickou mohutnost každá z obou čoček?

$$\left(-\frac{1}{6} \text{ m}, 5\text{D}, -4\frac{1}{2} \text{ D}\right)$$

4. Jak daleko je reálný předmět od spojky o ohniskové vzdálenosti 30 cm, když má od svého zdánlivého obrazu vzdálenost 40 cm? (20 cm)

5. Obraz předmětu je spojkou dvojnásobně zvětšen a je vzpřímený. Vzdálenost mezi předmětem a obrazem je 22,5 cm. Určete ohniskovou vzdálenost spojky. Ověřte konstrukcí (v měřítku). (45 cm)

6. Určete polohu obrazového ohniska tlusté čočky, víte-li, že obrazová ohnisková vzdálenost první kulové plochy je 15 mm, předmětová ohnisková druhé plochy je 25 mm a tloušťka čočky je 38 mm. (18,75 cm)

7. Optická soustava je tvořena spojkou o ohniskové vzdálenosti 30 cm a rovinným zrcadlem, které je umístěno 15 cm za čočkou. Předmět se nalézá 15 cm před čočkou. Určete polohu obrazu. Ověřte konstrukcí (v měřítku).

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

8. Pozorovatel si prohlíží určitý předmět postupně dvěma lupami. První lupa má menší ohniskovou vzdálenost než druhá. Kterou lupou vidí předmět pod větším zorným úhlem? Ověřte náčrtem.

9. Dvě spojné čočky o ohniskových vzdálenostech 10 mm a 20 mm jsou umístěné ve vzdálenosti 120 mm. První čočka je použita jako objektiv a druhá jako okulár mikroskopu. Nalezněte jeho zvětšení. (112,5)

10. Dokažte, že nejmenší vzdálenost mezi předmětem a jeho skutečným obrazem je při zobrazování spojkou $4f$.

3 Závěr

K řešení je možné užít i teoretické závěry přednášky o maticové optice, ale jednodušší je řešení pomocí zobrazovací rovnice tenké čočky a vrcholové rovnice kulových zrcadel.

4 Použitá literatura

FUKA, B., HAVELKA, F. Optika a atomová fyzika I. Optika, SPN Praha 1961

5 Kontakt na autora

Jitka Prokšová, RNDr. Ph.D.
KOF FPE ZČU v Plzni
proksovj@kof.zcu.cz

ODBORNÝ KEMP PŘÍRODOVĚDNÝCH OBORŮ MATEMATIKA

ZAJÍMAVÉ JEVY VLNOVÉ OPTIKY

Jitka PROKŠOVÁ

1 Úvodní poznámky

Přednáška se zabývá obecnými poznatky z vlnové optiky (jevy interference, difrakce a polarizace) a některými méně známými jevy...jako jsou např. Quételetovy kruhy.

Důraz je kladen také na průchod světla prostředím – tzn. na jevy týkající se absorpce, rozptylu a rozkladu světla.

2 Světlo jako elektromagnetická vlna

Účastníci kempu (studenti SŠ různých ročníků) jsou vyzváni, aby vysvětlili, co je světlo. Jejich pohled na tuto problematiku ovlivňuje dosavadní výuka fyziky i vlastní zkušenosti. Následuje rozbor historických ideí a především důkazy, proč současné hledisko vystihuje nejlépe tzv. duální model. Světlo lze v určitých jevech chápat jako vlnu (makroskopické jevy spojené se šířením světla prostředím) a v jiných jako částici (fotoefekt aj. – především jevy spojené s interakcí světla a látky)

2.1 Polarizace světla

Na několika experimentech s polarizačními fóliemi, turmalínovými klíšťkami, krystalem islandského vápence a celofánovou hvězdicí je studentům prokázána základní vlastnost viditelného záření – příčné povaha světelných vln. (1)

2.2 Interference světla

Na vybraných experimentech s laserem, štěrbinami (pevnými i nastavitelnými), jsou studentům prokázány jevy, které vznikají v důsledku skládání (interference) světelných vln. Jako zajímavost je v této části uveden pokus, který dokazuje přítomnost tzv. Quételetových kruhů. Také jsou předvedeny ukázky reflexního hologramu.

2.3 Difrakce světla

Ohyb na překážce je dalším jevem, který vypovídá o vlnové povaze světla. Jsou vysvětleny příčiny vzniku ohybu na štěrbině, dvojštěrbině a mřížce, dále na drátu a hraně. Všechny popsané jevy jsou demonstrovány prakticky.

2.4 Vybrané jevy atmosférické optiky

Halové jevy, duha, glórie, perleťová oblaka a mnoho dalších atmosférických jevů je důkazem skutečnosti, že světlo má vlnovou povahu. Účastníci kempu se seznámí s podstatou zmíněných jevů, budou detailně rozebrány příčiny jejich vzniku a barevnosti. (1)



INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

3 Závěr

Cílem přednášky je seznámit účastníky kempu s vlastnostmi a vlnovou podstatou světla a na vybraných experimentech ukázat některé jevy polarizace, difrakce a interference. Konkrétní příklady pak jsou demonstrovány na halových a jiných jevech atmosférické optiky, ve kterých se také projevuje vlnová podstata viditelného záření.

4 Použitá literatura

(1) FUKA, B., HAVELKA, F. Optika a atomová fyzika I. Optika, SPN Praha 1961

5 Kontakt na autora

Jitka Prokšová, RNDr. Ph.D.
KOF FPE ZČU
proksovj@kof.zcu.cz

ODBORNÝ KEMP PŘÍRODOVĚDNÝCH OBORŮ MATEMATIKA

PRAKTICKÁ FYZIKÁLNÍ MĚŘENÍ

Karel RAUNER

1 Úvod

Na fyzikálních olympiádách všech stupňů se ukazuje, že slabinou našich žáků a studentů jsou experimentální úlohy. Část viny nese zastaralé přístrojové vybavení škol, bez viny nejsou ani učitelé, které odrazuje od experimentální výuky časová náročnost přípravy a zpracování i to, že poruchovost zařízení může přinést nemilé komplikace.

2 Experimenty z jaderné fyziky

Pro účastníky fyzikálního kempu byly připraveny dvě experimentální úlohy z jaderné fyziky, které nevyžadují teorii na úrovni vysoké školy. Jaderná fyzika byla volena proto, že k podobným úlohám nejsou na školách prostředky. Účastníci měřili dolet částic beta a měřili závislost zpětného rozptylu částic beta na protonovém čísle rozptylujícího materiálu.

Úlohy byly zajištěny podle bezpečnostních předpisů pro práci s ionizujícími zdroji. Zářiče Sr90 byly po celou dobu měření umístěny v olověných krytech, po měření byla provedena dozimetrická kontrola..

2.1 Dolet částic beta

Částice beta z radioaktivních zářičů ztrácejí svou energii při průchodu hmotou ionizací, pružným i nepružným rozptylem na obalu i jádře atomu, brzdným zářením a Čerenkovovým zářením. Absorpční křivka (závislost počtu prošlých částic na tloušťce materiálu) je komplikovaná ze tří důvodů: energie částic beta je různá, protože energie radioaktivní přeměny se dělí mezi elektron a elektronové antineutrino, trajektorie částic beta je křivočará a detektory jsou rušeny brzdným zářením, protože to má charakter záření gama. Na absorpční křivce se proto určuje dolet jako dotyk absorpční křivky a tečny reprezentující brzdné záření.

V úloze se měří dolet v aluminii. Mezi zářič Sr90, který produkuje částice beta s velkou energií z dceřinného rozpadu Y90, a detektor (scintilační) se vkládají hliníkové plíšky s tloušťkou 0,11 mm. Měří se počet detekovaných částic. Měření pro 0 až 55 plíšků se vkládá do počítače, který umožní nalézt dolet tvrdé složky (asi 3,8 mm) i měkké složky (asi 0,8 mm). Z těchto hodnot je pak možné určit energii obou radioaktivních přeměn. Výsledky velmi dobře odpovídají tabulkovým hodnotám.

2.2 Zpětný rozptyl částic beta

Postavíme-li před radioaktivní zářič beta rovinnou desku, mohou se několikanásobným rozptylem částice beta vrátit zpět. Protože pružný rozptyl na jádrech závisí na protonovém čísle, je počet zpětně rozptýlených elektronů značně závislý na protonovém čísle rozptylujícího materiálu. Toho se dá využít k nedestruktivní analýze vzorků. Mezi scintilační detektor a rozptylující materiál se umísťuje zářič (Sr90) v pouzdře, které zamezuje přímé vyzařování směrem k detektoru. Měří se počet částic, které se zpětně rozptýlí v držáku. Pak se

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

na držák vkládají terčíky z Al, Zn, Cu, Fe, Sn, Pb, Bi. Zjistí se tak závislost zpětného rozptylu na protonovém čísle. Nakonec se měří analyzovaný vzorek: mince 20 Kč z roku 1933, která by měla mít 70 % Ag a 30 % Cu.

Změřená závislost se vkládá do počítače v EXCELU, aproximuje se polynomem, nalezne se inverzní závislost a z té se zjistí průměrná hodnota protonového čísla analyzovaného vzorku. Za předpokladu, že ve vzorku je Ag a Cu se určí procentuální složení. Teoretické hodnoty jsou ve velké shodě se zjištěnými hodnotami.

3 Závěr

Účastníci fyzikálního kempu byli seznámeni s činností měřicí aparatury pro záření beta – se scintilačním detektorem, změřili si křivku doletu částic beta a pomocí zpětného rozptylu částic beta provedli analýzu vorku. Zjistili složení mince 20 Kč z roku 1933 (70 % Ag, 30 % Cu).

4 Použitá literatura

RAUNER, K., PROKŠOVÁ, J., HAVEL, V. Fyzikální praktikum II. Plzeň: ZČU, 1999.

5 Kontakt na autora

doc. Dr. Ing. Karel Rauner
Fakulta pedagogická Západočeská univerzita v Plzni
rauner@kof.zcu.cz

ODBORNÝ KEMP PŘÍRODOVĚDNÝCH OBORŮ MATEMATIKA

FYZIKA V POHÁDKÁCH

Karel RAUNER

1 Úvod

Zájem o studium fyziky vykazuje celosvětově klesající tendenci, což je v rozporu s potřebami hospodářství. Cílem přednášky je ukázat všudypřítomnost fyziky a její spojení i s tak zdánlivě odtažitým tématem, jakým jsou pohádky. Dalším cílem je ukázka humoru ve fyzice a představení numerického způsobu řešení fyzikálních problémů.

2 Fyzika v pohádkách

V přednášce jsou rozebrány možnosti řešení čtyř příhod z filmových pohádek Mrazík, Tři oříšky pro Popelku a Císařův pekař, Pekařův císař. První scénou, která je fyzikálně řešena je vrh svislý vzhůru v nehomogenním gravitačním poli. Jde o scénu, ve které Ivan vyhazuje klacky loupežníků, aby o několik měsíců později spadly na totéž místo.

Druhá scéna, rovněž z filmu Mrazík ukazuje tři možná fyzikální řešení scény, ve které Nastěnka vrací slunce za obzor, aby stačila doplést punčochu.

Třetí scéna z dvojfilmu Císařův pekař – Pekařův císař vysvětluje fyzikální řešení výroby zlata z olova, kterou předvádí alchymista v podání Josefa Kemra.

Čtvrtá scéna z filmu Tři oříšky pro Popelku je situací, ve které Popelka škrábe jinovatku z okna tanečního sálu. Fyzikální chybou je, že jinovatka je na vnější straně oken.

2.1 Vrh svislý vzhůru v nehomogenním gravitačním poli

Ve známé scéně vyhazuje Ivan klacky loupežníků. Nejprve jeden, pak dva, nakonec čtyři najednou. Klacky nepadají a Ivan na otázku odpovídá: „Počkejte do zimy, spadnou“. V další scéně klacky padají na hlavy loupežníků (vedlejší zajímavostí je, že jich není sedm ale deset) ve vhodné chvíli, ve které jsou Nastěnka i Ivan zajati loupežníky.

Na základě obecně známých scén je sestaven fyzikální příklad: Jakou rychlostí musí být vyhozeny klacky, aby na 56. stupni severní šířky a v nadmořské výšce 200 metrů dopadly za 200 dnů. Středoškolské řešení pomocí známých vzorců pro vrh svislý vzhůru v homogenním tíhovém poli přináší nesmyslnou hodnotu: rychlost 86 400 km/s. Je tady zjevný rozpor s hodnotou druhé kosmické rychlosti, nad kterou by se klacky nevrátily nikdy.

Následně je sestavena diferenciální rovnice pro pohyb nehomogenním tíhovém poli, ve které se využívá gravitačního zákona. Po převodu gravitační konstanty a hmotnosti Země na tíhové zrychlení je převedena rovnice do integrodiferenciálního tvaru pro rychlost a je stručně vysvětlen její význam. Rovnice se převede do rekurentního vztahu pomocí jedнокrokové Newtonovy metody. Jsou nalezeny vstupní hodnoty: tíhové zrychlení $9,815\ 83\ \text{m/s}^2$ a vzdálenost od středu Země 6 375 000 m. Počítačové řešení hledá první hodnotu rychlosti, která je nulové nebo záporná. Při vstupní hodnotě počáteční rychlosti se tak nalezne doba letu vzhůru, která je požadována 100 dní. Postupně se upravuje vkládaná počáteční rychlost, až se dosáhne požadované doby. Originalita počítačového řešení je v proměnném kroku integrace, který je zpočátku 200 μs , na konci asi 100 s. Nalezená potřebná rychlost je 11 174,823 7 m/s.

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Citlivost na přesnost je taková, že kdyby se 7 na konci změnila na 6, klacky by dopadly o 5 minut dříve. Kontrolou přesnosti výpočtu je ověření druhé kosmické rychlosti. Ta pro dané místo vychází neuvěřitelně přesně: teoreticky 11 187,13 m/s, výpočtem 11 187,12 m/s.

Následně je vypočítána i „ukrutná“ síla, kterou musí Ivan působit na klacky: 1,2 GN a ještě neuvěřitelnější výkon: $7 \cdot 10^{12}$ W.

Na závěr jsou konstatovány nedostatky idealizovaného výpočtu: ve vzduchu by klacky při dané rychlosti shořely, Země se otáčí, muselo by se proto počítat i s Coriolisovou silou a synchronizací s rotační periodou a klacky se dostanou až do vzdálenosti 2,88 milionu km od Země, kde již na klacky mohou působit další tělesa sluneční soustavy. Protože by klacky stejnou rychlostí dopadaly, nedá se očekávat, že loupežníci po dopadu budou pouze kroutit očima, ale zbyl by po nich poměrně velký kráter.

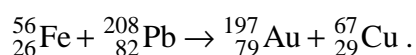
2.2 Pohyb těles ve sluneční soustavě, refrakce

V další známé scéně prosí Nastěnka slunce, aby zašlo za obzor, protože potřebuje doplést punčochu, aby ji macecha nevytrhala vlasy. Je představeno jedno z možných řešení: zastavit rotaci Země, roztočit ji opačným směrem (z filmové ukázky plyne, že úhlová rychlost musí být 42krát větší než obvyklá hodnota), opět ji zastavit a znovu roztočit do původního směru původní rychlostí. I když celková bilance energie je nulová, musíme někde vzít energii k roztočení Země 42krát větší rychlostí. Tato energie je obudná: $3,8 \cdot 10^{32}$ J. Dále jsou fyzikálně diskutovány problémy se zachováním momentu hybnosti a s unášivou rychlostí, která překonává rychlost únikovou. Je konstatováno, že takovýto krok by znamenal zkázu lidstva. Dále je diskutována možnost posunu Slunce. Bohužel vychází potřebná rychlost přesunu větší než rychlost světla ve vakuu. Ani třikrát pomalejší posunutí nepřináší řešení: potřebná energie by vyžadovala anihilovat pětinu Slunce.

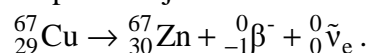
Třetí představené řešení je nejpříjemnější. Dalo by se využít refrakce, která způsobuje, že vlivem lomu v atmosféře vidíme slunce o několik minut dříve, než je geometricky nad obzorem. Stačilo by v trajektorii lomeného paprsku odstranit vzduch a slunce by nebylo vidět. Na 56 stupni s. š. by tak slunce vyšlo o 5 minut později.

2.3 Výroba zlata jadernou reakcí železa a olova

Alchymistická metoda popsaná ve filmu Císařův pekař – Pekařův císař představuje výrobu zlata bušením železné palice do olověného bloku. Fyzikální možností je jaderná reakce



Je zjištěno, že tato energie je exoenergetická, vedlejším produktem by proto mohla být energie. Dalším vedlejším produktem je měď, která je však nepříjemně radioaktivní. S poměrně krátkým poločasem se však přeměňuje na stabilní zinek:



Dále je vypočítána rychlost, kterou by musela mít železná palice, aby dostala atomy železa a zlata do vzdálenosti, na které již působí jaderné síly. Vychází obrovská rychlost 30 000 km/s. Dále jsou navržena řešení problému atmosféry a radioaktivity mědi. Bohužel se taková výroba zlata ukazuje nemožná, neboť vypočítaná energie palice dosahuje při potřebné rychlosti energie dvacetinásobku jaderné pumy svržené na Hirošimu.

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

2.4 Vztah rosného bodu, relativní vlhkosti a teploty

Hrubou fyzikální chybou filmu *Tři oříšky pro Popelku* je to, že Popelka po příchodu k budově, ve které se koná ples, škrábe a dýchá na jinovatku, která je na okně zvenku. Na základě diagramu mezi teplotou, relativní vlhkostí a rosným bodem je dokázáno, že pokud venku bylo -5 °C a 50% relativní vlhkost, muselo být v sále maximálně -15 °C . Není pravděpodobné, že by plesové šaty mohly při této teplotě ochránit účastníky před omrzlinami.

3 Závěr

Přednáška byla připravena pro všechny účastníky fyzikálního kempu. Kromě úkolů představených v úvodu byli účastníci seznámeni i s matematickými metodami při řešení reálných fyzikálních příkladů, byla jim stručně vysvětlena derivace, integrace a numerické řešení diferenciální rovnice.

4 Použitá literatura

ALEXANDR ROU, *Mrazík*, film, Sovětský Svaz, 1964

MARTIN FRIC, *Císařův pekař – Pekařův císař*, film, ČSR, 1951

VÁCLAV VOŘÍŠEK, *Tři oříšky pro Popelku*, film, ČSSR, 1973

5 Kontakt na autora

doc. Dr. Ing. Karel Rauner

Fakulta pedagogická Západočeská univerzita v Plzni

rauner@kof.zcu.cz

ODBORNÝ KEMP PŘÍRODOVĚDNÝCH OBORŮ FYZIKA

SRÁŽKY GALAXIÍ

Jakub SCHWARZMEIER

1 Úvod

Jak dospívají malé, mladé, chaotické galaxie v současné velké, elegantní spirální a eliptické galaxie? Bez naší galaxie (Mléčné dráhy) a její minulosti by neexistovala ani Sluneční soustava, ani planety, ani Země, ani život, ani my.

Astronomové chtějí hlouběji pochopit, jak mohou ekonomicky, jednoduchým principem, vysvětlit existenci různých galaxií s využitím fyzikálních zákonů. Zjistili, že činitelem, který má největší dopad na vývoj galaxií, jsou srážky galaxií.

Současný stav pochopení srážek galaxií je výsledkem astronomických pozorování a počítačových simulací. Počítačové simulace ukazují srážky galaxií v akci.

2 Stroj času

Když použijeme dalekohled, jako např. Hubbleův kosmický teleskop, není to jen dalekohled. Je jako stroj času. Klíčem tohoto stroje času je světlo, přesněji jeho konečná rychlost šíření. Všechny informace, které dostáváme, i ty co se šíří hodně rychle, rychlostí světla, jsou opožděné. Když se díváme do vesmíru, vždy vidíme minulost a cestujeme zpět v čase.

Hubble Ultra Deep Field (HUDF) je toho skvělou ukázkou. Snímky mladého vesmíru neukazují žádné velké spirální ani eliptické galaxie. Blízké oblasti vesmíru už naopak obsahují velké, dospělé, vyvinuté spirální galaxie, jako je Mléčná dráha nebo Andromeda (M31), a především velké eliptické galaxie jako je M87. Je zde tedy podstatný rozdíl, což svědčí o tom, že se galaxie, stavební kameny vesmíru, musely od vzniku vesmíru měnit a vyvíjet.

3 Počítačové modely a simulace

Dalekohledem nikdy nemůžeme pozorovat vývoj jediné konkrétní galaxie, můžeme však vytvořit model chování přírody (vesmíru) v počítači a nechat ho vyvíjet se prostřednictvím počítačové simulace. Počítač pak určí, jak se příroda bude chovat. Jako bychom měli izolovaný vesmír uvnitř počítače a mohli v něm nechat předběhnout náš skutečný čas, stlačit čas, nechat čas proběhnout rychleji než ve skutečnosti.

4 Srážky galaxií

Galaxie nejsou osamělé ostrovy hvězd, které se vznášejí ve vesmírném oceánu daleko od sebe. Naopak, galaxie jsou společenská seskupení. Během kosmických věků se pohybují, setkávají se mezi sebou, vyměňují si hvězdy a mezihvězdný materiál, sráží se a tím mění svoji tvář.

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Existuje mnoho možností, jak se galaxie mohou poškodit. Při vysokých rychlostech se navzájem pocuchají (galaktické harašení), při středně vysokých rychlostech galaxie kolem sebe jen ladně prolétnou a při nižších rychlostech se sloučí.

4.1 Malé sloučení

Kolem Mléčné dráhy se pohybuje mnoho trpasličích galaxií, které jsou družicemi (satelity) Mléčné dráhy. Obíhají kolem ní podobně jako např. komety kolem Slunce.

Vývoj trpasličí galaxie ze souhvězdí Velkého psa a trpasličí galaxie ze souhvězdí Střelce simulovaný počítačem nám ukazuje, že trpasličí galaxie jsou gravitací Mléčné dráhy nataženy a roztrhány, zatímco Mléčná dráha stále drží při sobě jako víceméně kompaktní těleso. Hvězdy trpasličích galaxií se za několik miliard let stávají součástí Mléčné dráhy a přestávají existovat jako samostatné objekty.

Jak se ukázalo, tato simulace znázorňuje skutečnost. Totiž i pozorovací astronomové objevili ve skutečném vesmíru stopy materiálu, který se několikrát obtáčí kolem Mléčné dráhy. Jedná se právě o pozůstatek trpasličí galaxie ze souhvězdí Velkého psa a trpasličí galaxie ze souhvězdí Střelce.

Stejný jev je možné pozorovat také v mé počítačové simulaci časového vývoje trpasličích galaxií známých jako Velké a Malé Magellanovo mračno.

Méně formálně se označuje malé sloučení jako kanibalismus.

4.2 Velké sloučení

Přímá srážka mezi srovnatelně velkými spirálními galaxiemi vede k jejich sloučení v eliptickou galaxii. Příkladem jsou galaxie Tykadla (Antény), Myši (NGC 4676) nebo budoucí sloučení Mléčné dráhy s Andromedou.

Při tomto druhu srážky se dvě spirální galaxie dostanou nejprve na dráhu kolem sebe. Hvězdy spořádaně se pohybující kolem středu galaxie jsou rozhozeny z jejich pravidelných drah. Gravitace způsobí vytažení dlouhých proudů hvězd ve formě slapových ohonů. Dojde k úplnému zničení struktury obou spirálních galaxií. Při vzájemných obězích se středy galaxií stále více přibližují, galaxie se sráží stále znovu a znovu, dokud se nesloučí. Takové setkání spirálních galaxií končí zničením disků a vznikem eliptické galaxie.

5 Závěr

Označení srážka galaxií zní hrozivě a asi očekáváme hlavně destrukci a zkázu. Ovšem ve skutečnosti tomu tak není. Mezi hvězdami jsou obrovské prostorové vzdálenosti, a proto pravděpodobnost jejich vzájemné srážky je mizivá. Vyhledky planet jsou ještě lepší, neboť planety jsou menší než hvězdy.

Mezihvězdný plyn je však na rozdíl od hvězd citlivý na gravitační působení během srážky galaxií. Plyn z obou srážejících se galaxií se čelně sráží v šokových vlnách a při vysokých rychlostech. Stlačování plynu a tím i jeho zahřívání napomáhá vzniku nových hvězd. Takže dokonce i během chaosu při srážce galaxií vzniká nový řád, nové hvězdy.

6 Kontakt na autora

PhDr. Jakub Schwarzmeier, Ph.D.
Jakub.Schwarzmeier@gmail.com

ODBORNÝ KEMP PŘÍRODOVĚDNÝCH OBORŮ MATEMATIKA

NOVÉ TECHNOLOGIE – VÝZKUMNÉ CENTRUM – JEHO KAPACITA A ORIENTACE

Veronika Nováková, Jaromíra Sudová Šimlová

1 Úvod

Nové technologie - Výzkumné centrum (NTC) vzniklo v rámci programu výzkumu a vývoje MŠMT ČR nazvaného "Výzkumná centra" jako centrum aplikovaného výzkumu - podprogram B pod označením LN00B084, současně bylo též konstituováno akademickým senátem jako vysokoškolský ústav Západočeské univerzity v Plzni. Činnost NTC byla zahájena 3. 7. 2000.

Těžiště jeho práce spočívá v podpoře výzkumu a vývoje zejména v západočeském regionu s vazbami na české a mezinárodní výzkumné a vývojové týmy. Zabývá se aplikovaným výzkumem s výraznou složkou problémově orientovaného výzkumu technologických procesů, technických i netechnických dynamických systémů a materiálů. NTC klade důraz na soustředění výzkumné kapacity duševní i materiální k zesílení rozvoje nových technologií a pracovní výsledky tak směřují ke zvýšení dosavadní úrovně výrobních technologií, produktů a produktivity práce. NTC mimo jiné pořádá rozličné semináře, kurzy a školení na vysoce odborné úrovni, mnohé z nich jsou však primárně orientovány též na širokou veřejnost. Snahou NTC je rovněž podpora motivace studentů pro práci v oboru realizovaná kupříkladu formou krátkodobých brigád.

NTC je vybaveno moderní výpočetní, přístrojovou a laboratorní technikou určenou pro výzkum v oblastech laserových a fotonických experimentálních metod, dále systémy pro měření termomechanických procesů a systémy pro vývoj nových materiálů a měření jejich vlastností. Mezi klíčové kompetence NTC lze s určitostí zařadit počítačové modelování systémů s respektováním struktury vedoucí na silně nelineární a sdružené úlohy, výzkum procesů chování materiálů a diagnostiku jejich charakteristických vlastností s cílem vypracovat postupy pro predikci jejich materiálových vlastností. V průběhu posledních let však postupně vznikají nové klíčové aktivity, mezi nimiž v současnosti dominují výzkum, chování a tvorba nových materiálů (materiály na bázi křemíku, polymerní struktury, kompozity, tenkovrstvé materiály) a jejich využití ve fotovoltice, mikrosystémové technice, stavebnictví, strojírenství a energetice a při výzkumu procesů souvisejících s obnovitelnými zdroji energie a s čistotou ovzduší.

2 Odbory NTC

Úsilím NTC je zapojení mladé generace do tvůrčí vědecké práce a velkou část zaměstnanců tak tvoří pracovníci mladší 35 let. Celkově má NTC v současné době přes 90 pracovníků na plný nebo částečný úvazek a sestává ze 7 následujících odborů konkrétního zaměření.

2.1 Modelování deformačních a dynamických procesů (MDP)

MDP rozvíjí a aplikuje metody modelování technických systémů při rychlých dynamických jevech a extrémním zatěžování. Jde zejména o nestacionární napjatost ve strojních systémech, problémy s nelineární odezvou materiálů a kontaktní mechaniku. Odbor nabízí expertní činnost v této oblasti.

2.2 Modelování a měření interakcí v technických systémech (MIS)

MIS je zaměřen na teoretické modelování a částečně experimentální měření stacionárních i přechodných stavů v technických systémech za použití moderních výpočetních metod a postupů. Jedná se například o modelování interakcí proudícího média s elektrickými a tepelnými poli nebo modelování interakcí jednofázového či vícefázového proudění s tělesy nebo poli dalších fyzikálních veličin.

2.3 Modelování heterogenních materiálů a biomechanických systémů (MBS)

MBS je orientován na vývoj algoritmů a příslušného software pro modelování materiálů se složitou vnitřní strukturou a redistribucí hmoty. Jedná se především (avšak nikoliv výhradně) o materiály biologické. Pro jejich modelování jsou rozvíjeny metody homogenizace a různé více-škálové přístupy. Další oblastí, jíž se odbor věnuje, je vývoj počítačového modelu lidského těla včetně vnitřních deformovatelných orgánů a aktivní svalové odezvy, zejména s aplikacemi pro pasivní bezpečnost v dopravě.

2.4 Termomechanika technologických procesů (TTP)

TTP se věnuje řešení úloh měření teplotních polí kontaktními i nekontaktními metodami, zabývá se přenosem tepla, měřením tepelných a optických vlastností materiálů a měřením zbytkových napětí. Aktivity odboru se zaměřují především na problematiku laserových technologií pro zpracování a analýzu materiálů a na jiné technologie využívající intenzivních zdrojů tepla.

2.5 Technologie polymerních kompozitů (TPK)

TPK se zabývá výzkumem technologie výroby polymerních vláknových a částicových kompozitů na bázi reaktoplastických a termoplastických matric, geopolymerních kompozitů a hybridních materiálů aplikačně zaměřených na konstrukční díly v průmyslových oborech strojírenství a stavebnictví. Vyvíjí technologie pro výrobu polymerbetonových dílů pro stavbu obráběcích a tvářecích strojů, kompozitní tažené armovací výztuže s integrovanými tahovými snímači pro monitoring předepjatých betonových konstrukcí. Laboratoře disponují špičkovým vybavením pro termickou analýzu polymerních kompozitů DMA, TMA, TGA, DSC, DEA.

2.6 Materiály a technologie (MAT)

MAT se zabývá výzkumem a aplikací celé škály mikroskopických, spektrálních a difrakčních diagnostických technik monitorování struktury materiálu a jejích změn v průběhu výroby, zpracování a montáže. Významným tématem tohoto odboru je výzkum tenkovrstvých materiálů a technologií pro vývoj fotovoltaických článků II. generace. Odbor se zabývá též nanoindentačními a tribologickými měřeními.

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

2.7 Mezioborové aktivity (MA)

MA je školícím odborem NTC, zabývající se mezioborovým bádáním vzděláváním vědecko-výzkumných a akademických pracovníků, současně též studentů vysokých i středních škol. Tento odbor je předním realizátorem interdisciplinárních aktivit na půdě Západočeské univerzity (organizace popularizačních i odborných interdisciplinárních seminářů, konferencí a letních škol, knižní publikační činnost, popularizace technických oborů na středních školách).

3 Závěr

Na bázi schopností jednotlivých odborů NTC spolupracuje v rámci průmyslového i veřejného sektoru základě společného výzkumu s komerčními subjekty formou projektů podporovaných EU, MŠMT a MPO, konkrétní potřeby komerčních subjektů jsou pak řešeny formou zakázek. Významnými průmyslovými partnery NTC je cca 50 subjektů v České republice sídlících zejména v západočeském regionu. V rámci ČR NTC spolupracuje též s řadou výzkumných institucí a VŠ a mezi jeho nejvýznamnější partnery patří ústavy Akademie věd ČR, MFF UK, VŠCHT atd. Dále NTC spolupracuje s mnoha renomovanými výzkumnými institucemi a VŠ v zahraničí, zejména v oblastech fotovoltaických aplikací, laserových technologií a polymerních kompozitů. Významnou vazbu na zahraniční pracoviště NTC získalo a nadále získává řešením projektů 6. a 7. rámcového programu Evropské komise, na jejichž základě NTC řešilo či stále řeší v 6. rámcovém programu čtyři projekty, z nichž jeden je zaměřen na materiálovou analýzu, tři na bezpečnost v dopravě, jeden projekt v 7. rámcovém programu je pak zaměřen na biomechaniku. NTC je členem Technologické platformy Strojírenství a spolupráce s výzkumnými pracovišti i průmyslovými podniky bude ještě výrazně posílena projektem CENTEM podpořeném strukturálními fondy EU operačního programu VaVpI, který bude NTC v letech 2010 – 2014 řešit.

Vizí NTC do roku 2015 je stát se významným pracovištěm v České republice uznávaným v celém evropském prostoru v oblasti výzkumu a vývoje zejména neželezných materiálů pro produkci aplikovatelných výsledků zajišťujících zvýšení konkurenceschopnosti regionálních firem.

4 Kontakt na autora

Mgr. Veronika Nováková, Ing. Jaromíra Sudová Šimlová
Nové technologie - Výzkumné centrum v západočeském regionu, Vysokoškolský ústav
Západočeské univerzity v Plzni
veronika@ntc.zcu.cz, simlova@ntc.zcu.cz

ODBORNÝ KEMP PŘÍRODOVĚDNÝCH OBORŮ FYZIKA

VÝZKUM SLUNCE POMOCÍ NEJNOVĚJŠÍ SONDY SDO

Jakub TOMAN

1 Slunce jako hvězda

Slunce je naší nejbližší hvězdou, kterou můžeme oproti ostatním hvězdám podrobně zkoumat. Vzdálenost Země od Slunce je 149,6 mil. km. Poznatky z výzkumu Slunce můžeme vztahovat na vzdálené hvězdy, které mají stejný spektrální typ jako Slunce.

2 Aktivita Slunce a její vliv na Zemi

Při velkých erupcích dochází výronu energie z atmosféry Slunce směrem k Zemi, kde dochází k polárním zářím. V extrémních případech může být vyvolána elektromagnetická bouře, která může ohrozit chod satelitů na oběžné dráze.

Aktivita Slunce se pravidelně opakuje ve slunečních cyklech. Aktivita Slunce se projevuje různými jevy v jednotlivých vrstvách Sluneční atmosféry. Ve fotosféře slunečními skvrnami, v chromosféře erupcemi, filamenti a protuberancemi, které mohou zasahovat až do koróny.

3 Pozorování Slunce

Slunce můžeme pozorovat pouhým okem, kdy na slunečním disku rozeznáme pouze největší sluneční skvrny. Použitím dalekohledu vybaveným filtrem nebo stínítkem pro projekci obrazu dostaneme podrobnější obraz Slunce. Tato pozorování slouží ke sledování průběhu slunečního cyklu.

K odhalení proudění materiálu v rámci slunečních skvrn nebo protuberancí se používají velké dalekohledy na specializovaných observatořích. Kvalita obrazu z těchto velkých dalekohledů záleží na chvění (seeing) atmosféry. Použitím adaptivní a aktivní optiky lze chvění atmosféry eliminovat.

Aktivita Slunce se projevuje i v UV a rentgenovém záření, které zemská atmosféra nepropouští. Proto se k výzkumu Slunce používají družice ve vesmíru, které nejsou ovlivněny pozorovacími podmínkami a prostupností atmosféry pro určité vlnové délky záření.

4 Sonda SDO

Nejnovější sonda z projektu Living with a star. Sonda SDO studuje dynamické jevy v atmosféře Slunce. Napozorovaná data mají vědcům pomoci odhalit proces vzniku slunečních erupcí a vzniku slunečních magnetických polí.

První snímky Slunce ve vysokém rozlišení pořídila družice v březnu 2010. Sonda SDO překonává ostatní sondy SOHO a STEREO vysokým rozlišením snímků, počtem vlnových délek, ve kterých je Slunce snímáno a frekvencí pořizování jednotlivých snímků (snímek Slunce každých 10 sekund).



INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Snímky pořízené během jednoho dne zaberou 1,5 TB. Na internetových stránkách sondy jsou zveřejňovány snímky Slunce v rozmezí 20 minut. Od pořízení snímku až po okamžik zveřejnění na internetu uplyne 90 minut, ale i tak je to krátká doba. Můžeme tak Slunce pozorovat „on-line“. Data umístěná v archivu mohou pomoci amatérským pozorovatelům Slunce porovnat svá pozorování se skutečností.

5 Použitá literatura

SDO: Solar dynamics observatory [online]. 2010 [cit. 2010-08-22] Dostupný z WWW:

<<http://sdo.gsfc.nasa.gov/>>

MARTÍNEK, František: Start družice SDO k výzkumu Slunce [online] 2010 [cit. 2010-08-22]

Dostupný z WWW: <<http://sdo.gsfc.nasa.gov/>>

6 Kontakt na autora

Jakub Toman

jakub.toman@seznam.cz

ODBORNÝ KEMP PŘÍRODOVĚDNÝCH OBORŮ FYZIKA

ZÁKLADNÍ VLASTNOSTI DIELEKTRIK, TERMODIELEKTRICKÝ JEV

Martin TOMÁŠ

1 Úvod

Dielektrika tvoří rozsáhlou skupinu materiálů zajímavých vlastností. S těmito materiály se setkáváme na každém kroku, patří sem například voda, plasty, líh či vzduch. Dielektrika jsou široce využívána v technické praxi a jejich vlastnosti hrají důležitou roli v nejrůznějších technických aplikacích. Je zřejmé, že poznání vlastností dielektrik je významným úkolem současné fyziky.

2 Základní vlastnosti dielektrik

Dielektrika bývají často zaměňována za materiály nevedoucí elektrický proud. Často se v této souvislosti mluví o izolantech, přičemž tento termín označuje odlišnou skupinu materiálů. Izolanty jsou materiály, které jsou použity k oddělení dvou míst s odlišným elektrickým potenciálem. Každý izolant je tedy dielektrikem, ale dielektrikum nemusí být izolantem.

Zcela zásadní vlastností dielektrik je jejich schopnost polarizace. Způsob, jakým se dielektrikum polarizuje, může být u odlišných materiálů různý. Všechna dielektrika se polarizují mechanismem, který se nazývá elektronová (atomová) polarizace. Při tomto způsobu polarizace dochází při přiložení vnějšího elektrického pole k protáhnutí elektronového obalu a vychýlení atomového jádra z rovnovážné polohy. Jedná se o jev velice rychlý a bezetrátový. Dalším způsobem polarizace je polarizace orientační, která souvisí s permanentními dipóly, kterými je dielektrikum tvořeno. Tyto dipóly jsou v dielektriku natočeny nahodile, ale v případě přiložení elektrického pole se natáčí ve směru intenzity tohoto pole. K natočení nedochází okamžitě, ale až po uplynutí jisté doby, kterou nazýváme relaxační čas.

Vlastnosti dielektrika do značné míry popisuje veličina, kterou nazýváme relativní permitivita. Tato veličina je závislá na mnoha faktorech – frekvenci vnějšího elektrického pole, koncentraci roztoku, tlaku, teplotě apod. Úkolem dielektrických měření je vyšetření těchto závislostí. Při měření závislosti relativní permitivity na frekvenci nestacionárního vnějšího elektrického pole je vhodné zavést novou veličinu – frekvenčně závislou komplexní permitivitu. Pro tyto účely je nutné rozdělit relativní permitivitu na reálnou a imaginární složku. Toho docílíme aplikací Kramersových – Kronigových disperzních relací, což jsou velice obecné relace popisující právě vztahy imaginární a reálné složky určité veličiny.

2.1 Termodielektrický jev

Ve 40. letech minulého století byla v Brazílii objevena zajímavá vlastnost vosků (parafín, karnaubská pryskyřice, včelí vosk apod.). Tyto materiály vykazovaly schopnost polarizace při průchodu fázového rozhraní. Vosky se polarizovaly při tání či tuhnutí a způsob této polarizace nebyl dodnes vysvětlen. Jevo byl pojmenován podle svého objevitele J. Costa Ribeiry, ale v současnosti se spíše používá název termodielektrický jev. Přestože se může zdát, že se jedná o jev okrajový, byl termodielektrický jev pozorován i u ledu. Možná právě vliv tohoto jevu způsobuje různé elektrické jevy v atmosféře, jejichž způsob vzniku je dodnes zahalen tajemstvím. Velký význam tomuto jevu přisoudil i César Lattes, spoluobjevitel pionu, který prohlásil, že objev termodielektrického jevu byl největším objevem učiněným na brazilské půdě.

3 Závěr

Přestože dielektrika patří neodmyslitelně k našemu životu, jejich význam bývá často opomíjen. Vlastnosti těchto materiálů ukazují, že naše představy o této skupině materiálů nejsou úplné. Příkladem může být právě termodielektrický jev, který není doposud definitivně vysvětlen. Úkolem současných fyziků je zacelení těchto mezer v našich představách.

4 Použitá literatura

HAVEL, V.: *Úvod do teorie elektromagnetického pole*. Plzeň: Pedagogická fakulta, 1984.

KITTEL, CH.: *Úvod do fyziky pevných látek*. Praha: Academia, 1985.

MENTLÍK, V.: *Dielektrické prvky a systémy*. Praha: BEN – technická literatura, 2006. 240 s.
ISBN 80-7300-189-6

ONSAGER, L.: *The Collected Work of Lars Onsager (with Commentary)*. Singapur: World Scientific Publishing, 1996. 1075 s. ISBN 978-981-02-2563-6

PETRŽÍLKA, V., ŠAFRATA, S.: *Elektřina a magnetismus*. Praha: Nakladatelství ČSAV, 1956.

5 Kontakt na autora

Jméno a příjmení s tituly: Mgr. Martin Tomáš

Název instituce: Západočeská univerzita v Plzni, Fakulta pedagogická, Katedra obecné fyziky

E-mail: marty01@kof.zcu.cz

ODBORNÝ KEMP PŘÍRODOVĚDNÝCH OBORŮ FYZIKA

ŘEŠENÍ OBTÍŽNĚJŠÍCH ÚLOH Z MECHANIKY I

Josef VESELÝ

1 Úvod

Cílem příspěvku je naučit žáky cílevědomě řešit i zdánlivě obtížnější úlohy z mechaniky.

2 Strategie řešení

Text úlohy nejprve pozorně prostudujeme, problémy tématicky zařadíme a zvolíme vhodné matematické prostředky pro řešení. Při analýze úlohy je vhodné využívat náčrtky.

V mnoha případech je třeba provést diskuzi řešení.

3 Řešené úlohy

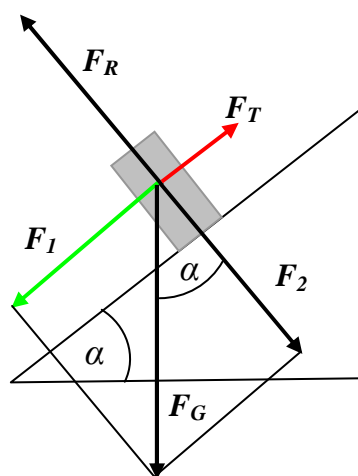
1. Vypočítejte velikost počátečního zrychlení a_0 lyžaře na sjezdovce se sklonem α_1 nebo α_2 . Uvažujte smykové tření, odpor vzduchu zanedbejte.

Tíhové zrychlení je g , součinitel smykového tření f .

Řešte nejprve obecně, pak pro hodnoty $g = 9,8 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$, $f = 0,2$, $\alpha_1 = 10^\circ$, $\alpha_2 = 30^\circ$.

Řešení:

Analýza úlohy: Na lyžaře působí stálá tíhová síla F_G , jejíž tečná složka F_1 (viz obr.) vyvolává pohyb lyžaře po nakloněné rovině, a reakce podložky F_R na normálovou složku tíhové síly F_2 . Síla F_R ruší přímý pohybový účinek síly F_2 , síla F_2 vyvolává třecí sílu F_T působící proti pohybu.



Z náčrtku snadno odvodíme $F_1 = mg \sin\alpha$ (protilehlá odvěsna), $F_2 = mg \cos\alpha$ (přílehlá odvěsna). Velikost třecí síly $F_T = fmg \cos\alpha$.

Velikost výsledné síly $F = F_1 - F_T = mg \sin\alpha - fmg \cos\alpha$.

$a = F/m = g(\sin\alpha - f\cos\alpha)$.

Diskuze: Zrychlení může formálně vyjít kladné, nulové nebo záporné. Kladný výsledek je řešením úlohy. Vyjde-li nulová nebo záporná hodnota, je třecí síla větší nebo rovna síle F_1 , která je hybnou silou a pohyb nenastane.

Numerické řešení: $\alpha_1 = 9,8 \cdot (\sin 10^\circ - 0,2 \cos 10^\circ) = -0,23 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

$$a_2 = 9,8 \cdot (\sin 30^\circ - 0,2 \cos 30^\circ) = 3,2 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$$

Odpověď: Při sklonu 10° se lyžař působením tíhové síly pohybovat nezačne, při sklonu 30° bude mít jeho počáteční zrychlení velikost $3,2 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$.

2. Určete nejmenší součinitel smykového tření f mezi válcem a nakloněnou rovinou se sklonem α tak, aby se válec valil bez prokluzování. Valivý odpor a odpor vzduchu neuvažujte. Řešte obecně, pak pro hodnoty $g = 9,8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$, $\alpha = 15^\circ$.

Řešení:

Označme hmotnost válce m , poloměr válce r , tečnou složku tíhové síly F_T , aktivní třecí sílu F_T , její moment M , zrychlení posuvného pohybu a tečné zrychlení na obvodu válce a , moment setrvačnosti válce J ($J = 1/2mr^2$), úhlové zrychlení válce ε ($\varepsilon = a/r$),

Válec je roztáčen třecí silou F_T , která zároveň působí proti posuvnému pohybu. Pro složený pohyb dostáváme dvě pohybové rovnice:

$F_T - F_T = ma$, $M = J\varepsilon$. Ze druhé rovnice dostaneme $F_T = 1/2ma$, dosadíme do první a po úpravě $a = 2/3g \sin \alpha = 1,7 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$.

3 Úlohy k procvičení

1. Na nakloněné rovině se sklonem α se valí bez prokluzování válec a klouže kvádr. Určete součinitel smykového tření f kvádru, při kterém budou zrychlení obou těles stejná.

$$[f = 1/3 \operatorname{tg} \alpha]$$

2. Řešte stejnou úlohu pro kouli a kvádr. [$f = 2/7 \operatorname{tg} \alpha$]

3. Válec o hmotnosti m a kvádr o hmotnosti M spojíme vláknem a umístíme na nakloněnou rovinu se sklonem α . Válec bude umístěn níže. Vypočítejte zrychlení soustavy a sílu, která napíná vlákno. Součinitel smykového tření pro válec je f , valivý odpor válce a

odpor vzduchu neuvažujte. Předpokládejte $f > 1/3 \operatorname{tg} \alpha$.

$$a = \frac{(m + M) \cdot \sin \alpha - fM \cos \alpha}{M + \frac{3}{2}m}$$

3 Závěr

Řešením uvedených úloh si žáci nejen oživilí a rozšířili znalosti a dovednosti z mechaniky, ale byla také byla také rozvíjena jejich přirozená zvědavost a upevňována sebedůvěra pro řešení dalších problémů a úloh.

4 Použitá literatura - žádná

5 Kontakt na autora

Mgr. Josef Veselý
Gymnázium Jaroslava Vrchlického Klatovy
jvesely@gymkt.cz

ODBORNÝ KEMP PŘÍRODOVĚDNÝCH OBORŮ FYZIKA

ŘEŠENÍ OBTÍŽNĚJŠÍCH ÚLOH Z MECHANIKY

Josef VESELÝ

1 Úvod

Cílem příspěvku je seznámit žáky s možnými matematickými prostředky při řešení obtížnějších úloh z mechaniky a zejména praktické procvičení užití vybraných prostředků.

2 Strategie řešení a volba matematických prostředků

Text úlohy nejprve pozorně prostudujeme, problémy tématicky zařadíme a zvolíme vhodné matematické prostředky pro řešení. Při analýze úlohy je vhodné využívat náčrtky.

Základní matematické postupy:

1. Vzorce středoškolské fyziky a soustavy rovnic

Pokud je to možné, využijeme k řešení úlohy vzorce a zákony středoškolské fyziky, ze kterých vytvoříme soustavu rovnic, tu vyřešíme a provedeme diskuzi řešení.

Pokud úpravy soustavy rovnic nutně vedou k rovnici alespoň třetího stupně, je třeba volit jiný postup.

2. Numerické řešení

Neumíme-li vyřešit úlohu postupem dle předchozí podkapitoly, můžeme k přibližnému řešení dojít dílčími numerickými kroky.

Pro numerické řešení použijeme kalkulátor nebo vhodný počítačový program.

3. Prostředky vyšší matematiky

Řešení úlohy často zjednodušíme nebo umožníme, použijeme-li derivace, integrály a později diferenciální rovnice.

3 Řešené úlohy

1. Vypočítejte velikost mezní rychlosti v_m lyžaře na sjezdovce se stálým sklonem α . Uvažujte smykové tření a odpor vzduchu. Tvarový součinitel odporu lyžaře je C , průřez S .

Řešte nejprve obecně, pak pro hodnoty $g = 9,8 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$, hustota vzduchu $\rho = 1,2 \text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$, $\alpha = 40^\circ$, $C = 0,7$, $S = 0,6 \text{ m}^2$, součinitel smykového tření $f = 0,15$, hmotnost lyžaře $m = 70 \text{ kg}$.

Řešení:

Analýza úlohy: Na lyžaře působí stálá tíhová síla F_G , jejíž tečná složka F_1 (viz obr.) vyvolává pohyb lyžaře po nakloněné rovině, reakce podložky F_R na normálovou složku tíhové síly F_2 . Síla F_R ruší přímý pohybový účinek síly F_2 , síla F_2 vyvolává třecí sílu F_T působící proti pohybu. Proti pohybu dále působí síla odporu vzduchu F_O , která se zvětšuje s narůstající rychlostí.

Rychlost se zvětšuje dokud $F_1 > F_T + F_O$. Mezní rychlost nalezneme z rovnice $F_1 = F_T + F_O$.

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Z náčrtku snadno odvodíme $F_l = mg \sin \alpha$, $F_T = fmg \cos \alpha$, použijeme Newtonův vzorec pro odporovou sílu $F_O = 1/2 C \rho S v^2$

$$mg \sin \alpha = fmg \cos \alpha + 1/2 C \rho S v_m^2, \text{ dále}$$

Po dosažení zadaných hodnot

$$\doteq 38 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} = 137 \text{ km/h}$$

$$v_m = \sqrt{\frac{2mg(\sin \alpha - f \cos \alpha)}{C \rho S}} \quad v_m = 37,9 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

2. Za jakou dobu dosáhne lyžař uvedené rychlosti?

Řešení: Protože odporová síla se zvětšuje s rostoucí rychlostí, jedná se o nerovnoměrně zrychlený pohyb, zrychlení postupně klesá k nule. Pro takový případ nemáme hotové vzorce, použijeme přibližné numerické řešení.

Za krátký časový interval se rychlost a tedy ani odporová síla příliš nezmění, můžeme tedy po tomto interval pohyb považovat za rovnoměrně zrychlený.

Počáteční hodnoty jsou $v_0 = 0$, $a_0 = g(\sin \alpha - f \cos \alpha) = 5,17 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$. Po uplynutí jednoho časového intervalu, zvolíme např. $\Delta t = 1 \text{ s}$, bude

$$v_1 = v_0 + a_0 \Delta t = 5,17 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

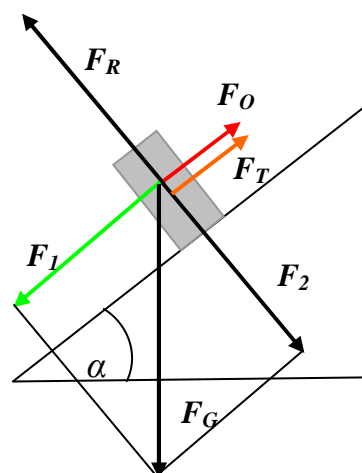
Na konci prvního časového intervalu se zrychlení zmenší na

$$a_1 = a_0 - \frac{C \rho S v_1^2}{2m} = 5,07 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$$

Obecně

$$v_{n+1} = v_n + a_n \Delta t$$

$$a_{n+1} = a_0 - \frac{C \rho S v_{n+1}^2}{2m}$$



Numerické výsledky můžeme zapsat do tabulky:

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8
v_n	0	5,17	10,24	15,03	19,39	23,21	26,44	29,09	31,21
a_n	5,17	5,07	4,79	4,36	3,82	3,23	2,65	2,12	1,66
9	10	11	12	13	14	15	16		
32,87	34,15	35,12	36,85	37,13	37,34	37,49	37,60		
1,28	0,97	0,73	0,28	0,21	0,15	0,11	0,08		

Mezní rychlosti bylo prakticky dosaženo za 16 s.

3 Závěr

Pro dosažení úspěchu ve fyzikálních soutěžích je třeba řešit i obtížnější úlohy. Numerické metody umožní přibližné řešení úloh, které jsou středoškolskými prostředky jinak neřešitelné.

Další probírané úlohy se do tohoto článku již nevešly.

4 Použitá literatura - žádná

5 Kontakt na autora

Mgr. Josef Veselý

Gymnázium Jaroslava Vrchlického Klatovy

jvesely@gymkt.cz

ODBORNÝ KEMP PŘÍRODOVĚDNÝCH OBORŮ MATEMATIKA

DŮKAZOVÉ ÚLOHY

Petr ZROSTLÍK

1 Úvod

Důkazové úlohy se každoročně objevují v jednotlivých kolech matematické olympiády, proto je vhodné se těmito typy úloh zabývat. Tyto úlohy činí studentům velké potíže a studenti se v nich velice často se dopouští řady chyb jako je např. důkaz „kruhem“.

2 Řešené příklady

2.1 Příklad č. 1

Dokažte pomocí řetězce implikací $\forall n \in \mathbb{N} : 2 \mid n \Rightarrow 2 \mid n^2$

2.2 Příklad č. 2

Dokažte pomocí věty obměněné a sporem $\forall n \in \mathbb{N} : 2 \mid n^2 \Rightarrow 2 \mid n$

2.3 Příklad č. 3

Dokažte matematickou indukcí $\forall n \in \mathbb{N} : 81 \mid 5^{n+1} + 6^{2n-1}$

2.4 Příklad č. 4

Bez numerických výpočtů odmocnin dokažte $\sqrt{13+\sqrt{12}} \leq 1 + \sqrt{13-\sqrt{12}}$

2.5 Příklad č. 5

Dokažte $\forall n \in \mathbb{N}_0 : 3 \mid n \Rightarrow 7 \mid 2^n - 1$

2.6 Příklad č. 6

Dokažte $\forall n \in \mathbb{N} : 81 \mid 10^n \cdot (9n-1) + 1$

2.7 Příklad č. 7

(MO-55-A-I-2) Necht' $ABCD$ je tětívový čtyřúhelník s navzájem kolmými úhlopříčkami. Označme po řadě p, q kolmice z bodu D, C na přímkou AB a dále X průsečík přímek AC a p a Y průsečík přímek BD a q . Dokažte, že čtyřúhelník $XYCD$ je kosočtverec nebo čtverec.

2.8 Příklad č. 8

(MO-47-B-S-2) Necht' obě úsečky spojující středy protilehlých stran konvexního čtyřúhelníka $ABCD$ mají stejnou délku. Dokažte, že úhlopříčky AC a BD jsou navzájem kolmé, a že platí rovnost

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

$$|AB|^2 + |CD|^2 = |BC|^2 + |DA|^2$$

2.9 Příklad č. 9

V trojúhelníku ABC známe $a = |BC|$, poloměr ρ kružnice vepsané a poloměr ρ_a kružnice vně připsané straně BC . Dokažte, že vzdálenost středů obou kružnic se rovná $\sqrt{a^2 + (\rho_a - \rho)^2}$.

3 Závěr

V příkladech č.1 – 4 bylo cílem zopakovat základní typy matematických důkazů. Poté již následovaly příklady, které se vyskytovaly v předchozích letech matematické olympiády. Tyto úlohy, díky své vyšší obtížnosti, pak studentům mohou posloužit jako ukázka možných postupů řešení důkazových úloh.

4 Použitá literatura

ŠEDIVÝ J. O podobnosti v geometrii 1. vyd, Praha: ÚV Matematické olympiády a ÚV ČSM, 1963, 77 s.

ŠEDIVÝ J. Shodnost a podobnost v konstrukčních úlohách 1. vyd, Praha: ÚV Matematické olympiády a ÚV ČSM, 1980, 160 s.

HORÁK S. Kružnice 1. vyd, Praha: ÚV Matematické olympiády a ÚV ČSM, 1966, 128 s.

NIEDERLE A. Zajímavé dvojice trojúhelníků. 1. vyd, Praha: ÚV Matematické olympiády a ÚV ČSM, 1980, 267 s.

ZHOUF J. Písemné maturitní zkoušky do gymnaziálních tříd se zaměřením na matematiku. 1. vyd. Praha: UK, 2007. 209 s. ISBN 978-80-7290-288-0

VRBA, A., Horák K. Vybrané úlohy matematické olympiády. 1. vyd. Praha: SPN, 1988. 182s.

5 Kontakt na autora

Mgr. Petr Zrostlík

Gymnázium, Plzeň, Mikulášské nám. 23

petr.zrostlik@mikulasske.cz

ODBORNÝ KEMP PŘÍRODOVĚDNÝCH OBORŮ MATEMATIKA

GEOMETRIE V POHYBU

Petr ZROSTLÍK

1 Úvod

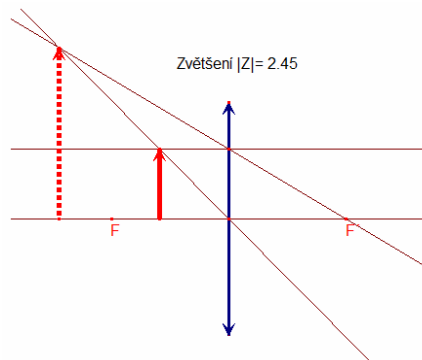
Program na dynamickou geometrii můžeme s úspěchem použít pro simulaci řady jevů a vytvořit tím velice zajímavé animace.

Příklady:

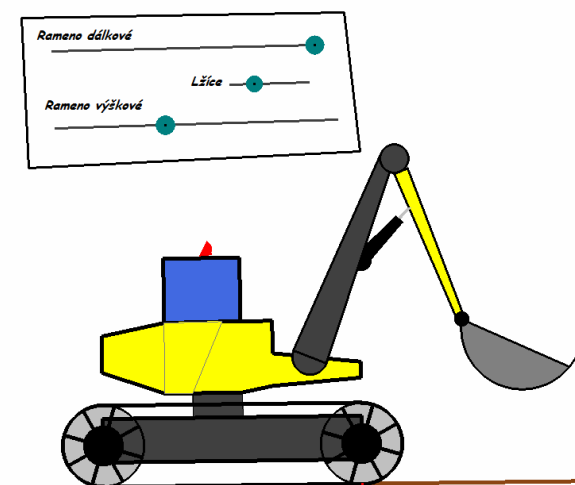
- rotace písmenek



- geometrická optika



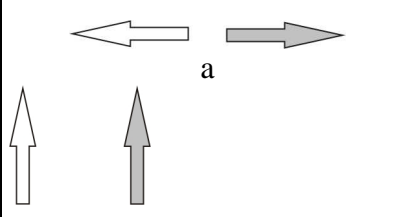
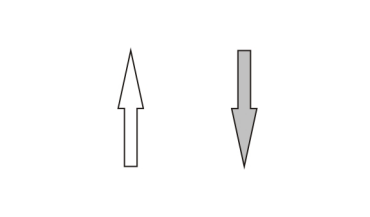
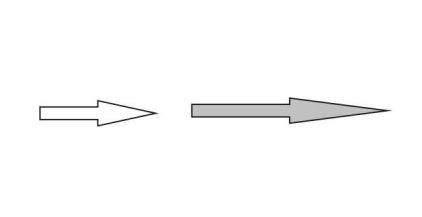
- pohybující se bagr



2 Řešené úlohy

2.1 Základní pohyby

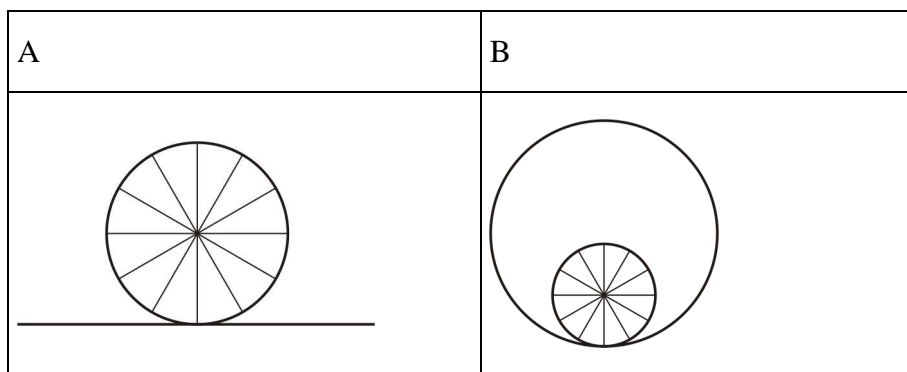
Studenti měli za úkol najít princip simulací nakreslených na obrázcích a realizovat tyto pohyby pomocí programu Cabri geometrie. (např. pro B...pokud se nějakým bodem pohybujeme nahoru, tak druhý bod se musí pohybovat dolů a naopak)

A	B	C
		

Řešení:

- A užití osové souměrnosti
- B užití středové souměrnosti
- C užití stejnolehlosti

2.2 Simulace pohybu kola



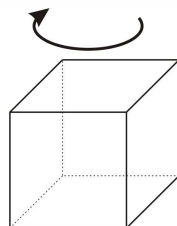
Řešení:

Pro simulaci pohybu použijeme nástroj nanesení délky na kružnici od daného bodu s mezi výpočtem, který je nutný pro přepočítání „směru“ nanášení úsečky.

2.3 Rotace krychle

Pomocí programu Cabri geometrie realizujete simulaci rotace krychle kolem osy procházející středem podstavy.

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ



Řešení:

Pro obraz krychle použijeme osovou afinitu, v které sestrojíme obraz podstavy (čtverce) krychle a následně pomocí translace nalezneme její obraz. Vyšetřit dynamicky viditelnost, je však již podstatně složitější. Viditelnost je nutno řešit pro každou polohu krychle zvlášť. Vždy se řeší vzájemná poloha dvou hran, které jsou ve skutečnosti mimoběžné, ale promítnou se jako dvě různoběžky. Tím dostaneme bod, který se nám postupně objevuje a zase mizí.

2.4 Růžice

Sestrojte růžici, která se bude plynule měnit.



Řešení:

Sestrojíme libovolný čtyřúhelník a pomocí rotace jej několikrát „zkopírujeme“.

3 Závěr

Co napsat závěrem - „Geometrie je krásná“.

4 Použitá literatura

Zdroje na internetu:

<http://www.akermann.cz/standardni-it/software-cabri.html>

<http://www.pf.jcu.cz/cabri/>

<http://www.pf.jcu.cz/cabri/temata/dynamgeo/dyngeo.htm>

<http://www.mikulasske.cz/cabri/>

5 Kontakt na autora

Mgr. Petr Zrostlík

Gymnázium, Plzeň, Mikulášské nám. 23

petr.zrostlik@mikulasske.cz

ODBORNÝ KEMP PŘÍRODOVĚDNÝCH OBORŮ MATEMATIKA

KOMPLEXNÍ ČÍSLA – ZAVEDENÍ, TRANSFORMACE

Petr ZROSTLÍK

1 Úvod

Učebnice matematiky zavádí komplexní číslo následovně:

Komplexním číslem nazveme výraz tvaru $a + bi$, kde a, b jsou reálná čísla a i je číslo, pro něž $i^2 = -1$. V komplexním čísle $a + bi$ se číslo a nazývá reálná část, číslo b imaginární část, číslo i se nazývá imaginární jednotka. (Caldá 2000, s. 12)

Následně se zavádí základní vlastnosti a operace s komplexními čísly:

Tvary komplexních čísel

- algebraický tvar: $z = a + bi$
- goniometrický tvar: $z = |z|(\cos \alpha + i \sin \alpha)$
- exponenciální tvar: $z = |z| \cdot e^{i\alpha}$

Absolutní hodnota komplexního čísla $z = a + bi$

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

Číslo komplexně sdružené k $z = a + bi$

$$\bar{z} = a - bi$$

Operace s komplexními čísly $z_1 = a_1 + b_1i$ a $z_2 = a_2 + b_2i$

- sčítání: $z_1 + z_2 = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)i$
- násobení: $z_1 \cdot z_2 = (a_1 + b_1i)(a_2 + b_2i) = a_1a_2 - a_2b_1i + i(a_1b_2 + a_2b_1)$
 $z_1 \cdot z_2 = |z_1| \cdot |z_2| \cdot [\cos(\alpha + \beta) + i \sin(\alpha + \beta)] = |z_1| \cdot |z_2| \cdot e^{i(\alpha + \beta)}$
- dělení: $\frac{z_1}{z_2} = \frac{a_1 + b_1i}{a_2 + b_2i} \cdot \frac{a_2 - b_2i}{a_2 - b_2i}$
 $\frac{z_1}{z_2} = \frac{|z_1|}{|z_2|} \cdot [\cos(\alpha - \beta) + i \sin(\alpha - \beta)] = \frac{|z_1|}{|z_2|} \cdot e^{i(\alpha - \beta)}$

Co však již v učebnici pro gymnázia nenajdeme je otázka funkcí komplexní proměnné a s nimi spojené transformace.

Funkce komplexní proměnné

Funkce komplexní proměnné je zobrazení z množiny komplexních čísel do množiny komplexních čísel.

$$w = f(z)$$

Grafické znázornění funkce komplexní proměnné

S každou funkcí komplexní proměnné je spojena vždy některá transformace komplexní roviny.

⇒ Každému bodu Gaussovy roviny, který je obrazem komplexního čísla z , je přiřazen bod Gaussovy roviny.

2 Řešené příklady

Pro řešení příkladů je vhodné použít např. program Cabri geometrie a Derive.

2.1 Příklad č. 1

Popište transformaci

a) $w = z + a \quad a \in C$

Řešení: posunutí

b) $w = k \cdot z \quad k \in R$

Řešení: stejnolehlost se středem v počátku a s koeficientem k

c) $w = z \cdot (\cos \alpha + i \cdot \sin \alpha)$

Řešení: otočení se středem v počátku o úhel α

d) $w = z \cdot a \quad a \in C$

Řešení: spirálová podobnost = složení stejnolehlosti a otočení

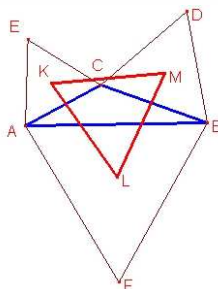
2.2 Příklad č. 2

Jsou dány rovnostranné trojúhelníky ABC a DEF tak, že jsou oba popsány ve smyslu chodu hodinových ručiček. Dokažte, že trojúhelník KLM , kde K, L, M jsou po řadě středy stran AD, BE a CF , je také rovnostranný.

2.2 Příklad č. 3

Je dán trojúhelník ABC . Nad jeho stranami jsou sestrojeny rovnostranné trojúhelníky (dle obrázku). Označme K, L, M těžiště těchto trojúhelníků. Dokažte, že trojúhelník KLM je rovnostranný.

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ



3 Závěr

Vybrané příklady mají za cíl ukázat studentům možnosti uplatnění komplexních čísel i v jiných partiích matematiky s návazností na technickou praxi.

4 Použitá literatura

CALDA E. Matematika pro gymnázia – Komplexní čísla. 3. vyd. Praha: Prométheus, 2000. 134 s. ISBN 80-7196-187-6.

JARNÍK J.. Komplexní čísla a funkce 1. vyd, Praha: ÚV Matematické olympiády a ÚV ČSM, 1967, 75 s.

BRKOS TEAM 2010, Komplexní čísla – pomocný text 2009/2010

5 Kontakt na autora

Mgr. Petr Zrostlík

Gymnázium, Plzeň, Mikulášské nám. 23

petr.zrostlik@mikulasske.cz

ODBORNÝ KEMP PŘÍRODOVĚDNÝCH OBORŮ MATEMATIKA

PLANIMETRIE

Petr ZROSTLÍK

1 Úvod

„K pochopení geometrie nevede žádná královská cesta“ – Euklides

2 Řešené příklady

V rámci semináře byly řešeny následující příklady.

2.1 Příklad č. 1

(MO 47-B-II-2) Sestrojte trojúhelník ABC , v němž při obvyklém označení platí:

- $t_a = 9 \text{ cm}$
- $t_b = 12 \text{ cm}$
- $3 \cdot c = 2 \cdot t_c$.

Nápověda:

Vztah $3 \cdot c = 2 \cdot t_c$ upravíme na $\frac{t_c}{3} = \frac{c}{2}$. Z toho je vidět, že

těžiště trojúhelníku ABC leží na Thaletově kružnici nad průměrem AB . Tím jsem úlohu převedli na konstrukci trojúhelníka ABT podle věty sus.

2.2 Příklad č. 2

(MO 49-B-II-4) Je dán obdélník $KLMN$ $|KN| > |KL|$. Sestrojte rovnoramenný trojúhelník ABC se základnou AB délky $|KL|$ tak, aby jeho výšky v_a obsahovala body K, N , výška v_b bod L a výška v_c bod M . (výškami zde rozumíme přímkou)

Nápověda:

V rámci rozboru užití osovou souměrnost s osou v_c .

2.3 Příklad č. 3

Sestrojte čtyřúhelník $ABCD$, je-li dáno $|AC| = 8 \text{ cm}$, $|AD| = 3 \text{ cm}$, $|BC| = 6 \text{ cm}$, velikost úhlu ADB je 45° a velikost úhlu DBC je 60° .

2.4 Příklad č. 4

Jsou dány dva různé body A, B a číslo $k > 0$; $k \neq 1$. Vyšetřete množinu všech bodů X roviny, pro které platí $|AX| = k \cdot |BX|$.

Řešení:

Množinou bodů je Apolloniova kružnice..

2.5 Příklad č. 5

Sestrojte trojúhelník ABC, je-li dáno a , v_a , $\frac{v_b}{v_c} = 2$.

Nápověda:

Poměr $\frac{v_b}{v_c} = 2$ převedeme vhodnou úpravou na $\frac{c}{b} = 2a$

využijeme Apolloniovu kružnici.

2.6 Příklad č. 6

Na přímce p jsou dány body A, B, C, D (ležící v tomto pořadí). Najděte bod X tak, aby z tohoto body byly vidět úsečky AB, BC a CD pod stejnými zornými úhly.

Nápověda:

Užijeme Apolloniovu kružnici..

3 Závěr

Studenti se v rámci semináře seznámili s řešením obtížnějších konstrukčních úloh a „užitečnou“ množinou bodů daných vlastností..

4 Použitá literatura

ŠEDIVÝ J. O podobnosti v geometrii 1. vyd, Praha: ÚV Matematické olympiády a ÚV ČSM, 1963, 77 s.

ŠEDIVÝ J. Shodnost a podobnost v konstrukčních úlohách 1. vyd, Praha: ÚV Matematické olympiády a ÚV ČSM, 1980, 160 s.

HORÁK S. Kružnice 1. vyd, Praha: ÚV Matematické olympiády a ÚV ČSM, 1966, 128 s.

NIEDERLE A. Zajímavé dvojice trojúhelníků. 1. vyd, Praha: ÚV Matematické olympiády a ÚV ČSM, 1980, 267 s.

5 Kontakt na autora

Mgr. Petr Zrostlík

Gymnázium, Plzeň, Mikulášské nám. 23

petr.zrostlik@mikulasske.cz

ODBORNÝ KEMP PŘÍRODOVĚDNÝCH OBORŮ MATEMATIKA

ŘEŠENÍ KOMPLEXNÍCH ÚLOH

Petr ZROSTLÍK

1 Úvod

Při řešení příkladů matematické olympiády se mohou studenti setkat s úlohami, pro jejichž řešení již nestačí jen znalost jedné matematické partie, ale je zapotřebí mít určitý nadhled nad větším rozsahem, případně se na úlohu „podívat“ z jiné strany.

2 Řešené příklady

V rámci semináře studenti řešili následující příklady.

2.1 Příklad č. 1

Je dána funkce $f(x) = \sqrt{x + \sqrt{2x-1}} + \sqrt{x - \sqrt{2x-1}}$

- Určete definiční obor
- Řešte rovnici $f(x) = \sqrt{a}$ s parametrem a .
- Nakreslete graf funkce $y = f^2(x)$

2.2 Příklad č. 2

Najděte součet prvních 2010 členů posloupnosti 1; 11; 111; 1111; 11111; ...

Nápověda:

Vyjádríme si členy posloupnosti v desítkové soustavě a při hledání součtu zadané posloupnosti využijeme znalost součtu první n členů geometrické posloupnosti.

2.3 Příklad č. 3

Je dána následující posloupnost. První člen je 49, každý další člen vznikne z předchozího členu tak, že do jeho středu vložíme dvojčíslí 48. (49; 4489; 444889; 444448889; ...). Dokažte, že každý člen této posloupnosti je druhou mocninou přirozeného čísla.

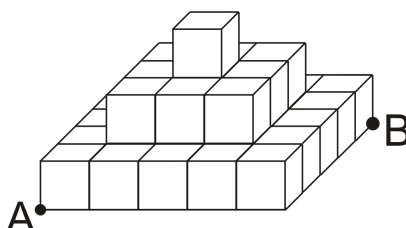
Nápověda:

Vyjádríme si n -tý člen posloupnosti v desítkové soustavě a využijeme znalost součtu první n členů geometrické posloupnosti.

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

2.4 Příklad č. 4

Je dána pyramida z jednotkových krychlí s 3 vrstvami. Najděte nejkratší spojnici protějších vrcholů A , B podstavy, která vede po povrchu pyramidy a neprochází vnitřkem podstavy.

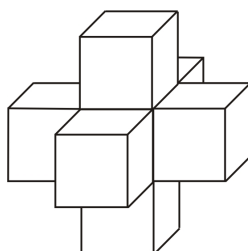


Nápověda:

Body A , B jsou umístěny symetricky vůči rovině, která prochází středem úsečky AB a kolmo na ní. Sestrojíme řez touto rovinou a následně rozvineme část pyramidy do roviny.

2.5 Příklad č. 5

Na obrázku je znázorněn stavebnicový díl složený ze 7 krychlí. Dokažte, že s těmito díly lze vyplnit beze zbytku celý prostor.



Nápověda:

Na těleso na obrázku nahlédneme jako na útvar, který má tři vrstvy. V první je jedna krychle, v druhé je „kříž“ tvořený pěti a v poslední opět jedna krychle. Prostor si rozdělíme na rovnoběžné vrstvy krychlí, stejné velikosti jako u daných dílů. Zvolíme si jednu vrstvu a označíme si ji 0, vrstvu nad ní $+1$ (a pod ní -1). Nyní se snažíme najít takové rozmístění v jednotlivých vrstvách, abychom vyplnili celý prostor.

			1		0					
	0		-1							
-1			1		0					
1		0		-1						
	-1			1		0				
	1		0		-1					
0		-1			1		0			
		1		0		-1				
	0		-1			1		0		
-1			1		0		-1			



INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

3 Závěr

V rámci semináře se studenti seznámili s řešením úloh komplexnějšího charakteru.

4 Použitá literatura

HRADECKÝ F., KOMAN M., VYŠÍN J. Několik úloh z geometrie jednoduchých těles. 1. vyd, Praha: ÚV Matematické olympiády a ÚV ČSM, 1961, 90 s.

JARNÍK J. Posloupnosti a řady. 1. vyd, Praha: ÚV Matematické olympiády a ÚV ČSM, 1979, 138 s.

VRBA, A., Horák K. Vybrané úlohy matematické olympiády. 1. vyd. Praha: SPN, 1988. 182s.

ZHOUF J. Písemné maturitní zkoušky do gymnaziálních tříd se zaměřením na matematiku. 1. vyd. Praha: UK, 2007. 209 s. ISBN 978-80-7290-288-0

5 Kontakt na autora

Mgr. Petr Zrostlík

Gymnázium, Plzeň, Mikulášské nám. 23

petr.zrostlik@mikulasske.cz

ODBORNÝ KEMP PŘÍRODOVĚDNÝCH OBORŮ MATEMATIKA

DYNAMIKA V CABRI GEOMETRII

Petr ZROSTLÍK

1 Úvod

Pro výuku geometrie na střední škole je možné použít různé geometrické programy. Podle mého názoru jsou nejrozšířenější Cabri geometrie a The Geometer's Sketchpad. Tyto produkty se řadí mezi programy dynamické geometrie.

2 Dynamická geometrie

Programy dynamické geometrie nám dovolují postupným vytvářením objektů na pracovní ploše obrazovky (body, kružnice, přímky, množiny bodů...) a definováním geometrických vztahů mezi těmito objekty (kolmost, rovnoběžnost,...) provádět běžné geometrické konstrukce použitím stejných znalostí, které používáme na papíře s užitím pravítka a kružítko. Některými z vytvořených objektů lze následně po ploše pohybovat a tím měnit tvar výsledné konstrukce.

Základní nástroje používané v dynamických konstrukcích:

- pohyb objektů
- stopa
- množiny
- pohyb více objektů

3 Řešené příklady

Pro ukázkou využití programu dynamické geometrie a výuku základního ovládnutí programu Cabri geometrie, řešili studenti v matematickém kempu následující příklady.

3.1 Užití pohybu objektu

Je dán rovnoběžník ABCD, kde bod K je středem strany CD a bod L je středem strany BC. Dokažte, že úhlopříčka BD je přímkami AK a AL rozdělena na tři stejně dlouhé části.

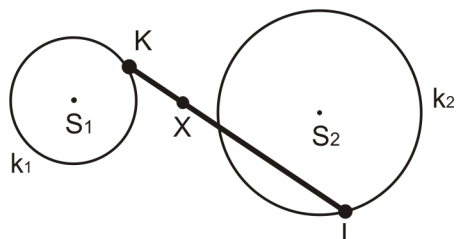
3.2 Užití pohybu objektu

Je dán lichoběžník ABCD. Označte S průsečík úhlopříček AC a BD. Dokažte, že obsahy trojúhelníků ASD a BCS jsou shodné.

3.3 Užití stopy, množiny bodů a pohybu více objektů

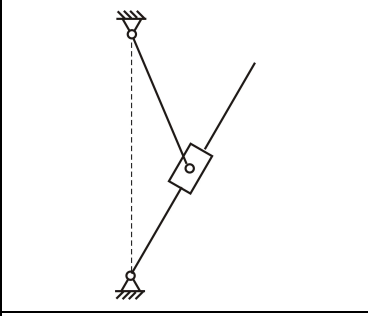
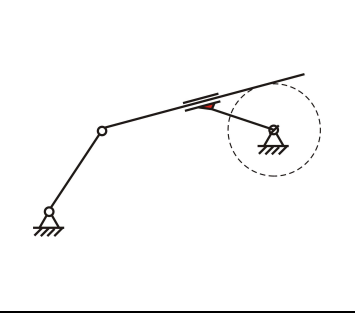
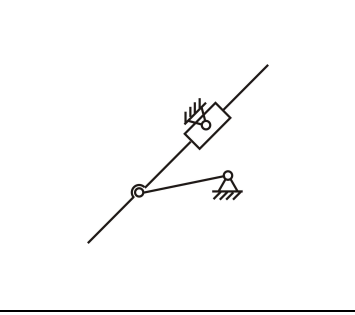
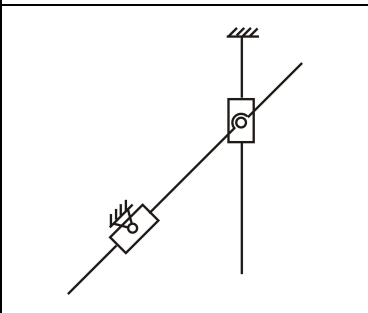
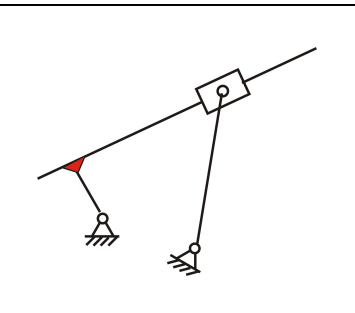
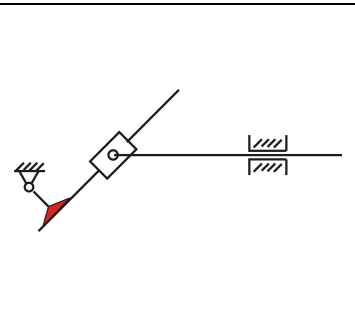
Vyšetřete množinu bodů X v rovině, pokud se bod K pohybuje po kružnici k_1 . a následně vyšetřete množinu bodů X v rovině, pokud se bod K pohybuje po kružnici k_1 a současně bod L po kružnici k_2 .

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ



3. 4 Praktické užití – simulace mechanismů

Po jakých křivkách se budou pohybovat koncové body tyčí v zadaných mechanismech.

Mechanismus č.1	Mechanismus č.2	Mechanismus č.3
		
Mechanismus č.4	Mechanismus č.5	Mechanismus č.6
		

4 Závěr

Zařazení programů dynamické geometrie do výuky je velice efektivní neboť tyto programy umožňují studentům snazší pochopení a větší názornost probírané látky.

5 Použitá literatura

Zdroje na internetu:

<http://www.akermann.cz/standardni-it/software-cabri.html>

<http://www.pf.jcu.cz/cabri/>

<http://www.pf.jcu.cz/cabri/temata/dynamgeo/dyngeo.htm>

<http://www.mikulasske.cz/cabri/>

6 Kontakt na autora

Mgr. Petr Zrostlík

Gymnázium, Plzeň, Mikulášské nám. 23

petr.zrostlik@mikulasske.cz

ODBORNÝ KEMP PŘÍRODOVĚDNÝCH OBORŮ MATEMATIKA

O ROZKLADECH POLYNOMŮ V SOUČTY ČTVERCŮ (+ 17. HILBERTŮV PROBLÉM)

Jaroslav HORA

1 Úvod

V mnoha úlohách lze dokázat polynomiální nerovnost $f \geq 0$, kde f je polynom v n neurčitých tak, že nalezneme vyjádření $f = h_1^2 + \dots + h_r^2$. Lze to učinit vždy? Co když polynomy h_1, \dots, h_r neuhodneme – pomůže nám počítač? Bude třeba studovat mnohé věci zejména z oblasti lineární algebry, ale tomu nejlepší řešitelé MO stejně neuniknou... .

2 Jedna ukázka „lidských“ postupů

Příklad: Je polynom $f(x, y) = (x^2 + y^2)(x^2 + 4y^2) = x^4 + 5x^2y^2 + 4y^4$ součtem čtverců?

Řešení: Odpověď může poskytnout jedna identita, objevená starověkým indickým matematikem Brahmaguptou okolo r. 600 a pak znovu objevená o zhruba tisíc let později P. Fermatem. Je totiž $(x^2 + y^2)(u^2 + v^2) = (xu - yv)^2 + (xv + yu)^2$. (*)

Povšimněme si, že obrátíme –li na levé straně identity (*) pořadí činitelů, nezískáme nic nového. Jestliže ale v některé ze závorek vlevo obrátíme pořadí činitelů, dostaneme obecně jiný rozklad: $(y^2 + x^2)(u^2 + v^2) = (yu - xv)^2 + (yv + xu)^2$. Proto se rovnosti (*) také říká „two squares identity“.

V daném případě tedy máme $f(x, y) = (x^2 + y^2)(x^2 + 4y^2) = (x \cdot x - y \cdot 2y)^2 + (x \cdot 2y + y \cdot x)^2 = (x^2 - 2y^2)^2 + (3xy)^2$. Obrátíme –li pořadí sčítanců v první závorce, obdržíme druhý rozklad $f(x, y) = (y^2 + x^2)(x^2 + 4y^2) = (x \cdot x - y \cdot 2y)^2 + (x \cdot 2y + y \cdot x)^2 = (x^2 - 2y^2)^2 + (3xy)^2$.

Poznamenejme ještě, že identita (*) samozřejmě funguje i tehdy, když nepracujeme s polynomy, ale s přirozenými čísly. Máme například $65 = 5 \cdot 13 = (4 + 1)(9 + 4) = (2^2 + 1^2)(3^2 + 2^2)$ a odtud podle (*) dostáváme $65 = (2 \cdot 3 - 1 \cdot 2)^2 + (2 \cdot 2 + 1 \cdot 3)^2 = 4^2 + 7^2$.

Přehodíme-li pořadí sčítanců v jedné závorce, dostaneme $65 = (1^2 + 2^2)(3^2 + 2^2) = (1 \cdot 3 - 2 \cdot 2)^2 + (1 \cdot 2 + 2 \cdot 3)^2 = 1^2 + 8^2$.

2.1 A teď kousek lineární algebry

Vraťme se teď rozkladu polynomu $f(x, y) = (x^2 + y^2)(x^2 + 4y^2) = x^4 + 5x^2y^2 + 4y^4$. Vzhledem k jeho speciálnímu tvaru jsme měli štěstí, že se dva rozklady polynomu $f(x, y)$ podařilo snadno nalézt. Nyní se pokusíme aplikovat obecnou teorii a vypracovat postup, při kterém bychom využili lineární algebry a moli též požádat o pomoc počítač.

1. Je –li možné zapsat $f(x, y)$ jako součet čtverců jistých polynomů ve tvaru $f(x, y) = \sum_i h_i^2$, pak polynomy h_i mohou zřejmě obsahovat nanejvýš monomy x^2, xy, y^2 .

Sepišme si exponenty u x, y v těchto monomech: $\beta_1 = (2, 0), \beta_2 = (1, 1), \beta_3 = (0, 2)$. Nyní zkonstruujeme čtvercovou Gramovu matici B řádu 3. Ta bude, jak je zřejmé, symetrická (vzhledem k hlavní diagonále). Je zajisté $b_{11} = 1$. Dále $\beta_1 + \beta_2 = (3, 1)$, monom x^3y se

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

v polynomu f nevyskytuje, proto $b_{12} = 0$. Dále $\beta_1 + \beta_3 = (2, 2)$, monom $x^2 y^2$ se v polynomu f vyskytuje s koeficientem 5 a platí $(2, 2) = \beta_1 + \beta_3 = \beta_3 + \beta_1 = \beta_2 + \beta_2$. Odtud $2 b_{13} + b_{22} = 5$. Položíme-li $b_{13} = r$, je $b_{22} = 5 - 2r$.

Snadno se zjistí, že $b_{23} = 0$, $b_{33} = 4$. Příslušná Gramova matice B má tudíž tvar

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & r \\ 0 & 5-2r & 0 \\ r & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

2.2 Je matice B pozitivně semidefinitní?

2. Zjistíme nyní, zda pro některé hodnoty parametru r jde o matici pozitivně definitní či pozitivně semidefinitní. Podle známé charakterizace pozitivně definitních či semidefinitních matic stačí ověřit, že všechny vlastní hodnoty matice B jsou nezáporné. Napišme proto

$$\text{charakteristický polynom } f(\lambda) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & r \\ 0 & 5-2r-\lambda & 0 \\ r & 0 & 4-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)(4-\lambda)(5-2r-\lambda) - r^2(5-2r-\lambda)$$

$= (1-\lambda)(4-\lambda)(5-2r-\lambda) - r^2(5-2r-\lambda) = (5-2r-\lambda)(\lambda^2 - 5\lambda + 4 - r^2) = 5\lambda^2 - 25\lambda + 20 - 5r^2 - 2r\lambda^2 + 10\lambda r - 8r + 2r^3 - \lambda^3 + 5\lambda^2 - 4\lambda + r^2\lambda = -\lambda^3 + \lambda^2(10-2r) + \lambda(r^2 + 10r - 29) + (2r^3 - 5r^2 - 8r + 20)$. Hledáme takové hodnoty parametru λ , pro něž má polynom $f(\lambda)$ pouze nezáporné kořeny, tj. nemá žádný záporný kořen. To je ovšem totéž jako požadovat, aby polynom $f(-\lambda) = \lambda^3 + \lambda^2(10-2r) + \lambda(-r^2 - 10r + 29) + (2r^3 - 5r^2 - 8r + 20)$ neměl žádný kladný kořen. Podle Descartova znaménkového pravidla budeme požadovat, aby mezi členy polynomu $f(-\lambda)$ nenastaly žádné znaménkové změny, tj. aby platilo $10-2r \geq 0 \wedge -r^2 - 10r + 29 \geq 0 \wedge 2r^3 - 5r^2 - 8r + 20 \geq 0$.

To nás přivádí k řešení soustavy nerovnic, kdy oborem pravdivosti P_1 nerovnice $10-2r \geq 0$ je $P_1 = (-\infty, 5]$, druhá je ekvivalentní s podmínkou $r^2 + 10r - 29 \leq 0$, $(r+5)^2 - 54 \leq 0$ a poté $|x+5| \leq 3\sqrt{6}$, takže $P_2 = \langle -5-3\sqrt{6}, -5+3\sqrt{6} \rangle$.

Nakonec pišme $2r^3 - 8r - 5r^2 + 20 \geq 0$, $2r(r^2 - 4) - 5(r^2 - 4) \geq 0$, resp. $(2r-5)(r+2)(r-2) \geq 0$. Snadno nahlížíme, že $P_3 = \langle -2, 2 \rangle \cap \langle \frac{5}{2}, \infty \rangle$.

Pro snazší vyjádření závěru si uvědomme, že $-5-3\sqrt{6} \approx -12,35$, $-5+3\sqrt{6} \approx 2,35$. Pak $P_2 \cup P_3 = \langle -2, 2 \rangle$ a $P = P_1 \cup P_2 \cup P_3 = \langle -2, 2 \rangle$.

Můžeme tedy učinit závěr, že matice B je pozitivně semidefinitní (či pozitivně definitní, ale budeme stručně hovořit jen o pozitivně semidefinitní matici) právě tehdy, když je $r \in \langle -2, 2 \rangle$.

2.3 A teď pomůže počítač!

Článek je již delší než je stanovený rozsah, tedy stručně. Potřebujeme získat ještě jednu matici U . V programu Mathematica® verze 7.0 si lze cestu od matice B k matici U zkrátit využitím tzv. Choleského rozkladu matice B :

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

```
In[7]:= CholeskyDecomposition[{{1, 0, r}, {0, 5 - 2 r, 0}, {r, 0, 4}}]
```

```
Out[7]:= {{1, 0, r}, {0, sqrt(5 - 2 r), 0}, {0, 0, sqrt(4 - r Conjugate[r])}}
```

Počítač ale neví, že pro nás je r pouze reálné, nikoli komplexní číslo, což se projevuje v tom, že uvádí konjugovaný, tj. komplexně sdružený prvek k r . Doplníme mu tedy, že lze předpokládat, že r je reálné číslo a požádáme ho o zjednodušení předchozího výpočtu:

```
In[8]:= Assuming[r ∈ Reals, Simplify[%]]
```

```
Out[8]:= {{1, 0, r}, {0, sqrt(5 - 2 r), 0}, {0, 0, sqrt(4 - r^2)}}
```

Naši kořist zapišme v obvyklé maticové formě:
$$U = \begin{pmatrix} 1 & 0 & r \\ 0 & \sqrt{5-2r} & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{4-r^2} \end{pmatrix}.$$

2.4 Dešifrujeme výsledek...

a) Co když $r = -2$? Pak má matice U tvar $U = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ a představíme –li si, že

záhlaví sloupců je $x^2, x y, y^2$, pak můžeme konstatovat, že první řádkový vektor matice U „šifruje“ polynom $h_1 = x^2 - 2 y^2$, druhý pak $h_2 = 3 x y$. Pak $(x^2 - 2 y^2)^2 + (3 x y)^2 = f(x, y)$ je nám již z části 2. 1 známý rozklad polynomu f v součet čtverců.

b) Pro $r = 2$ je $U = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ a $h_1 = x^2 + 2 y^2, h_2 = x y$. Lze psát $f(x, y) = (x^2 + 2 y^2)^2 +$

$(x y)^2$ a to je druhý rozklad nám již známý z části 2. 1.

c) Pokud je $r \in (-2, 2)$, poskytuje matice $U = \begin{pmatrix} 1 & 0 & r \\ 0 & \sqrt{5-2r} & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{4-r^2} \end{pmatrix}$ tři polynomy h_1

$= x^2 + r y^2, h_2 = \sqrt{5-2r} x y$ a $h_3 = \sqrt{4-r^2} \cdot y^2$ a máme rozklad $f(x, y) = (x^2 + r y^2)^2 + (\sqrt{5-2r} \cdot xy)^2 + (\sqrt{4-r^2} \cdot y^2)^2$.

3 Závěr

Pro další studium lze využít literaturu uvedenou dále. V (Novák 1975) nalezneme čtenář mnoho informací o 17. Hilbertově problému, (Bečvář, 2005) poskytuje potřebné informace z lineární algebry a článek (Powers, Woermann) detailní popis algoritmu pro rozklad polynomu v součet čtverců.

4 Použitá literatura



INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

BEČVÁŘ, J.: Lineární algebra, 3. vyd. Praha, Matfyzpress, 2005.436 s. ISBN 80-86732-57-6

POWERS, V., WOERMANN, T. An algorithm for sums of squares of real polynomials, J. Pure and Appl. Alg. 127 (1998), 99-104.

NOVÁK BŘETISLAV: O sedmnáctém Hilbertově problému. Pokroky matematiky, fyziky a astronomie, roč. 20/1975, č. 3, str. 154 - 158.

5 Kontakt na autora

Doc. RNDr. Jaroslav Hora, CSc.

katedra matematiky FPE ZČU, Klatovská 51, Plzeň, 306 14.

horajar@kmt.zcu.cz

ODBORNÝ KEMP PŘÍRODOVĚDNÝCH OBORŮ MATEMATIKA

O ROZKLADECH POLYNOMŮ S CELOČÍSELNÝMI KOEFICIENTY

Jaroslav HORA

1 Úvod

V hodinách matematiky velmi často procvičujeme nalézání rozkladů typu $x^3 + 8 = (x + 2)(x^2 - 2x + 4)$, $16x^4 - y^4 = (4x^2 + y^2)(2x - y)(2x + y)$ atd., tj. snažíme se rozložit daný polynom s celočíselnými koeficienty v součin polynomů nižších stupňů, opět však výhradně s celočíselnými koeficienty. Při nacházení shora uvedených rozkladů se opíráme o znalost několika vzorců. Je všeobecně známo, že schopnost nacházet obdobné rozklady (faktorizace) polynomů je velice užitečná např. při provádění různých algebraických úprav či při řešení rovnic.

2 Ireducibilní polynomy a faktorizace v $\mathbb{Z}[x]$

Jak bychom ale postupovali v případě, že zadaný polynom f s celočíselnými koeficienty je složitější? Jak je ale možné, že některé rozklady polynomu nalezneme již i kalkulačka TI-92 Plus realizující symbolické výpočty či program Derive? Pro jednoduchost se omezíme jen na faktorizaci polynomů jedné neurčité.

Vzniká otázka, jak rozeznat, který prvek v $\mathbb{Z}[x]$ je nerozložitelný (ireducibilní) a který nikoli. Nejprve připomeneme definici:

Definice: Buď $f(x) \in \mathbb{Z}[x]$, $f(x) \neq 0$, $f(x) \neq \pm 1$ polynom, který nelze zapsat ani jako součin dvou polynomů kladných stupňů s celočíselnými koeficienty, ani ve tvaru

$$f(x) = k \cdot g(x), \quad k > 1, \quad k \in \mathbb{N}, \quad g(x) \in \mathbb{Z}[x] \quad (1)$$

(tzn., že z polynomu $f(x)$ není ani možné vytknout konstantu $k > 1$). Říkáme pak, že polynom $f(x)$ je nerozložitelný (ireducibilní).

V některých případech lze k důkazu ireducibility užít jednoduchý test, pocházející od F. Eisensteina. S touto problematikou se může čtenář seznámit např. v (Hora 1990, s. 434-435). Pochopitelně se nebudeme zaměřovat na pouhé vytknutí celočíselné konstanty – to je celkem triviální úloha.

Klasickým algoritmem pro faktorizaci polynomů v $\mathbb{Z}[x]$ je tzv. „Kroneckerův“ algoritmus, tradičně nazývaný po německém matematiku Leopoldu Kroneckerovi (1823 – 1891), ačkoli byl znám již r. 1793 astronomu Friedrichu T. v. Schubertovi. Tento algoritmus umožňuje rozhodnout, zda je daný primitivní polynom $f(x) \in \mathbb{Z}[x]$ dělitelný jistým polynomem $g(x) \in \mathbb{Z}[x]$ či nikoli, tj. dovoluje rozhodnout, zda je primitivní polynom $f(x) \in \mathbb{Z}[x]$ reducibilní či ireducibilní. (Primitivním polynomem se rozumí takový polynom f , z něhož nelze vytknout celočíselnou konstantu).

1. Při hledání event. dělitele $g(x) \in \mathbb{Z}[x]$ polynomu $f(x)$ se můžeme omezit na ty polynomy, jejichž stupeň je menší nebo roven číslu $s = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$. Zde symbol $\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$ značí tzv.

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

celou část čísla $\frac{n}{2}$, tj. největší celé číslo, které je menší nebo rovno $\frac{n}{2}$. Je-li např. $n = st f(x) = 5$, je $s = \left[\frac{5}{2} \right] = 2$.

2. Vypočteme $s + 1$ funkčních hodnot polynomu $f(x)$. V ilustračních příkladech budeme kupř. volit $x = 0, 1, \dots, s$. Získáme celočíselné funkční hodnoty $f(0), f(1), \dots, f(s)$.

3. Má-li $g(x)$ dělit polynom $f(x)$, musí funkční hodnota $g(0)$ dělit $f(0)$, $g(1)$ dělit $f(1)$, ..., $g(s)$ dělit $f(s)$. Utvořme tedy množiny $D_{f(0)}, D_{f(1)}, \dots, D_{f(s)}$ všech celočíselných dělitelů čísel $f(0), f(1), \dots, f(s)$. (Kdyby $f(k) = 0$ pro některé $k = 0, 1, \dots, s$, bylo by číslo k kořenem polynomu $f(x)$ a $f(x) = x - k$ by byl kořenový činitel, čímž by byla naše úloha vyřešena. Můžeme proto předpokládat, že $f(k) \neq 0$ pro všechna $k = 0, 1, \dots, s$ a množiny $D_{f(k)}$ jsou tudíž konečné.

4. Pro každou $s + 1$ – tici čísel $g(0) \in D_{f(0)}, g(1) \in D_{f(1)}, \dots, g(s) \in D_{f(s)}$ nalezneme takový polynom $g(x)$, který nabývá v bodech $x = 0, 1, \dots, s$ předepsaných hodnot $g(0), g(1), \dots, g(s)$. Vzhledem k rozsahu textu jej nalezneme elementárními prostředky, bylo by ale možné užít i pokročilejší metody (Newtonův interpolační polynom).

5. Je-li $g(x)$ vskutku polynom s celočíselnými koeficienty, $1 \leq st g(x) \leq s$, pak otestujeme, zda v oboru integrity $Z[x]$ polynom $g(x)$ dělí $f(x)$. V kladném případě jsme úlohu vyřešili a získali jsme rozklad tvaru $f(x) = g(x) \cdot h(x)$, $g(x) \in Z[x]$, $h(x) \in Z[x]$, $st g(x) > 0$, $st h(x) > 0$; jinak se vrátíme k bodu 4 a celý postup opakujeme pro další $s + 1$ – tici až do té doby, kdy jsou všechny tyto $s + 1$ – tice vyčerpány. Poté můžeme konstatovat, že polynom $f(x)$ je ireducibilní v $Z[x]$.

Příklad: Rozhodněte v $Z[x]$ o reducibilitě či ireducibilitě polynomu $f(x) = x^5 + 2x^4 - 4x^3 - 4x^2 + 7x - 3$.

Řešení: 1. Je $st f(x) = 5$, $s = \left[\frac{5}{2} \right] = 2$, takže $g(x)$ je nanejvýš kubický polynom.

2. Máme $f(0) = -3, f(1) = -1, f(2) = 27$.

3. $D_{f(0)} = \{1, -1, 3, -3\}, D_{f(1)} = \{1, -1\}, D_{f(2)} = \{1, -1, 3, -3, 9, -9, 27, -27\}$.

V tomto případě máme pro výběr $g(0)$ čtyři možnosti, pro $g(1)$ dvě a pro $g(2)$ osm, takže dostaneme 64 uspořádaných trojic $[g(0), g(1), g(2)]$. V nejhorsím případě tedy bude nutné nalézt stejný počet interpolačních polynomů a testovat, zda mají vesměs celočíselné koeficienty a dělí $f(x)$. Tuto nezáživnou pasáž čtenáři ušetříme a pro ilustraci se jen podíváme, jak by popsany postup proběhl pro několik vybraných trojic $[g(0), g(1), g(2)]$.

I. Pro $g(0) = g(1) = g(2) = 1$ máme ovšem $g(x) = 1$. Především si povšimněme, že interpolační polynom nemusí mít právě stupeň $s = 2$, ale může mít i stupeň nižší (v daném případě jde dokonce o konstantu). V této ukázce jsme ovšem našli triviální dělitel $g(x) = 1$ polynomu $f(x)$, takže je nutné v testování pokračovat.

II. Pro $g(0) = 1, g(1) = 1, g(2) = 9$ budeme hledat kvadratický polynom g ve tvaru $g(x) = ax^2 + bx + c$. Dosazením $x = 0$ máme $c = 1$. Dosadíme-li $x = 1$, pak dostáváme rovnici $a + b + c = 1$, resp. s přihlédnutím ke známé hodnotě $c = 1$ rovnici $a + b = 0$. Dosazením $x = 2$ dospějeme k rovnici $4a + 2b + c = 9$, po úpravách pak k $2a + b = 4$. Řešením soustavy dvou lineárních rovnic $2a + b = 4, a + b = 0$ získáme $a = 4, b = -4$. Hledaný polynom g má vesměs jen celočíselné koeficienty, patří tedy do $Z[x]$ a musíme otestovat, zda v daném případě v oboru integrity $Z[x]$ polynom $g(x)$ dělí $f(x)$. Čtenář snadno ověří, že toto nenastává. V tomto kroku jsme tedy při nebyli úspěšní a musíme přejít na další trojici $[g(0), g(1), g(2)]$.

III. Pro $g(0) = -3, g(1) = -1, g(2) = 3$ budeme zase hledat kvadratický polynom g ve tvaru $g(x) = ax^2 + bx + c$. Dosazením $x = 0$ máme $c = -3$. Dosadíme-li $x = 1$, pak dostáváme

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

rovnici $a + b + c = -1$, resp. s přihlédnutím ke známé hodnotě $c = 1$ rovnici $a + b = 2$. Dosazením $x = 2$ dospějeme k rovnici $4a + 2b + c = -3$, po úpravách pak k $2a + b = 3$. Řešením získané soustavy dostaneme $a = 1$, $b = 1$. Hledaný polynom g má vesměs jen celočíselné koeficienty, patří tedy do $\mathbb{Z}[x]$ a musíme otestovat, zda v daném případě v oboru integrity $\mathbb{Z}[x]$ polynom $g(x)$ dělí $f(x)$. Je tomu tak a přitom zjišťujeme, že $f(x) = (x^2 + x - 3)(x^3 + x^2 - 2x + 1)$. To je již úspěch, jde jen o to, zda ve faktorizaci obou činitelů nelze ještě dále pokračovat. Případné další faktory by již musely mít tvar $x - c$, kde c je celé číslo. Avšak námi získaní činitelé nemají celočíselné kořeny. Vyjádření $f(x) = (x^2 + x - 3)(x^3 + x^2 - 2x + 1)$ je tedy již hledaným rozkladem polynomu $f(x)$ v součin ireducibilních prvků. Další příklady nalezne čtenář v (Hora 1991, s. 199-202).

2 Použitá literatura

HORA, J. Eisensteinovo kritérium ireducibility, *Rozhledy matematicko-fyzikální*, roč. 68, (1989-90), č.10, str. 434-435.

HORA, J. Kroneckerův algoritmus. *Rozhledy matematicko-fyzikální*, roč. 69, (1990-91), č. 5, str. 199-202.

3 Kontakt na autora

Doc. RNDr. Jaroslav Hora, CSc.

katedra matematiky FPE ZČU, Klatovská 51, Plzeň.

horajar@kmt.zcu.cz

ODBORNÝ KEMP PŘÍRODOVĚDNÝCH OBORŮ MATEMATIKA

KLASICKÉ A MODERNÍ METODY PRO FAKTORIZACI PŘIROZENÝCH ČÍSEL

Jaroslav HORA

1 Úvod

Tento článek seznamuje čtenáře se dvěma metodami pro rozklad přirozených čísel, klasickou, ale „pomalou“ metodou Fermatovou a metodou Pollardovou.

2 Fermatova faktorizační metoda

Pomineme-li metodu opakovaného dělení, je Fermatova faktorizační metoda nejstarší systematickou metodou pro faktorizaci přirozených čísel. Uvidíme, že obecně není příliš efektivní. Je však elementární a občas se vyskytuje ve školských úlohách či v různých matematických soutěžích.

Fermatovou ideou bylo, pokusit se zapsat liché složené číslo N ve tvaru rozdílu čtverců dvou přirozených čísel. Podaří-li se to, pak $N = x^2 - y^2 = (x - y)(x + y)$ a nalezneme faktory, na něž se rozkládá číslo N .

Jeden z největších současných badatelů v oblasti faktorizace přirozených čísel, Carl Pomerance, vzpomíná:

„Účastnil jsem se matematické soutěže a jedna z úloh byla rozložit během pěti minut číslo 8 051. Nebylo nám zakázáno používat kapesní kalkulačky, ty tenkrát, okolo roku 1960, kdy se to stalo, vůbec neexistovaly! Nu, v aritmetice jsem byl docela dobrý a věděl jsem, že v časovém limitu mohu zkoušet dělit čísla až do odmocniny z 8 051 (což je zhruba 90). Ale během každého testu, zejména soutěžního, se mnoho studentů pokouší vcítit do mysli osoby, která ho připravila. Jistě by nám nezadali problém, jehož jediný rozumný způsob řešení by spočíval v horečném zkoušení možných dělitelů. Tak jsem strávil několik minut jejím hledáním, zatímco ve mně vzrůstalo znepokojení, že ztrácím příliš mnoho času. Pak jsem opožděně začal s pokusným dělením, jenže čas jsem už skutečně promarnil a úlohu jsem nevyřešil“. (Pomerance 1998, s. 9).

Povšimneme-li si, že $8\,051 = 8\,100 - 49$, je řešení snadné a vyžaduje jen znalost vzorce pro rozdíl dvou čtverců: $8\,051 = 90^2 - 7^2 = 97 \cdot 83$. Jak aplikovat Fermatovu metodu v obecném případě, kdy je dáno přirozené číslo N , které se snažíme zapsat ve tvaru $N = x^2 - y^2$, $x, y \in \mathbb{N}$?

Zřejmě musí být $x > \sqrt{N}$, takže vypočteme $m = \lceil \sqrt{N} \rceil + 1$, což je nejmenší možná hodnota pro x (až na ten případ, kdy N je druhou mocninou, $N = x^2$, kdy je vlastně nalezena reprezentace $N = x^2 - 0^2$). Nyní budeme zkoumat, zda číslo $z = m^2 - N$ je čtverec. Pokud ano, nalezneme rozklad $N = x^2 - y^2$ a jsme hotovi. Nemá-li tomu tak, přejdeme na další možné x , tj. na hodnotu $m + 1$, a vypočteme $(m + 1)^2 - N = z + 2m + 1$. Opět otestujeme, zda toto číslo je čtvercem atd. Postup i to, jak si zorganizovat zápis výpočtů, bude jasné z následujícího příkladu.

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Příklad 1: Rozložme číslo $N = 3\,503$ v součin prvočísel s využitím Fermatovy faktorizační metody.

Řešení: Je $\sqrt{N} = 59, 186\dots$, číslo N není druhou mocninou přirozeného čísla. Máme $m = \lceil \sqrt{N} \rceil + 1 = 60$ a číslo $z = m^2 - N = 97$ není čtvercem. Je tedy zapotřebí přejít na číslo $m + 1$ a postup opakovat. Výsledky zapisujeme do tab 1.

m	$2m + 1$	z
60	121	97
61	123	218
62	125	341
63	127	466
64	129	593
65	131	722
66	133	853
67	135	986
68	137	1121
69	139	1258
70	141	1397
71	143	1538
72	145	$1681 = 41^2$

Tab.1

Proč obsahuje tato tabulka ještě prostřední sloupec nadepsaný $2m + 1$? Jak vyplývá z úvah provedených před tímto příkladem, získá se „následující“ hodnota z sečtením „původního“ z a čísla $2m + 1$. Číslo $z = 218$ ve druhém řádku tab. 1 se tedy získá tak, že se vrátíme o řádek výše a sečteme $z + (2m + 1) = 121 + 97 = 218$. Obdobně postupujeme i v dalších řádcích až do té doby, kdy zjistíme, že číslo z je druhou mocninou. Pak máme $z = 1681 = 41^2 = m^2 - N = 72^2 - 3\,503, 3\,503 = 72^2 - 41^2 = 31 \cdot 113$.

Příklad 2: Nalezněme rozklad čísla $N = 10\,961$.

Řešení: Víme, že musí být $x > \sqrt{N}$, můžeme tedy vypočítat $\sqrt{N} = 104, 694 \dots$. Vidíme, že N není druhou mocninou přirozeného čísla a vypočteme $m = \lceil \sqrt{N} \rceil + 1 = 105$, což je nejmenší možná hodnota pro x . Nyní budeme zkoumat, zda číslo $z = m^2 - N$ je čtverec: $z = 105^2 - 10\,961 = 64$, platí tedy $10\,961 = 105^2 - 8^2 = 97 \cdot 113$. Ani nemusíme psát tabulku s pomocnými výpočty, výsledek jsme získali hned v prvním kroku.

Fermatova faktorizační metoda je „rychlá“, pokud se číslo N dá rozložit na dva téměř sobě rovné faktory. Chápeme teď, proč se v RSA šifrovací metodě doporučuje volit prvočísla p, q mající „různou bitovou délku“, různý počet cifer. Naopak by nebylo moudré vzít za p, q kupř. dvě „po sobě jdoucí“ prvočísla.

Teď je na místě otázka, zda Fermatova faktorizační metoda obecně skončí v konečném počtu kroků. Je tomu tak, neboť každé liché složené číslo $a.b$ lze zapsat jako rozdíl dvou čtverců:

$$a.b = \left(\frac{1}{2}(a+b)\right)^2 - \left(\frac{1}{2}(a-b)\right)^2.$$

Jak již víme, Fermatova metoda umožňuje rychle rozložit číslo N , které má dva faktory téměř sobě rovné, tedy blízké \sqrt{N} . To je bohužel dost nepravděpodobný případ. V (Riesel 1994) se kupř. ukazuje, že pokud je N součinem dvou faktorů $a, b, a \approx N^{\frac{1}{3}}, b \approx N^{\frac{2}{3}}$, pak lze

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

počet kroků potřebných k proběhnutí algoritmu odhadnout jako $\frac{1}{2} N^{\frac{2}{3}}$. Fermatova metoda je horší než metoda opakovaného dělení a tudíž je pro faktorizaci velkých čísel prakticky nepoužitelná. Je to však metoda jednoduchá a snad by informace o ní mohla být využitelná i jako příklad při výuce programování.

3 Pollardova ρ – metoda

Metoda navržená J. M. Pollardem v r. 1975 má tu výhodu, že je jednoduchá, lze ji proto implementovat i na kalkulátorech (např. TI-89 či TI-92) a je to metoda značně efektivní. Především překonává klasickou metodu „opakovaného dělení“, kdy testujeme dělitelnost přirozenými čísly menšími než $[\sqrt{N}] + 1$, kde N je rozkládané přirozené číslo. V roce 1975 to byla nejlepší dostupná metoda pro rozklad přirozených čísel (populárně bychom mohli říci, že šlo o „Miss r. 1975“). I když ji od té doby překonaly některé nové faktorizační metody, jako např. Lenstrova metoda eliptických křivek z r. 1987 či metoda síta v číselných tělesech z r. 1990, platí se za tento pokrok větší složitostí odpovídající teorie.

Pollardova faktorizační ρ -metoda se jistým způsobem opírá o některá fakta z teorie pravděpodobnosti. Jde o „pravděpodobnostní“ algoritmus. Může případně i selhat, ale tento případ je „vzácný“. Předpokládejme, že je dáno přirozené číslo N , jehož rozklad na prvočinitele chceme nalézt. Zvolíme si ještě přirozené číslo x_0 . Dále vypočteme jistý počet členů posloupnosti nezáporných celých čísel $\{x_i\}$, definovaných takto:

$$x_{i+1} \equiv x_i^2 + 1 \pmod{N}.$$

Nechť prvočíslo p je nejmenším prvočíselným dělitelem čísla N . Dále předpokládejme, že $\{x_i\}$ je posloupností pseudonáhodných čísel modulo p . Dále, nechť pro jisté dva členy $x_n, x_m, n > m$ této posloupnosti platí, že $x_n \equiv x_m \pmod{p}$. Platí tedy $p \mid (x_n - x_m)$, $p \mid N$, tedy největší společný dělitel $D(x_n - x_m, N) > 1$. Pokud zároveň $x_n \not\equiv x_m \pmod{N}$, je $D(x_n - x_m, N) < N$ a našli jsme netriviální vlastní dělitel čísla N . Navíc je výhodné, že tento dělitel lze nalézt Eukleidovým algoritmem, což je, jak je dobře známo, z výpočetního hlediska velice efektivní metoda.

Příklad 1: Pomocí Pollardovy ρ – metody rozložme číslo $N = 713$.

Volme kupř. $x_0 = 5$. Pak je $x_1 = 26$, $x_2 \equiv 26^2 + 1 \pmod{713}$, $x_2 = 677$, $x_3 \equiv 677^2 + 1 \pmod{713}$, $x_3 = 584$, $x_4 \equiv 584^2 + 1 \pmod{713}$, $x_4 = 243$, $x_5 \equiv 243^2 + 1 \pmod{713}$, $x_5 = 584$ a dále se zřejmě již opakují dvě hodnoty, tj. $x_6 = 243$, $x_6 = 584$, $x_7 = 243$ atd. Ostatně výpočet je také možno zkontrolovat např. na displeji kalkulátoru TI-92 Plus.

Zde jsme si nejprve uložili číslo 5 jako x (ve výše popisované ukázce je $x_0 = 5$). Následně jsme písmenem označovali zbytek (remainder) při dělení čísla $x^2 + 1$ číslem 713 a pouhým stiskem klávesy ENTER tak vždy obdržíme následující člen posloupnosti $\{x_i\}$.

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

F1	F2	F3	F4	F5	F6
Algebra	Calc	Other	PrgmIO	Clean Up	
■ 5 ÷ x					
■ remain(x ² + 1, 713) ÷ x					26
■ remain(x ² + 1, 713) ÷ x					677
■ remain(x ² + 1, 713) ÷ x					584
■ remain(x ² + 1, 713) ÷ x					243
■ remain(x ² + 1, 713) ÷ x					584
MAIN					
RAD AUTO			FUNC 7/29		

Obr. 1

Krajně neuspokojivé by ale bylo, kdybychom vskutku museli počítat $D(x_n - x_m, N)$ pro všechny dvojice $n, m \in N, n > m$. Objem výpočtů by narostl tak, že by to zcela znehodnotilo praktické využití navrhované metody. Naštěstí lze velkou část těchto propočtů ušetřit. V teorii Pollardovy ρ – metody se totiž ukazuje, že stačí testovat jen dvojice $x_{2i}, x_i, i \in N$.

Začneme tedy s hodnotou $i = 1$ a vypočteme $D(x_2 - x_1, 713) = D(677 - 26, 713) = 31$. Úspěch se dostavil hned v prvním kroku, našli jsme netriviální dělitel čísla 713. Pak je již práce vcelku snadná, je $713 = 31 \cdot 23$ a lehce se ověří, že oba nalezené faktory jsou již prvočísla. Prvočíselný rozklad čísla 713 je nalezen. Příznacné je, že rychleji, než by tomu bylo u metody opakovaného dělení.

Zapišme nástin algoritmu pro Pollardovu ρ – metodu:

Je dáno přirozené číslo N , které chceme rozložit.

1. Zvolme přirozené číslo x_0 .
2. Vypočteme $x_{i+1} \equiv x_i^2 + 1 \pmod{N}, i = 0, 1, \dots$
3. Pro jistý počet $i \in N$ vypočteme $D(x_{2i} - x_i, N)$.
4. Opakujme to do té doby, než $D(x_{2i} - x_i, N)$ je netriviálním dělitelem čísla N – úspěch. Pokud proces běží přes daný časový limit či přes vymezený počet testů – neúspěch.

Příklad 2: Pomocí Pollardovy ρ – metody rozložme číslo $N = 323$.

Volme kupř. $x_0 = 10$. S kalkulátorem TI-92 Plus si můžeme usnadnit výpočty:

F1	F2	F3	F4	F5	F6
Algebra	Calc	Other	PrgmIO	Clean Up	
■ 10 ÷ x					
■ remain(x ² + 1, 323) ÷ x					101
■ remain(x ² + 1, 323) ÷ x					189
■ remain(x ² + 1, 323) ÷ x					192
■ remain(x ² + 1, 323) ÷ x					43
■ remain(x ² + 1, 323) ÷ x					235
remain(x²+1, 323) ÷ x					
MAIN					
RAD AUTO			FUNC 21/30		

Obr. 2

a zjišťujeme, že $x_0 = 10, x_1 = 101, x_2 = 189, x_3 = 192, x_4 = 43, x_5 = 235, x_6 = 316, x_7 = 50, x_8 = 240, x_9 = 107, x_{10} = 145, x_{11} = 31, x_{12} = 316, x_{13} = 50, x_{14} = 240, x_{15} = 107, x_{16} = 145$.

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Poté $D(x_2 - x_1, 323) = D(189 - 101, 323) = 1$. Nebyli jsme úspěšní hned napoprvé, pokračujeme. $D(x_4 - x_2, 323) = D(43 - 189, 323) = 1$, $D(x_6 - x_3, 323) = D(316 - 192, 323) = 1$, $D(x_8 - x_4, 323) = D(240 - 43, 323) = 1$, $D(x_{10} - x_5, 323) = D(145 - 235, 323) = 1$. Zatím samý nezdar. $D(x_{12} - x_6, 323) = D(316 - 316, 323) = 323 > 1$, ale není to vlastní dělitel čísla 323, takže zase neúspěch! Musíme pokračovat: $D(x_{14} - x_7, 323) = D(240 - 50, 323) = 19$. Úspěch! Platí $323 = 19 \cdot 17$ a vzhledem k tomu, že oba faktory jsou již prvočísla, je zároveň nalezen prvočíselný rozklad čísla 323.

Kdybychom si zakreslili posloupnost $\{x_i\}$ např. ve formě uzlového grafu, viděli bychom, odkud se vzal název metody: po předperiodě obsahující členy x_0, \dots, x_5 se objevuje cyklus délky 6, obsahující prvky x_6, \dots, x_{11} s tím, že dále již $x_{12} = x_6, x_{13} = x_7, x_{14} = x_8$ atd. Tvar tohoto grafu velmi připomíná řecké písmeno ρ . Ostatně bylo jasné, že posloupnost tvořená jen prvky množiny $0, 1, \dots, N - 1$ se opakovat musí, tj. k „zacyklení“ v posloupnosti $\{x_i\}$ nevyhnutelně dojde. Teď již můžeme nahlédnout, proč v algoritmu pro Pollardovu ρ – metodu nebylo nutné počítat $D(x_n - x_m, N)$ pro všechny dvojice $n, m \in N, n > m$. Platí totiž následující věta.

Věta: Necht' p je prvočíslo dělicí číslo N a necht' x_0 je dané přirozené číslo. Necht' v posloupnosti $\{x_i\}$, kde $x_{i+1} \equiv x_i^2 \pmod{p}$, $i = 0, 1, \dots$, existují taková $m, n \in N, m < n$, že $x_n \equiv x_m \pmod{p}$. Potom pro jisté $t \in N$ platí $x_{2t} \equiv x_t \pmod{p}$.

Důkaz věty lze napsat podle tohoto schématu:

1. Pišme $n = m + d, d \geq 1$. Ukažte, že $x_{m+1} \equiv x_{m+d+1} \pmod{p}$ a dále indukci, že $x_{m+r} \equiv x_{m+d+r} \pmod{p}$ pro všechna $r \in N$.

2. Mezi čísly $m, m + 1, \dots, m + d - 1$ je právě jedno násobkem čísla d . Předpokládejme, že k je ten index z množiny $\{0, 1, \dots, d - 1\}$, pro který $d \mid m + k$. Potom $m + k = d \cdot e$ pro jisté $e \in N, x_{ed} \equiv x_{m+k} \equiv x_{m+k+d} \equiv x_{ed+d} \pmod{p}$.

3. Dokažte, že obdobně platí $x_{ed} \equiv x_{ed+2d} \pmod{p}, x_{ed} \equiv x_{ed+3d} \pmod{p}, \dots, x_{ed} \equiv x_{ed+ed} \equiv x_{2ed} \pmod{p}$. Položíme-li nyní $t = ed$, máme $x_{2t} \equiv x_t \pmod{p}$, což bylo dokázat.

O tento trik se tedy opírá již dříve avizované výrazné snížení výpočetních nároků pro Pollardovu ρ – metodu.

Je korektní uvést, že se vzácně může vyskytnout situace, kdy Pollardova ρ – metoda selže.

Příklad 3: Pokusme se rozložit $N = 1\,241$ s tím, že $x_0 = 6$.

Napišme několik prvních členů posloupnosti $\{x_i\}$: $x_0 = 6, x_1 = 37, x_2 = 129, x_3 = 509, x_4 = 954, x_5 = 464, x_6 = 604, x_7 = 1\,204, x_8 = 129 = x_2$. Dále již počítat nemusíme: $x_9 = 509, x_{10} = 954, x_{11} = 464, x_{12} = 604, x_{13} = 1\,204, x_{14} = 129, x_{15} = 509, x_{16} = 954$ atd.

Dále $D(x_2 - x_1, 1241) = D(129 - 37, 1\,241) = 1, D(x_4 - x_2, 1241) = D(954 - 129, 1241) = 1, D(x_6 - x_3, 1241) = D(604 - 509, 1241) = 1, D(x_8 - x_4, 1241) = D(129 - 121, 1241) = 1, D(x_{10} - x_5, 1241) = D(954 - 464, 1241) = 1$. Poté ale $D(x_{12} - x_6, 1241) = D(604 - 604, 1241) = 1241$. Následuje $D(x_{14} - x_7, 1241) = D(129 - 1204, 1241) = 1, D(x_{16} - x_8, 1241) = D(954 - 129, 1241) = D(x_4 - x_2, 1241) = 1, D(x_{18} - x_9, 1241) = D(x_6 - x_3, 1241) = D(604 - 509, 1241)$

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

= 1. Výsledky se začínají opakovat a vidíme, že nebudeme úspěšní. Začíná být patrné, že existují případy, kdy Pollardova ρ – metoda neposkytne výsledek.

Kdybychom ale volili $x_0 = 7$, dostali bychom $x_1 = 50$, $x_2 = 19$, $x_3 = 362$, $x_4 = 740$, $x_5 = 320$, $x_6 = 639$, $x_7 = 33$, $x_8 = 1090$, $x_9 = 464$, $x_{10} = 604$, $x_{11} = 1204$, $x_{12} = 129$, $x_{13} = 509$, $x_{14} = 954$.

Poté máme $D(x_2 - x_1, 1241) = D(19 - 50, 1241) = 1$, $D(x_4 - x_2, 1241) = D(740 - 19, 1241) = 1$, $D(x_6 - x_3, 1241) = D(639 - 362, 1241) = 1$, $D(x_8 - x_4, 1241) = D(1090 - 740, 1241) = 1$, $D(x_{10} - x_5, 1241) = D(604 - 320, 1241) = 1$, $D(x_{12} - x_6, 1241) = D(129 - 639, 1241) = 17$.

Snadno se zjistí, že $1241 = 17 \cdot 73$ je hledaný rozklad. Změna čísla x_0 tedy pomohla. Závěrem poznamenejme, že Pollardova ρ – metoda prokázala mnohokrát svoji praktickou užitečnost. Kupř. v roce 1981 našli R. P. Brent a J. M. Pollard nejmenší prvočíselný faktor všech Fermatových čísel $F_n = 2^{2^n} + 1$ pro $5 \leq n \leq 13$. Speciálně osmé Fermatovo číslo $F_8 = 2^{2^8} + 1$ má 78 desetinných míst a předtím nebyl znám jeho faktor. Bylo zjištěno, že nejmenším prvočíselným faktorem je $1\,238\,926\,361\,552\,897$ a tehdy bylo třeba dvou hodin práce počítače. Časy se ovšem mění, dnes získáme v programu Mathematica[®] výsledek za okamžik:

```
FactorInteger[2^2^8+1]//Timing
{36.63 Second,
 {{1238926361552897, 1}, {934616397153579777691635581996068965
 84051237541638188580280321, 1}}}
```

To jsou ovšem ukázky faktorizací poměrně velkých přirozených čísel. Bude –li však číslo N malé, mohl by být výpočet s využitím Pollardovy ρ – metody dostupný dokonce i nadanějším žákům ZŠ, protože vyžaduje vlastně jen provádění elementárních početních operací s přirozenými čísly a výpočet největšího společného dělitele. Snad by je mohl zaujmout.

4 Použitá literatura

POMERANCE, C. Vyprávění o dvou sítích, PMFA, roč. 43, 1998, str. 9 – 29.

RIESEL, H. Prime Numbers and Computer Methods for Factorization, 2. vydání, Birkhäuser, 1994, str. 615 – 616.

5 Kontakt na autora

Doc. RNDr. Jaroslav Hora, CSc.

katedra matematiky FPE ZČU, Klatovská 51, Plzeň, 306 14.

horajar@kmt.zcu.cz

ODBORNÝ KEMP PŘÍRODOVĚDNÝCH OBORŮ MATEMATIKA

NETRADIČNÍ ŘEŠENÍ ROVNIC

Josef KUBEŠ

1 Úvod

Řešení rovnic patří k základním matematickým dovednostem. K řešení rovnic vede i velké množství praktických úloh a problémů. Některé typy rovnic uměli řešit již ve starověkých civilizacích.

2 Netradiční řešení rovnic

Následující úlohy jsou určeny studentům, kteří se umí na problematiku podívat trochu z jiného úhlu. Nestačí použít pouze nacvičený algoritmus, je třeba provést analýzu zadání a použít netradiční postup.

2.1 V oboru reálných čísel řešte rovnici

$$\frac{3x + 3}{\sqrt{x}} = 4 + \frac{x + 1}{\sqrt{x^2 - x + 1}}$$

Porovnáme obory hodnot levé strany a pravé strany rovnice a zjistíme, že se překrývají právě pro jednu hodnotu, která vede k řešení.

2.2 Určete všechny dvojice $[x, y]$ přirozených čísel, které vyhovují rovnici

$$4^{x+1} = 2^x + y^3$$

Upravíme tak, aby výraz s neznámou x byl na jedné straně a s y na druhé straně. Využijeme dělitelnost.

2.3 Určete všechny dvojice $[x, y]$ celých čísel, které vyhovují rovnici

$$2x^3 + xy - 7 = 0$$

Úloha je jednoduchá, využijeme dělitelnost

2.4 V oboru reálných čísel řešte soustavu rovnic

$$\begin{aligned}x + \frac{1}{x} &= \frac{2}{y^2} \\ y + \frac{1}{y} &= \frac{2}{z^2}\end{aligned}$$

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

$$z + \frac{1}{z} = \frac{2}{x^2}$$

Stanovíme obor každé proměnné. Všechny tři rovnice sečteme a vhodnou úpravou stanovíme řešení.

2.5 V oboru reálných čísel řešte soustavu rovnic

$$x^3 + y^3 = 3y + 3z + 4$$

$$y^3 + z^3 = 3z + 3x + 4$$

$$z^3 + x^3 = 3x + 3y + 4$$

Vhodným odečtením dvou dvojic rovnic a porovnání jednotlivých proměnných dokážeme jejich rovnost.

3 Závěr

Vybrané úlohy slouží jako příprava pro řešení podobných úloh v soutěžních kolech matematické olympiády. Cílem bylo navodit takový pohled na postup řešení, který pomůže zvládnout právě takové typy v soutěžních kolech.

4 Použitá literatura

ŠVRČEK, J., CALÁBEK, P. Sbíрка netradičních matematických úloh. 1. vyd. Praha: Prométheus, spol. s r. o., 2007. 186 s. ISBN 978-80-7196-341-7

5 Kontakt na autora

PaedDr. Josef Kubeš

Gymnázium, Plzeň, Mikulášské nám. 23

Josef.Kubes@mikulasske.cz

ODBORNÝ KEMP PŘÍRODOVĚDNÝCH OBORŮ MATEMATIKA

ROVNICE VYŠŠÍCH ŘÁDŮ, NUMERICKÉ ŘEŠENÍ ROVNIC

Josef KUBEŠ

1 Úvod

Způsoby řešení rovnic vyšších řádů propracovávali matematikové řadu století. Ve školské látce se vyskytuje úplné řešení kvadratické rovnice a speciálních typů rovnic vyšších řádů – binomické rovnice, okrajově reciproké rovnice.

2 Rovnice vyšších řádů, numerické řešení rovnic

Řešení rovnic vyšších řádů je další oblíbené téma, které slouží k nácvičku netradičních přístupů k řešení zadaných rovnic. Obvykle je zadána podmínka pro kořeny, či lze jedno z řešení odhadnout. Další velkou oblastí, která se rozvíjí v souvislosti s nástupem výpočetní techniky, je numerické řešení rovnic. To se skládá z části separace kořenů a části určení kořene s předem stanovenou přesností.

2.1 Necht' p je takové reálné číslo, že rovnice

$$2x^3 + (2p - 5)x^2 + (p^2 - 5p)x + 2p = 0$$

o neznámé x má tři různé reálné kořeny, přičemž dva z nich jsou navzájem převrácená čísla. Určete číslo p a všechny kořeny dané rovnice.

Použijeme vztahy mezi kořeny a koeficienty a podmínku pro kořeny uvedenou v zadání. Úloha vede na řešení tří rovnic o třech neznámých, které vhodným postupem dořešíme.

2.2 Určete všechny hodnoty parametru a z množiny reálných čísel tak, aby reálné kořeny rovnice

$$x^3 - x^2 + 49ax - 4a = 0$$

tvořily tři po sobě jdoucí členy geometrické posloupnosti

Opět použijeme vztahy mezi kořeny a koeficienty a definici geometrické posloupnosti. Další řešení vede přes soustavu tří rovnic a třech neznámých, ve které je jedna z proměnných třetího stupně. Zvláštní pozornost je třeba věnovat hodnotě $a = 0$.

2.3 V oboru reálných čísel řešte

$$x^3 - 2x + 5 = 0$$

V tomto případě nelze nalézt žádné netradiční řešení. Můžeme použít velmi náročné vzorce pro řešení kubické rovnice, což je velmi nepraktické. Vzhledem k tomu, že se jedná o speciální postup, není pro naše účely zajímavý. Z tohoto vyřešíme rovnici numericky.

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Separaci kořenů provedeme graficky a dořešení s přesností například na tři desetinná místa zvládneme metodou půlení intervalů.

2.4 V oboru reálných čísel řešte

$$2x^3 - 9x^2 - 14x + 60 = 0$$

Grafickou metodou provedeme separaci kořenů. K jejich upřesnění tentokrát použijeme metodu postupného přibližování. K výpočtům lze s výhodou použít tabulkový procesor, například Excel.

3 Závěr

Cílem setkání nad řešením rovnic vyšších řádů je navázat na látku z hodin matematiky a prohloubit znalosti žáků. První dvě úlohy slouží k přípravě na rozvoj analytického a logického myšlení žáků. Numerický způsob řešení má ukázat na provázanost klasického řešení s použitím postupů, které se používají v reálné praxi.

4 Použitá literatura

ŠVRČEK, J., CALÁBEK, P. Sbíрка netradičních matematických úloh. 1. vyd. Praha: Prométheus, spol. s r. o., 2007. 186 s. ISBN 978-80-7196-341-7

5 Kontakt na autora

PaedDr. Josef Kubeš
Gymnázium, Plzeň, Mikulášské nám. 23
Josef.Kubes@mikulasske.cz

ODBORNÝ KEMP PŘÍRODOVĚDNÝCH OBORŮ MATEMATIKA

ÚVOD DO FRAKTÁLNÍ GEOMETRIE

Josef KUBEŠ

1 Úvod

Koncem 19. století se začaly objevovat zvláštní matematické konstrukce, které se značně lišily od ideálních matematických objektů, označované za podivné matematické výjimky. Později se ukázalo, že mnohem přesněji popisují objekty reálného světa. Mezi nejznámější „výjimky“ patří Cantorova množina, která neobsahuje žádný izolovaný bod, ale ani žádnou úsečku, Kochova křivka nekonečné délky, ohraničující konečnou plochu, Peanova křivka, vyplňující celou rovinu a mnoho dalších.

2 Dělení fraktálů

Na základě generování fraktálů rozeznáváme některé jejich typy:

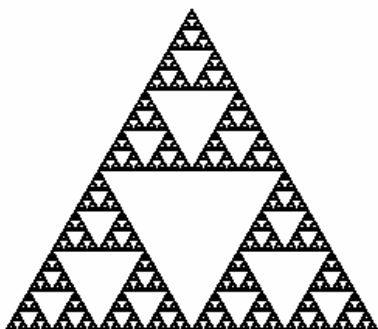
L-Systémy
Iterační funkční systémy (IFS)
Polynomicke fraktály (TEA)
Náhodné fraktály

2.1 L-Systémy

L-systém nebo Lindenmayerův systém jsou nejlépe použitelné k modelování růstu rostlin, ale také umožňují modelovat morfologii různých organismů. L-systémy mohou být také použity pro generování fraktálních útvarů. Byly zavedeny a rozvíjeny od roku 1968 maďarským teoretickým biologem a botanikem Aristidem Lindenmayerem (1925-1989).



2.2 Iterační funkční systémy (IFS)

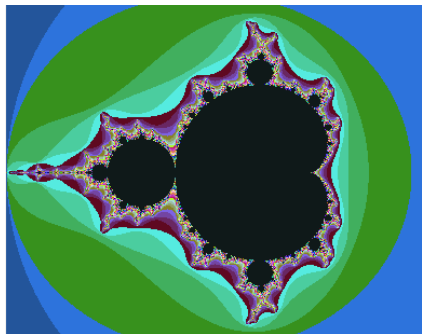


Jedná se o prostě iterační metodu. Spočívá v tom, že máme nějaký základní obrazec (trojúhelník, čtverec...) a na něj aplikujeme nějaké geometrické pravidlo. Jako příklad vezměme Sierpinského trojúhelník. Nejprve tedy máme obecný, nejlépe ale rovno -straný, -ramenný nebo pravouhlý trojúhelník. Nyní označíme středy jeho stran a spojíme je úsečkou (narýsujeme střední příčky). Počáteční trojúhelník je rozdělen na 4 části a my prostřední vyjmeme. Získáme tři trojúhelníky (zmenšeniny toho původního) a na ně aplikujeme stejné pravidlo. Po dostatečném počtu iterací (nekonečném) dostaneme fraktální útvar.

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

2.3 Polynomické fraktály

V soustavě souřadnic (často komplexních) testujeme různé hodnoty, které dosazujeme do původní rovnice. Na její výsledek aplikujeme iterativně stejné pravidlo. Pravou stranu dosadíme do levé a tak stále pokračujeme. Z toho vyplývá, že výsledku bychom se dobrali až v nekonečném čase. V praxi se tedy stanoví limitní hranice pro počet iterací.



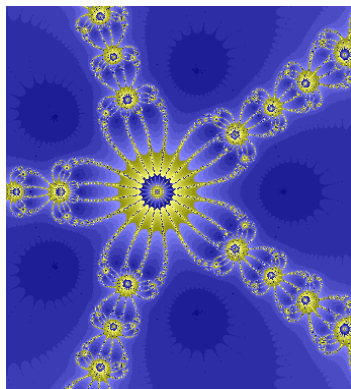
Příkladem takového fraktálu je Mandelbrotova množina. Vzniká iterativně a je definována rovnicí $z = z^2 + c$, kde z i c jsou komplexní čísla. Je to potvrzení teorie, že i velice jednoduché systémy mohou vykazovat chaotické chování. V m-set, jak se zkráceně Mandelbrotova množina nazývá, je c konstanta a zároveň pozice vykreslovaného bodu.

2.4 Náhodné fraktály

Mezi náhodné fraktály rozhodně nepatří všechny ostatní. Je to ale velmi rozsáhlá a neuspořádaná skupina. Používá se hlavně pro zobrazování a modelování přírodních objektů a dějů. Některé vznikají velice jednoduše, např. náhodným přesouváním bodu, který zanechává za sebou stopu (Brownův pohyb).

3 Závěr

Místo závěru si zobrazíme fraktál Newton.



4 Použitá literatura

<http://www.root.cz/clanky/obsah-jednotlivych-casti-serialu-a-galerie-fraktalu-ii/>

<http://chaos.fraktaly.sweb.cz/>

<http://www.fractals.webz.cz/fraktaly.htm>

<http://martin.hinner.info/math/Fraktaly/>

5 Kontakt na autora

PaedDr. Josef Kubeš

Gymnázium, Plzeň, Mikulášské nám. 23

Josef.Kubes@mikulasske.cz

ODBORNÝ KEMP PŘÍRODOVĚDNÝCH OBORŮ MATEMATIKA

DŮKAZOVÉ TECHNIKY – NEROVNOSTI, CELÁ ČÁST ČÍSLA

Josef KUBEŠ

1 Úvod

Znalost důkazových technik patří k základnímu vybavení každého řešitele matematické olympiády. Ověřování platnosti zadaných nerovnic vždy vyžaduje originální přístup, určitý nadhled a zkušenost.

2 Nerovnosti a jejich ověřování

Základním stavebním kamenem je nerovnost vyplývající z druhé mocniny dvojčlenu $(x - 1)^2$. Pro libovolné reálné číslo platí, že $(x - 1)^2 \geq 0$. Odtud plyne $x + \frac{1}{x} \geq 2$.

Další důležitá nerovnost je vztah mezi geometrickým a aritmetickým průměrem. Pro libovolnou n -tici reálných kladných čísel x_1, x_2, \dots, x_n platí: $\sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_n} \leq \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}$.

Poslední nerovností, se kterou se budeme zabývat je Cauchyova nerovnost. Pro libovolné dvě n -tice reálných čísel x_1, x_2, \dots, x_n a y_1, y_2, \dots, y_n platí $(x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots + x_n y_n)^2 \leq (x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2)(y_1^2 + y_2^2 + \dots + y_n^2)$.

2.1 Dokažte, že obsah obdélníka o stranách a, b je menší než polovina obsah u čtverce sestrojeného nad jeho úhlopříčkou.

Vhodnou úpravou přejdeme na druhou mocninu dvojčlenu.

2.2 Dokažte, že pro každý ostrý úhel α platí

$$\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{cotg} \alpha \geq 2$$

Použijeme vztah mezi funkcemi tangens a kotangens a upravíme na druhou mocninu dvojčlenu.

2.3 Dokažte, že pro libovolnou trojici kladných čísel a, b, c platí

$$(a + b)(b + c)(c + a) \geq 8abc$$

Roznásobíme a použijeme nerovnost mezi aritmetickým a geometrickým průměrem.

2.4 Dokažte, že pro libovolné přirozené číslo $n > 1$ platí:

$$n! < \left(\frac{n+1}{2}\right)^n$$

Využijeme rovnost: Pro libovolné přirozené číslo n větší než jedna platí: $1 + 2 + 3 + 4 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$. Dále je potřeba použít vztah mezi aritmetickým a geometrickým průměrem.

2.5 Dokažte, že pro všechna $x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbb{R}^+$ platí:

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

$$\left(\sum_{i=1}^n x_i\right)^2 \leq n \sum_{i=1}^n x_i^2$$

Dosadíme do Cauchyovy nerovnosti za y_1, y_2, \dots, y_n číslo 1.

2.6 Dokažte, že pro každé reálné číslo a platí:

$$3(1 + a^2 + a^4) \geq (1 + a + a^2)^2$$

2.7 Necht' $x, y, z \in \mathbb{R}_0^+$. Dokažte, že platí:

$$\sqrt{xy + yz + zx} \leq \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

Obě nerovnosti dokážeme aplikací Cauchyovy nerovnosti.

2.8 Dokažte, že pro libovolnou trojici reálných čísel a, b, c platí:

$$(a + b - c)^2 + (b + c - a)^2 + (c + a - b)^2 \geq ab + bc + ca$$

Upravíme levou stranu a opět šikovně použijeme Cauchyova nerovnost.

2.9 Dokažte, že pro libovolnou trojici kladných reálných čísel a, b, c platí:

$$\frac{1}{b(a+b)} + \frac{1}{c(b+c)} + \frac{1}{a(c+a)} \geq \frac{9}{2(a^2 + b^2 + c^2)}$$

Důkaz nerovnosti je poměrně náročný. Výchozí nerovností je tentokrát vztah mezi harmonickým a aritmetickým průměrem. V dalším řešení pochopitelně budeme potřebovat Cauchyovu nerovnost.

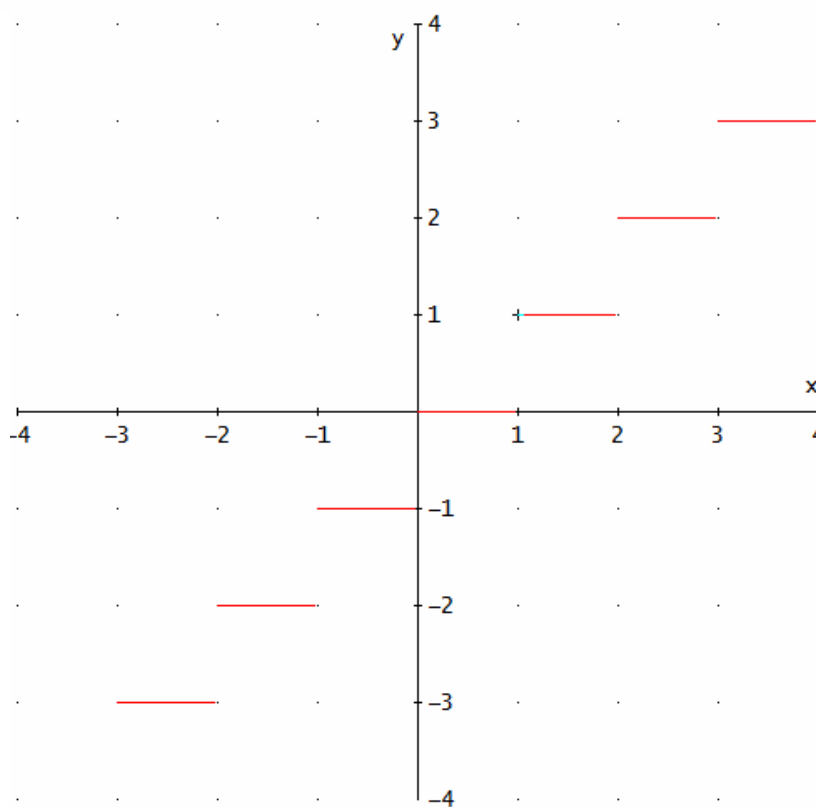
2.10 V oboru reálných čísel řešte soustavu rovnic

$$10x[y] = 1492$$

$$10y[x] = 1776$$

Výraz $[a]$ znamená celou část z reálného čísla a . Je rovna nejbližšímu nižšímu celému číslu. Tedy $[1] = 1$, $[3,5] = 3$, $[-6,2] = -7$. Graf funkce $y = [x]$ má tvar:

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ



Řešení každé úlohy s celou částí neznámé je vždy originální a není na ně univerzální pravidlo. Zadaná soustava se převede na soustavu dvou nerovnic

$$\begin{aligned} [x][y] &\leq 149 \\ ([y] + 1)[x] &\geq 178. \end{aligned}$$

Odtud stanovíme podmínky pro obě proměnné a dosadíme všechny možné případy. Soustava má čtyři řešení.

3 Závěr

Uvedené úlohy z velké části přesahují rozsah základního středoškolského učiva matematiky. Pro řešení příkladů matematické olympiády jsou však základní a navazuje se na ně ve vyšších kolech. Řešitele zdokonaluje ve strategii a důslednosti řešení. Důkazové úlohy uvedeného typu také vyžadují precizní znalost v upravování algebraických výrazů.

4 Použitá literatura

ŠVRČEK, J., CALÁBEK, P. Sbíрка netradičních matematických úloh. 1. vyd. Praha: Prométheus, spol. s r. o., 2007. 186 s. ISBN 978-80-7196-341-7

KUFNER, A. Nerovnosti a odhady. 1. vyd. Praha: Mladá fronta 1975. 120 s. 508/21/82.6

5 Kontakt na autora

PaedDr. Josef Kubeš
Gymnázium, Plzeň, Mikulášské nám. 23
Josef.Kubes@mikulasske.cz

ODBORNÝ KEMP PŘÍRODOVĚDNÝCH OBORŮ MATEMATIKA

DŮKAZOVÉ TECHNIKY - PLANIMETRIE

Josef KUBEŠ

1 Úvod

Planimetrie, tedy rovinná geometrie, je velmi stará disciplína, která svou náročností potrápí řadu studentů. Vyžaduje představivost a určitou schopnost si zadanou situaci dobře načrtnout. Každá úloha je vlastně originální, a proto její řešení vyžaduje značnou míru kreativity. Znalost planimetrie je využitelná v běžném životě i v profesní kariéře u řady oborů. Obvykle si školské postupy nepamatujeme, zůstávají v našem podvědomí a přiřazujeme si je k dalším životním zkušenostem.

2 Důkazové úlohy v planimetrii

Důkazové úlohy jsou velkým balíkem úloh. Pomáhají k ujasnění vzájemných vztahů a geometrických pouček. Aplikujeme kromě geometrických znalostí také poznatky matematické logiky. Pro snazší vyjadřování využijeme poznatky z teorie množin.

2.1 Uvažujme polokružnici k sestavenou nad stranou AB vně jednotkového čtverce $ABCD$. Na polokružnici k sestrojte bod P , pro který nabývá výraz $|AP|^2 + |CP|^2$ největší hodnoty a určete ji.

Základem úspěšného řešení úlohy je dobré zakreslení zadání. Ačkoliv je požadována konstrukce bodu P , převedeme úlohu na algebraický problém. K řešení potřebujeme kosinovou větu a vztahy mezi goniometrickými funkcemi. Výsledný výraz vyjádříme pomocí velikosti úsečky $|AP|$. K určení extrému použijeme vztah mezi geometrickým a aritmetickým průměrem.

2.2 Označme S střed strany AB ostroúhlého trojúhelníku ABC a V průsečík jeho výšek. Obraz bodu V ve středové souměrnosti se středem S označme U . Dokažte, že úhly ACV a BCU jsou shodné.

První krok k řešení je důkaz, že čtyřúhelník $AUBC$ je tětivový čtyřúhelník. Shodnost velikostí obou úhlů dokážeme pomocí věty o obvodových úhlech a podobnosti vhodných trojúhelníků.

2.3 Je dán libovolný vnitřní bod P pravoúhlého rovnoramenného trojúhelníku ABC s přeponou AB . Dokažte, že z úseček délek $|AP|$, $|BP|$ a $|CP|\sqrt{2}$ lze sestrojit trojúhelník.

Po přečtení úlohy bychom předpokládali použití trojúhelníkové nerovnosti. To by byla cesta nesprávným směrem. Zobrazíme trojúhelník BPC v rotaci se středem v bodě C a úhlem otočení -90° . V obrázku vyhledáme zadané úsečky a zjistíme, že mohou tvořit trojúhelník.

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

2.4 Necht' S značí střed kružnice vepsané danému ostroúhlému trojúhelníku ABC . Označme dále A' , B' , C' obrazy bodu S v osových souměrnostech po řadě podle přímk BC , AC , AB . Dokažte, že trojúhelníky ABC , $A'B'C'$ jsou podobné, právě když ABC je rovnostranný trojúhelník.

Využijeme trojúhelník sestrojený ze středních příček trojúhelníku ABC . Jedná se o důkaz ekvivalence, tento fakt si musíme dobře uvědomit.

3 Závěr

Planimetrické úlohy včetně důkazových jsou vděčným tématem matematických soutěží a obvykle patří k těm, které oddělují úspěšné řešitele od neúspěšných. Uvedené příklady reprezentují vždy velkou skupinu úloh, proto každá je řešena jiným způsobem.

4 Použitá literatura

ŠVRČEK, J., CALÁBEK, P. Sbíрка netradičních matematických úloh. 1. vyd. Praha: Prométheus, spol. s r. o., 2007. 186 s. ISBN 978-80-7196-341-7

5 Kontakt na autora

PaedDr. Josef Kubeš

Gymnázium, Plzeň, Mikulášské nám. 23

Josef.Kubes@mikulasske.cz

ODBORNÝ KEMP PŘÍRODOVĚDNÝCH OBORŮ MATEMATIKA

GEOMETRIE A KOMPLEXNÍ ČÍSLA

Josef KŘIŠŤAN

1 Úvod

Cílem tohoto krátkého příspěvku je snaha seznámit čtenáře s tématy, které byly probírány na matematickém kempu dne 27.8.2010. Kládl jsem si za cíl vybrat témata, která by příliš neznevýhodňovala mladší účastníky a zároveň seznámit studenty s tématy, která nejsou zcela běžná a na která nezbyvá v hodinách matematiky prostor. Po delší úvaze jsem se rozhodl pro klasickou geometrii a užití komplexních čísel v geometrii. Ukázalo se, že zvláště druhé téma je pro studenty celkem přitažlivé a dává prostor pro nové důkazové techniky. Nicméně je třeba poznamenat, že jde z pohledu středoškolského studenta o poměrně náročné téma. Někteří studenti se seznámí podrobně s komplexními čísly až při studiu komplexní analýzy na vysoké škole.

Do článku jsem vybral několik úloh, které jsem rozebíral se studenty na přednášce. Na těchto úlohách bych rád ukázal několik důkazových technik a zopakoval základní pojmy. Cílem tedy není objevit nové postupy, ale spíše si osvěžit jakési "názvosloví".

2 Trojúhelník a kružnice

Rád bych zde prezentoval úlohu zadanou na IMO 2010, která byla zadaná jako první úloha druhého soutěžního dne. Mezinárodní Jury považovala tuto úlohu za jednu z lehčích. Na této úloze mě zaujalo množství různých přístupů, kterými lze dospět k řešení.

Zadání: Nechť bod P leží uvnitř trojúhelníku ABC . Přímký AP , BP a CP protínají kružnici k opsanou trojúhelníku ABC po řadě v bodech K , L a M (různých od bodů A , B , C). Tečna ke kružnici k v bodě C protíná přímkou AB v bodě S . Dokažte, že pokud mají úsečky SC a SP stejnou délku, pak jsou stejně dlouhé i úsečky MK a ML .

Řešení: Při výkladu řešení si kreslete průběžně obrázky. Buď $CA > CB$. První krok při řešení geometrických úloh je narysovat si kvalitní obrázek, pokud možno pomocí pravítka a kružítka, a pokusit se odhadnout vztahy mezi různými prvky. Domněnky musíme nakonec korektně dokázat. Pojdme ale již k samotnému řešení.

Z mocnosti bodu je kružnici k vzhledem k bodu S vyplývá $|SP|^2 = |SC|^2 = |SA||SB| \dots(1)$. Tuto rovnost můžeme přepsat do poměru $|SA||SP| = |SP||SB| \dots(2)$. Navíc úhly PSB a ASP jsou shodné. Z poměru (2) a shodnosti úhlů plyne podobnost trojúhelníků SPB a $SAP \dots(3)$.

Z vlastnosti (3) plyne shodnost úhlů SPB a SAP . Tuto shodnost lze dokázat i jinak. Rovnost (1) říká, že přímkou SP je tečna kružnice l opsané trojúhelníku ABP . Úhel BPS je úsekový úhel k obvodovému úhlu BAP v kružnici l , platí tedy $|\angle SPB| = |\angle BAP|$. Naše dosavadní snažení

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

mělo jeden cíl: ukázat rovnoběžnost přímk SP a KL . Podívejme se na obvodové úhly nad tětivou BK v kružnici k . Platí $|\angle BLK| = |\angle BAK| = |\angle BPS|$, a to znamená, že přímky PS a KL svírají s přímkou BL stejné úhly a jsou proto rovnoběžné ... (4).

Označme E a F průsečíky přímky SP s kružnicí k tak, aby $|SE| > |SF|$. Tvrzení $|ML| = |MK|$ je podle (4) ekvivalentní tvrzení $|ME| = |MF|$. Označme $\alpha = |\angle SCF|$. Úhel SCF je úsekový a CEF je obvodový úhel na tětivou CF v kružnici k . V rovnoramenném trojúhelníku SCP platí $|\angle SCP| = \alpha + |\angle MCF|$, v trojúhelníku EPC platí $|\angle SPC| = \alpha + |\angle MCE|$, tedy $|\angle MCE| = |\angle MCF|$, tedy $|ME| = |MF|$. Tím je úloha vyřešena.

Rovnost $|ME| = |MF|$ lze dokázat i jinak. Označme O střed kružnice k . Pak úhel SCO je pravý a platí $|\angle SCO| = |\angle SCP| + |\angle OCM|$. Podívejme se na trojúhelník MPX , kde X je průsečík přímek OM a SP . Dokážeme kolmost přímk SP a OM . Úhel OMP je shodný s úhlem OCM , neboť trojúhelník OCM je rovnoramenný (délka ramen je rovna poloměru kružnice k). Víme, že $|\angle SPC| = |\angle SCP|$ a navíc úhly MPX a SPC jsou středové. Na úhel MXP v trojúhelníku MPX proto zbývá 90 stupňů, což znamená, že přímky SP a OM jsou kolmé. Tím jsme ale hotovi, neboť pak $|ME| = |MF|$.

Pojďme si nyní představit původní vzorové řešení. Buď opět $|CA| > |CB|$. Z podobnosti trojúhelníků PKM a PCA máme $|PM|/|MK| = |AP|/|AC|$. Z podobnosti trojúhelníků PLM a PCB plyne $|PM|/|LM| = |BP|/|BC|$. Volba dvojic podobných trojúhelníků není náhodná. Šlo o to najít trojúhelníky, které mají co nejvíce společných prvků a takové trojúhelníky, které používají prvky nezávislé na poloze bodu P . Ve vybraných dvojicích trojúhelníků by měly být zastoupeny délky úseček MK a ML . Navíc, s ohledem na jakousi "symetrii" podle přímky CM je tak výběr trojúhelníků KPM a LPM ospravedlněn.

Nyní můžeme vyjádřit poměr $|LM|/|KM| = (|BC|/|AC|)(|AP|/|BP|)$. Vidíme, že $|LM|=|KM|$ právě tehdy, když $|AP|/|BP| = |AC|/|BC|$, neboli bod P leží na Apolloniově kružnici m určené trojúhelníkem ABC . Víme, že kružnice m prochází body X , C a Y , kde X , resp. Y , jsou po řadě průsečíky vnitřní, resp. vnější, osy při vrcholu C v trojúhelníku ABC a přímky AB . Dokážeme, že střed Q kružnice m splyne s bodem S . Totiž, podle zadání je $SQ = SP$, což by znamenalo, že bod P leží na Apolloniově kružnici, a to by znamenalo $|LM| = |KM|$.

Zkusme vyjádřit velikost úhlu CXS . CX je osa úhlu při vrcholu C , tedy $|\angle ACX| = |\angle BCX|$. Dále $|\angle SCB| = |\angle SAC|$, neboť jde o úsekový a obvodový úhel nad tětivou BC v kružnici k opsané trojúhelníku ABC . Platí proto $|\angle CXS| = |\angle CAX| + |\angle ACX| = |\angle SCB| + |\angle BCX| = |\angle XCS|$. V trojúhelníku SCX to znamená $|SC| = |SX|$ a také, že bod S leží na ose úsečky CX . Připomeňme, že bod S leží na přímce AB . Z předchozích dvou vlastností už nutně plyne $Q = S$. Tím je důkaz hotov.

Pojďme se podívat na řešení, které nevyužívá Apolloniovu kružnici. Stejně jako v autorském řešení zjistíme, že $|ML| = |MK|$ právě tehdy, když $|AP|/|BP| = |AC|/|BC|$. Využijeme-li mocnost bodu ke kružnici jako v prvním řešení, zjistíme podobnost trojúhelníků ASP a PSB . Pak $|AP|/|BP| = |AS|/|PS| = |AS|/|CS|$, kde jsme využili předpoklad $|SC| = |SP|$. Ze shodnosti

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

úsekových a obvodových úhlů nad třetivou BC v kružnici k , zjistíme podobnost trojúhelníků SCB a SAC , tedy $|AC|/|BC| = |AS|/|CS|$. Spojíme-li předchozí dva poměry dohromady, jsme hotovi.

Poslední řešení, které bych rád prezentovat je od odlišné. Opět zjistíme, že přímky PS a KL jsou rovnoběžné. Elegance tohoto řešení plyne ze sestrojení pomocné přímky, která je tečnou ke kružnici k v bodě M . Označme průsečík této tečny s přímkou CS jako T . Bod T je vnitřní bod polopřímky CS . Proč? Teď už si stačí jen uvědomit rovnoběžnost přímk PS a MT . Důkaz plyne z toho, že trojúhelníky SPC a TMC jsou rovnoramenné a velikosti úhlů při základnách jsou stejné. To ale znamená, že i přímky KL a MT jsou rovnoběžné a vzhledem k tomu, že MT je tečna ke kružnici k , je bod M střed oblouku MKL . Hotovo.

3. Kruhová a kulová inverze

Na přednášce jsem uvedl kromě standardních metod řešení geometrických úloh také jednu netradiční, a to kruhovou inverzi. Toto zobrazení má na první pohled fascinující vlastnosti. Uvedme definici kruhové inverze v rovině. Jde o nelineární zobrazení, které je dáno tzv. určující kružnicí k se středem S a poloměrem r . Každému bodu P v rovině, různém od S , přiřadíme bod P' tak, že P' leží na polopřímce SP a platí $|SP| \cdot |SP'| = r^2$. Bodu S obvykle přiřazujeme tzv. nevlastní bod, což je bod v nekonečnu. Bod S je střed inverze, r její poloměr.

Všechny pozoruhodné vlastnosti kruhové inverze lze snadno dokázat přímo z definice. Základní vlastnosti jsou: 1. Inverze je vzájemně jednoznačné zobrazení. 2. Dvojí aplikací jedné a té samé inverze dostaneme identitu. 3. Body ležící na určující kružnici jsou samodružné. 4. Body uvnitř kružnice k se zobrazí vně a naopak. 5. Necht' body A, B se zobrazí v kruhové inverzi na body A', B' a přitom bod S neleží na přímk AB . Pak $\angle SAB = \angle SB'A'$ a čtyřúhelník $AA'B'B$ je třetivový. Navíc platí $|A'B'| = r^2 |AB| / (|SA| \cdot |SB|)$.

Na přednášce jsme kromě rovinných úloh řešili i úlohu prostorovou. Zde můžeme mluvit o využití kulové inverze. Příklad: V prostoru jsou dány koule k, l a m , a to tak, že l a m leží uvnitř k , dotýkají se jí a dotýkají se navzájem. Sestrojíme kouli ρ , která se dotýká k, l i m . Najděte množinu dotykových bodů ρ a k .

Řešení: Důležité je vhodně zvolit střed kulové inverze. Na samotném poloměru většinou až tak nezáleží, ale cílem je převést geometricky komplikované útvary na jednodušší. Ale ne vždy to lze. Zvolme střed S kulové inverze jako dotykový bod koulí k a l a zkoumejme, jak se úloha transformuje.

Koule k se zobrazí na rovinu k' neprocházející bodem S . Koule l se zobrazí na rovinu l' neprocházející bodem S a je rovnoběžná s rovinou k' . Kruhová i kulová inverze totiž zachovávají incidentnost. To znamená, že pokud se vzory dotýkají, resp. protínají, např. v jednom bodě Q , obrazy těchto objektů se budou také dotýkat, resp. procházet, jedním bodem Q' . Bod Q' bude samozřejmě obraz bodu Q . Vzhledem k tomu, že koule k a l mají jediný společný bod dotyku a tím je bod S , musí mít jejich obrazy k' a l' také jediný společný bod, a tím je nevlastní bod. Proto jsou roviny k' a l' rovnoběžné (protínají se v nekonečnu).

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Koule m a ρ se zobrazí na koule m' a ρ' , neboť neprocházejí bodem S . Koule m' a ρ' se musí navzájem dotýkat vně a navíc se musí dotýkat rovin k' a l' . To tedy znamená, že m' a ρ' leží uvnitř rovinného pásu jež určují právě roviny k' a l' .

Jelikož k , l a m (a také k' , l' a m') jsou zadané objekty, jediný volný parametr je poloha koule ρ , resp. poloha koule ρ' . Uvažujeme-li všechny možné polohy ρ' , bude zřejmě množina dotkových bodů koule ρ' a roviny k' kružnice, řekněme n' . Určete si její poloměr! Nyní jde o to určit vzor n kružnice n' . Prozradme hned na začátku, že vzorem je kružnice.

Kružnice n' neprochází bodem S . Proto určitě existují dvě koule, řekněme a' a b' , neprocházející bodem S a navzájem protínající se právě v kružnici n' . Po provedení zpětné inverze se koule a' a b' zobrazí opět na koule, a a b , které se musí protínat. Jaká je to množina? Kružnice samozřejmě! Navíc, kruhová inverze je vzájemně jednoznačné zobrazení. Žádné body se při transformaci nemohou ztratit a žádné nemohou nově vzniknout. Shrneme naše pozorování: obrazem kružnice n' bude kružnice n . Určete si její poloměr! Tím je úloha vyřešena. Zkuste si zvolit jiný střed kulové inverze, např. jako dotkový bod koulí l a m . Jak se změní způsob řešení?

4. Rotace o 60 stupňů

Rotace v rovině je zobrazení určené středem a orientovaným úhlem. Zvláštní pozornost si pak zaslouží rotace s úhlem rotace 60 stupňů. Její využití si ukážeme na následující úloze (pozn.: $\sqrt{3}$ značí pro jednoduchost druhou odmocninu): Uvažujme libovolný trojúhelník ABC se stranami a , b , c a obsahem S . Dokažte, že pro libovolný bod X v rovině ABC platí nerovnost $|AX| + |BX| + |CX| \geq \sqrt{(a^2 + b^2 + c^2)/2 + 2\sqrt{3}S}$.

Řešení: Při výkladu si průběžně kreslete obrázek jako u ostatních úloh. Uvažujme rotaci se středem např. v bodě A a úhlem rotace např. +60 stupňů (tj. rotace proti směru hodinových ručiček). V této rotaci A , B , C a X přejdou v body $A' = A$, B' , C' a X' . Trojúhelník AXX' je rovnostranný, proto $|AX| = |XX'|$. Rotace zachovává délky stran, tedy $|CX| = |C'X'|$. Platí tedy $|AX| + |BX| + |CX| = |BX| + |XX'| + |C'X'| \geq |BC'|$, neboť délka lomené čáry $BXX'C'$ není menší než délka úsečky BC' .

Délku úsečky BC' v trojúhelníku ABC' vyjádříme pomocí kosinové věty: $|BC'|^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos(|\angle BAC| + 60^\circ) = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos(|\angle BAC|) \cdot 1/2 + 2bc \cdot \sin(|\angle BAC|) \cdot \sqrt{3}/2$. Využili jsme součtového vzorce pro kosinus. Nyní stačí poslední výraz upravit. Konkrétně, vyjádřit $2bc \cdot \cos(|\angle BAC|)$ pomocí kosinové věty jako $a^2 - b^2 - c^2$ a uvědomit si, že $2bc \cdot \sin(|\angle BAC|) = 2S$. Po jednoduché úpravě dostaneme požadovanou nerovnost.

Na semináři jsme se zabývali i otázkou, pro jaké body X nastane v dokazované nerovnosti rovnost. Takové body můžeme získat, provedeme-li současně rotaci o 60 stupňů. Přejde-li bod B v této rotaci do bodu B'' , body X získáme jako průsečíky přímk BC' a CB'' . Získáme tak jeden bod X . Snadno se dá ukázat, že z tohoto bodu X vidíme úsečky AB , BC a CA pod úhlem 120 stupňů. Tento bod nazýváme Fermatův bod.

5. Další poznatky

Na semináři jsme se dále zabývali úlohami, kde jsme využívali pojem orientovaný úhel dvou přímk. Jde o pojem, který nám může v některých situacích zjednodušit diskusi řešení. Např. v situaci, kdy nějaký úhel mezi dvěma přímkami je sice stále stejný, ale předem nevíme konfiguraci přímk. V tomto případě musíme pak diskutovat několik situací, ale přitom vlastně dokážeme stále to stejné.

Orientovaný úhel (p, q) různoběžek p, q (v tomto pořadí) je úhel, o který musíme pootočít přímkou p v kladném směru kolem průsečíku p a q , aby splynula s přímkou q . Např. větu o obvodových úhlech je možno v termínech orientovaného úhlu formulovat následovně: Bod X různý od bodů A, B, C leží na kružnici opsané trojúhelníku ABC tehdy, když $(AX, XC) = (AB, BC)$.

V jiné úloze jsme si připomněli pojem Cévova věta. V jiné úloze jsme využily Ptolemyovu větu. Jde vesměs o věty, které by si měl osvojit každý řešitel matematické olympiády. Jiná věc je tyto znalosti pak při řešení úloh skutečně využít, neboli vzpomenout si na ně ve správný okamžik.

6. Komplexní čísla v geometrii

Tato partie se ukázala pro mladší účastníky jako velmi náročná. Na semináři jsme si připomněli, co jsou to komplexní čísla a jejich základní vlastnosti. Ukázali jsme si, jak vypadá předpis přímk v komplexních souřadnicích (kdy je přímka určena normálovým nebo směrovým vektorem).

Připomněli jsme si pojmy jako je dělicí poměr či dvojpoměr. Pro tři komplexní čísla u, v, w je dělicí poměr definován jako $(u, v, w) = (u - w)/(v - w)$. Toto číslo je obecně komplexní. Reálné je tehdy, když obrazy čísel u, v, w leží na jedné přímce. Dvojpoměr je definován pro čtveřici komplexních čísel u, v, w, x jako $(u, v, w, x) = (u, v, w)/(u, v, x)$. Toto, obecně komplexní číslo, je reálné právě tehdy, když obrazy čísel u, v, w, x leží na jedné kružnici.

Uvažujme dva trojúhelníky ABC a $A'B'C'$. Trojúhelníky ABC a $A'B'C'$ jsou si přímo podobné, když $|BA|/|CA| = |B'A'|/|C'A'|$ a $uBAC = uB'A'C'$. Jak vypadají tyto podmínky v řeči komplexních čísel? Necht' a, b, c , resp. a', b', c' , jsou komplexní obrazy bodů A, B, C , resp. A', B', C' . První podmínka bude $\text{abs}(b - a)/\text{abs}(c - a) = \text{abs}(b' - a')/\text{abs}(c' - a')$, druhá podmínka o shodnosti úhlů bude mít tvar $\arg((b - a)/(c - a)) = \arg((b' - a')/(c' - a'))$, kde $\text{abs}(x)$ značí velikost komplexního čísla x a $\arg(x)$ značí jeho argument. Mají-li dvě komplexní čísla stejnou velikost i argument (neuvažujeme 2π násobky), tyto čísla musí být stejná. Proto platí $(b - a)/(c - a) = (b' - a')/(c' - a')$.

Pokud $\arg((b - a)/(c - a)) = \arg(\text{sdr}((b' - a')/(c' - a')))$, mluvíme o nepřímé podobnosti trojúhelníků ABC a $A'B'C'$ a platí $(b - a)/(c - a) = \text{sdr}((b' - a')/(c' - a'))$, kde $\text{sdr}(x)$ značí číslo komplexně sdružené k číslu x .

Příklad: V daném lichoběžníku $ABCD$ s delší základnou AB zvolme uvnitř strany BC bod K . Z bodů C, B sestrojme rovnoběžky s přímkami KA, KD v tomto pořadí. Dokažme, že se tyto rovnoběžky protnou na přímce AD .

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Řešení: Klasické řešení využívající různé podobnosti trojúhelníků je dlouhé a těžkopádné. Řešení pomocí komplexních čísel je na druhou stranu jednoduché a efektivní. Označme O průsečík přímk AD a BC a necht' je to zároveň střed Gaussovy roviny. Označme ještě L průsečík přímk AD a p , kde p prochází bodem C a je rovnoběžná s přímkou AK . Úkolem je ukázat, že přímk BL a KD jsou rovnoběžné.

Využijeme tzv. spirálové podobnosti, což je zobrazení složené z rotace a stejnolehlosti. Určitě existuje nenulové komplexní číslo ω_1 takové, že $K = \omega_1 A$. V tomto zobrazení přejde bod L do bodu C , tj. $C = \omega_1 L$. Dále existuje ω_2 takové, že $D = \omega_2 K = \omega_2 \omega_1 A$. Protože body D a A leží na přímce, je zobrazení $\omega_2 \omega_1$ stejnolehlost. V této stejnolehlosti přejde bod A do D a bod B do C , neboť přímk AB a CD jsou rovnoběžné. Tedy $C = \omega_2 \omega_1 B$. Na druhé straně víme $C = \omega_1 L$. Z toho plyne $\omega_1 L = \omega_2 \omega_1 B = \omega_1 \omega_2 B$, tj. $L = \omega_2 B$. Shrneme-li dosavadní výsledky, máme $D = \omega_2 K$ a $L = \omega_2 B$, což znamená rovnoběžnost přímk KD a BL . Bod L je tak hledaný průsečík rovnoběžek (ležící samozřejmě na přímce AD). Tím je úloha vyřešena.

Následující úloha využívá Moivrovu větu a poznatky z teorie rovnic.

Zadání: Zjistěte, zda lze pravidelný 2012-úhelník, resp. 2011-úhelník, umístit do trojrozměrného prostoru s kartézskou soustavou souřadnic tak, že všechny jeho vrcholy mají pouze celočíselné souřadnice.

Řešení: Zobecněme úlohu ve smyslu, že uvažujeme pravidelný n -úhelník a předpokládejme, že ho lze nějakým způsobem umístit do prostoru podle zadání. Vezměme si tři sousední body n -úhelníku, např. A , B a C . Pak $|\angle ABC| = \pi - 2\pi/n$. Vyjádříme-li $\cos(|\angle ABC|)$ pomocí kosinové věty v trojúhelníku ABC , dostaneme $\cos(|\angle ABC|) = 1 - |AC|^2/(2*|AB|^2)$, což musí být číslo racionální, neboť $|AC|^2$ a $|AB|^2$ jsou podle zadání celá čísla. Symbol x^p značí p -tou mocninu x , \sqrt{x} je druhá odmocnina z x .

Označme $x = \cos(2\pi/n)$, $y = \sqrt{1-x^2}$. Z Moivrový věty plyne $(\cos(2\pi/n) + i*\sin(2\pi/n))^n = \cos(2\pi) + i*\sin(2\pi) = 1$. Porovnáním reálných částí dostaneme $1 = x^n - C(n, 2)*x^{n-2}*y^2 + C(n, 4)*x^{n-4}*y^4 - \dots = x^n - C(n, 2)*x^{n-2}*(1-x^2) + C(n, 4)*x^{n-4}*(1-x^2)^2 - C(n, 6)*x^{n-6}*(1-x^2)^3 + \dots$. Tuto rovnost budeme chápat jako rovnici pro číslo x , tj. $\sum_{k=0, [n/2]} (C(n, 2k)*(-1)^k*x^{n-2k}*(1-x^2)^k) - 1 = 0 \dots (1)$. Poznamenejme, že $C(n, k)$ značí kombinační číslo "n nad k", $\sum_{k=dolni_mez, horni_mez}(fce(k))$ značí součet členů $fce(k)$ pro k jdoucí od $dolni_meze$ po $horni_mez$, včetně. Symbol $[x]$ značí celou část čísla x .

Jak je vidět, je třeba rozlišit paritu čísla n . Buď n liché. Rovnice (1) je pro x rovnicí n -tého stupně s koeficientem u x^n rovným $a_n = 2^{n-1}$. To lze snadno spočítat rozepsáním sumy a sdružit členy s x^n . Platí $a_n = \sum_{k=0, [n/2]} (C(n, 2k)) = 2^{n-1}$. Např. pro $n = 7$ je koeficient u x^n roven $C(7, 0) + C(7, 2) + C(7, 4) + C(7, 6) = C(7, 7) + C(7, 5) + C(7, 3) + C(7, 1)$ a protože $\sum_{k=0, n} (C(n, k)) = 2^n$, je náš hledaný součet roven přesně polovině posledního součtu, tj. je roven 2^{n-1} . Koeficient a_0 u x^0 je roven -1 . Ostatní koeficienty a_1, a_2, \dots, a_{n-1} jsou vesměs celá čísla.

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Víme, že číslo $x > 0$ je racionální, lze ho proto vyjádřit ve tvaru $x = p/q$, kde p a q jsou nesoudělná přirozená čísla. Navíc, x je kořenem rovnice (1), tedy pro čísla p a q musí platit: p dělí $\text{abs}(a_0) = 1$ a q dělí $\text{abs}(a_n) = 2^{n-1}$, tj. platí $x = \cos(2\pi/n) = 1/2^k$, kde $k \leq n-1$.

Pro $n > 6$ ale platí: $\cos(2\pi/n) > \cos(2\pi/6) = 1/2 \geq 1/2^k$ pro každé přirozené číslo k , což je spor s předchozím vyjádřením čísla x . Pokud je tedy číslo n liché, musí být nutně $n \leq 5$.

Z předchozího rozboru vidíme, že pravidelný 2011-úhelník požadovaným způsobem do prostoru umístit nelze. Překvapivě to nelze ani pro pravidelný 2012-úhelník, protože pokud by to šlo, pak by šlo umístit i pravidelný 503-úhelník (každý čtvrtý vrchol 2012-úhelníku). Je totiž $2012 = 4 \cdot 503$. Tím je úloha úplně vyřešena.

7. Integrály v geometrii

Pojďme se podívat ještě na jednu úlohu, která využívá metodu integrálu.

Zadání: Na kružnici o poloměru 1 je dáno 2010 bodů $A_1, A_2, \dots, A_{2010}$. Dokažme, že na této kružnici existuje bod X takový, že platí $\sum_{i=1}^{2010} (XA_i) > 2050$.

Řešení: Kružnici s body umístíme do soustavy souřadné. Střed kružnice je v počátku. Body A_i budou pak mít souřadnice $[\cos(x_i), \sin(x_i)]$. Bod X nechť má souřadnice $[\cos(x), \sin(x)]$. Úhly x_i ($i=1, 2, \dots, 2010$) a x jsou z intervalu $[0, 2\pi)$. Pro vzdálenost bodu X a libovolného bodu A_i platí $|XA_i| = 2 \text{abs}(\sin((x-x_i)/2))$. Označme součet vzdáleností jako $f(x) = \sum_{i=1}^{2010} (|XA_i|) = 2 \cdot \sum_{i=1}^{2010} (\text{abs}(\sin((x-x_i)/2)))$. Cílem je ukázat, že existuje v intervalu $[0, 2\pi)$ takové x , že $f(x) > 2050$.

Spočtíme $\int_0^{2\pi} f(x) dx$, kde $\int_a^b f(x) dx$ značí integrál z funkce $f(x)$ na intervalu $[a, b]$ podle proměnné x .

Integrál můžeme upravovat například tímto způsobem (doporučuji si výpočty přepsat do čitelnější podoby): $\int_0^{2\pi} f(x) dx = \int_0^{2\pi} (2 \cdot \sum_{i=1}^{2010} (\text{abs}(\sin((x-x_i)/2))) dx = 2 \cdot \sum_{i=1}^{2010} (\int_0^{2\pi} (\text{abs}(\sin((x-x_i)/2))) dx) = 2 \cdot \sum_{i=1}^{2010} (\int_{x_i}^{x_i+2\pi} (\text{abs}(\sin((x-x_i)/2))) dx) = 2 \cdot \sum_{i=1}^{2010} (-2 \cdot [\cos((x-x_i)/2)]_{x_i}^{x_i+2\pi}) = 2 \cdot \sum_{i=1}^{2010} (2+2) = 8 \cdot 2010$.

Komentář: Nejprve jsme provedli záměnu integračního a sumačního znaku (to v našem případě beztestně jde) a absolutní hodnotu jsme vložili do argumentu funkce sinus. Pak jsme odstranili absolutní hodnotu změnou integračních mezí pro každé konkrétní $i = 1, 2, \dots, 2010$. Místo $[0, 2\pi)$ jsme integrovali v intervalu $[x_i, x_i + 2\pi)$. Efekt je naprosto stejný, jenom jsem jakoby "natočily" kružnici a místo od nuly začínáme od x_i . Nakonec jsme provedli výpočet integrálu (primitivní funkce k funkci sinus je cosinus).

Nyní můžeme tvrdit, že v intervalu $[0, 2\pi)$ existuje číslo x takové, že $f(x) > 8 \cdot 2010 / (2\pi) > 2500$. Kdyby totiž neexistovalo, platilo by pro každé x z intervalu $[0, 2\pi)$: $0 < f(x) < 8 \cdot 2010 / (2\pi)$. Pak ale $\int_0^{2\pi} f(x) dx < \int_0^{2\pi} (8 \cdot 2010 / (2\pi)) dx = 8 \cdot 2010$, což by byl spor s naším výpočtem. Tím je úloha vyřešena.



INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

8 Závěr

V textu jsme se zabývali některými úlohami, které byly probrány na Matematickém Kempu. Cílem bylo ukázat pestrost metod, které lze při řešení úloh použít. Ukazuje se, že v hodinách matematiky není na takové poznatky čas a zájemci o matematiku musí tyto vědomosti načerpat ve svém volném čase. Pro další studium doporučuji řešitelům matematické olympiády řešit některý korespondenční seminář, u nás např. PRASE, BRKOS a na Slovensku MKS

Náměty na úlohy a některá řešení jsem čerpal z pramenů uvedených v literatuře.

9 Použitá literatura

Oficiální stránky IMO <<http://www.imo-official.org/problems.aspx>>

Stránky semináře BRKOS <<http://ganymed.math.muni.cz/brkos/>>

Výběrové soustředění slovenského družstva <<http://skmo.sk/dokumenty.php?rocnik=59>>

The Einstein Quiz <<http://www.amazingart.com/fun/einstein-quiz.html>>

10 Kontakt na autora

RNDr. Josef Křišťan

Matematický ústav MFF UK Praha, Sokolovská 83

kristan1@email.cz

ODBORNÝ KEMP PŘÍRODOVĚDNÝCH OBORŮ MATEMATIKA

EXKURZE DO ČESKÉHO HYDROMETEOROLOGICKÉHO ÚSTAVU V PRAZE-KOMOŘANECH

Naděžda KUBEŠOVÁ

1 Úvod

Počasí jsou neustálé proměny vzduchu kolem nás. Počasí hraje v našem životě velmi důležitou roli. Působí na krajinu všude kolem nás. Sníh vyživuje ledovce, vítr zaobljuje skály a z písku dokáže vytvořit obrovské duny. Nejdůležitější úlohu při tvorbě počasí mají Slunce, vzduch a voda. Díky Slunci máme na Zemi teplo a světlo, vzduch zase obaluje naši planetu jako ochranná slupka. Voda zase způsobuje, že mohou vzniknout oblaka, která vidíme téměř denně na obloze, a taky to, že na nás prší a sněží. Protože lidé věděli, že počasí tak hodně ovlivňuje jejich životy a není před ním úniku, chtěli vždy vědět, jak bude aspoň v nejbližších hodinách. Tak se začalo předpovídat počasí. Nejdříve pomocí lidové meteorologie, která byla blízká astrologii, a postupně vědeckými metodami.

2 Český hydrometeorologický ústav v Praze

Současné úkoly ústavu

Základním účelem příspěvkové organizace ČHMÚ je vykonávat funkci ústředního státního ústavu České republiky pro obory čistota ovzduší, hydrologie, jakost vody, klimatologie a meteorologie, jako objektivní odborné služby poskytované přednostně pro státní správu.

Předmětem činnosti ČHMÚ v uvedených oborech je:

- racionálně, věcně a ekonomicky integrovat výkon státní služby;
- zřizovat a provozovat měřicí stanice a sítě s využíváním telekomunikačních sítí (státní pozorovací sítě pro sledování kvalitativního a kvantitativního stavu atmosféry a hydrosféry a příčin vedoucích k jejich znečišťování nebo poškozování);
- odborně zpracovávat výsledky pozorování, měření a monitorování;
- vytvářet a spravovat databáze;
- poskytovat předpovědi a výstrahy;
- provádět a koordinovat vědeckou a výzkumnou činnost

Po celou exkurzi nás provázeli RNDr. František Šopko a RNDr. Radmila Brožková, CSc. z oddělení numerických předpovědí počasí.



INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Hlavním cílem numerické předpovědi počasí je co nejrychleji zpracovat naměřené údaje z meteorologických přístrojů (pozemních meteorologických stanic, balonových měření, meteorologických družic, radarů a dalších speciálních zařízení) a pomocí počítačové simulace vývoje atmosféry vypočítat její pravděpodobný budoucí stav.

Numerický předpovědní model je řešen na počítačích. Algoritmy jsou naprogramovány především s ohledem na maximální rychlost výsledného programu. Používají se pokročilé numerické metody při konstrukci základních numerických schémat, rychlé numerické algoritmy a efektivní programovací postupy umožňující vysokou paralelizaci dat i algoritmů. Numerické modely se ve svých produkčních verzích řeší zpravidla na vysoce výkonných, často specializovaných počítačích, tzv. superpočítačích, schopných provádět velké množství výpočtů nad velkými objemy dat.

3 Závěr

Exkurze byla vedena poutavou formou. Vzhledem k tomu, že účastníci byli studenti se zájmem o matematiku a fyziku, budou se možná někteří ve své budoucí profesi numerickými výpočty zabývat.

4 Použitá literatura

<http://portal.chmi.cz>

5 Kontakt na autora

PaedDr. Naděžda Kubešová
Gymnázium L. Pika Plzeň, Opavská 21, 312 00 Plzeň
kubesova@gop.pilsedu.cz

ODBORNÝ KEMP PŘÍRODOVĚDNÝCH OBORŮ MATEMATIKA

BÁJEČNÁ ČÍSLA

Petr Tomiczek

1 Úvod

Pohled na čísla může být pro mnoho lidí velice nudný, podobně jako pro laika pohled na notový zápis. V tomto textu se pokusíme proniknout pod povrch abstraktního zápisu čísel a přiblížíme si jejich význam.

2 Jedna, dvě, hodně

Počítání zřejmě vzniklo s každodenní potřeby. Informace o množství kořisti, či nepřátel jistě byla důležitá k přežití. Přesto již přechod od jedničky ke dvojce byl pro lidskou mysl těžký. Na Nové Guineji existuje jazyk, který používá jiné vyjádření pro dvojici žen, dvojici mužů nebo dvojici smíšenou.

Další krok ke trojce už byl velice obtížný, ta byla často označována stejným slovem jako množné číslo. Na zlomcích si můžeme doložit, že lidé nejdříve počítali podle schématu jedna, dvě, hodně. Porovnejme dvě - polovina, tři - třetina, anglicky two - half, three - third a maďarsky kettő-fel, három-harmad. Tedy jedna polovina se vyvinula daleko dříve, než jedna třetina a další zlomky.

V mnoha jazycích se počítání zastavilo na hodnotě čtyři. Asi proto, že zaznamenat jedním pohledem větší počty je pro člověka složité. Při počítání pomocí čárek se pátou čárkou (např. na pivním tácku) škrtnou předchozí čtyři.

Rozvoj obchodu a výběr daní vedl k potřebě je zaznamenat. Do hliněného džbánu se nasypal počet kaménků (latinsky calculi) odpovídající vybraným daním a džbán se zapečetil. Časem se počet kaménku začal zaznamenávat na džbán. První takové znaky vedoucí ke vzniku klínového písma, se objevily roku 3300 př. n. l. v Sumeru. Znaky se postupně měnily, v rozvinuté podobě je vidíme např. u římských číslic.

Výpočty v římských číslicích jsou však velice obtížné. Významným pokrokem proto bylo zavedení desítkového pozičního zápisu čísel (písemný doklad na desce z roku 595 n. l. v Indii). V Indii rovněž zavedli nulu, kterou rovnoprávně používali vedle ostatních symbolů pro číslice i na konci čísla. Babylóňané vyjadřovali nulu tečkou a psali ji pouze mezi číslice. V Evropě se nula objevila až ve třináctém století. Vedle desítkového systému se vyvíjely i systémy se základem pět, dvacet nebo šedesát. Dodnes dělíme hodinu na šedesát minut.

3 p/q nebo smrt

Výpočty při dělení majetku vyžadovaly zlomky. Egypťané všechny výpočty se zlomky převáděli na kanonické zlomky, které mají v čitateli jedničku. Egypťané také uměli spočítat plochy čtverce, obdélníka, lichoběžníka a kruhu (jeho plochu vyjadřovali jako osm devítin průměru, to celé na druhou). Babylónští kněží rýsovali okolo kruhu šesti a dvanáctiúhelníky. Pomocí nich se přiblížili k hodnotě $\pi \sim 3 + 7/60 + 30/60^2 = 3,125$. Babyloňané úlohy a výpočty popisovali slovy, řešili kvadratické rovnice a znali Pythagorovu větu. Nikde však ve starých spisech nenajdeme náznak důkazu. Vše bylo popsáno slovy „udělej to tak a tak“. S důkazem v dnešním slova smyslu se můžeme poprvé potkat u Pythagorejců (6. stol. př. n. l.) při dokazování platnosti Pythagorovy věty.

Pythagorejci připisovali číslům velký význam. Číslo 1 považovali za symbol bodu, číslo rozumu, tedy za zdroj ostatních rozměrů a čísel. Číslo 2 bylo ženským číslem, bylo to číslo sváru a nespolehlivosti („dvojitá tvář“ v íránštině a češtině, „dvojitý jazyk“ v němčině). Mužským číslem byla trojka, která byla základem pořádku, základem utváření vojenských jednotek. Symbolem spravedlnosti a řádu byla čtyřka, ke které patřily například čtyři světové strany. Číslo 5 bylo považováno za číslo lásky a manželství (2+3). Číslo 6 představovalo symbol stvoření. Matematika byla jistým druhem náboženství. Proto bylo velice nepříjemné, když se nedařilo vyjádřit úhlopříčku ve čtverci o straně jedna pomocí zlomku. Pythagorejci dokázali, že to opravdu nejde (MLODINOW L. Eukleidovo okno). Jejich zděšení bylo tak veliké, že zakázali tuto skutečnost zveřejnit. Tajemství však prozradil Hipposus z Metapontu a byl za to zabit. Dnes čísla, která se nedají vyjádřit jako zlomek, nazýváme iracionální. Odpor k těmto číslům byl překonán až v díle George Cantora v 19. století.

4 Zlatý řez

Velký řecký matematik Eukleides (300 let př. n. l.) zformuloval následující úlohu:

Rozdělte úsečku tak, aby poměr délky celé úsečky ku její
delší části se rovnal poměru delší části ke kratší.

Tento poměr se označuje písmenem ϕ a nazývá se zlatým řezem. Výpočtem získáme hodnotu $\phi = (1 + \sqrt{5})/2 = 1,618\ 033\ \dots$. Pojem zlatý řez snad poprvé použil v roce 1835 německý matematik Martin Ohm. Písmeno ϕ se začalo používat od počátku dvacátého století na počest řeckého sochaře Feidia (cca 490-430 př. n. l.), který tento poměr využíval při tvorbě svých soch. Poměr zlatého řezu působí esteticky příznivě, což lze dokumentovat na obraze „Poslední večeře“ od Salvadora Dalí nebo na stavbách antického Řecka. Zlatý řez se však velice často vyskytuje i v přírodě. V rozložení listů rostlin na větvíčkách, uspořádání semen slunečnice nebo schránce plže můžeme najít zlatý řez. Také v pětiúhelníku platí, že úhlopříčka a strana mají poměr ϕ . Protože ϕ je také iracionální číslo a nelze vyjádřit zlomkem, měli ve starověkém Řecku pentagram (symbol bratrstva) ve velké úctě.

Zajímavá je rovněž souvislost, kterou objevil ve 13. století Leonardo Pisánský (známý jako Fibonacci asi 1170-1240). Řešil následující problém:

„Kolik párů králíků se narodí právě narozenému páru, zplodí-li každý pár každý měsíc nový pár, který bude mít opět potomky druhý měsíc po narození?“

Při řešení tohoto problému dospěl k dnes nazývané Fibonacciho posloupnosti 1, 1, 2, 3, 5, ... , pro kterou obecně platí: $f_1 = 1$, $f_2 = 1$ a $f_{n+2} = f_n + f_{n+1}$. Pro velká n je pak zlomek f_{n+1}/f_n

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

přibližně roven zlatému řezu. Pro členy Fibonacciho posloupnosti zároveň platí Binetův vzorec $f_n = 1/\sqrt{5}(\varphi^n + (1/\varphi)^n)$ (PICK L. Zlatý řez a další parádní čísla).

V průmyslu využili znalosti Fibonacciho posloupnosti při výrobě kabelů, což nás přivádí k poznámce, že je důležité zkoumat zákonitosti přírody, i když na první pohled nám nejsou k užítku.

$$5 e^{i\pi} + 1 = 0$$

5.1 Imaginární čísla

V tomto odstavci budeme čerpat z knih STRUIK D. J. „Dějiny matematiky“ a LIVIO M. „Neřešitelná rovnice“ a přiblížíme si vznik komplexních čísel. Jak si ukážeme, komplexní čísla se poprvé objevila až při řešení kubických rovnic. U kvadratických rovnic matematici řešení vyžadující odmocninu se záporného čísla prostě nebrali v úvahu. Zde je vhodné podotknout, že sice již starověcí Řekové pracovali s výrazy, které zahrnovaly záporné hodnoty, např. $-(-a) = a$. Podobné operace však považovali za přípustné, pokud výsledek byl kladný. Nedůvěra v záporná čísla byla úplně překonána až v 18. století (DEVLIN K. Jazyk matematiky, s.138).

První pokusy o řešení rovnic třetího stupně lze nalézt u Babylóňanů, kteří sestavili tabulky pro řešení konkrétních rovnic. Postupně matematici přidávali další řešení. Obecný předpis pro rovnice tvaru $ax^3 + bx = c$, kde a, b, c jsou celá čísla byl však nalezen až v 15. století italským matematikem Scipiono dal Ferro (1465-1526). Rukopis s řešením ale nezveřejnil, předal ho svému studentovi Antonia Maria Fiore. Ten chtěl tuto znalost využít ke své slávě. V té době bylo obvyklé, že se učenci střetávali ve veřejných disputacích. Fiore vyzval v roce 1535 k veřejnému řešení kubických rovnic benátského počtáře jménem Nicola Tartaglia. Tartaglia však uměl řešit i rovnice ve tvaru $ax + b = x^3$, $x^3 + ax^2 = b$ a Fioreho porazil. Svou metodu dlouhou dobu držel v tajnosti. Nakonec ji pod slibem mlčenlivosti prozradil Hieronymu Cardanovi (1501-1576), ten ji ale uveřejnil v roce 1545 v knize Ars magna.

Obecný vzorec pro výpočet kořenů kubické rovnice $x^3 + ax = b$ tam lze nalézt ve tvaru

$$x = \sqrt[3]{(b/2 + \sqrt{(a^3/27 + b^2/4))} + \sqrt[3]{(b/2 - \sqrt{(a^3/27 + b^2/4))} .$$

Tento vzorec však někdy i v případech, kdy řešením jsou přirozená čísla, vyžaduje počítání s druhou odmocninou ze záporných čísel. Cardano hovořil o sofistickovaných číslech a tvrdil, že jsou k ničemu. Až Raffael Bombelli (1526-1572) pochopil, že není možné se vyhnout manipulaci s odmocninou ze záporného čísla a zavedl nový svět imaginárních čísel.

5.2 Bankovní konstanta

Dalším iracionálním číslem, jehož přibližné hodnoty se poprvé objevily v roce 1618 v práci Johna Napiera, je číslo e . Za objevitele tohoto čísla je však považován Jacob Bernoulli (1655-1705), který se při řešení problému spojeného se složeným úročením, snažil vypočítat limitu s výrazu $(1+1/n)^n$. Na tuto limitu narazíme pokaždé, když se budeme snažit popsat jakékoli rozmnožování, nejen peněz, ale také zvířat nebo rostlin. Pokud jako základ v exponenciální funkci zvolíme číslo e , pak platí, že její derivace v bodě x je rovna funkční hodnotě v tomto bodě.

Označení

$$e = \lim_{n \rightarrow \infty} (1+1/n)^n$$

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

zavedl Leonard Euler (1707-1783), kterému se v roce 1748 podařilo dokázat rovnost

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x,$$

která platí pro každé reálné číslo x . Pokud dosadíme za x konstantu π , podaří se nám propojit svět racionálních, iracionálních a komplexních čísel překvapující rovností

$$e^{i\pi} + 1 = 0.$$

Tato rovnost podle mnohých vědců patří k nejkrásnějším matematickým poučkám.

6 Závěr

Jako závěr si dovoluji použít text, který napsal do svého projektu Štěpán Cais v době psaní projektu jako student prvního ročníku FAV ZČU v Plzni. Cituji: “Ještě před nedávnem jsem si myslel, že matematika je jako věda velice plochá a pro studenta je jenom nutné zlo se přes ni prokousat. Od malička jsou nám všem do hlavy nalévány vzorce a poučky, které jsou většinou oznamovány bez širších souvislostí. A právě tato – dle mého názoru chyba – způsobuje nechuť spoustě žáků a studentů k matematice. O co je však hrníček matematiky chutnější a sytější, když do něj přidáme lahvičku speciálního koření s názvem „historie“, jemně zamícháme s přísadou „širších souvislostí“ a ubereme hutného „definování, vzorečkování a větování“. Vždyť, jak jednou pronesl David Hilbert: „Matematika je hra hraná podle jistých jednoduchých pravidel s nesmyslnými znaky na papíře“.“

7 Použitá literatura

DEVLIN, K. Jazyk matematiky - Jak zviditelnit neviditelné: Nakladatelství Argo a Dokořán, Praha 2002 343 s. ISBN 80-86569-09-8.

MLODINOW, L. Eukleidovo okno, Slovart s.r.o., Praha 2007, 259 s. ISBN 978-80-7209-900-9

PICK, L. Zlatý řez a další parádní čísla, sborník Letní škola matematiky a fyziky 2007, Univerzita J.E.Purkyně v Ústí nad Labem.

STRUICK D. J. Dějiny matematiky, Orbis, Praha 1963, 250 s.

LIVIO, M. Neřešitelná rovnice, Nakladatelství Argo a Dokořán, Praha 2008, 317s. ISBN 978-80-7363-150-5

8 Kontakt na autora

RNDr. Petr Tomiczek CSc.
Západočeská univerzita v Plzni
tomiczek@kma.zcu.cz

ODBORNÝ KEMP PŘÍRODOVĚDNÝCH OBORŮ MATEMATIKA

MALÁ VÝPRAVA ZA PERSPEKTIVOU ANEB ZOBRAZOVÁNÍ SVĚTLA VE SVĚTLE GEOMETRICKÝCH ZÁKONITOSTÍ

Světlana Tomiczková

1 Úvod

Snaha zobrazit svět kolem nás sahá hluboko do minulosti lidstva. Zvládnutí principů zobrazování může posunout umělce, techniky, architekty a vědce tak, že mají více prostoru pro vlastní intuici, abstrakci a tvůrčí invenci.

V tomto textu poodhalíme cestu zobrazovacích technik historií, principy zobrazování, odchylky od reality a využití zobrazovacích technik v době moderních metod dovolujících realistické zobrazování bez hlubší znalosti deskriptivní geometrie.

2 Zobrazovací metody

Pokud mluvíme o promítání, obvykle máme na mysli dva základní typy: středové a rovnoběžné promítání. Středové promítání je blíže našemu vnímání světa, rovnoběžné promítání je výhodnější pro technickou praxi, protože konstrukce v rovnoběžném promítání jsou mnohem jednodušší. Zde se zaměříme na středové promítání a jeho speciální případ lineární perspektivu.

2.1 Princip středového promítání

Na začátku je vhodné upřesnit některé pojmy týkající se zobrazování třídimenzionálního prostoru do dvojdimenzionálního (do roviny). Vezmeme si na pomoc učebnici deskriptivní geometrie např. pomocný učební text Tomiczková, S.: Deskriptivní geometrie. Rovinu, na kterou budeme promítat, nazveme průmětna, bod, ze kterého promítáme, nazveme střed promítání a zobrazený bod (průsečík přímky určené tímto bodem a středem promítání s průmětnou) je průmět příslušného bodu.

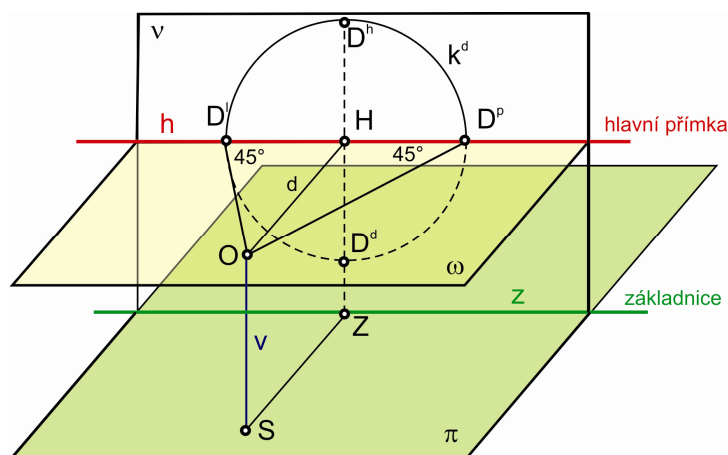
Pokud potřebujeme se středovým průmětem dále pracovat, využíváme i jeho pravoúhlý průmět. Určitou pomůckou je i distanční kružnice, která má střed v pravoúhlém průmětu středu promítání, kterému také říkáme hlavní bod a poloměr roven vzdálenosti tohoto středu od průmětny. Středovým průmětem bodu je bod (i když někdy nevlastní). Středovým průmětem přímky je buď přímka, nebo bod. Pokud bod leží na přímce, tak i jeho průmět leží na průmětu přímky. Důležitým bodem z hlediska středového promítání je středový průmět nevlastního bodu, který se zobrazí do bodu vlastního. Takovému bodu říkáme úběžník. Podobně rovina se zobrazí do celé průmětny nebo do přímky. Všechny nevlastní body roviny se zobrazí do bodů (úběžníků), které leží na přímce, které říkáme úběžnice.

2.2 Lineární perspektiva

Speciálním případem středového promítání je lineární perspektiva. V lineární perspektivě volíme parametry (např. polohu středu vzhledem k průmětně) tak, aby co nejvíce odpovídaly reálnému vidění. Průmětnou v je svislá rovina, střed promítání O obvykle

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

umístíme ve výšce stojící postavy, vzdálenost středu promítání d od průmětny přizpůsobíme velikosti zobrazovaného objektu, který umístíme za průmětnu. Přímkami kolmé k průmětně nazýváme hloubkové přímkové a přímkové rovnoběžné s průmětnou jsou přímkové průčelné. Průsečnicí roviny kolmé k průmětně procházející středem promítání nazýváme hlavní přímkou. Distančníky jsou body na distanční kružnici, rozeznáváme levý, pravý, horní a dolní distančník, ve smyslu, který očekáváme (levý distančník je průsečík distanční kružnice s hlavní přímkou vlevo od hlavního bodu atd.).



Je vhodné zdůraznit některé vlastnosti, které jsou pro lineární perspektivu klíčové:

- Hlavní bod je úběžníkem všech hloubkových přímk (všechny hloubkové přímkové se v něm sbíhají).
- Horizont (hlavní přímkové) je úběžnicí všech vodorovných rovin a obsahuje úběžníky všech vodorovných přímk.
- Perspektiva zachovává rovnoběžnost průčelných přímk.
- Pravý a levý distančník jsou úběžníky vodorovných přímk, které svírají s průmětnou úhel 45 stupňů.

2.3 Historické souvislosti

Velice hezký výklad na toto téma je možné nalézt v přednášce Zuzany Štauberové. Když malíř neumí matematiku aneb „Chyby“ na obrazech známých malířů, která byla přednesena v rámci projektu Mladý Sisyfos na Západočeské univerzitě v Plzni a je možné si celý text přečíst na stránkách <http://sisyfos.zcu.cz/matika/predm1/prednaska.htm>.

Zde uvádím jen klíčové okamžiky v historii perspektivy.

Zatímco ve starém Egyptě bylo zobrazování svázáno přísnými náboženskými a mocenskými pravidly, dokážeme ve starověkém Řecku a Římě nalézt prvky perspektivního zobrazování, které ale patrně autoři používali jen intuitivně. Můžeme tak usuzovat z kopií řeckých maleb (originály se nedochovaly) nalezených v Pompejích.

Po zániku Římské říše dochází z hlediska vývoje zobrazovacích metod k úpadku výtvarného umění. Výtvarná díla jsou podřízena náboženským pravidlům, musí sloužit křesťanské víře, znázorňovány jsou pouze výjevy ze života svatých. Pozadí je jednolitá plocha, svatí jsou plasticky zobrazováni pomocí stínování. Později se situace mění, rozvíjí se

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

dvorský život a s ním touha obklopovat se uměleckými předměty. Postupně pak přichází doba, kterou nazýváme renesance.

Jedním z prvních, kdo usiloval o realistické zobrazování, byl italský malíř Ambrogio di Bondone zvaný Giotto (1262 – 1337). Jeho perspektiva je spíše intuitivní a z hlediska geometrických zákonitostí najdeme na jeho obrazech „chyby“, například rovnoběžné přímky se nesbíhají do jednoho bodu (úběžníku).

Důležitým mezním bodem je objevení průsečné metody, kterou použil při zobrazení kostela sv. Jana ve Florencii slavný italský architekt Filippo Brunellesci (1377-1446). Podrobný popis této metody nalezneme v díle učenec a architekta Leona Battisty Albertiho v díle Tři knihy o malířství (Della pittura libri tre – 1435).

Zákonitosti perspektivy jsou využívány mnohými umělci, za všechny můžeme jmenovat např. florentského malíře Masaccia (1401 - 1428), italského malíře Andreu Mantegna (1421-1506) nebo Sandru Botticelliho (1445-1510).

V tomto výčtu nesmíme zapomenout na vědce a umělce Leonarda da Vinciho (1452-1519), kterému nestačí geometrické zákonitosti perspektivy, ale ve svém „Pojednání o malířství“ dělí perspektivu na tři části. Ke geometrickým zákonitostem přidává změnu barvy a rozptyl obrysu. Leonardo da Vinci a další umělci si také uvědomují některé nedostatky perspektivního zobrazování, zejména při zobrazování velké části prostoru. Záměrně proto nedodržují některá pravidla a podřizují tvorbu uměleckému záměru nebo zkušenosti. Tyto patrně záměrné „chyby“ najdeme například na obraz Zvěstování od Leonarda da Vinciho (ruka Madony by měla být na obraze kratší) nebo Rafaelově fresce Athénská škola (koule v okrajové části by se měla zobrazit jako elipsa). Michelangelo Buonarotti (1474 –1547) si s velkým prostorem v Sixtinské kapli poradil tak, že ho rozčlenil na menší výjevy, které jsou řešeny samostatně. Umělcem, na kterého bychom neměli zapomenout, je Albrecht Dürer (1471-1528), na jehož rytinách můžeme nalézt metody sloužící umělcům ke konstrukci perspektivních obrazů.

2.3 Nelineární projekce

Mezi nelineární projekce řadíme například promítání na válcovou či kulovou plochu, tedy na jiné plochy než na rovinu. Některým z těchto projekcí říkáme anamorfózy. Anamorfózou je například nápis „Pozor škola“ na silnici dobře čitelný z pozice příjíždějícího řidiče nebo výzdoba některých panelových domů, jejichž fasáda působí dojmem prostorového obrazu. Tyto typy anamorfózy mají blíže k lineární perspektivě. Na stránkách <http://www.anamorphosis.com/software.html> lze stáhnout velice zajímavý program, který i naprostému laikovi dovolí vytvořit válcovou či kuželovou anamorfózu, tedy zdeformuje obrázek tak, že je rozpoznatelný pouze za použití válcového nebo kuželového zrcadla.

2.4 Anaglyfy

Posledním zajímavým použitím perspektivy jsou anaglyfy, které v modernější podobě známe z 3D kina. Je to vlastně promítání dvou posunutých perspektivních obrazů, které pomocí speciálních brýlí vnímáme každým okem zvlášť. Složením těchto dvou obrazů vzniká v našem mozku prostorový vjem.

Podobná metoda je využívána při mapování nebo při rekonstrukci polohy a tvaru objektů a je nazývána fotogrammetrie.



INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

3 Závěr

Tento výlet za perspektivou uzavřeme náměty k dalšímu studiu. Pokud budete hledat další inspiraci, podívejte se určitě do knihy A. Coleové Perspektiva (1995) nebo do knihy K. Kadeřávka Geometrie a umění v dobách minulých a podívejte se také na stránky věnované anamorfózám <http://www.anamorphosis.com>. Pěkně zpracované jsou také stránky http://www.fd.cvut.cz/departament/k611/PEDAGOG/lp_malirstvi/ věnované lineární perspektivě.

4 Použitá literatura

Knihy:

COLEOVÁ, A.: Perspektiva. Perfekt Bratislava, 1995. ISBN 80-85261-77-4.

KADEŘÁVEK, F.: Geometrie a umění v dobách minulých, Praha 1997. ISBN 80-900791-5-6.

TOMICZKOVÁ, S.: Deskriptivní geometrie. Pomocný učební text. Plzeň 2009 Dostupné na internetu: < <http://geometrie.kma.zcu.cz/index.php/www/content/view/full/108/>>.

Internetové stránky:

<http://www.anamorphosis.com/> [14. 9. 2010]

<http://sisyfos.zcu.cz/matika/predm1/prednaska.htm> / [14. 9. 2010]

http://www.fd.cvut.cz/departament/k611/PEDAGOG/lp_malirstvi/ / [14. 9. 2010]

5 Kontakt na autora

RNDr. Světlana Tomiczková, Ph.D.

KMA FAV ZČU v Plzni

svetlana@kma.zcu.cz

ODBORNÝ KEMP PŘÍRODOVĚDNÝCH OBORŮ MATEMATIKA

POČÁTKY VĚDECKÉ MATEMATIKY V ANTICKÝCH ŘECKÝCH MATEMATICKÝCH a FILOZOFICKÝCH ŠKOLÁCH

Jiří POTŮČEK

1 Úvod

Historický vývoj matematiky je rozdělen na čtyři základní období. Podkladem pro toto rozdělení je předmět matematického zkoumání, tj. to, čím se matematika v daném období zabývala a co bylo v tomto období relativně stabilní. První období, které bývá nazýváno obdobím formulace základních matematických pojmů a vztahů, trvalo od počátku existence lidské civilizace do vytvoření prvních matematických a filozofických škol v antickém Řecku v 6. až 5. stol. př. n. l. Matematické znalosti objevené v tomto období jsou z dnešního pohledu elementární a nejsou považovány přímo za poznatky vědeckého charakteru. Matematika pěstovaná antickými řeckými matematiky a filozofy je již považována za matematiku vědeckou.

2 Matematické a filozofické školy v antickém Řecku

V 5. století př. n. l. existovala Milétská škola, jejíž hlavou byl legendární Thalet z Miletu. V této škole se snažili o přirozené vysvětlení světa a dějů v něm bez mystiky. Škola hlásala jakýsi naivní materialismus. Thalet začal dokazovat matematická tvrzení. Změnil se obecný pohled na matematiku a přístup k ní. Zatímco v předchozím období byla základní otázkou otázka „jak“ se má to či ono udělat, abychom dostali správný a funkční výsledek, nyní vystupuje do popředí otázka „proč“ platí to či ono, nebo proč mám postupovat právě určitým způsobem. Kromě známé „Thaletovy věty“ se mu připisují důkazy tvrzení např. že úhly při základně rovnooramenného trojúhelníku jsou shodné a další. Významným myslitelem Milétské školy byl Anaximandros, který se zabýval pohledem na Zemi a svět a vytvořil první zeměpisné mapy tehdy známé části světa. Představoval si Zemi jako plochý válec, jehož výška byla k jeho průměru v poměru 3 : 1. Tato jeho představa byla sice nesprávná, ale odpovídala tehdejšímu znalostem a zkušenostem a vycházela i z neznalosti gravitačního zákona objeveného Newtonem až v 17. století n. l. V oblasti akustiky pracoval Anaximenés, který studoval výšky tónů vyluzovaných pomocí stejných nádob naplněných vodou do různých výšek. Objevil tak základní vlastnosti tónů a zákonitosti hudebních intervalů.

Protipólem Milétské školy byla škola Pythagorejská. Její hlavou byl legendární Pythagoras. O jeho životě však vůbec nic nevíme. Na rozdíl od materialistického pohledu na svět v Milétské škole, pohled pythagorejců vedl k mystickým představám, že základem světa jsou čísla, kterým přikládali velký význam. Teorii figurálních čísel položili pythagorejci základ prvních teorií o číslech. Největším objevem Pythagorejské školy je však objev nesouměřitelnosti úseček, ve svých důsledcích objev iracionality, který ovšem vedl ke zhroucení dosavadních představ této školy o číslech a hovoříme o něm jako o první krizi

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

v matematice. V dalším období vyřešili tuto krizi významní matematikové Eudoxos a Theaitethos.

Třetí významnou školou byla škola Eleatská, jejíž hlavou byl Parmenides. Jeho žák Zénón formuloval řadu aporií – paradoxů, v nichž popisoval situace a činnosti, které vedou k výsledkům, jež jsou v rozporu se zkušeností, aniž by však naznačil řešení či podstatu těchto paradoxů. Významní řečtí myslitelé se v té době zabývali pojmem nekonečno (podobně tomu bylo i v Číně). Pojem nekonečno je však neurčitý a lze ho chápat v různých souvislostech. Řekové pojem nekonečno chápali jako „to, co se nedá projít“. Známý paradox o Achillovi a želvě lze formulovat takto: „V běhu pomalejší nebude předstižen rychlejším, neboť rychlejší musí doběhnout na místo, z něhož vyběhl pomalejší, který mezi tím uběhne určitou dráhu, takže pomalejší bude vždy o nějaký úsek napřed.“ Podstata paradoxů spočívá v nepochopení rozdílu mezi aktuálním a potenciálním nekonečnem. Tento problém byl vyřešen mnohem později.

Významnou vědeckou institucí oné doby byla také athénská akademie. Působil v ní Hippokrates, který je mimo jiné známý řešením různých problémů o tzv. měsíccích, útvarech vzniklých jako průnik kruhů. Napsal také čtyři knihy o geometrii, které se však nezachovaly, ale údajně mají tvořit první čtyři knihy Euklidových Základů.

3 Závěr

Vrcholu dosáhla antická řecká matematika ve 3. století př. n. l. Toto období je nazýváno zlatým věkem řecké matematiky. Alexandr Makedonský vytvořil velké impérium zahrnující území někdejších vodních říší. Úředním i vědeckým jazykem v impériu byla řečtina. To umožňovalo rychlé šíření vědomostí a jejich výměnu mezi jednotlivými částmi říše. O tomto období se hovoří také jako o období helénismu. Hlavími postavami helénské matematiky jsou Euklides, Apollonios a Archimédes. Centrem helénské matematiky byla Alexandrie. Zde byli soustředěni vrcholní představitelé helénské vědy kromě Archiméda. Ten působil po celý život v Syrakusách. Euklides zde sestavil svoje proslulé „Základy“. Ty se staly vzorem logicky uspořádané učebnice matematiky na mnoho století. Za největšího matematika a inženýra starověku je považován Archimédes. V jeho díle jsou již obsaženy základy infinitezimálních postupů. Na ně navázali evropští matematikové 15. a 16. století, aby ve století 17 byl objeven infinitezimální počet.

4 Použitá literatura

KOLMAN, A. Dějiny matematiky ve starověku, Academia, 1968, 1. vydání
STRUICK, DIRK J. Dějiny matematiky, Orbis, 1963, 1. vydání

5 Kontakt na autora

Jiří Potůček, RNDr., CSc.
Západočeská Univerzita, Fakulta pedagogická
E-mail potucek@kmt.zcu.cz

ODBORNÝ KEMP PŘÍRODOVĚDNÝCH OBORŮ MATEMATIKA

OD PREHISTORIE KVANTITATIVNÍHO ZÁZNAMU K POČÍTÁNÍ V TZV. VODNÍCH ŘÍŠÍCH

Jiří POTŮČEK

1 Úvod

Používání dnešní poziční desítkové číselné soustavy a tzv. arabských číslic se v Evropě datuje od konce 15 století. Cesta od prehistorie kvantitativních záznamů přes vytvoření číslovek a posléze číslic byla dlouhá a složitá a představuje důležitou část dějin matematiky i lidstva. Podívejme se proto na prehistorii záznamu určitého počtu předmětů pomocí tzv. vrubovek, na pravděpodobnou cestu k číslovkám a symbolům pro ně v prvních státních útvech nazývaných obvykle vodními říšemi a rovněž na elementární výpočty, jak byly prováděny v těchto civilizacích. Sledujme další vývoj v této oblasti až k vytvoření desítkové poziční číselné soustavy v Indii v 6. až 7. století n.l., převzetí této početní soustavy Araby v 9. století a její šíření do světa od 11. století.

2 Vývoj elementárních výpočtů od prehistorie až k vytvoření poziční desítkové číselné soustavy

O počátcích počítání na úsvitu lidské civilizace je velmi málo zdrojů informací. Některé informace poskytují archeologické nálezy předmětů, které se k počítání vztahují, např. nález kostěného počítadla profesorem Absolonem ve Věstonicích na Moravě v roce 1936. Vedle archeologických nálezů využíváme uvážlivě volené analogie způsobů počítání etnických skupin na nízkém vývojovém stupni, nebo i studium jazyků a jejich gramatiky vzhledem k počítání. Z tohoto bádání vyplývá, že nejprve vznikaly číslovky pro malé počty a praktická potřeba si postupně vynucovala vyjadřovat počty stále větší. Je zajímavé, že se početní postupy v této počáteční fázi opírají intuitivně o dnešní postupy využívající znalosti z teorie množin, která však vznikala až mnohem později na přelomu 19 a 20 století. Množiny tedy byly prvními matematickými objekty, s nimiž člověk přicházel přirozeně do styku. Vodní říše vznikající od 4. tisíciletí př.n.l. v povodí velkých řek v klimaticky příznivých podmínkách, byly již státními útvary, v nichž matematika měla důležitou a nezastupitelnou funkci. Patří mezi ně Egypt v povodí Nilu, Mezopotámie - území mezi řekami Eufrat a Tigris a říše v dnešní Indii a Číně. Mezi státními úředníky byli v těchto říších znalci kalendáře, měření a elementárních výpočtů. Bez této profese se řízení a fungování těchto říší již neobešlo.

2.1 Početní systém v Egyptě ve 3. a 2. tisíciletí př. n. l.

V této době se již v Egyptě používalo hieroglyfické písmo. Písaři psali inkoustem na papyrus vyráběný z rákosových stébel. Tento materiál však snadno podléhá zkáze a tak se zachovalo poměrně málo písemných památek. Naše znalosti o egyptské matematice se odvozují ze dvou základních dochovaných papyrů a sice z tzv. londýnského a moskevského papyru, které jsou uloženy v muzeích příslušných měst. Z papyrů, které možná napsal jako cvičení egyptský písař, se dovídáme, že Egyptané používali nepoziční desítkovou číselnou

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

soustavu, poznáváme jejich číselné symboly a způsob zapisování čísel. Egypťané uměli sečítat, odečítat (vždy se muselo odečítat menší číslo od většího), násobit (podle zvláštního schématu na základě zdvojnásobování) a dělit. Dělení se převádělo na násobení otázkou kolikrát musím násobit dělitele, abych dostal dělence. Používání zlomků bylo v Egyptě poněkud těžkopádné. Používali tzv. kmenné zlomky, které s využitím půlení vyjadřovali zvláštním postupem. Kmenné zlomky měly v čitateli vždy číslo 1. Odlišoval se pouze zlomek $\frac{2}{3}$, který se jako jediný vymyká ze systému kmenných zlomků. Úlohy byly na papyrech zapsány včetně všech kroků řešení.

2.2 Matematika na území Mezopotámie př. n. l.

V Mezopotámii byla nejprve používána nepoziční desítková číselná soustava, pak soustava šedesátkově - desítková a nakonec poziční šedesátková soustava. Písaři ryli číselné symboly rákosovým stéblem do hliněných destiček, které byly sušeny nebo vypalovány. Stéblo bylo na spodní straně seříznuto do tvaru velkého nebo malého klínu. Přes nedokonalost používané poziční číselné soustavy znamená její objev velký pokrok. Obtíže byly v tom, že neexistoval symbol nuly jako plnohodnotné číslice a tak zapsané číslo nemělo jednoznačný význam. Ten bylo nutno vyrozumět ze souvislosti. Číslo od jedničky do čísla 59 byla zapisována nepozičně a tudíž jednoznačně. Počtáři měli k dispozici tabulky součinů a tabulky převrácených hodnot čísel, které používali při určování výsledků početních operací násobení a dělení. Tyto tabulky představují první vlašťovky jakési výpočetní techniky. Z období Babylónie se zachovalo mnohem více písemných památek než z Egypta. Bohužel je jich však rozluštna jen malá část.

3 Závěr

V Indii byl v 6. století našeho letopočtu dobře znám babylonský početní systém. Indiští matematikové tak pravděpodobně k symbolům pro čísla 1 až 9 přidali symbol nuly jako plnohodnotné číslice a vytvořili tak dnešní poziční desítkovou číselnou soustavu. Ta je velmi výhodná a umožňuje algoritmizovat početní operace sčítání, odčítání, násobení a dělení. Tento početní systém převzali Arabové a při vytváření svého impéria jej od 7. století šířili do světa. Od 11. století při obchodních stycích s orientem poznávají tento systém i křesťanští učenci. Jedním z hlavních zdrojů, kterým se do Evropy dostala poziční desítková číselná soustava a tzv. západoarabské číslice gubar jsou práce italského kupce a matematika Leonarda Pisánského (Fibonacciho).

4 Použitá literatura

BALADA, F. Z dějin elementární matematiky, Orbis, 1963, 1. vydání
JUŠKEVIČ, A.P., Dějiny matematiky ve středověku, Academia, 1978, 1. vydání
KOLMAN, A. Dějiny matematiky ve starověku, Academia, 1968, 1. vydání
STRUICK, DIRK J. Dějiny matematiky, Orbis, 1963, 1. vydání

5 Kontakt na autora

Jiří Potůček, RNDr., CSc.
Západočeská Univerzita, Fakulta pedagogická
E-mail potucek@kmt.zcu.cz

ODBORNÝ KEMP PŘÍRODOVĚDNÝCH OBORŮ PROGRAMOVÁNÍ

ALGORTMIZACE ÚLOH - REKURZIVNÍ ALGORITMY

Václav Kohout

1 Úvod

První částí , kterou se budeme kempu programování zabývat je obecný pojem algoritmizace úloh. Jde o základní prvek při sestavování těla programu v libovolném programovacím jazyku. Pro každou úlohu, kterou chceme v životě řešit se snažíme najít správný algoritmus (důkladněji první části tohoto textu). Samozřejmě , že pro daný problém lze nalézt více algoritmů řešení. Některé jsou méně vhodné, některé jsou výborné a optimální.

2 Algoritmizace úloh

V této části se budeme zabývat definicí algoritmu a vytyčením jeho základních vlastností. Většinu základních tvrzení , definic , poznámek budeme zároveň ilustrovat příklady, které nás budou nutit k procesu algoritmizace úloh.

2.1 Rekurzivní algoritmy

Rekurze není pojem , který se užívá jen při algoritmizaci. Je to široce použitelný pojem. Zdá se , že nás provází celým životem a v přírodě je přítomen na každém kroku. V dětství se velmi často naučíme jisté dovednosti s jednou hračkou, větší a bez dalšího učení tyto nové schopnosti aplikujeme na celou skupinu takovýchto objektů. Jestliže například při jídle jsme schopni sníst jeden knedlík automaticky máme schopnost sníst jich na místě například 5. Aplikovali jsme rekurzi sněžení knedlíku. Podobně jestliže dostane dítě příkaz k úklidu hraček (a je toho schopno) , uklízí hračku jednu po druhé, až má všechny hračky uklizené. Co je společné takovému chování:

1. Proces ukončení je jednoznačně deklarován.
2. Velký problém je rozdělen na elementární jednodušší problémy, které jsou postupně řešeny.

V případě algoritmů budeme požadovat v podstatě to samé, s tím rozdílem , že druhá část je nahrazena voláním algoritmu s jednoduššími vstupními daty.

Jednoduchým příkladem může být funkce faktoriál. Tuto funkci můžeme definovat tak, že $0! = 1$ a $n! = n \cdot (n-1)!$, kde $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$.

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Pokusme se zapsat tuto funkci:

Function fact(n)

If n = 0 Then fact = 1

If n > 0 Then

fact = n * fact(n - 1)

End If

End Function

Vidíme, že jde o jednoduchý zápis s jednou podmínkou. Podstatné je, že v rámci podmínky voláme vždy právě jednou již běžící funkci s menším parametrem.

Function fib(n As Integer)

If n = 0 Then fib = 1

If n = 1 Then fib = 1

If n > 1 Then

fib = fib(n - 1) + fib(n - 2)

End If

End Function

Rozlišujeme dva druhy rekurze : přímou a nepřímou. Přímá rekurze znamená, že v rámci algoritmu je aktivován aspoň jednou samotný algoritmus. Viz ukázky výše. Nepřímá rekurze je nastavena tak, že například algoritmus A volá jiný algoritmus B a v rámci práce tohoto algoritmu je opět volán algoritmus A. Situace může být samozřejmě mnohem složitější.

Všimněte si, že pomocí rekurze můžeme jednoduchým způsobem definovat nekonečnou množinu (například Fibonacciho posloupnost , přirozená čísla – Peannovy axiomy atd.).

Použití principu rekurze vede většinou k velmi úspornému vyjádření, které ale ve většině případů velmi omezuje rychlost počítače a nejednou i jeho paměť.

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Většinu rekurzivních algoritmů lze předělat na algoritmy nerekurzivní povahy .

Function Fib (n: byte) : integer;

var x, y, z, i : integer;

begin

i := 1; x := 1; y := 0;

while i < n do

begin y := x; i := i + 1;

x := x + y; y := z

end;

Fib := x

end;

Od rekurzivního zápisu jsme přešli k zápisu iteračnímu. Ovšem museli jsme použít cyklus na „volání“ algoritmu.

Každé volání funkce Fib s hodnotou parametru $n > 1$ vyvolá dvě další volání a tvoří strom volání.

Část podstromů je shodná.

Celkový počet volání roste exponenciálně.

Podstatně nižší efektivita algoritmu. Krajně nevhodné využití rekurze.

Časové nároky jsou potom nutně $O(2^n)$.

Pokusíme se načrtnout řešení problému tzv. Hanojských věží. Máme 3 tyče označené I, II a III .Na tyči I je n disků, jejich průměry se směrem k vrcholu tyče postupně zmenšují

Úkol – přenést všechny disky z tyče I na tyč II za podmínek:

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

současně lze přenášet jen jediný disk

disk lze odložit jen na některou tyč

větší disk nesmí být na menším

Provedeme řešení pomocí rekurzivního algoritmu takto:

Procedure Prens (n, I,II,III: integer);

begin

if $n > 0$ then

begin

Prens (n-1, I, III, II);

writeln ('Přenes kotouč z',I,'na',II);

Prens (n-1, III, II, I)

end;

end;

Úloha se rozkládá do tří kroků

1. Přenesení n-1 disků z tyče I na tyč III
2. Přenesení jednoho disku z tyče I na tyč II
3. Přenesení n-1 disků z tyče III na tyč II

krok 1. a 3. řeší stejnou úlohu jako je původní, pouze - s menším počtem kotoučů

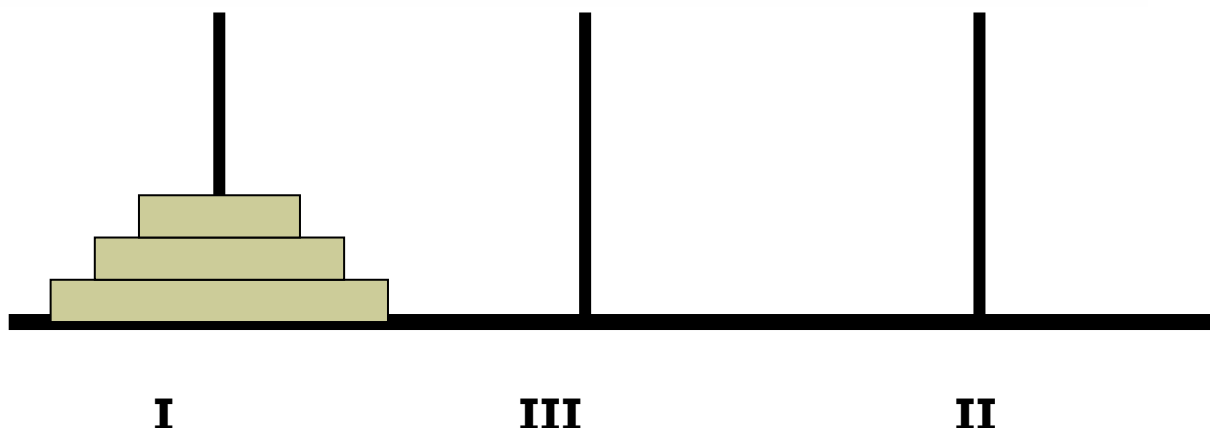
- s jinými tyčemi (odkud kam se přenáší)

krok 2. znamená přenos jednoho disku

kroky 1. a 3. se řeší stejně jako původní úloha opět rozkladem do tří dílčích kroků

Tento projekt je spolufinancován z prostředků ESF a státního rozpočtu České republiky.

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ



3 Závěr

To , co jsme si pověděli o algoritmizaci úloh je samozřejmě jen jednoduchý úvod do tématiky . Mimochodem tvorba jakéhokoli programu úzce souvisí se schopností buď vytvořit optimální algoritmus nebo použít známý algoritmus a zasadit je do správného rámce. V textu jsme si ukázali, že nestačí úlohu vyřešit, ale vyřešit ji do jisté míry optimálně.

4 Použitá literatura

Literatura:

WROBLEWSKI, P. Algoritmy. Datové struktury a programovací techniky. 1. vyd. Brno: Computer Press, 2004. 351 s. ISBN 80-251-0343-9
7178-463-X.

TOPFER P., Algoritmy a programovací techniky . Praha: Grada Publishing a. s., 2007.
322 s. ISBN 9788071963509

TOPFER P., Programování - Rekurze, Praha ,Fortuna ,1998

TOPFER P. ,Základy programování v úlohách, Praha, Scientia, 1997. ISBN 80-7183-076-3.

5 Kontakt na autora

Václav Kohout RNDr.

ZČU, FPE , katedra matematiky , Klatovská 51, Plzeň
kohout@kmt.zcu.cz

ODBORNÝ KEMP PŘÍRODOVĚDNÝCH OBORŮ PROGRAMOVÁNÍ

ALGORITMIZACE ÚLOH - ZÁKLADY ALGORITMIZACE ÚLOH

Václav Kohout

1 Úvod

První částí , kterou se budeme v kempu programování zabývat je obecný pojem algoritmizace úloh. Jde o základní prvek při sestavování těla programu v libovolném programovacím jazyku. Pro každou úlohu, kterou chceme v životě řešit se snažíme najít správný algoritmus (důkladněji první části tohoto textu). Samozřejmě , že pro daný problém lze nalézt více algoritmů řešení. Některé jsou méně vhodné, některé jsou výborné a optimální.

2 Algoritmizace úloh

V této části se budeme zabývat definicí algoritmu a vytyčením jeho základních vlastností. Většinu základních tvrzení , definic , poznámek budeme zároveň ilustrovat příklady, které nás budou nutit k procesu algoritmizace úloh.

2.1 Základy algoritmizace úloh

Algoritmus je schematický postup pro řešení určitého druhu problémů, který je prováděn pomocí konečného množství přesně definovaných kroků. Ačkoliv se dnes tento pojem používá především v informatice a přírodních vědách obecně, tak je jeho působnost daleko širší (kuchyňské recepty, návody a postupy...). Všimněme si , že přesná definice pojmu algoritmu chybí . Důležité je, že stanoví postup jak vyřešit daný problém pomocí konečného počtu kroků. Zároveň se všimněte, že někdy k řešení problému nestačí jen znát algoritmus, musíme mít také schopnost algoritmus provést v žádané kvalitě.

Můžeme znát algoritmus tvorby sochy Davida , ale jistě se nám ho nepodaří v dané kvalitě provést.

Každý algoritmus by měl mít několik základních vlastností:

Elementárnost:

Algoritmus se skládá z konečného počtu jednoduchých (elementárních) kroků.

Obecnost :

Pomocí algoritmu řešíme obecnou třídu problémů . Požadujeme , aby vstupní hodnoty měli určité vlastnosti a po zpracování algoritmu získáváme výstupní údaje. Snažíme se proto

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

řešit pomocí algoritmu obecné problémy a ne konkrétní (např. vypočítat DPH z částky 100 000 Kč).

Determinovanost:

Každý algoritmus se skládá z položek, které jsou jasně a jednoznačně vymezeny. Znamená to mimo jiné , že v každé situaci víme jak bude algoritmus probíhat. Víme, že při konstantních vstupních hodnotách dostáváme stejné výsledky. Existují ale typy algoritmů, které tyto požadavky nesplňují (tzv. pravděpodobnostní algoritmy viz dále) . Pro popis algoritmů byly navrženy programovací jazyky resp. symboly, které přesně definují, co se v dané chvíli v algoritmu děje.

Konečnost :

Každý algoritmus musí skončit v konečném počtu kroků. Tento počet kroků může být libovolně velký (podle rozsahu a hodnot vstupních údajů), ale pro každý jednotlivý vstup musí být konečný. Některé postupy , které splňují ostatní požadavky kladené na algoritmus , ale nesplňují požadavek konečnosti někdy také řadíme k algoritmům. Většinou se jedná o problémy numerické matematiky. Klasickým představitelem může být algoritmus hledání do šířky v grafech , numerické metody postup při hledání kořenů daného polynomu vyššího stupně.

Výstup :

Podobně jako vstupní data pro daný algoritmus očekáváme výstupní data jako výsledek chodu algoritmu. Např. algoritmy setřídění dat mají jako vstup množinu údajů a výstupem jsou dané údaje upravené podle třídících kritérií.

Samotné algoritmy můžeme rozdělovat pomocí různých kritérií:

Algoritmy můžeme klasifikovat různými způsoby. Mezi důležité druhy algoritmů patří:

- Rekurzivní algoritmy, které využívají (volají) samy sebe.
- Iterativní algoritmy – spočívá v opakování své určité části.
- Pravděpodobnostní provádějí některá rozhodnutí náhodně.
- Sériový algoritmus vykonává všechny kroky v sérii .
- Paralelní algoritmus vykonává některé kroky zároveň – v tzv. vláknech
- Distribuovaný algoritmus vykonává jednotlivé kroky na více než jednom stroji.
- Genetické algoritmy pracují na základě napodobování biologických procesů,
- Heuristický algoritmus si za cíl neklade nalézt přesné řešení, ale pouze nějaké vhodné přiblížení; používá se v situacích, kdy dostupné zdroje (např. čas) nepostačují na využití exaktních algoritmů (nebo pokud nejsou žádné vhodné exaktní algoritmy vůbec známy).

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Přitom jeden algoritmus může patřit zároveň do více skupin; například může být zároveň rekurzivní a genetický.

Některými z výše uvedených typů se budeme dále zabývat.

Dále uvedeme příklady dvou známých algoritmů, které se dále i pokusíme realizovat pomocí počítačového programu.

Největší společný dělitel

Máme dvě čísla m a n , cílem je nalézt jejich největšího společného dělitele.

Běžný přístup: Rozložíme obě čísla na prvočinitele. Největší společný dělitel je společnou částí těchto rozkladů.

Euklidův algoritmus: Rozdílem obou čísel $m-n$ nahradíme větší číslo tj m . Opakujeme tak dlouho, až jsou obě čísla stejná - to je největší společný dělitel.

Vidíme, že Euklidův algoritmus je velmi neprůhledný, nahrazuje však násobení a dělení jednoduchým odčítáním.

Nalezení prvočísel

Běžný přístup: Zkoumané číslo dělíme přirozenými čísly. Pokud není dělitelné, je to prvočíslo. Samozřejmě, že stačí dělit jen čísla, která jsou nejvýše rovná odmocnině z daného čísla.

Erastenovo síto: Napíšeme si řadu všech přirozených čísel, ve které jsou obsažena nás zajímající čísla. Číslo 1 necháme. Číslo 2 necháme a vyškrtneme každé druhé číslo. Každé další nevyškrtnuté číslo necháme a vyškrtneme jeho násobky - tj. necháme 3 a škrtneme jeho násobky, necháme 5 a škrtneme jeho násobky a tak dále. Z dané množiny všech čísel postupně mizí čísla, jež jsou násobky zjištěných prvočísel.

Úloha vedoucí na algoritmus

Představme si, že sbíráme pamětní mince. Po určité době jich máme větší množství a snažíme se je skládat do sloupců. Jestliže je složíme do sloupců po dvou, zbývá jedna mince. Jestliže jsou ve sloupcích mince 3, zbývají nakonec dvě mince. při 4 mincích ve sloupci zbývají 3 atd. Nakonec při počtu mincí 7 nezbyla žádná mince. Úkolem je nalézt aspoň jedno řešení problému.

Na tomto příkladu je zřejmé, že je možné provést zobecnění, kdy kroků při tvorbě sloupců bude např. n a teprve po n krocích nebude zbývat žádná mince mimo sloupec.

3 Závěr

To, co jsme si pověděli o algoritmizaci úloh je samozřejmě jen jednoduchý úvod do tematiky. Mimochodem tvorba jakéhokoli programu úzce souvisí se schopností buď vytvořit optimální algoritmus nebo použít známý algoritmus a zasadit jej do správného rámce. V textu jsme si ukázali, že nestačí úlohu vyřešit, ale vyřešit ji do jisté míry optimálně.

4. Použitá literatura

Literatura:

WROBLEWSKI, P. Algoritmy. Datové struktury a programovací techniky. 1. vyd. Brno: Computer Press, 2004. 351 s. ISBN 80-251-0343-9

7178-463-X.

TOPFER P., Algoritmy a programovací techniky. Praha: Grada Publishing a. s., 2007. 322 s. ISBN 9788071963509

TOPFER P., Programování - Rekurze, Praha, Fortuna, 1998

TOPFER P., Základy programování v úlohách, Praha, Scientia, 1997. ISBN 80-7183-076-3.

5 Kontakt na autora

Václav Kohout RNDr.

ZČU, FPE, katedra matematiky, Klatovská 51, Plzeň

kohout@kmt.zcu.cz

ODBORNÝ KEMP PŘÍRODOVĚDNÝCH OBORŮ PROGRAMOVÁNÍ

ALGORTMIZACE ÚLOH - VÝKONNOST ALGORITMŮ

Václav Kohout

1 Úvod

První částí , kterou se budeme kempu programování zabývat je obecný pojem algoritmizace úloh. Jde o základní prvek při sestavování těla programu v libovolném programovacím jazyku. Pro každou úlohu, kterou chceme v životě řešit se snažíme najít správný algoritmus (důkladněji první části tohoto textu). Samozřejmě , že pro daný problém lze nalézt více algoritmů řešení. Některé jsou méně vhodné, některé jsou výborné a optimální.

2 Algoritmizace úloh

V této části se budeme zabývat definicí algoritmu a vytyčením jeho základních vlastností. Většinu základních tvrzení , definic , poznámek budeme zároveň ilustrovat příklady, které nás budou nutit k procesu algoritmizace úloh.

2.1 Výkonnost algoritmů

Při posuzování výkonnosti algoritmu přihlížíme většinou ještě k jakému účelu je používán. Při jednoduché práci v úřadě či domácnosti nás nejvíce zajímají algoritmy, které jsou především jednoduché. Takové algoritmy ale většinou neobstojí při komerčním či mnohoúčelovém využití. Pak je zapotřebí využívat ty algoritmy, které daný problém umožňují řešit nejen elegantně , ale také s přiměřenou dávkou komunikace s uživatelem a s dostatečnou rychlostí .

V této části budeme sledovat odpověď na otázku , který ze dvou programů (algoritmů) , které používají pro řešení stejného problému rozdílného přístupu , je účinnější. Již při prvním pohledu je zřejmé, že odpovědi na takovou otázku nebudou jednoduché. Budeme většinou sledovat souběžně dva rozdílné pohledy na tuto otázku.

Nejdříve problém zatížení paměti – ten je u většiny algoritmů nebo programů odstraněn velkou rychlostí přístupu k paměti a také k jejímu obrovskému navýšení. Existují ale algoritmy , které při své práci spotřebovávají obrovské množství paměti, pak je třeba přistoupit k nějaké speciální úpravě takového algoritmu. Například pokud pracujeme s maticemi (tabulkami čísel nebo jinak dvou dimenzionálními poli) řádu 10000 x 10000 musíme umisťovat jen do paměti 100 miliónů čísel . Při operacích s nimi se vše ještě násobí. Ovšem u běžných algoritmů nebo programů nás velikost paměti nebude nijak determinovat.

Druhým závažným faktorem bude doba realizace programu či algoritmu. Pro objektivní měřítko takové doby je nutné zvolit správnou míru výpočetní náročnosti. Taková míra musí jasně vystihovat efektivitu předkládaného programu či algoritmu. Jestliže prohlásíme, že náš

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

algoritmus je nesmírně rychlý a daný problém vyřešil za minutu, nesdělili jsme bohužel žádnou relevantní informaci. Museli bychom ještě vzít v potaz například odpovědi na následující otázky:

1. S jakým druhem počítače pracujeme
2. Jaká je výkonnost procesoru(ů)
3. Probíhal program jako jediný?
4. Jaký kompilátor byl použit při sestavování programu?
5. atd. , atd.

Z tohoto jednoduchého výčtu je na první pohled zřejmé, že takto stanovený čas (běhu programu, algoritmu) není a nemůže být objektivní a zároveň univerzální mírou výpočetní náročnosti.

Každý algoritmus pracuje se vstupními daty , má proto smysl pokusit se stanovit takovou univerzální míru v závislosti na vstupním objemu dat. Pak už jen stačí vhodně zvolit velikost elementární operace a máme měřítko, které je použitelné na každém počítači. Jde tedy o velikost (počet elementárních operací) potřebných k provedení daného programu (algoritmu). Jako elementární operaci většinou bereme prostý součet dvou hodnot, v některých případech ale může být elementární operace rovna například jednomu součtu a součinu zároveň.

3 Závěr

To , co jsme si pověděli o algoritmizaci úloh je samozřejmě jen jednoduchý úvod do tematiky . Mimochodem tvorba jakéhokoli programu úzce souvisí se schopností buď vytvořit optimální algoritmus nebo použít známý algoritmus a zasadit jej do správného rámce. V textu jsme si ukázali, že nestačí úlohu vyřešit, ale vyřešit ji do jisté míry optimálně.

4. Použitá literatura

Literatura:

WROBLEWSKI, P. Algoritmy. Datové struktury a programovací techniky. 1. vyd. Brno: Computer Press, 2004. 351 s. ISBN 80-251-0343-9
7178-463-X.

TOPFER P., Algoritmy a programovací techniky . Praha: Grada Publishing a. s., 2007.
322 s. ISBN 9788071963509

TOPFER P., Programování - Rekurze, Praha ,Fortuna ,1998

TOPFER P. ,Základy programování v úlohách, Praha, Scientia, 1997. ISBN 80-7183-076-3.



INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

5 Kontakt na autora

Václav Kohout RNDr.

ZČU, FPE , katedra matematiky , Klatovská 51, Plzeň

kohout@kmt.zcu.cz

ODBORNÝ KEMP PŘÍRODOVĚDNÝCH OBORŮ PROGRAMOVÁNÍ

ALGORITMIZACE ÚLOH - ČASOVÁ NÁROČNOST ALGORITMŮ

Václav Kohout

1 Úvod

První částí, kterou se budeme kempu programování zabývat je obecný pojem algoritmizace úloh. Jde o základní prvek při sestavování těla programu v libovolném programovacím jazyku. Pro každou úlohu, kterou chceme v životě řešit se snažíme najít správný algoritmus (důkladněji první části tohoto textu). Samozřejmě, že pro daný problém lze nalézt více algoritmů řešení. Některé jsou méně vhodné, některé jsou výborné a optimální.

2 Algoritmizace úloh

V této části se budeme zabývat definicí algoritmu a vytyčením jeho základních vlastností. Většinu základních tvrzení, definic, poznámek budeme zároveň ilustrovat příklady, které nás budou nutit k procesu algoritmizace úloh.

2.1 Časová náročnost algoritmů

V předchozí části jsme si vysvětlili jednoduše výkonnosti algoritmu. Zjistili jsme, že tento pojem je velmi závislý na době průběhu programu resp. algoritmu. Z požadavků na algoritmus víme, že by měl končit v konečném čase. Pro většinu úloh je takovým rozumným čase několik vteřin až dní, ale určitě ne měsíce a roky. Existují algoritmy, pomocí nichž jsme schopni vypočítat přesně například proudění kapaliny v turbíně. Ovšem trestem za tuto přesnost je celkový čas výpočtu. Ten se měří na velmi rychlých strojích na roky.

Abychom byly schopni jednoduše porovnávat časy průběhů jednotlivých algoritmů přistoupíme nejprve k definici asymptotického zápisu času v závislosti na vstupních datech. Označujeme ho v souladu s běžným označením v matematice symbolem O .

Algoritmus probíhá $O(f(x))$, jestliže probíhá stejně rychle nebo rychleji než $f(x)$. Tedy například $O(n)$ znamená, že algoritmus probíhá v souladu se vstupními údaji lineárně. Platí několik základních pravidel pro práci se symbolem O :

$$k \cdot O(f(n)) = O(f(n))$$

$$O(f(n)) + O(f(n)) = O(f(n))$$

$$O(O(f(n))) = O(f(n))$$

$$O(f(n)) \cdot O(g(n)) = O(f(n) \cdot g(n))$$

$$O(f(n) \cdot g(n)) = f(n) \cdot O(g(n))$$

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Nyní uvedeme jednoduchou tabulku s dobou průběhu algoritmu pro různé třídy . Budeme dále předpokládat, že doba průběhu elementární operace bude například 1 mikrosekunda:

	10	20	30	40	50	60
n	0,00001	0,00002	0,00003	0,00004	0,00005	0,00006
n ²	0,0001	0,0004	0,0009	0,0016	0,0025	0,0036
n ³	0,001	0,008	0,027	0,064	0,125	0,216
2 ⁿ	0,001024	1,048576	1073,742	1099512	1,13E+09	1,15E+12
3 ⁿ	0,059049	3486,784	2,06E+08	1,22E+13	7,18E+17	4,24E+22
n!	3,6288	2,43E+12	2,65E+26	8,16E+41	3,04E+58	8,32E+75

Všimněme si, že polynomiální náročnost nevede při malých dávkách dat k příliš vysokým časovým nárokům. Jinak je to s exponenciální náročností. Například pro algoritmus třídy O(2ⁿ) při počtu dat 30 je nutné počítat přibližně s 18 minutami , je-li počet dat například 50 je nutno odhad zvýšit na neuvěřitelných 35,7 let. Časová náročnost algoritmů typu n! je tak velká, že je nelze zrealizovat při běžném počtu dat ani za celý čas existence tohoto vesmíru.

Velmi zajímavé jsou algoritmy, jejichž časová náročnost je typu O(log(n)). Dá se celkem snadno ukázat, že takováto náročnost je příznivější než lineární tj. O(n).

Je nutné podotknout, že algoritmy se měří asymptoticky tedy pro zdánlivě obrovské počty vstupních dat . Pokud bychom měřily skutečnou výkonnost jednotlivých algoritmů pro malé hodnoty n(počet vstupních údajů) , můžeme dojít k jiným výsledkům. Je to skutečně proto, že měříme asymptotickou náročnost . Například porovnáme-li náročnost n³ a 2ⁿ pro až 9 vstupních hodnot, zjistíme , že je náročnější algoritmus třídy n³ . Ovšem od 11 vstupních údajů je již náročnější algoritmus třídy O(2ⁿ).

Při zjišťování náročnosti jednotlivých algoritmů se výtečně hodí některé formulky pro práci s přirozenými čísly.

$$\sum_{i=1}^n i = \frac{n \cdot (n+1)}{2}$$

$$\sum_{i=1}^n i^2 = \frac{n \cdot (n+1) \cdot (2n+1)}{6}$$

$$\sum_{i=1}^n i^3 = \frac{n^2 \cdot (n+1)^2}{4}$$

Pokusíme se nyní zjistit časovou náročnost algoritmu, který se jmenuje Gaussova eliminace. Jde o převedení úpravy matice soustavy (klasicky ve tvaru nxn) na tzv. trojúhelníkový tvar – tvar, kdy pod hlavní diagonálou jsou uvedeny jen samé nulové členy.

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Budeme – li v tomto případě počítat jako elementární operaci jedno násobení a jedno sčítání, získáme postupně počet těchto operací jako:

$$\sum_{k=1}^{n-1} [(n-k)(n-k+1) + (n-k)] = \dots = \frac{n^3}{3} + \frac{n^2}{2} - \frac{5n}{6}$$

Z těchto výpočtů je zřejmé, že daný algoritmus je třídy $O(n^3/3)$.

3. Závěr

To, co jsme si pověděli o algoritmizaci úloh je samozřejmě jen jednoduchý úvod do tématiky. Mimochodem tvorba jakéhokoli programu úzce souvisí se schopností buď vytvořit optimální algoritmus nebo použít známý algoritmus a zasadit jej do správného rámce. V textu jsme si ukázali, že nestačí úlohu vyřešit, ale vyřešit ji do jisté míry optimálně.

4. Použitá literatura

Literatura:

WROBLEWSKI, P. Algoritmy. Datové struktury a programovací techniky. 1. vyd. Brno: Computer Press, 2004. 351 s. ISBN 80-251-0343-9
7178-463-X.

TOPFER P., Algoritmy a programovací techniky. Praha: Grada Publishing a. s., 2007.
322 s. ISBN 9788071963509

TOPFER P., Programování - Rekurze, Praha, Fortuna, 1998

TOPFER P., Základy programování v úlohách, Praha, Scientia, 1997. ISBN 80-7183-076-3.

5 Kontakt na autora

Václav Kohout RNDr.

ZČU, FPE, katedra matematiky, Klatovská 51, Plzeň
kohout@kmt.zcu.cz

ODBORNÝ KEMP PŘÍRODOVĚDNÝCH OBORŮ PROGRAMOVÁNÍ

ALGORITMY UŽÍVANÉ V TEORII GRAFŮ - STROMY A KOSTRY, NEJKRATŠÍ CESTA

Václav Kohout

1 Úvod

V této části se seznámíme s několika základními algoritmy v jedné diskrétní struktuře v teorii grafů. Grafy v matematice, ale i v přírodních či společenských vědách mají široké uplatnění. Lze pomocí nich zobrazit mnoho různých problémů, které jsou na první pohled velmi obtížné, ale pomocí popisu v grafu se jeví jednodušší. Například můžeme chápat jízdní řád jak jistý neorientovaný graf, v případě letového jízdního řádu orientovaného grafu. Podobně je určitou aplikací teorie grafů schéma, které popisuje postup prací na složité stavbě, v případě komplikovaného projektu atd.

2.1 Stromy a kostry

Graf nazýváme souvislým, jestliže každé jeho dva vrcholy jsou spojeny neorientovanou cestou. Les je graf, který neobsahuje kružnici. Strom je graf, který neobsahuje kružnici a je souvislý. Platí tvrzení, že každý souvislý graf má faktor, který je stromem (faktor grafu je podgraf, který má stejnou množinu vrcholů, vznikne tedy vynecháním některých hran).

Faktor grafu G , který je stromem, nazýváme kostrou grafu G .

Je dán souvislý graf G , jehož hrany jsou ohodnoceny reálnými čísly, které budeme nazývat cenami. Kostru grafu nazveme nejlevnější kostrou, jestliže má nejmenší cenu, tj. nejmenší součet ohodnocených hran (mezi všemi kostrami grafu G). Používá se název minimální kostra.

Algoritmus pro hledání nejlevnější kostry

Vstup: Souvislý graf a ohodnocení hran cenami $c:E(G) \rightarrow \mathbb{R}$.

Pomocná proměnná: Faktor F grafu G neobsahující kružnici.

1. [Inicializace] Zvolíme diskrétní graf D s množinou vrcholů $V(D) = V(G)$
2. [Test zakončení] Je – li les D stromem, výpočet končí. D je hledaná nejlevnější kostra.
3. [Volba hrany] Zvolme libovolně hranu e s touto vlastností:

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Hrana e spojuje dvě různé komponenty lesa D a alespoň pro jednu z těchto komponent (označme ji K) platí , že cena hrany e je nejmenší ze všech hran z množiny $W_G(A)$.

4. [Spojení komponent] Hranu e přidejme k lesu D (tím snížíme počet komponent) a pokračujeme krokem 2.

Existují varianty předchozího algoritmu známé jako Borůvkův nebo hladový algoritmus: Hrany grafu uspořádáme podle jejich cen do neklesajícího pořadí. Pak je v tomto pořadí probíráme a do postupně vytvářeného grafu D přidáváme ty z nich, které v grafu D nezpůsobí vznik kružnice. Nebo jiná varianta známá jako Jarníkův algoritmus : Začneme z libovolného vrcholu a postupně k němu přidáváme vrcholy a hrany tak, že v každé fázi výpočtu máme strom. Přidávanou hranu přitom vždy vybíráme tak, aby měla nejmenší cenu z množiny $W_G(A)$, kde A je množina vrcholů stromu.

2.2 Algoritmus pro hledání nejkratší cesty

Mějme orientovaný graf G , jehož každá hrana $e \in E(G)$ je ohodnocena reálným číslem $a(e)$ nazývaným délkou hrany. Délka cesty je součet délek všech jednotlivých hran tvořících cestu . Jsou – li x,y dva vrcholy grafu, pak vzdálenost $u(x,y)$ z vrcholu x do vrcholu y definujeme jako délku nejkratší cesty z x do y , pokud vůbec nějaká cesta z x do y existuje. Jestliže neexistuje , definujeme vzdálenost $u(x,y) = \infty$.

Celý algoritmus by mohl vypadat takto:

1. [Inicializace] $U(r):=0$, pro $v \neq r$ položíme $U(v) = \infty$

2. [Zpracování celé množiny hran] Pro všechny hrany grafu provedeme v libovolném pořadí krok 2a. Po zpracování všech hran pokračujeme podle kroku 3.

2a. [Zpracování hrany e] Jestliže $U(PV(e)) + a(e) < U(KV(e))$, provedeme $U(KV(e)):= U(PV(e))+ a(e)$

3. [Test zakončení] Jestliže během provádění kroku 2. nedošlo k žádné změně hodnoty U , výpočet končí. V opačném případě pokračujeme podle kroku 2.

3 Závěr

V níže uvedené literatuře je uvedeno velké množství rozšiřujících informací o tom, jak využít elegantně zmíněné algoritmy , ale nejen je , v mnoha zajímavých souvislostech..

4 Použitá literatura

Literatura:

WROBLEWSKI, P. Algoritmy. Datové struktury a programovací techniky. 1. vyd. Brno: Computer Press, 2004. 351 s. ISBN 80-251-0343-9
7178-463-X.

DEMEL, J. Grafy. 1. vyd. Praha: SNTL, 1989, str.180



evropský
sociální
fond v ČR



EVROPSKÁ UNIE



MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ,
MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY



OP Vzdělávání
pro konkurenceschopnost



INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

MATOUŠEK J., NEŠETŘIL J. Kapitoly z diskretní matematiky, Praha, Karolinum, 2003, str. 381, ISBN 80-246-0084-6

5 Kontakt na autora

Václav Kohout RNDr.

ZČU, FPE, katedra matematiky, Klatovská 51, Plzeň

kohout@kmt.zcu.cz

ODBORNÝ KEMP PŘÍRODOVĚDNÝCH OBORŮ PROGRAMOVÁNÍ

ALGORITMY UŽÍVANÉ V TEORII GRAFŮ - TEORETICKÝ ÚVOD

Václav Kohout

1 Úvod

V této části se seznámíme s několika základními algoritmy v jedné diskrétní struktuře v teorii grafů. Grafy v matematice, ale i v přírodních či společenských vědách mají široké uplatnění. Lze pomocí nich zobrazit mnoho různých problémů, které jsou na první pohled velmi obtížné, ale pomocí popisu v grafu se jeví jednodušší. Například můžeme chápat jízdní řád jak jistý neorientovaný graf, v případě letového jízdního řádu orientovaného grafu. Podobně je určitou aplikací teorie grafů schéma, které popisuje postup prací na složité stavbě, v případě komplikovaného projektu atd.

2 Teoretický úvod

Orientovaný graf definujeme jako trojici $G=(V,E,\varepsilon)$ tvořená konečnou množinou V , jejíž prvky nazýváme vrcholy, konečnou množinou E , jejíž prvky nazýváme orientovanými hranami, a zobrazením $\varepsilon : E \rightarrow V^2$, které nazýváme vztahem incidence a která přiřazuje každé hraně $e \in E$ uspořádanou dvojici vrcholů $\varepsilon(e) = (x,y) \in V^2$. Vrchol x nazýváme počátečním vrcholem hrany e , značíme jej $PV(e)$, vrchol y nazýváme koncovým vrcholem hrany e a značíme jej $KV(e)$. O vrcholech x,y pak říkáme, že jsou incidentní s hranou e a také naopak hrana e je incidentní s vrcholy x,y . Jestliže $PV(e) = KV(e)$, nazýváme hranu e smyčkou. Orientovaný graf, který nemá žádnou smyčku, se nazývá orientovaný graf bez smyček.

Neorientovaný graf je trojice $G=(V,E,\varepsilon)$ tvořená konečnou množinou V , jejíž prvky nazýváme vrcholy, konečnou množinou E , jejíž prvky nazýváme neorientovanými hranami, a zobrazením ε , které přiřazuje každé hraně $e \in E$ jedno nebo dvouprvkovou množinu vrcholů. Těmito vrcholům říkáme krajní vrcholy hrany e . Je-li hrana incidentní pouze s jedním vrcholem, nazývá se smyčkou.

Dále zavedeme potřebná označení pro další práci. Je-li dán graf G , pak množinu všech jeho vrcholů budeme označovat $V(G)$ a množinu všech jeho hran $E(G)$. Velikost konečné množiny M budeme označovat symbolem $|M|$.

$V_G^+(x) = \{z \in V; (x,z) \in \varepsilon(E)\}$ = množina následníků vrcholu x , tj. množina všech vrcholů, do nichž vede hrana z vrcholu x

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

$V_G^-(x) = \{z \in V; (z, x) \in \mathcal{E}(E)\}$ = množina předchůdců vrcholu x , tj. množina všech vrcholů, z nichž vede hrana do vrcholu x

$V_G(x) = V_G^+(x) \cup V_G^-(x)$ = množina sousedů vrcholu x , tj. množina všech vrcholů spojených hranou s vrcholem x

$V_G(A) = \bigcup_{x \in A} V_G(x)$, tj. množina všech vrcholů spojených hranou s některým vrcholem z množiny A

$E_G^+(x) = \{e \in E; PV(e) = x\}$ = výstupní okolí vrcholu x , tj. množina všech hran s počátečním vrcholem x

$E_G^-(x) = \{e \in E; KV(e) = x\}$ = vstupní okolí vrcholu x , tj. množina všech hran s koncovým vrcholem x

$E_G(x) = E_G^+(x) \cup E_G^-(x)$ = okolí vrcholu x , tj. množina všech hran incidentních s vrcholem x

$m_G^+(x, y) = |E_G^+(x) \cap E_G^-(y)|$ = násobnost orientované hrany, tj. počet hran s počátečním vrcholem x a s koncovým vrcholem y

$m_G(x, y) = |E_G(x) \cap E_G(y)|$, tj. počet hran spojujících vrcholy x a y

Posloupnost vrcholů a hran $v_0, e_1, v_1, e_2, v_2, \dots, e_k, v_k$ nazýváme orientovaným sledem, jestliže pro každou hranu e_i z této posloupnosti platí $PV(e_i) = v_{i-1}$ a $KV(e_i) = v_i$. Posloupnost $v_0, e_1, v_1, e_2, v_2, \dots, e_k, v_k$ nazýváme neorientovaným sledem, jestliže každá hrana e_i z této posloupnosti spojuje vrcholy v_{i-1} a v_i . Vrchol v_0 nazýváme počátečním a vrchol v_k koncovým vrcholem sledu.

Orientovaný (neorientovaný) sled, v němž se žádná hrana neopakuje, nazýváme orientovaným (neorientovaným) tahem. Orientovaný (neorientovaný) sled, v němž se neopakuje žádný vrchol, nazýváme orientovanou (neorientovanou) cestou.

Sled, který má alespoň jednu hranu a jehož počáteční a koncový vrchol splývají, nazýváme uzavřeným tahem. Podobně mluvíme o uzavřeném tahu a cestě. Pro uzavřenou cestu se používají speciální názvy: kružnice je neorientovaná uzavřená cesta a cyklus je orientovaná uzavřená cesta.

2.1 Způsob zápisu grafu do počítače

Nechť G je orientovaný graf. Zvolíme – li pořadí jeho vrcholů v_1, \dots, v_n , můžeme grafu G přiřadit matici sousednosti M_G^+ řádu $n \times n$ předpisem

$$m_{ij} = m^+(v_i, v_j)$$

Pro neorientované grafy definujeme matici sousednosti M_G předpisem

$$m_{ij} = m(v_i, v_j).$$

Matice sousednosti takového grafu je potom samozřejmě symetrická.

Nechť opět je G orientovaný graf bez smyček. Zvolíme – li (libovolně, ale pevně) nejen pořadí vrcholů v_1, \dots, v_n , ale i pořadí hran e_1, \dots, e_m , můžeme grafu G přiřadit matici incidence B_G typu $n \times m$ pomocí předpisu

$$b_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{jestliže } v_i \text{ je počátečním vrcholem hrany } e_j \\ -1, & \text{jestliže } v_i \text{ je koncovým vrcholem hrany } e_j \\ 0, & \text{v ostatních případech} \end{cases}$$

Graf dále můžeme popsat pomocí seznamu vrcholů a seznamu hran. Množiny vrcholů a hran jsou popsány výčtem prvků, u každé hrany se uvádí dvojice vrcholů (počáteční a koncový). Neorientované grafy se popisují buď pomocí libovolné orientace, nebo pomocí symetrické orientace.

Další možností je popsat množinu vrcholů pomocí výčtu, pro každý vrchol je uveden seznam hran, které z něj vycházejí. Někdy je vhodné pro každý vrchol uvádět dva seznamy: $E^+(x)$ a $E^-(x)$. Obě posledně uvedené možnosti jsou přehledné a úsporné z hlediska paměti.

3 Závěr

V níže uvedené literatuře je uvedeno velké množství rozšiřujících informací o tom, jak využít elegantně zmíněné algoritmy, ale nejen je, v mnoha zajímavých souvislostech..



INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

4 Použitá literatura

Literatura:

WROBLEWSKI, P. Algoritmy. Datové struktury a programovací techniky. 1. vyd. Brno: Computer Press, 2004. 351 s. ISBN 80-251-0343-9

7178-463-X.

DEMEL, J. Grafy. 1. vyd. Praha: SNTL, 1989, str.180

MATOUŠEK J., NEŠETŘIL J. Kapitoly z diskretní matematiky, Praha, Karolinum, 2003, str. 381, ISBN 80-246-0084-6

5 Kontakt na autora

Václav Kohout RNDr.

ZČU, FPE, katedra matematiky, Klatovská 51, Plzeň

kohout@kmt.zcu.cz

ODBORNÝ KEMP PŘÍRODOVĚDNÝCH OBORŮ PROGRAMOVÁNÍ

ALGORITMY UŽÍVANÉ V TEORII GRAFŮ - PROHLEDÁVÁNÍ GRAFŮ DO ŠÍŘKY

Václav Kohout

1 Úvod

V této části se seznámíme s několika základními algoritmy v jedné diskrétní struktuře v teorii grafů. Grafy v matematice, ale i v přírodních či společenských vědách mají široké uplatnění. Lze pomocí nich zobrazit mnoho různých problémů, které jsou na první pohled velmi obtížné, ale pomocí popisu v grafu se jeví jednodušší. Například můžeme chápat jízdní řád jak jistý neorientovaný graf, v případě letového jízdního řádu orientovaného grafu. Podobně je určitou aplikací teorie grafů schéma, které popisuje postup prací na složité stavbě, v případě komplikovaného projektu atd.

2 Prohledávání grafů

Prohledáváním grafu rozumíme systematický postup, který umožňuje řešit některé následující úlohy:

1. Zjistit, zda je vrchol t dostupný z vrcholu r
2. Najít množinu všech vrcholů dostupných z vrcholu r
3. Najít jakoukoli cestu z vrcholu r do vrcholu t
4. Najít jakékoli cesty z vrcholu r do všech vrcholů, které jsou z něj dostupné
5. Pro všechny vrcholy, které jsou dostupné z vrcholu r , provést nějakou operaci.

Obecným schématem prohledávání grafu je princip značkování vrcholů. Vrcholům postupně přiřazujeme značky. Má-li vrchol značku, znamená to, že do něj vede cesta z daného výchozího vrcholu r .

Algoritmus značkování vrcholů:

1. [Inicializace] Označujeme vrchol r , ostatní vrcholy jsou bez značky
2. [Výběr hrany] Vybereme libovolnou hranu e , jejíž počáteční vrchol má značku a koncový vrchol nikoli. Jestliže taková hrana neexistuje, výpočet končí.

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

3. [Značkování] Označujeme koncový vrchol hrany e a pokračujeme podle kroku 2

Algoritmus značkování vrcholů končí nejvýše po $|V(G)| - 1$ opakování kroků 2 a 3. Tedy náročnost algoritmu je $O(n)$, kde n je počet vrcholů grafu.

Jednoduchou úpravou předchozího algoritmu, můžeme navíc i hodnotu konkrétní cesty. Stačí k tomu v kroku 3 každému vrcholu, který je označován přiřadit například hodnotu $ODKUD(v) := e$, kde e je hrana vybraná v kroku 2.

Podobně úpravou můžeme nalézt cestu mezi dvěma konkrétními vrcholy, můžeme hledat v grafu kružnici atd.

2.2.1 Prohledávání grafu do šířky

Princip tohoto způsobu spočívá ve značkování tak, že označujeme primární vrchol, poté všechny jeho sousedy, poté sousedy těchto sousedů atd. Tím získáme nejkratší cesty tj. cesty s nejmenším počtem hran.

Algoritmus hledání do šířky:

Vstup: Orientovaný graf G a jeho vrchol r .

Pomocné proměnné: Všechny vrcholy, do nichž bude nalezena cesta budou označovány a budou jim přiřazeny hodnoty $ODKUD$ a $VZDALENOST$. Dále použijeme seznam $FRONTA$, který bude obsahovat ty vrcholy, které již byly označovány, ale z nichž jsme ještě nezkoumali možnost dalšího postupu.

1. [Inicializace] Označujeme vrchol r , ostatní vrcholy jsou bez značek. Položme $VZDALENOST := 0$, seznam $FRONTA$ obsahuje jen vrchol r
2. [Test ukončení] Je-li seznam $FRONTA$ prázdný, algoritmus končí
3. [Volba vrcholu] Ze začátku seznamu $FRONTA$ odebereme vrchol a označíme jej v
4. [Postup do šířky] Pro každého následníka w vrcholu v , který není označován, provedeme tyto operace :

označujeme vrchol w ; $ODKUD(w) :=$ hrana vedoucí z v do w ;

$VZDALENOST(w) := VZDALENOST(v) + 1$; vrchol w přepíšeme na konec seznamu $FRONTA$.

Po zpracování všech následníků pokračujeme podle kroku 2.

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Časové nároky algoritmu jsou $O(n + m)$, kde n je počet vrcholů a m je počet hran. Pro hledání do šířky je podstatné, že ze seznamu *FRONTA* odebíráme vždy ten vrchol, který je v něm nejdéle. Takováto struktura se nazývá *fronta*.

3 Závěr

V níže uvedené literatuře je uvedeno velké množství rozšiřujících informací o tom, jak využít elegantně zmíněné algoritmy, ale nejen je, v mnoha zajímavých souvislostech..

4 Použitá literatura

Literatura:

WROBLEWSKI, P. Algoritmy. Datové struktury a programovací techniky. 1. vyd. Brno: Computer Press, 2004. 351 s. ISBN 80-251-0343-9

7178-463-X.

DEMEL, J. Grafy. 1. vyd. Praha: SNTL, 1989, str.180

MATOUŠEK J., NEŠETŘIL J. Kapitoly z diskretní matematiky, Praha, Karolinum, 2003, str. 381, ISBN 80-246-0084-6

5 Kontakt na autora

Václav Kohout RNDr.

ZČU, FPE, katedra matematiky, Klatovská 51, Plzeň

kohout@kmt.zcu.cz

ODBORNÝ KEMP PŘÍRODOVĚDNÝCH OBORŮ PROGRAMOVÁNÍ

ALGORITMY UŽÍVANÉ V TEORII GRAFŮ - PROHLEDÁVÁNÍ GRAFŮ DO HLOUBKY

Václav Kohout

1 Úvod

V této části se seznámíme s několika základními algoritmy v jedné diskrétní struktuře v teorii grafů. Grafy v matematice, ale i v přírodních či společenských vědách mají široké uplatnění. Lze pomocí nich zobrazit mnoho různých problémů, které jsou na první pohled velmi obtížné, ale pomocí popisu v grafu se jeví jednodušší. Například můžeme chápat jízdní řád jak jistý neorientovaný graf, v případě letového jízdního řádu orientovaného grafu. Podobně je určitou aplikací teorie grafů schéma, které popisuje postup prací na složité stavbě, v případě komplikovaného projektu atd.

2.2.2 Prohledávání grafu do hloubky

V rámci toho algoritmu prohledáváme graf tak, že se důsledně vracíme po cestě, z které jsme do koncového vrcholu přišli.

Algoritmus hledání do hloubky:

Vstup: Orientovaný graf G a jeho vrchol r .

Pomocné proměnné: Seznam TRASA bude vždy obsahovat posloupnost hran tvořících cestu z výchozího vrcholu v .

1. [Inicializace] $v:=r$; TRASA:= \emptyset ; označujeme vrchol r , ostatní vrcholy jsou bez značek
2. [Volba hrany e] Vezmeme některou dosud nepoužitou hranu e začínající ve vrcholu v a pokračujeme podle kroku 2. Pokud taková hrana neexistuje pokračujeme podle kroku 5.
3. [Test vhodnosti hrany e] Označme w koncový vrchol hrany e . Je-li vrchol w označován, pokračujeme podle kroku 2, v opačném případě podle kroku 4.
4. [Postup do hloubky] Hranu e připsíme na konec seznamu TRASA, dosadíme $v:=w$ a označujeme vrchol v . Pokračujeme krokem 2.

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

5. [Návrat z vrcholu v] Je-li seznam TRASA neprázdný, odebereme z jeho konce hranu e a její počáteční vrchol označíme v . Pokračujeme podle kroku 2. Je-li seznam TRASA prázdný, výpočet končí.

Časové nároky jsou stejné jako u algoritmu hledání do šířky tedy $O(n+m)$. Pro tento algoritmus je podstatné, že ze seznamu TRASA odebíráme na témže konci jako přidáváme (nejnovější prvky). Tato datová struktura se nazývá *zásobník*.

Orientovaná cesta z vrcholu r do vrcholu v je obsazena v seznamu TRASA vždy ve chvíli, kdy je vrchol značkován. Obsah seznamu TRASA se však během výpočtu mění. Požadujeme – li zachování informace o nalezených cestách i po ukončení výpočtů, lze předchozí algoritmus doplnit o vytváření proměnné ODKUD. Po této úpravě je seznam TRASA již zbytečný, neboť v kroku 5 lze k návratu z vrcholu v použít hodnotu ODKUD(v).

Snadnou úpravou předchozího algoritmu lze také dosáhnout toho, že se seznamu TRASA vyskytnou posloupnosti hran odpovídající všem cestám začínajícím ve vrcholu v . Úprava algoritmu spočívá v tom, že v kroku 5 při návratu z vrcholu v smažeme jeho značku a všechny hrany z $E^+(v)$ budeme opět pokládat za dosud nepoužité. Přijdeme-li pak někdy znovu (ale jinou cestou) do tohoto vrcholu, budeme znovu zkoumat všechny způsoby pokračování. Označkovány budou pouze ty vrcholy, které leží na cestě obsažené v seznamu TRASA.

3 Závěr

V níže uvedené literatuře je uvedeno velké množství rozšiřujících informací o tom, jak využít elegantně zmíněné algoritmy, ale nejen je, v mnoha zajímavých souvislostech..

4 Použitá literatura

Literatura:

WROBLEWSKI, P. Algoritmy. Datové struktury a programovací techniky. 1. vyd. Brno: Computer Press, 2004. 351 s. ISBN 80-251-0343-9
7178-463-X.

DEMEL, J. Grafy. 1. vyd. Praha: SNTL, 1989, str.180

MATOUŠEK J., NEŠETŘIL J. Kapitoly z diskrétní matematiky, Praha, Karolinum, 2003, str. 381, ISBN 80-246-0084-6

5 Kontakt na autora

Václav Kohout RNDr.

ZČU, FPE, katedra matematiky, Klatovská 51, Plzeň

kohout@kmt.zcu.cz

ODBORNÝ KEMP PŘÍRODOVĚDNÝCH OBORŮ PROGRAMOVÁNÍ

ALGORITMY UŽÍVANÉ V TEORII GRAFŮ - BACKTRACKING

Václav Kohout

1 Úvod

V této části se seznámíme s několika základními algoritmy v jedné diskrétní struktuře v teorii grafů. Grafy v matematice, ale i v přírodních či společenských vědách mají široké uplatnění. Lze pomocí nich zobrazit mnoho různých problémů, které jsou na první pohled velmi obtížné, ale pomocí popisu v grafu se jeví jednodušší. Například můžeme chápat jízdní řád jak jistý neorientovaný graf, v případě letového jízdního řádu orientovaného grafu. Podobně je určitou aplikací teorie grafů schéma, které popisuje postup prací na složité stavbě, v případě komplikovaného projektu atd.

2 Backtracking

Metoda prohledávání do hloubky je základem poměrně obecné metody řešení kombinatorických úloh tzv. backtrackingu. Metodu lze použít v těch případech, kdy řešení úlohy můžeme považovat za konečnou posloupnost omezené délky, přičemž každý prvek posloupnosti musí být vybrán z předem dané konečné množiny. Všechny posloupnosti je tedy konečně mnoho. Některé posloupnosti pokládáme za tzv. přípustná řešení. Úkolem je najít nějaké přípustné řešení, pro které předem daná účelová funkce nabývá svého minima nebo maxima.

Množinu všech posloupností pokládáme za vrcholy orientovaného grafu. Následníky posloupnosti (vrcholy) jsou všechna prodloužení o jeden prvek. Tento graf se nazývá strom řešení. Každý vrchol je v něm dostupný z prázdné posloupnosti po jedné cestě.

Nejjednodušší verze backtrackingu spočívá v prohledání stromu řešení do hloubky, přičemž evidujeme vždy nejlepší dosud nalezené řešení. Samozřejmě má smysl prodloužovat jen posloupnosti, u nichž je naděje, že mohou být prodlouženy na přípustné řešení. Pokud jsme tedy schopni s jistotou určit, že žádné prodloužení nějaké posloupnosti není přípustné, můžeme ušetřit čas tím, že prohledávání příslušného podstromu přeskočíme.

Použití tohoto algoritmu je zpravidla časově velmi náročné.

3 Závěr

V níže uvedené literatuře je uvedeno velké množství rozšiřujících informací o tom, jak využít elegantně zmíněné algoritmy, ale nejen je, v mnoha zajímavých souvislostech.



INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

4 Použitá literatura

Literatura:

WROBLEWSKI, P. Algoritmy. Datové struktury a programovací techniky. 1. vyd. Brno: Computer Press, 2004. 351 s. ISBN 80-251-0343-9 7178-463-X.

DEMEL, J. Grafy. 1. vyd. Praha: SNTL, 1989, str.180

MATOUŠEK J., NEŠETŘIL J. Kapitoly z diskretní matematiky, Praha, Karolinum, 2003, str. 381, ISBN 80-246-0084-6

5 Kontakt na autora

Václav Kohout RNDr.

ZČU, FPE, katedra matematiky, Klatovská 51, Plzeň

kohout@kmt.zcu.cz

ODBORNÝ KEMP PŘÍRODOVĚDNÝCH OBORŮ PROGRAMOVÁNÍ

ALGORITMY NUMERICKÉ MATEMATIKY - GAUSSŮV ALGORITMUS

Václav Kohout

1. Úvod

V této části se budeme zabývat užitečnou třídou algoritmů, jde o skupinu algoritmů numerické matematiky. Samozřejmě, že se nebudeme zabývat celou škálou těchto úloh, ale zvolíme vhodné representanty.

2. Řešení soustavy lineárních rovnic – Gaussův algoritmus

Soustavu lineárních rovnic lze zapsat jednoduše pomocí schématu, který se nazývá maticový zápis. Jde vlastně o schéma, tabulku rozměru $n \times n$ nebo $n \times n+1$, kde n je počet neznámých. Pokud do schématu zahrneme i pravou stranu, jde o tzv. rozšířenou matici soustavy, první matice se nazývá matice soustavy. Gaussův eliminační algoritmus je založen na procesu, kdy nejprve vybereme první nenulový prvek v prvním sloupci, řádek s tímto prvkem zaměníme s původním prvním řádkem. Vhodným vynásobením tohoto prvního řádku správnou konstantou a přičtením tohoto součinu ke každému následujícímu řádku získáme na všech pozicích v prvním sloupci s výjimkou prvního řádku hodnotu nula. Dále pokračujeme se stejným způsobem u druhého sloupce, opět vynulujeme všechny prvky s výjimkou prvku v druhém řádku a sloupci atd.

Vidíme, že jde o cyklus o n krocích, v němž postupně měníme vzhled matice soustavy tak, abychom po provedení n – tého kroku mohli snadno zjistit hodnotu výsledku. Uvedme dále příklad:

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Vyšetřovaná matice :
$$\begin{pmatrix} 5 & -4 & 4 & 1 \\ -3 & 0 & 0 & -5 \\ -1 & -2 & -2 & -4 \end{pmatrix}$$

Postup řešení:

Matice soustavy:
$$\begin{pmatrix} 5 & -4 & 4 \\ -3 & 0 & 0 \\ -1 & -2 & -2 \end{pmatrix}$$

Pravá strana :
$$\begin{pmatrix} 1 \\ -5 \\ -4 \end{pmatrix}$$

1 . krok:
$$\begin{pmatrix} 5 & -4 & 4 & 1 \\ -3 & 0 & 0 & -5 \\ -1 & -2 & -2 & -4 \end{pmatrix}$$

Vytýkáme z 1. sloupce číslo 5!

2. krok:
$$\begin{pmatrix} 1 & -\frac{4}{5} & \frac{4}{5} & \frac{1}{5} \\ 0 & -\frac{12}{5} & \frac{12}{5} & -\frac{22}{5} \\ 0 & -\frac{14}{5} & -\frac{6}{5} & -\frac{19}{5} \end{pmatrix}$$

Vytýkáme z 2. sloupce číslo $-\frac{12}{5}$!

3. krok:
$$\begin{pmatrix} 1 & -\frac{4}{5} & \frac{4}{5} & \frac{1}{5} \\ 0 & 1 & -1 & \frac{11}{6} \\ 0 & 0 & -4 & \frac{4}{3} \end{pmatrix}$$

Vytýkáme z 3. sloupce číslo -4!

Celý tento proces lze dále ještě více optimalizovat vytknutím největšího prvku v daném řádku (nazývá se pivot), tím budeme vždy v upravené matici soustavy pracovat s čísly menšími nebo rovnými v absolutní hodnotě číslu 1. Takovýto upravený algoritmus se nazývá Gaussův eliminační algoritmus s výběrem hlavního prvku (pivota).

Rozšířená matice soustavy:

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & 5 & -1 \\ -5 & -2 & 4 & 4 \\ -3 & 3 & -3 & -4 \end{pmatrix}$$

Eliminace 1. sloupce

$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{2}{5} & -\frac{4}{5} & -\frac{4}{5} \\ 0 & -\frac{11}{5} & \frac{37}{5} & \frac{7}{5} \\ 0 & \frac{21}{5} & -\frac{27}{5} & -\frac{32}{5} \end{pmatrix}$$

Eliminace 2. sloupce

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{2}{7} & -\frac{4}{21} \\ 0 & 1 & -\frac{9}{7} & -\frac{32}{21} \\ 0 & 0 & \frac{32}{7} & -\frac{41}{21} \end{pmatrix}$$

Eliminace 3. sloupce

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -\frac{5}{16} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{199}{96} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{41}{96} \end{pmatrix}$$

$$x_1 = -\frac{5}{16}$$

$$x_2 = -\frac{199}{96}$$

$$x_3 = -\frac{41}{96}$$

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Gaussův eliminační algoritmus je jeden z tzv. přímých algoritmů použitelných k řešení soustav lineárních rovnic. Slovo přímý v pojmenování algoritmu ukazuje na fakt, že přesné řešení se najde po konečném počtu kroků. Lze odhadnout i počet základních operací (jedno sčítání a násobení) na celkem $\frac{1}{3}.n^3$, kde n je počet neznámých. V případě upraveného algoritmu, kdy anulujeme všechny hodnoty ve sloupci s výjimkou jedné je počet operací potřebných na provedení celého algoritmu roven $\frac{1}{2}.n^3$. Odtud je vidět, že první algoritmus je efektivnější z hlediska počtu operací nutných k jeho provedení než druhý.

3. Závěr

Gaussův eliminační algoritmus je základním algoritmem pro řešení soustav lineárních rovnic. V naší malé ukázce jsme studovali jen hlavní postupy vedoucí k řešení takových soustav. V klasické numerické matematice se samozřejmě provádí ještě mnoho úprav těchto postupů, sleduje se rychlost výpočtu, stabilita takových řešení atd.

4. Použitá literatura

WROBLEWSKI, P. Algoritmy. Datové struktury a programovací techniky. 1. vyd. Brno: Computer Press, 2004. 351 s. ISBN 80-251-0343-9 7178-463-X.

TOPFER P., Algoritmy a programovací techniky . Praha: Grada Publishing a. s., 2007. 322 s. ISBN 9788071963509

RALSTON A.: Základy numerické matematiky. Academia, Praha 1978, 635 s.

STOER, J. - BULIRCH, R., Introduction to numerical analysis. 1. vyd. New York - Heidelberg - Berlin : Springer-Verlag, 1980. 609 s. IX. ISBN 0-387-90420-4

5. Kontakt na autora

Václav Kohout RNDr.

ZČU, FPE, katedra matematiky, Klatovská 51, Plzeň

kohout@kmt.zcu.cz

ODBORNÝ KEMP PŘÍRODOVĚDNÝCH OBORŮ PROGRAMOVÁNÍ

ALGORITMY NUMERICKÉ MATEMATIKY - HORNEROVO SCHÉMA

Václav Kohout

1 Úvod

V této části se budeme zabývat užitečnou třídou algoritmů, jde o skupinu algoritmů numerické matematiky. Samozřejmě, že se nebudeme zabývat celou škálou těchto úloh, ale zvolíme vhodné reprezentanty.

2. Hornerovo schéma a dělení polynomů

Tento algoritmus umožňuje vypočítávat jednoduchým způsobem funkční hodnotu v konkrétním bodě v libovolném polynomu za použití jen elementárních násobení a sčítání. Ve své podstatě nejde o nic jiného než o využití závorek na místě násobení a mocnění:

$$f(x) = \sum_{i=1}^n a_i \cdot x^i = a_n \cdot x^n + a_{n-1} \cdot x^{n-1} + \dots + a_1 \cdot x + a_0 = (((a_n \cdot x + a_{n-1})x + a_{n-2})x + \dots + a_1)x + a_0$$

V uvedeném schématu je zřetelné, že převádíme mocnění na ekvivalentní posloupnost násobení. Ukážeme si na konkrétním případu vytvoření schématu řešení, z něj je algoritmus Hornerova schéma již zřejmý. Nechť tedy je $f(x) = x^3 + 3x - 1$ a bod vněm hledám hodnotu je například $x = 2$. Použijeme tradiční zápis do tabulky (odtud pojem schéma):

	1	0	3	-1
2	1	2	7	13

Schéma je snadno čitelné, do prvního řádku přepíšeme postupně koeficienty daného polynomu (včetně nulových koeficientů viz koeficient u druhé mocniny našeho polynomu), na další řádku přepíšeme nejdříve hodnotu argumentu tedy 2. v druhém sloupci opíšeme hodnotu nejvyššího koeficientu, dále násobíme hodnotu 1 číslem 2 a přičítáme k 0, tím získáme $2 \cdot 1 + 0 = 2$ a to je koeficient stojící v třetím sloupci. Postupujeme dále $2 \cdot 2 + 3 = 7$, tím získáme hodnotu v třetím sloupci a konečně $2 \cdot 7 + (-1) = 13$ a to je hodnota v posledním sloupci druhého řádku. Získali jsme tím v dané chvíli celkem tři základní informace:

1. Funkční hodnotu polynomu $f(x)$ v bodě $x = 2$.

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

2. Hodnotu zbytku při dělení polynomu $f(x)$ polynomem $x - 2$. Ta činí 13.

3. Nalezli jsme i hodnotu dělení polynomu $f(x)$, polynomem $x - 2$. Toto úplné dělení je rovno: $\frac{x^3 + 3x - 1}{x - 2} = 1 \cdot x^2 + 2 \cdot x + 7 + \frac{13}{x - 2}$. Vidíme, že hodnoty koeficientů stojících v druhém řádku odpovídají výslednému polynomu při dělení.

Algoritmizace takového postupu je zřejmá, jde o cyklus s předem danými výpočty. Pomocí tohoto jednoduchého procesu můžeme snadno ověřovat, zda je dané číslo kořenem polynomu. Například: Necht' $f(x) = x^5 - 4x^4 + 2x^3 + 2x^2 + x + 6$, ověřme, zda číslo 2 (dělitel čísla 6) je kořenem rovnice $f(x) = 0$.

	1	-4	2	2	1	6
2	1	-2	-2	-2	-3	0

Z algoritmu tedy vyplývá, že číslo 2 je skutečně kořenem daného polynomu $f(x)$. Zároveň je jasné, že

$f(x) = x^5 - 4x^4 + 2x^3 + 2x^2 + x + 6 = (x^4 - 2x^3 - 2x^2 - 2x - 3)(x - 2)$. Při hledání dalších kořenů polynomu $f(x)$ bychom potom prověřovali kořeny polynomu $g(x) = x^4 - 2x^3 - 2x^2 - 2x - 3$. Samozřejmě, že takovýto modelový případ není běžný. Proto v jedné z dalších částí pracujeme s algoritmy pro obecné nalezení reálných kořenů polynomu.

Metoda Hornerova schématu umožňuje převádět čísla z různých soustav do desítkové. Například:

$(5401)_6 = 5 \cdot 6^3 + 4 \cdot 6^2 + 0 \cdot 6 + 1 \cdot 6^0 = 1225$. Určíme hodnotu polynomu $5x^3 + 4x^2 + 1$ v bodě 6:

	5	4	0	1
6	5	34	204	1225

Tato úprava algoritmu umožňuje převádět čísla z různých soustav do desítkové soustavy.



INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

3. Závěr

Algoritmus Hornerova schématu se využívá velmi často jako podpůrný . Umožňuje totiž jednoduchým způsobem počítat funkční hodnoty polynomů. Takovéto postupy jsou součástí mnoha složitějších algoritmů.

4. Použitá literatura

WROBLEWSKI, P. Algoritmy. Datové struktury a programovací techniky. 1. vyd. Brno: Computer Press, 2004. 351 s. ISBN 80-251-0343-9
7178-463-X.

TOPFER P., Algoritmy a programovací techniky . Praha: Grada Publishing a. s., 2007.
322 s. ISBN 9788071963509

RALSTON A.: Základy numerické matematiky. Academia, Praha 1978, 635 s.

STOER, J. - BULIRCH, R., Introduction to numerical analysis. 1. vyd. New York - Heidelberg - Berlin : Springer-Verlag, 1980. 609 s. IX. ISBN 0-387-90420-4

5. Kontakt na autora

Václav Kohout RNDr.

ZČU, FPE , katedra matematiky , Klatovská 51, Plzeň

kohout@kmt.zcu.cz

ODBORNÝ KEMP PŘÍRODOVĚDNÝCH OBORŮ PROGRAMOVÁNÍ

ALGORITMY NUMERICKÉ MATEMATIKY - NÁHRADA FUNKCE SPECIÁLNÍM POLYNOMEM

Václav Kohout

1. Úvod

V této části se budeme zabývat užitečnou třídou algoritmů, jde o skupinu algoritmů numerické matematiky. Samozřejmě, že se nebudeme zabývat celou škálou těchto úloh, ale zvolíme vhodné representanty.

2. Náhrada funkce speciálním polynomem

a) Lagrangeův interpolační polynom. Pomocí tohoto polynomu řešíme úlohu proložení polynomu nejnižšího stupně, který prochází obecně zadanými body o souřadnicích $[x_1, y_1], \dots, [x_n, y_n]$. Celý polynom je nejvýše stupně $n-1$, kde n je počet bodů, které máme k dispozici.

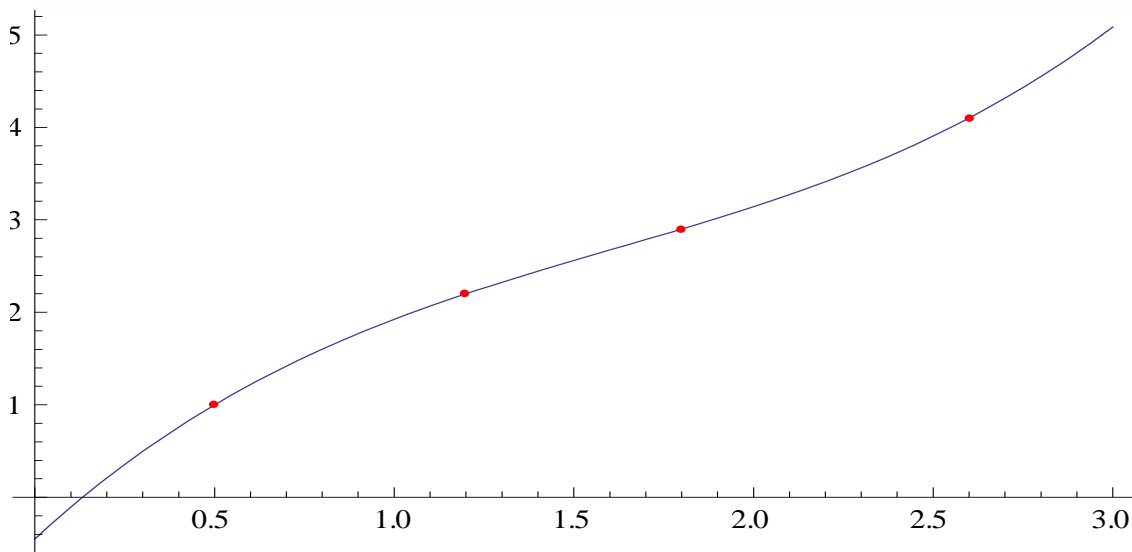
Tento polynom $L(x)$ je součtem elementárních polynomů $L_j(x)$ stupně $n-1$, které můžeme vyjádřit následovně: $L_j(x) = \frac{(x-x_1)\dots(x-x_{j-1})(x-x_{j+1})\dots(x-x_n)}{(x_j-x_1)\dots(x_j-x_{j-1})(x_j-x_{j+1})\dots(x_j-x_n)}$. Potom je

Lagrangeův polynom roven:

$$L(x) = \sum_{j=1}^n L_j(x).$$

Z povahy předchozího je celkem ihned zřejmý i zápis tohoto algoritmu do programu. Níže je uvedený příklad proložení Lagrangeova polynomu body $[0,5;1]$, $[1,2;2]$, $[1,8;2,8]$; $[2,6;4]$. Například polynom $L_1(x) = 2,93878 - 5,21193x + 2,9304x^2 - 0,523286x^3$. Samotný Lagrangeův polynom $L(x) = 0,142857 + 1,88828x - 0,393773x^2 + 0,0915751x^3$. Dále je uveden obrázek polynomu s daty.

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ



Nevýhodou této interpolace je to, že přidání dalšího bodu, kterým chceme vést polynom vede opět k novým výpočtům. Tento problém odstraňuje následující typ interpolace.

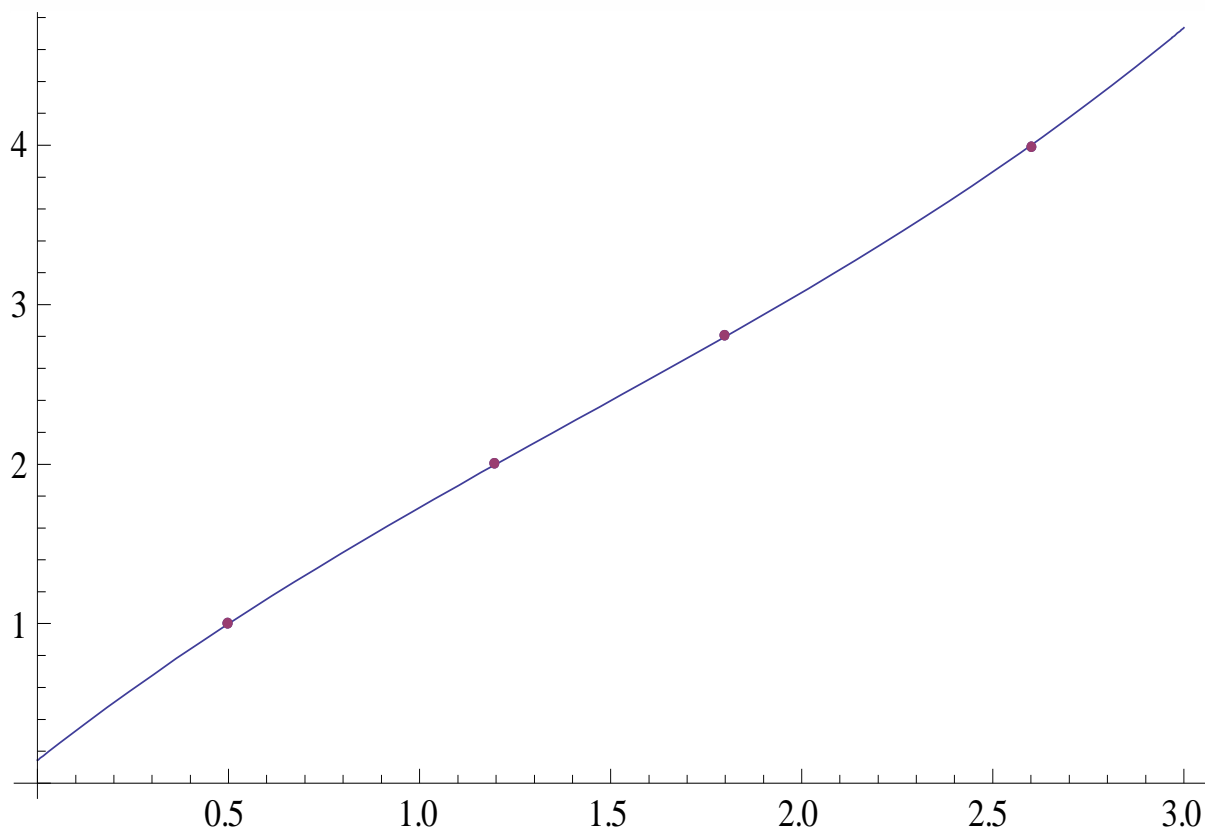
b) Newtonův interpolační polynom $N(x)$. Jde o speciální zápis polynomu, kdy nemusíme počítat $n-1$ základních mnohočlenů, ale vytváříme daný polynom najednou. Celý vtip je v zápisu tohoto polynomu. Mějme tedy opět k dispozici body $[x_1, y_1], \dots, [x_n, y_n]$. Newtonův polynom budeme konstruovat následovně:

$$N(x) = a_0 + a_1 \cdot (x - x_1) + a_2 \cdot (x - x_1)(x - x_2) + \dots + a_n \cdot (x - x_1) \cdot \dots \cdot (x - x_n).$$

Z tvaru polynomu je zřejmé, že vypočítat neznámé hodnoty a_0, \dots, a_n není tak obtížné, jako v předchozím případě, protože jsou jednoduše závislé na známých hodnotách y_i . Pro ilustraci spočteme Newtonův interpolační polynom pro předchozí případ našich známých údajů.

Podle předchozího známe body $[0,5;1]$, $[1,2;2]$, $[1,8;2,8]$; $[2,6;4]$. Proložíme jimi podle předchozího návodu polynom. Jeho hodnota bude $N(x) = 1 + 1,42857 (-0,5+x) - 0,0732601 (-1,2+x) (-0,5+x) + 0,0915751 (-1,8+x) (-1,2+x) (-0,5+x)$. Po úpravě máme tvar tohoto polynomu rovnu $N(x) = 0,142857 + 1,88828 x - 0,393773 x^2 + 0,0915751 x^3$. Zobrazíme tento polynom i s body graficky:

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ



Při porovnání obou metod vidíme, že oba polynomy jsou totožné, avšak postup výpočtu Newtonova polynomu je podstatně jednodušší.

3. Závěr

Metoda náhrady funkce jednoduchými polynomy se vyskytuje v rámci celé numerické matematiky. Umožňuje práci i s takovými funkcemi, které mají neobvyklé vlastnosti.

4. Použitá literatura

WROBLEWSKI, P. Algoritmy. Datové struktury a programovací techniky. 1. vyd. Brno: Computer Press, 2004. 351 s. ISBN 80-251-0343-9 7178-463-X.

TOPFER P., Algoritmy a programovací techniky. Praha: Grada Publishing a. s., 2007. 322 s. ISBN 9788071963509

RALSTON A.: Základy numerické matematiky. Academia, Praha 1978, 635 s.

STOER, J. - BULIRCH, R., Introduction to numerical analysis. 1. vyd. New York - Heidelberg - Berlin : Springer-Verlag, 1980. 609 s. IX. ISBN 0-387-90420-4

5. Kontakt na autora

Václav Kohout RNDr.

ZČU, FPE, katedra matematiky, Klatovská 51, Plzeň

kohout@kmt.zcu.cz

ODBORNÝ KEMP PŘÍRODOVĚDNÝCH OBORŮ PROGRAMOVÁNÍ

ALGORITMY NUMERICKÉ MATEMATIKY - NULOVÉ BODY FUNKCE, POLYNOMU

Václav Kohout

1 Úvod

V této části se budeme zabývat užitečnou třídou algoritmů, jde o skupinu algoritmů numerické matematiky. Samozřejmě, že se nebudeme zabývat celou škálou těchto úloh, ale zvolíme vhodné reprezentanty.

2 Numerické algoritmy

V této části se budeme zabývat definicí algoritmu a vytyčením jeho základních vlastností. Většinu základních tvrzení, definic, poznámek budeme zároveň ilustrovat příklady, které nás budou nutit k procesu algoritmizace úloh.

2.1 Hledání nulových bodů funkce, polynomu

V této části budeme obecně řešit úlohu nalezení nulových bodů polynomu $f(x)$, které obecně nazýváme kořeny polynomu. Půjde tedy o určení hodnot x takových, že $f(x) = 0$.

První metodou, kterou se budeme zabývat je **metoda půlení intervalu**. Jedná se o vždy konvergentní a můžeme říci univerzální metodu, kterou lze aplikovat ve většině praktických případů.

Aby bylo možno metodu užít, musí být splněny dvě podmínky. První je požadavek, aby funkce f byla spojitá pro $x \in \langle a; b \rangle$. Druhou podmínkou je, aby funkční hodnoty v krajních bodech zvoleného intervalu měly opačná znaménka tj. aby platilo $f(a) \cdot f(b) < 0$. Pokud jsou obě tyto podmínky splněny, pak tato metoda vždy konverguje. Spojitost většinou zajišťuje realizátor, v rámci algoritmu musíme rozhodnout, která ze dvou dvojic $a, \frac{a+b}{2}$ nebo $\frac{a+b}{2}, b$ splňuje podmínku metody. Touto dvojicí nahradíme vstupní dvojici a, b . Algoritmus je ukončen, když například vzdálenost intervalu při n -tém dělení je menší než předem daná malá hodnota ε .

Pokusíme se podle této metody nalézt nulový bod funkce sinus na intervalu $(2,5; 3,5)$. Je dobře známo, že tímto bodem je číslo π . Provedeme – li tento algoritmus 18 x získáme následující výsledky:

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

{1, 3., 3.5},

{2, 3., 3.25},

{3, 3.125, 3.25},

{4, 3.125, 3.1875},

{5, 3.125, 3.15625},

{6, 3.14063, 3.15625},

{7, 3.14063, 3.14844},

{8, 3.14063, 3.14453},

{9, 3.14063, 3.14258},

{10, 3.14063, 3.1416},

{11, 3.14111, 3.1416},

{12, 3.14136, 3.1416},

{13, 3.14148, 3.1416},

{14, 3.14154, 3.1416},

{15, 3.14157, 3.1416},

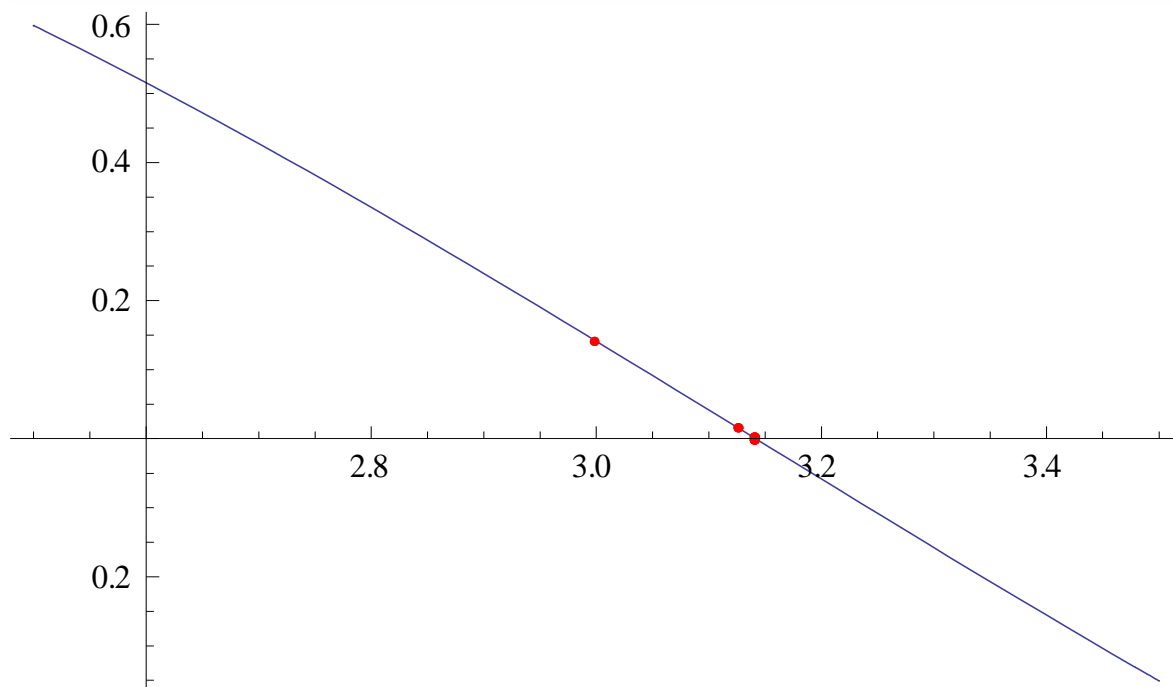
{16, 3.14159, 3.1416},

{17, 3.14159, 3.14159},

{18, 3.14159, 3.14159}

Je zřetelné, že již 17 – tá iterace dává celkem dobrou představu o čísle π . Problémem metody je pomalost konvergence. Níže je uveden obrázek dané situace včetně jednotlivých iterací:

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ



Proto se při hledání kořenů rovnic více používá univerzální metoda, která se jmenuje Newtonova metoda. Někdy se jí také říká metoda tečen. Princip tvorby posloupnosti bodů, které konvergují k řešení $f(x)=0$, je ten, že jako další přiblížení (další bod posloupnosti) je chápán průsečík tečny v bodě posloupnosti s osou x . Jestliže je $(x_i; f(x_i))$ bod ležící na grafu funkce $y=f(x)$, potom je rovnice tečny v tomto bodě určena takto:

$$y - f(x_i) = f'(x_i) \cdot (x - x_i)$$

Průsečík této přímky s osou x určíme jednoduše tak, že položíme hodnotu $y=0$. Tedy :

$$0 - f(x_i) = f'(x_i) \cdot (x - x_i) \Rightarrow \frac{-f(x_i)}{f'(x_i)} = x - x_i \Rightarrow x = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)}$$

Budeme proto volit posloupnost takto: $x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)}$. Odtud jsou zřejmé i požadavky na funkci f , kromě spojitosti musí být i spojitě diferencovatelná (musí jít v každém bodě grafu funkce sestrojít tečna).

Pokusíme se dále řešit stejný úkol jako části věnované metodě půlení intervalu.: Chceme tedy najít v intervalu $(2,5; 3,5)$ číslo x takové, že $\sin(x)=0$. Dále uvedeme výsledky :

$$\{1., 4.18504\},$$

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

{2., 2.46789},

{3., 3.26619},

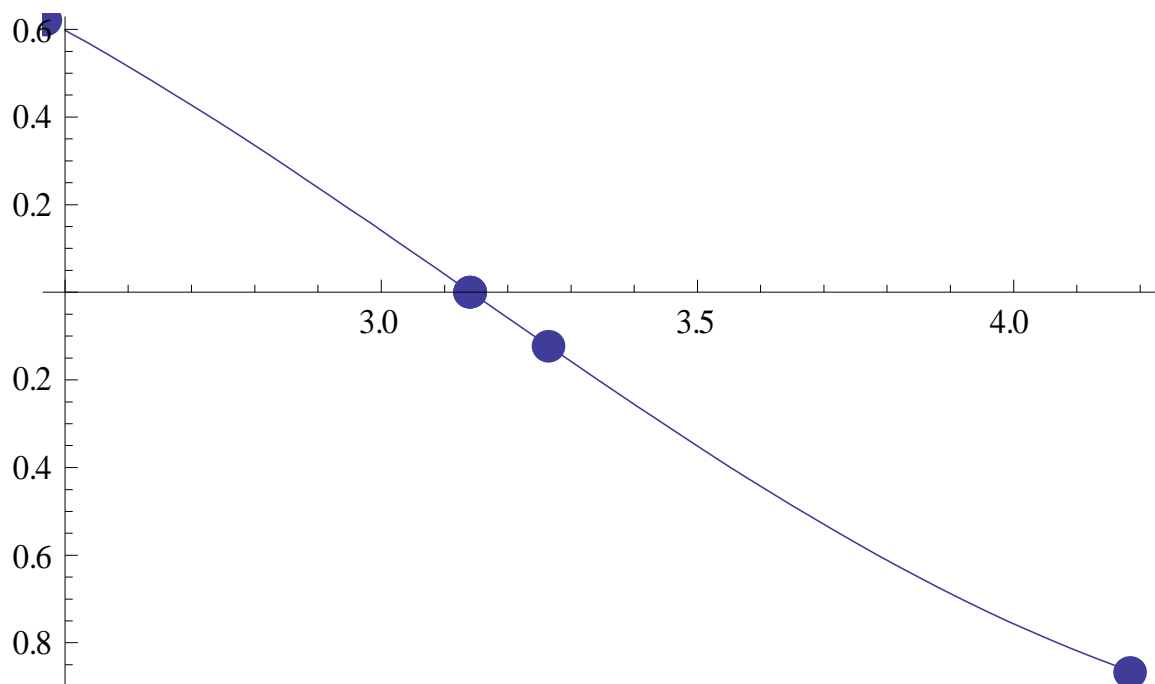
{4., 3.14094},

{5., 3.14159},

{6., 3.14159},

{7., 3.14159}

Je vidět, že již pátá iterace vede k stejným výsledkům jako 17. iterace u metody půlení intervalů.



3. Závěr

V rámci této části jsme si osvojili některé základní postupy při získávání nulových hodnot jak polynomiálních rovnic, tak i prostých rovnic typu $f(x) = 0$.



INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

4. Použitá literatura

WROBLEWSKI, P. Algoritmy. Datové struktury a programovací techniky. 1. vyd. Brno: Computer Press, 2004. 351 s. ISBN 80-251-0343-9 7178-463-X.

TOPFER P., Algoritmy a programovací techniky . Praha: Grada Publishing a. s., 2007. 322 s. ISBN 9788071963509

RALSTON A.: Základy numerické matematiky. Academia, Praha 1978, 635 s.

STOER, J. - BULIRCH, R., Introduction to numerical analysis. 1. vyd. New York - Heidelberg - Berlin : Springer-Verlag, 1980. 609 s. IX. ISBN 0-387-90420-4

5. Kontakt na autora

Václav Kohout RNDr.

ZČU, FPE , katedra matematiky , Klatovská 51, Plzeň

kohout@kmt.zcu.cz