



evropský  
sociální  
fond v ČR



EVROPSKÁ UNIE



MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ,  
MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY



OP Vzdělávání  
pro konkurenceschopnost



INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

## Podpora talentovaných žáků v Plzeňském kraji

Reg. č. CZ.1.07/1.2.03/02.0001

### SBORNÍK

**MATEMATICKÝ KEMP**  
**22. – 26. SRPEN 2016**

**FYZIKÁLNÍ KEMP**  
**29. SRPEN – 2. ZÁŘÍ 2016**

Středisko služeb školám, Plzeň, Částkova 78  
Podpora talentovaných žáků v Plzeňském kraji  
CZ.1.07/1.2.03/02.0001

Tento projekt je v letech 2012-16 financován z rozpočtu Plzeňského kraje

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

### Matematický kemp

Diofantovské rovnice .....	4
Faktorizace polynomů .....	6
Racionální kořeny polynomů .....	8
Úlohy o nerovnostech.....	10
Induktivní postupy v úlohách MO .....	12
Extremální princip v úlohách .....	16
Důkazové techniky v geometrii a teorii čísel a posloupností.....	19
Celá část reálného čísla, absolutní hodnota reálného čísla.....	26
Důkazové techniky - nerovnosti.....	27
Planimetrie .....	29
Zlatý řez - matematický diamant.....	31
Exkurze Centrum stavitelského dědictví v Plasích .....	36
Gaussova prvočísla.....	38
Řetězové zlomky .....	44
„Příklady táhnou“ + Matematika hrou .....	51
Rovnice a nerovnice v příkladech mezinárodních matematických olympiád .....	58

### Fyzikální kemp

Pokusy s astronomickou tematikou.....	70
Vznik fyziky, chemie a biologie aneb velký třesk za všechno může .....	71
Co ukazuje astroláb pražského orloje.....	73
Odhalená tajemství Pluta.....	80
Polární záře a příčiny jejich vzniku .....	84
Proč létáme do vesmíru .....	87
Dalekohled .....	92
Astronomický kvíz .....	94
Data, všude samá data .....	95
Hledáme druhou Zemi.....	97
Jak si v astronomii představit nepředstavitelné.....	98
Lucie noci upije – pranostiky z hlediska astronomie .....	99
Diagnostika plazmatu při magnetronovém naprašování unikátních tenkovrstvých materiálů .....	101
Matematika ve fyzice 1 .....	103
Matematika ve fyzice 2 .....	105
Matematika ve fyzice 3 .....	106
Matematika ve fyzice 4 .....	109
Jednoduché experimenty 1 .....	111
Jednoduché experimenty 2 .....	111
Jednoduché experimenty 3 .....	112
Jednoduché experimenty 4 .....	112



## INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Řešení jednoduchých úloh o pohybu – gravitační zákon.....	113
Řešení úloh z hydromechaniky .....	114
Zajímavé experimenty .....	115
Kirchhoffovy zákony.....	118
Ohmův zákon .....	118
Fyzika v pohádkách.....	119
Řešení vybraných úloh školních kol FO .....	121
Využití matematiky ve fyzice 1.....	125
Využití matematiky ve fyzice 2.....	130
Využití matematiky ve fyzice 3.....	135
Optické klamy .....	140
Jak počítat v astronomii? Semilogaritmický tvar čísel ve fyzice a astronomii .....	142
Některé aplikace a úlohy na téma Coulombův zákon .....	143
Newtonův zákon. Keplerovy zákony .....	144
Řešení obtížnějších úloh minulých kol FO a AO .....	146
Slunce a jeho význam pro život na Zemi .....	147
Využití grafů ve fyzice .....	148
Fyzika kapalin a plynů I - za co mohou molekuly .....	150
Fyzika kapalin a plynů II - za co mohou ionty.....	152
Aktuální úspěchy vodíkových technologií .....	154
Řešení složitějších úloh z mechaniky 1.....	156
Řešení složitějších úloh z mechaniky 2.....	158
Řešení vybraných úloh z mechaniky.....	160

Středisko služeb školám, Plzeň, Částkova 78  
Podpora talentovaných žáků v Plzeňském kraji  
CZ.1.07/1.2.03/02.0001

Tento projekt je v letech 2012-16 financován z rozpočtu Plzeňského kraje

## DIOFANTOVSKÉ ROVNICE

Jaroslav HORA

### 1 Úvod

Diofantovské rovnice jsou pozoruhodné rozmanitostí postupů, které využíváme při jejich řešení. Uvedeme několik ukázek.

### 2 Řešené příklady

Příklad: Řešte diofantovskou rovnici  $x + y = x^2 - xy + y^2$  !

Řešení: Pišme  $x^2 - xy + y^2 - x - y = 0$ , vynásobme dvěma:

$2x^2 - 2xy + 2y^2 - 2x - 2y = 0$  a snažme se doplnit na čtverec:

$$x^2 - 2xy + y^2 + x^2 - 2x + 1 + y^2 - 2y + 1 = 2,$$

$$(x-y)^2 + (x-1)^2 + (y-1)^2 = 2.$$

Jak zařídit, aby součet tří čtverců celých čísel byl roven dvěma?

a)  $(x-y)^2 = 1 \wedge (x-1)^2 = 1 \wedge (y-1)^2 = 0$ ,  $P_a = \{[0,1], [2,1]\}$

b)  $(x-y)^2 = 1 \wedge (x-1)^2 = 0 \wedge (y-1)^2 = 1$ ,  $P_b = \{[1,0], [1,2]\}$

c)  $(x-y)^2 = 0 \wedge (x-1)^2 = 1 \wedge (y-1)^2 = 1$ ,  $P_c = \{[0,0], [2,2]\}$ ,

$$P = P_a \cup P_b \cup P_c.$$

Příklad: Dokažte, že výraz  $v = x^5 + 3x^4y - 5x^3y^2 - 15x^2y^3 + 4xy^4 + 12y^5$  není roven 33 pro žádná celá čísla  $x, y$ .

Řešení: Výraz  $v$  se po (možná delším) přemýšlení podaří rozložit na součin pěti činitelů:

$$v = (x-2y)(x-y)(x+y)(x+2y)(x+3y).$$

Číslo 33 ale nelze rozložit na více než čtyři různé činitele (kupř. uźijme čísel  $-1, 1, 3, -11$ ).

## INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Jde tedy o příklad diofantovské rovnice pátého stupně, která nemá řešení.

Příklad: Dokažte, že rovnost  $x^2 + y^2 + z^2 = 2 x y z$  platná pro celá čísla  $x, y, z$  nastává pouze pro  $x = y = z = 0$ .

Řešení: (Návod) Budeme se snažit dokázat, že pravá strana rovnice je vždy dělitelná vyšší mocninou čísla 2, než strana levá.

Příklad: Řešte v celých číslech rovnici  $x^3 - 2 y^3 - 4 z^3 = 0$ .

Řešení: Předpokládejme, že trojice přirozených čísel  $[x, y, z]$  je řešením dané rovnice, přičemž přirozené číslo  $x$  je nejmenší v řešeních dané rovnice se vyskytující. Podaří se nám ale zkonstruovat „menší“ trojici přirozených čísel a tím získáme spor.

Z vyjádření  $x^3 = 2 y^3 + 4 z^3$  nahlížíme, že číslo  $x^3$  je sudé a tedy i  $x$  je sudé. Obdobně zjistíme, že i  $y$  a  $z$  jsou sudá čísla. Pak ale trojice  $[x, y, z]$  není nejmenším řešením v oboru přirozených čísel. Dospíváme k závěru, že jediným řešením původní rovnice je trojice  $[0, 0, 0]$ .

### 3 Lineární diofantovskou rovnicí o dvou neznámých $x, y$ nazýváme rovnici

$a x + b y = c$ , kde  $a, b, c$  jsou celá čísla. Hledáme opět celočíselná řešení této rovnice.

Postup: Nechť  $d = D(a, b)$  dělí  $c$ . Euklidův algoritmus pro určení největšího společného dělitele  $d$  celých čísel  $a, b$  a rozšířený Euklidův algoritmus umožňující nalezení celých čísel  $x_0, y_0$  takových, že  $a x_0 + b y_0 = d$ . Nalezení jednoho řešení rovnice  $a x + b y = c$  a zápis nekonečně mnoha řešení této rovnice pomocí parametru.

Pokud  $d = D(a, b)$  nedělí  $c$ , nemá rovnice  $a x + b y = c$  řešení.

### 4 Použitá literatura

GALPERIN, G. A., TOLYPO, Moskovskije matematičeskije olympiady, Prosveščeniye, Moskva, 1986

### 5 Kontakt na autora

Doc. RNDr. Jaroslav Hora, CSc.

katedra matematiky, fyziky a technické výchovy FPE ZČU, Klatovská 51, Plzeň

horajar@kmt.zcu.cz

Středisko služeb školám, Plzeň, Částkova 78  
Podpora talentovaných žáků v Plzeňském kraji  
CZ.1.07/1.2.03/02.0001

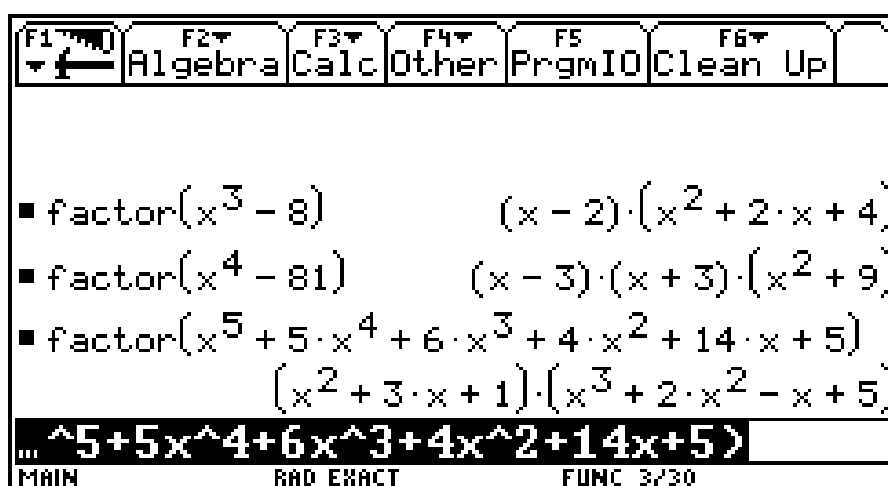
Tento projekt je v letech 2012-16 financován z rozpočtu Plzeňského kraje

## FAKTORIZACE POLYNOMŮ

Jaroslav HORA

### 1 Úvod

V řadě úloh školské matematiky a samozřejmě i v mnohých úlohách matematické olympiády se hodí znalost vzorců umožňujících rozložit jistý výraz (např. výrazy typu  $a^2 - b^2$ ,  $a^3 - b^3$ ,  $a^3 + b^3$ ,  $a^n - b^n$  atd). S nalézáním obdobných faktorizací polynomů s celočíselnými koeficienty dnes mohou pomoci i některé kalkulačky, např. TI-92. Povíme si i o jednom algoritmu pro hledání takovýchto rozkladů a přitom se seznámíme s interpolačními polynomy.



Obr. 1

### 2 Rozložte polynom $a^{10} + a^5 + 1$ !

Návod: Rozložte dvěma způsoby výraz  $a^{15} - 1$ . Nakonec vyjde  $a^{10} + a^5 + 1 = (a^2 + a + 1)(a^8 - a^7 + a^5 - a^4 + a^3 - a + 1)$ .

### 3 Algoritmus pro rozklad polynomu s celočíselnými koeficienty

Zde bude Váš text. Rozložme polynom  $f(x) = x^5 + 5x^4 + 6x^3 + 4x^2 + 14x + 5$ . Hledáme faktor  $g(x) \in \mathbb{Z}[x]$  takový, že  $g(x)$  dělí  $f(x)$ . Můžeme předpokládat, že  $\text{st } g(x) \leq 2$ . Kvadratický polynom  $g(x)$  je určen hodnotami ve třech bodech, kupř. pro  $x = 0, 1, 2$ . Přitom musí funkční hodnota  $g(0)$  dělit  $f(0)$ ,  $g(1)$  dělit  $f(1)$ ,  $g(2)$  dělit  $f(2)$ . Vypočteme nejprve funkční hodnoty  $f(0) = 5$ ,  $f(1) = 35$ ,  $f(2) = 209 = 11 \cdot 19$  a vytvoříme množiny

$$D_{f(0)} = \{1, -1, 5, -5\},$$

## INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

$$D_{f(1)} = \{1, -1, 5, -5, 7, -7, 35, -35\},$$

$$D_{f(2)} = \{1, -1, 11, -11, 19, -19, 209, -209\}.$$

Nyní máme pro výběr  $g(0) \in D_{f(0)}$  čtyři možnosti, pro  $g(1)$  osm a  $g(2)$  též osm. V nejhorším případě tedy bude nutné nalézt  $4 \cdot 8 \cdot 8 = 256$  interpolačních polynomů  $g(x)$  a vždy testovat, zda  $g(x)$  dělí  $f(x)$  v  $\mathbb{Z}[x]$ . Pokud toto nastane, nalezneme rozklad  $f(x) = g(x) \cdot h(x)$ , v opačném případě je  $f(x)$  ireducibilní.

I. Kupř. pro trojici  $g(0) = -5, g(1) = 7, g(2) = 19$  dostaneme interpolační polynom  $g(x) = 12x - 5$ , který zjevně není dělitelem  $f(x)$ .

II. Pro  $g(0) = g(1) = g(2) = -1$  máme ovšem  $g(x) = -1$ .

Interpolační polynom nemusí mít právě stupeň právě 2, ale může mít i stupeň nižší (v daném případě jde dokonce o konstantu). V této ukázce jsme ovšem našli triviální dělitel  $g(x) = -1$  polynomu  $f(x)$ , takže je nutné v testování pokračovat.

III. Pro trojici  $g(0) = 1, g(1) = 5, g(2) = 11$  dostaneme  $g(x) = x^2 + 3x + 1$ , tento polynom dělí  $f(x)$  a přivádí nás k rozkladu

$$f(x) = (x^2 + 3x + 1)(x^3 + 2x^2 - x + 5), \text{ což je ve shodě s výsledkem na obr. 1.}$$

Je patrné, jak bychom zapsali algoritmus pro obecný případ, kdy stupeň polynomu  $f(x) \in \mathbb{Z}[x]$  je  $n$  a kdy pro stupeň  $s$  eventuálního dělitele  $g(x) \in \mathbb{Z}[x]$  platí  $s \leq \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$ , kde symbol  $\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$  značí tzv. celou část čísla  $\frac{n}{2}$ . Zásadní nevýhodou popsaného algoritmu však je, že v obecném případě s rostoucím stupněm polynomu  $f(x)$  bude exponenciálně růst i počet  $s + 1$  - tic, které bude nutné probrat a tím i nároky na paměť a na dobu potřebnou k výpočtu.

## 4 Závěr

Existují i modernější, efektivnější, avšak matematicky podstatně náročnější algoritmy pro faktorizaci polynomů s celočíselnými koeficienty. Ty využívají mezikroku, nacházejí rozklady polynomů nad konečnými tělesy a pak se „vracejí“ k rozkladu v  $\mathbb{Z}[x]$ .

## 5 Kontakt na autora

Doc. RNDr. Jaroslav Hora, CSc.

katedra matematiky, fyziky a technické výchovy FPE ZČU, Klatovská 51, Plzeň  
horajar@kmt.zcu.cz

Středisko služeb školám, Plzeň, Částkova 78  
Podpora talentovaných žáků v Plzeňském kraji  
CZ.1.07/1.2.03/02.0001

Tento projekt je v letech 2012-16 financován z rozpočtu Plzeňského kraje

## RACIONÁLNÍ KOŘENY POLYNOMŮ

Jaroslav HORA

### 1 Úvod

Seznámíme se s některými základními tvrzeními o kořenech celočíselných polynomů a metodami, jak nalézt jejich celočíselné, resp. racionální kořeny. Dělení polynomu polynomem nepochybně známe, ale dost důležité je zamyslet se nad tím, jak dopadne dělení polynomu  $f(x)$  lineárním polynomem  $x - c$ . Je

$$f(x) = (x - c)g(x) + r, \text{ kde } r \text{ je buď nenulová konstanta nebo nulový polynom.}$$

Poznamenejme, že proces dělení polynomem  $x - c$  lze výhodně zapsat ve tvaru tzv. Hornerova schématu.

Dosaďme do toho vztahu  $x = c$ . Máme  $r = f(c)$ . Je-li  $f(c) = 0$ , je polynom  $f(x)$  dělitelný výrazem  $x - c$  beze zbytku. Má-li na druhou stranu být polynom  $f(x)$  být dělitelný  $x - c$ , musí být  $f(c) = 0$ .

Věta: Polynom  $f(x)$  alespoň prvního stupně je dělitelný dvojčlenem  $x - c$  právě tehdy, když číslo  $c$  kořenem rovnice  $f(x) = 0$ .

### 2 Příklady

Příklad: Nalezněte zbytek při dělení polynomu  $P(x) = x^5 - 17x + 1$  polynomem  $x + 2$ .

Řešení: Podle předchozí věty postačí spočítat  $P(-2) = 3$ .

Příklad: Nalezněte zbytek při dělení polynomu  $P(x) = x^{243} + x^{81} + x^{27} + x^9 + x^3 + x$  polynomem  $x - 1$ .

Řešení: Se znalostí shora uvedené věty postačí spočítat  $P(1) = 6$ . Jiný způsob řešení tkví v tom, že u každé mocniny proměnné  $x$  bude vhodné odečíst 1, tj. přejít k zápisu

$$P(x) = x^{243} - 1 + x^{81} - 1 + x^{27} - 1 + x^9 - 1 + x^3 - 1 + x - 1 + 6$$

a nahlédnout, že každý z dvojčlenů  $x^i - 1$ ,  $i = 243, 81, 27, 9, 3, 1$  je dělitelný výrazem  $x - 1$  beze zbytku, takže zbytek při dělení polynomu  $P(x)$  výrazem  $x - 1$  je 6.



## INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Příklad: Pro která  $\alpha$  je polynom  $P(x) = x^{1000} + \alpha x^2 + 9$  dělitelný výrazem  $x + 1$  beze zbytku?

Řešení: Žádné zdlouhavé dělení polynomu  $P$  lineárním dvojčlenem nemusíme provádět, známe  $-1$  výše uvedenou větu. Je  $P(-1) = \alpha + 10$ , tj.  $\alpha = -10$ .

### 2.1 Vícenásobné kořeny polynomu, celočíselné a racionální kořeny

Lze  $-1$  z polynomu  $f(x)$  vytknout výraz  $x - c$  právě v nejvyšší mocnině  $r$ , tj. psát  $f(x) = (x - c)^r g(x)$ ,  $g(c) \neq 0$ , řekneme, že rovnice  $f(x) = 0$  má kořen  $c$  jako  $r$  – násobný kořen.

Příklad: Napište jednu rovnici, která má trojnásobný kořen 3, dvojnásobný kořen 2 a jednoduchý kořen 1.

Řešení:  $(x - 3)^3 (x - 2)^2 (x - 1) = 0$ , příp. lze tuto rovnici vynásobit nenulovou konstantou.

Věta: Necht' algebraická rovnice  $n$  – tého stupně,  $n \geq 1$ , má celočíselné koeficienty. Potom každý celočíselný kořen této rovnice je dělitelem absolutního členu.

Věta: Necht' rovnice s celočíselnými koeficienty

$$a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_{n-1} x + a_n = 0, a_0 \neq 0$$

má racionální kořen  $p/q$ , kde  $p, q$  jsou nesoudělná celá čísla. Potom koeficient  $p$  dělí  $a_n$  a  $q$  dělí koeficient  $a_0$ .

### 3 Závěr

Příklady na nalezení racionálních, resp. celočíselných kořenů polynomu s celočíselnými koeficienty.

### 4 Použitá literatura

GALPERIN, G. A., TOLYPO, Moskovskije matematiceskije olympiady, Prosveščenije, Moskva, 1986

SCHWARZ, Š., Základy nauky o řešení rovnic, nakladatelství ČSAV, Praha 1958.

### 5 Kontakt na autora

Doc. RNDr. Jaroslav Hora, CSc.

katedra matematiky, fyziky a technické výchovy FPE ZČU, Klatovská 51, Plzeň

horajar@kmt.zcu.cz

Středisko služeb školám, Plzeň, Částkova 78  
Podpora talentovaných žáků v Plzeňském kraji  
CZ.1.07/1.2.03/02.0001

Tento projekt je v letech 2012-16 financován z rozpočtu Plzeňského kraje

## ÚLOHY O NEROVNOSTECH

Jaroslav HORA

### 1 Úvod

Asi nejznámější nerovností je nerovnost mezi aritmetickým a geometrickým průměrem. Využijeme ji k vyřešení jednoho praktického problému.

### 2 Lemma

Pro všechna kladná reálná čísla  $a, b, c$  platí

$$\frac{a+b+c}{3} \geq \sqrt[3]{abc},$$

přičemž rovnost platí jedině pro  $a = b = c$ .

### 3 Příklad

Dokažte, že pro všechna kladná reálná  $a, b$  platí  $\sqrt[4]{ab} \leq \frac{a+3b}{4}$ . Návod: je třeba napsat

nerovnost mezi aritmetickým a geometrickým průměrem pro čtyři prvky  $a, b, c, d$  a poslední tři položit rovny  $b$ .

### 4 Kdy dosáhneme nejmenších výrobních nákladů na obyčejnou krabičku od sirek?

Běžná krabička od sirek je vyráběna ze dvou dílů. Jeden z nich, do něhož se posléze nasypou zápalky, nemá horní obdélníkovou stěnu, zatímco druhý díl, který krabičku uzavírá, zase nemá dvě boční stěny. Úkolem je najít mezi všemi krabičkami daného objemu  $V$  tu, která má takový tvar (daný poměrem délek hran  $x, y, z$  krabičky), že na její výrobu je třeba nejméně materiálu. (To znamená, že povrch krabičky by měl být co nejmenší).

### 5 Řešení

Necht' rozměry krabičky jsou  $x, y, z$ . Povrch prvního dílu pak je  $P_1 = xy + 2xz + 2yz$ , povrch druhého dílu je  $P_2 = 2xy + 2xz$  a celkový povrch  $P$  pak je  $P = P_1 + P_2 = 3xy + 4xz + 2yz$ .

Vyjádříme  $P = xyz \left( \frac{2}{x} + \frac{3}{z} + \frac{4}{y} \right)$  a jestliže označíme  $V = xyz = \text{konst.}$ , je

#### INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

$P = V\left(\frac{2}{x} + \frac{3}{z} + \frac{4}{y}\right)$ . Nyní si povšimněme, že i součin všech sčítanců v závorce je konstantní a je roven  $\frac{24}{V}$ . Podle lemmatu z oddílu 2 je povrch  $P$  krabíčky nejmenší, právě když jsou si všichni tři sčítanci rovni, tj. když platí  $\frac{2}{x} = \frac{3}{z} = \frac{4}{y}$ . To nastává, právě když je poměr  $x : y : z = 2 : 4 : 3$ . Pokud tedy délka, šířka a výška krabíčky budou v poměru  $4 : 2 : 3$ , budou výrobní náklady nejmenší.

V článku uvedeném níže může čtenář nalézt i důkaz lemmatu z oddílu 2 a vyobrazení popisovaných objektů.

#### 6 Použitá literatura

DANELIJA, P. Š. Spičecnyj korobok i ekstremum. Kvant, 1984, č. 4., str. 51.

#### 7 Kontakt na autora

Doc. RNDr. Jaroslav Hora, CSc.

katedra matematiky, fyziky a technické výchovy FPE ZČU, Klatovská 51, Plzeň

[horajar@kmt.zcu.cz](mailto:horajar@kmt.zcu.cz)

## INDUKTIVNÍ POSTUPY V ÚLOHÁCH MO

Martina KAŠPAROVÁ

### 1 Úvod

Zejména v počáteční fázi řešení úlohy se snažíme zadaný problém pochopit a udělat si o něm nějakou představu. Toho dosahujeme kreslením obrázků, zjednodušováním problému, řešením úlohy pro speciální případy apod. V případě, že je problém zformulován pro libovolné přirozené číslo  $n$ , zkoušíme ho vyřešit pro několik prvních přirozených čísel, následně analyzujeme a zobecňujeme použitý postup řešení pro libovolné přirozené číslo, zformulujeme hypotézu a matematickou indukci ji dokážeme, případně upravíme hypotézu. Právě takovým typem úloh se zabývali účastníci kempu.

### 2 Úlohy

*Příklad 1:* Jsou dány dvě rekurentní posloupnosti

$$a_{n+1} = 5a_n + 2b_n$$

$$b_{n+1} = -2a_n + b_n$$

$$a_1 = 12, \quad b_1 = -3.$$

Najděte  $n$ -tý člen obou posloupností. (Zadání úlohy převzato z 42. MO, 2002, s. 50.)

Z rekurentních předpisů vypočteme několik prvních členů každé z posloupností:

$$a_1 = 12,$$

$$b_1 = -3,$$

$$a_2 = 54,$$

$$b_2 = -27,$$

$$a_3 = 8.27,$$

$$b_3 = -5.27,$$

$$a_4 = 30.27,$$

$$b_4 = -21.27,$$

$$a_5 = 108.27,$$

$$b_5 = -81.27,$$

Snažíme se najít souvislost mezi přirozeným číslem, které udává pořadí členu v posloupnosti, a členem posloupnosti. Pro určení  $n$ -tého členu se zdá být jednodušší posloupnost  $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ . Pozorujeme-li její členy, odhalíme, že jde o násobky mocniny čísla 3. Exponent této mocniny odpovídá pořadí členu posloupnosti. Násobky tvoří po sobě jdoucí posloupnost lichých čísel,  $n$ -tý člen má proto hypoteticky tvar  $b_n = -(2n + 1) \cdot 3^n$ . Dosazením do rekurentního předpisu pro  $a_{n+1}$  získáme rekurentní předpis, který závisí pouze na členech posloupnosti  $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ .

$$a_1 = 12$$

$$a_{n+1} = 5a_n - 2 \cdot (2n - 1) \cdot 3^n$$

Z něj je patrné, že členy posloupnosti jsou dělitelné nějakou mocninou čísla 3. Upravíme tedy několik prvních členů posloupnosti  $a_n$  tak, aby byly násobkem nějaké mocniny tří:

$$a_1 = 12 = 3 \cdot 4, \quad a_2 = 2 \cdot 3^3, \quad a_3 = 8 \cdot 3^3, \quad a_4 = 10 \cdot 3^4, \quad a_5 = 12 \cdot 3^5$$

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Zřejmě je tedy  $a_n$  násobkem  $n$ -té mocniny čísla 3. Násobek je vždy sudé číslo a z upravených členů je patrné, že jde o posloupnost po sobě jdoucích sudých čísel začínajících číslem 4. Je tedy  $a_n = 2(n + 1) \cdot 3^n$ . Matematickou indukcí lze dokázat, že nalezené předpisy pro  $n$ -tý člen vyhovují. (Jiný postup řešení viz 42. MO, 2002, s. 55–56.)

*Příklad 2:* Je dáno  $n$  bodů  $A_1, A_2, \dots, A_n$  v rovině, z nichž žádné tři neleží v přímce. Každá přímka, která neprochází žádným z daných bodů, určuje rozklad daných bodů na dvě disjunktní podmnožiny. Kolik různých rozkladů lze takto dostat? Rozklady porovnáváme jako neuspořádané dvojice množin. (Převzato z 38. MO, 1991, s. 73.)

Zjistíme počet  $a_n$  rozkladů pro několik prvních přirozených čísel  $n$ : (V případě čtyř a více bodů je nutné uvažovat i situace, v nichž body tvoří konvexní  $n$ -úhelník.)

$$a_1 = 1, \quad a_2 = 2, \quad a_3 = 4, \quad a_4 = 7, \quad a_5 = 11$$

Pravděpodobně nás nenapadne výraz  $v_n$ , který udává počet rozkladů pro  $n$  nekolineárních bodů v rovině, ale je možné, že budeme schopni najít další člen posloupnosti pomocí předchozího. Všimněme si, že

$$a_1 = 1, \quad a_2 = 2 = 1 + 1 = a_1 + 1, \quad a_3 = 4 = a_2 + 2, \quad a_4 = 7 = a_3 + 3, \quad a_5 = 11 = a_4 + 4.$$

Zřejmě lze počet rozkladů vyjádřit posloupností danou rekurentně předpisy  $a_1 = 1$ ,  $a_{n+1} = a_n + n$ . Předpis pro  $n$ -tý člen získáme sečtením  $n$  rovností  $a_1 = 1$ ,  $a_2 = a_1 + 1$ ,  $a_3 = a_2 + 2$ , ...,  $a_n = a_{n-1} + n$ :

$$a_1 + a_2 + \dots + a_n = 1 + 1 + 2 + 3 + \dots + n + a_1 + a_2 + \dots + a_{n-1}$$
$$a_n = 1 + n \frac{n-1}{2}$$

Důkaz matematickou indukcí viz 38. MO, 1991, s. 93 – 96.

*Příklad 3:* Množina  $M$  má právě  $n$  prvků. Kolik existuje dvojic množin  $(B, C)$  takových, že  $B \subset C \subset M$ ? Prázdná množina a množina  $X$  jsou podmnožiny množiny  $X$ . (Převzato z 38. MO, 1991, str. 72.)

Sestavíme dvojice množin  $(B, C)$  pro  $n \in \{0, 1, 2, 3\}$ . Jejich počet odpovídá posloupnosti 1, 3, 9, 27. Snadno zformulujeme hypotézu, že dvojic množin požadovaných vlastností pro libovolné přirozené číslo  $n$  je  $3^n$ .

V důkazu matematickou indukcí je nejobtížnější částí zjištění, kolik dvojic množin  $(B, C)$  přibude, přidáme-li ke  $k$  prvkům množiny<sup>1</sup>  $M$   $k + 1$ -ní prvek, neboť podle indukčního předpokladu umíme spočítat, že  $k$ -prvková množina  $M$  poskytne  $3^k$  dvojic.

V tomto okamžiku bude vhodné si uvědomit, že  $k$  podmnožinám  $C$  vytvářeným z množiny  $M = \{1, 2, 3, \dots, k\}$  přibudou podmnožiny  $C$  obsahující prvek  $k + 1$  a také, jak tyto

<sup>1</sup> Víme-li, že množina  $M$  má  $k$  prvků, můžeme je bez újmy na obecnosti označit přirozenými čísly, tj. můžeme uvažovat, že  $M = \{1, 2, 3, \dots, k\}$ .

## INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

podmnožiny vytvářet, aby se na žádnou nezapomnělo a dal se zjistit jejich počet. Na základě konkrétních případů  $n \in \{0, 1, 2, 3\}$  lze zjistit, že podmnožiny obsahující prvek přidaný do  $M$  se získají přidáním tohoto prvku k podmnožinám vytvořeným z množiny  $M$  před přidáním prvku. (Např.  $\{\}, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}$  jsou všechny podmnožiny množiny  $M = \{1, 2\}$ . Přidáme-li do  $M$  prvek 3, přibudou k nim podmnožiny  $\{3\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}$ , tj. množiny vzniklé sjednocením původních podmnožin s množinou  $\{3\}$ .) Počet podmnožin  $C$ , které obsahují pouze  $k$  prvků, je proto stejný jako počet podmnožin, které obsahují přidaný prvek.

Podobnou úvahu provedeme i s podmnožinami podmnožin  $k$  prvkové množiny  $M$  a jim odpovídajícími podmnožinami podmnožin obsahujících přidaný prvek. Je evidentní, že vytvářené podmnožiny  $C$  s prvkem  $k + 1$  mají o jeden prvek více než podmnožiny, z nichž byly vytvořeny. Přidáním jednoho prvku do množiny se počet jejích podmnožin zdvojnásobí. (Např.  $\{\}$  má pouze jednu podmnožinu,  $\{1\}$  má dvě podmnožiny,  $\{1, 2\}$  má čtyři podmnožiny atd.) Jedné dvojici  $(B, C)$ , kde  $B, C$  neobsahuje přidaný prvek, proto odpovídají dvě dvojice podmnožin obsahujících přidaný prvek. Celkový počet dvojic  $(B, C)$  je tedy  $3^k + 2 \cdot 3^k = 3^{k+1}$ .

Postup využívající kombinatorické znalosti (určení počtu všech podmnožin  $n$ -prvkové množiny, binomickou větou) je uveden v ročence 38. MO, 1991, s. 86.

*Příklad 4:* Najděte taková přirozená čísla  $n$  a  $a_1, a_2, \dots, a_n$ , aby  $a_1 + a_2 + \dots + a_n = 1\,000$  a součin  $a_1 a_2 \dots a_n$  byl co největší. (Převzato z Larson 1990, s. 18. Úloha odpovídá 4. problému mezinárodní matematické olympiády z roku 1976.)

Není snadné odhadnout maximální součin čísel, které mají mít zadaný, poměrně velký, součet. Je vhodné proniknout do úlohy volbou malých přirozených čísel místo čísla 1 000. Tak lze dojít k několika podstatným závěrům. Číslo 1 nemůže být mezi hledanými přirozenými čísly, neboť nemění hodnotu součinu. Přičtením 1 k jinému sčítanci se součin vždy zvýší. Z rozkladů<sup>2</sup> čísla 10 neobsahujících 1 je zřejmé, že sčítanec 4 lze nahradit součtem  $2 + 2$ . Rozklady obsahující součet  $2 + 2 + 2$  je vhodné nahradit součtem  $3 + 3$ , neboť  $2 \cdot 2 \cdot 2 < 3 \cdot 3$ . Součty obsahující  $5 + 5$  vedou k menšímu součinu než rozklady s  $2 + 2 + 2 + 2 + 2$ , protože  $5^2 < 2^5$ . Číslo 1 000 rozložíme na součet maximálního sudého počtu čísel 3 a dvou čísel 2, součin je roven  $3^{332} \cdot 2^2$ .

### 3 Závěr

V úlohách si studenti procvičili formulování hypotéz, zobecňování a důkaz matematickou indukcí.

### 4 Použitá literatura

42. ročník matematické olympiády na středních školách. Praha: JČMF, 2002. ISBN 80-7015-888-3.

38. ročník matematické olympiády na středních školách. Praha: SPN, 1991. ISBN 80-04-25644-9.

<sup>2</sup> Rozklady čísla 10 a součiny sčítanců:  $8 + 2 \rightarrow 16, 7 + 3 \rightarrow 21, 6 + 4 \rightarrow 24, 5 + 5 \rightarrow 25; 6 + 2 + 2 \rightarrow 24, 5 + 3 + 2 \rightarrow 30, 4 + 4 + 2 \rightarrow 32, 4 + 3 + 3 \rightarrow 36; 4 + 2 + 2 + 2 \rightarrow 32, 3 + 3 + 2 + 2 \rightarrow 36; 2 + 2 + 2 + 2 + 2 \rightarrow 32$ .



## INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

LARSON, L. C. Metódy riešenia matematických problémov. 1. vyd. Bratislava: Alfa, 1990. 411 s. ISBN 80-05-00627-6.

### 5 Kontakt na autora

Mgr. Martina Kašparová, Ph.D.  
KMT-M FPE ZČU  
Klatovská 51, Plzeň  
[mernesto@kmt.zcu.cz](mailto:mernesto@kmt.zcu.cz)

Středisko služeb školám, Plzeň, Částkova 78  
Podpora talentovaných žáků v Plzeňském kraji  
CZ.1.07/1.2.03/02.0001

Tento projekt je v letech 2012-16 financován z rozpočtu Plzeňského kraje

## EXTREMÁLNÍ PRINCIP V ÚLOHÁCH

Martina KAŠPAROVÁ

### 1 Úvod

Principy jsou velmi užitečná tvrzení v matematice, neboť zajišťují existenci jistých objektů. Extremální princip lze použít ve všech úlohách, kde lze vysledovat uspořádanou množinu prvků (např. množina přirozených čísel) nebo množinu, kterou lze uspořádat (např. konečná množina bodů v rovině), a má tedy smysl hovořit o jejím nejmenším či největším prvku. Zkoumání vlastností extrémního prvku množiny často vede k rozporu v důkazových úlohách řešených důkazem sporem. Není obtížné princip pochopit, náročnější je zvládnout jeho vhodné použití na vhodnou množinu. (Např. v konečné množině bodů v rovině může být někdy užitečné vyšetřovat extrém vzhledem k poloze bodu, jindy je vhodné nalezení nejkratší nebo nejdelší úsečky určené těmito body, v dalších úlohách je nezbytné zkoumat úhly atd.)

### 2 Úlohy

*Příklad 1:* Na přímce je dána množina  $M$  bodů takových, že každý bod množiny  $M$  je středem úsečky spojující dva další body množiny  $M$ . Dokažte, že množina  $M$  je nekonečná. (Převzato z Rozental 1988, s. 53.)

Předpokládejme naopak, že bodů na přímce je konečný počet. Lze tedy určit bod množiny  $M$ , který je na přímce nejvíce vlevo nebo vpravo. V obou případech jde o krajní bod nějaké úsečky vytvářené z bodů množiny  $M$ . Krajní bod úsečky nemůže být vnitřním bodem (středem) úsečky, proto „extrémní bod“ nepatří do množiny  $M$ , čímž jsme v rozporu s předpokladem.

*Příklad 2:* Na každé z 15 planet, které mají od sebe navzájem různou vzdálenost, je astronom, který pozoruje k němu nejbližší planetu. Dokažte, že nějakou planetu nikdo nepozoruje. (Převzato ze Zadači, úloha 34936.)

Místo 15 planet uvažujme nejprve 3, 4, 5, ... planet. Tak zjistíme, že (1) astronomové ze dvou nejbližších planet se pozorují navzájem, (2) pokud je počet planet  $n$  sudé číslo, tvrzení obecně neplatí, (3) je-li  $n$  liché číslo, lze další úvahy rozdělit na případ, kdy a) druhá nejkratší vzdálenost je mezi nějakou planetou ze skupiny  $n - 2$  planet a jednou z dvojice nejbližších planet, b) druhá nejkratší vzdálenost je mezi nějakými dvěma planetami ve skupině  $n - 2$  planet. V případě a) je zřejmé, že dvě planety jsou pozorovány třemi astronomy, na zbývajících 13 planet je jen 12 astronomů-pozorovatelů, proto je mezi nimi aspoň jedna, kterou nikdo nepozoruje. Vzhledem k odlišným vzdálenostem mezi planetami, nemůže astronom pozorovat dvě planety. V případě b) je úloha zadaná pro  $n$  planet převedena na úlohu pro  $n - 2$  planet. Případ b) nemůže vzhledem k situaci pro tři planety nastávat do nekonečna.



### INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

*Příklad 3:* V polích nekonečné šachovnice jsou zapsána přirozená čísla tak, že každé číslo je rovno aritmetickému průměru čtyř sousedních čísel – horního, dolního, pravého a levého. Dokažte, že všechna čísla na šachovnici jsou si rovna. (Převzato z Rozental 1988, s. 54.)

Např. pětice čísel 1, 2, 3, 4, 5 s číslem 3 uprostřed splňuje podmínku aritmetického průměru. V takovém případě musí být číslo 1 aritmetickým průměrem čísla 3 a dalších tří čísel. Uznáme-li 0 jako přirozené číslo, jsou třemi čísly 0, 0, 1. Nyní bude potřeba 0 vyjádřit jako aritmetický průměr čísla 1 a dalších tří čísel (případně jako aritmetický průměr 1, jednoho z nenulových čísel 2, 4, 5 a dalších dvou čísel), což zřejmě nelze, a tedy šachovnici, na níž je pětice čísel 1, 2, 3, 4, 5, ... vyplnit nelze. Předpokládejme, že  $m$  je nejmenší číslo na šachovnici. Pro čísla  $a, b, c, d$  v sousedních polích platí  $4m = a + b + c + d$ . Vzhledem k volbě  $m$  je  $a \geq m, b \geq m, c \geq m, d \geq m$ , a tedy  $a + b + c + d \geq 4m$ . Pokud by kterékoli ze čtyř sousedních čísel bylo větší než  $m$ , byl by součet ostře větší než  $4m$ , proto je nutně  $a = m, b = m, c = m, d = m$ . Pole, v nichž je číslo  $m$ , mají v sousedních polích opět číslo  $m$ . Zřejmě lze vyplnit na šachovnici řadu tvořenou jen číslem  $m$ . Číslo  $m$  je i ve všech polích sloupce, kde je aspoň jedno pole s číslem  $m$ . Šachovnice je celá vyplněná číslem  $m$ , protože řada čísel  $m$  zasahuje do všech sloupců šachovnice.

*Příklad 4:* V rovině je několik bodů obarveno modře a několik červeně tak, že žádné tři body jedné barvy neleží na jedné přímce (bodů každé barvy je víc než 3). Dokažte, že nějaké tři body jedné barvy tvoří trojúhelník, na jehož třech stranách leží dohromady nejvýše dva body druhé barvy. (Převzato ze Zadači, úloha 35135.)

Zkousíme kreslit červené a modré body, vyhledávat různé „jednobarevné trojúhelníky“ (vrcholy mají stejnou barvu) a uvažovat možný počet bodů na jejich stranách. Z konečného počtu bodů lze utvořit konečný počet „jednobarevných trojúhelníků“. Mezi nimi existuje trojúhelník nejmenšího obsahu. Nechť je např. modrý a předpokládejme pro spor, že na jeho stranách jsou aspoň tři červené body. Nemohou být na jedné straně vzhledem k podmínce v zadání. Při jiném umístění získáme jednobarevný červený trojúhelník, který má menší obsah než modrý trojúhelník, což je v rozporu s výběrem nejmenšího trojúhelníku.

*Příklad 5:* Dokažte, že neexistuje čtveřice přirozených čísel  $x, y, z, u$  vyhovující rovnosti  $x^2 + y^2 = 3(z^2 + u^2)$ . (Převzato z Rozental 1988, s. 56.)

Předpokládejme naopak, že čtveřice  $a, b, c, d$  rovnosti vyhovuje, tj.  $a^2 + b^2 = 3(c^2 + d^2)$ . Vzhledem k jednoznačnosti rozkladu přirozených čísel na součin mocnin prvočísel musí být součet  $a^2 + b^2$  dělitelný 3. Čísla  $a, b$  mohou dávat při dělení třemi zbytek 0, 1, 2. Zvážíme-li všechny možnosti, zjistíme, že součet  $a^2 + b^2$  je dělitelný třemi pouze v případě, že  $a, b$  jsou čísla dělitelná třemi, tj.  $a = 3k, b = 3l$ . Po dosazení a jednoduché úpravě dostaneme  $c^2 + d^2 = 3(k^2 + l^2)$ . Nyní by se celý postup opakoval pro  $c = 3m, d = 3n$ . Extremálním principem lze snadno vysvětlit, že došlo ke sporu. V úvodu vezmeme takovou čtveřici  $a, b, c, d$ , že součet  $a^2 + b^2$  je nejmenší ze všech čtveřic vyhovujících rovnosti. Čtveřice  $c, d, k, l$  vyhovuje stejné rovnosti a navíc  $c^2 + d^2 < a^2 + b^2$ , to je ovšem v rozporu s výběrem čtveřice  $a, b, c, d$ .

## INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

*Příklad 6:* V nějaké zemi leží 100 letišť v jedné rovině. Vzdálenosti mezi nimi se navzájem liší. Z každého letiště vylétá letadlo a letí na k němu nejbližší letiště. Dokažte, že na žádné letiště nemůže přiletět více než pět letadel. (Převzato ze Zadači, úloha 58048.)

Opět dokazujeme sporem, tj. předpokládejme, že existuje aspoň jedno letiště  $L$ , na které může přistát aspoň šest letadel. Pro šest letišť  $A_1, \dots, A_6$  je  $L$  nejbližší letiště, a tedy vzdálenosti mezi těmito letišti jsou větší než vzdálenosti do  $L$ . Uvažujme letiště  $A_i, A_j$  taková, že jejich vzdálenost je nejmenší možná ze všech vzdáleností mezi letišti  $A_1, \dots, A_6$ . V trojúhelníku  $A_iLA_j$  je nejdelší stranou strana  $A_iA_j$ , leží proti ní největší úhel. Tento úhel je zřejmě větší než  $60^\circ$ . Letiště  $A_1, \dots, A_6$  určují konvexní šestiúhelník s vnitřním bodem  $L$  a proti každé jeho straně je úhel při vrcholu  $L$  větší než  $60^\circ$ . Součet všech šesti úhlů při vrcholu  $L$  je větší než  $360^\circ$ , což není možné, když všech 100 letišť leží v rovině.

*Příklad 7:* Sedm houbařů našlo celkem 100 hub. Žádní dva nenašli stejný počet hub. Dokažte, že existují tři houbaři, kteří našli aspoň 50 hub. (Převzato z Rozentál 1988, s. 56 – 57.)

Rozložení hub mezi houbaře lze provést mnoha způsoby. Samozřejmě jsou případy, kdy nejslabší houbaři najdou málo, pak se mezi nejlepšími houbaři snadno vyberou tři, kteří dohromady našli aspoň 50 hub. Nejzajímavější bude případ, kdy slabší houbaři našli hodně. Dokážeme, že i přesto tři nejlepší houbaři našli aspoň 50 hub. Zjistíme největší možný počet  $a_7$  nalezených hub nejslabším houbařem. Nechť  $a_7 = 0$ , pak  $a_6 \geq 1, a_5 \geq 2, \dots, a_1 \geq 6$  a  $a_1 + a_2 + \dots + a_7 \geq 21$ . Počet hub každého houbaře lze zvýšit o  $(100 - 21):7 \doteq 11$  kusů. Pak je  $a_7 = 11, a_6 \geq 12, \dots, a_1 \geq 17, a_1 + a_2 + \dots + a_7 \geq 98$ . (Nejslabší houbař nemohl nasbírat 12 hub, nejmenší možný součet počtu úlovků všech houbařů by byl totiž 105.) Navýšení počtu hub o jednu u  $i$ -tého nejlepšího houbaře vede ke zvýšení počtu nalezených hub aspoň o jednu u všech houbařů, kteří byli ještě lepší. Počet hub proto nelze zvyšovat u pěti nejhorších houbařů. Je tedy  $a_7 + a_6 + a_5 + a_4 = 11 + 12 + 13 + 14 = 50$  největší možný počet hub nalezených nejhoršími čtyřmi houbaři. Proto nejlepší tři houbaři nasbírali aspoň  $100 - 50 = 50$  hub, což se mělo dokázat.

### 3 Závěr

Prostřednictvím několika jednoduchých úloh se účastníci kempu seznámili s extrémálním principem a jeho užitím v úlohách s geometrickým i aritmetickým námětem.

### 4 Použitá literatura

ROZENTÁL, A. L. Právilo krajného. Kvant. 1988, roč. 19, č. 9, s. 53 – 57. Dostupné na internetu: <[http://kvant.mccme.ru/1988/09/pravilo\\_krajnego.htm](http://kvant.mccme.ru/1988/09/pravilo_krajnego.htm)>.

Zadači. Dostupné na internetu: <<http://www.problems.ru/>>.

### 5 Kontakt na autora

Mgr. Martina Kašparová, Ph.D.

KMT-M FPE ZČU

Klatovská 51, Plzeň

[mernesto@kmt.zcu.cz](mailto:mernesto@kmt.zcu.cz)

Středisko služeb školám, Plzeň, Částkova 78  
Podpora talentovaných žáků v Plzeňském kraji  
CZ.1.07/1.2.03/02.0001

Tento projekt je v letech 2012-16 financován z rozpočtu Plzeňského kraje

# DŮKAZOVÉ TECHNIKY V GEOMETRII A TEORII ČÍSEL A POSLOUPNOSTÍ

Josef KŘIŠŤAN

## Úvod

I tento rok předkládám stručné shrnutí přednášky, jež byla tvořena třemi tematickými částmi:

- O podobnosti v geometrii,
- Teorie čísel a kongruence,
- Posloupnosti a řady.

Jako každý rok, pro atraktivitu přednášky jsem uspořádal soutěž, kde mezi sebou soutěžily jednotlivé skupiny, složené vesměs ze dvojice studentů. Na začátku soutěže si studenti zvolí jméno svého týmu, což vyústí v kuriózní jména a zároveň to odlehčí formální začátek přednášky. Po tematickém bloku následoval kvíz, který se sestával ze série ryze nematematických otázek a po stanoveném časovém limitu se odpovědi obodovaly. Body šlo ale hlavně získávat za aktivitu a řešení úloh. Na konci přednášek jsem vyhlásil výsledky a rozdál sladké odměny.

V následujících částech uvedeme několik úloh řešených během přednášky.

## 1 O podobnosti v geometrii

V sekci O podobnosti v geometrii jsme se zabývali základními vlastnostmi přímek, kružnic a trojúhelníků. Vyslovili jsme několik základních vět z geometrie trojúhelníka a snažili se tyto poznatky využít při řešení úloh.

**Příklad 1.** Označme  $S$  střed kružnice vepsané v trojúhelníku  $ABC$  a  $A'$ ,  $B'$  a  $C'$  postupně obrazy bodu  $S$  v osové souměrnosti podle přímek  $BC$ ,  $CA$  a  $AB$ . Dokažte, že trojúhelníky  $ABC$  a  $A'B'C'$  jsou podobné právě tehdy, když je  $ABC$  rovnostranný trojúhelník.

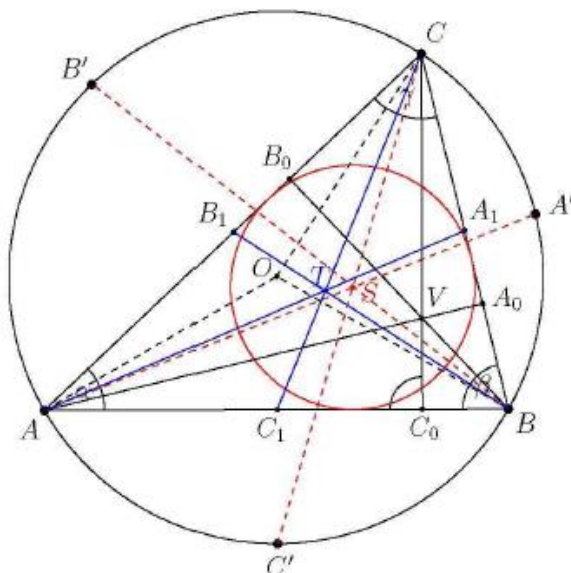
**Řešení.** Volme klasické označení stran a úhlů. Jak známo, bod  $S$  leží na osách vnitřních úhlů trojúhelníku  $ABC$ , takže snadno dopočítáme  $|\angle C'SB'| = \pi - \alpha$ .

Na druhé straně, bod  $S$  je pro trojúhelník  $A'B'C'$  střed kružnice opsané. To lze snadno nahlédnout z toho, že např.  $|A'S| = 2r$ , kde  $r$  je poloměr kružnice vepsané trojúhelníku  $ABC$ . V trojúhelníku  $A'B'C'$  plyne z vlastnosti obvodových a středových úhlů:  $|\angle B'SC'| = 2|\angle B'A'C'|$ . Za předpokladu, že trojúhelníky  $ABC$  a  $A'B'C'$  jsou podobné musí být  $|\angle B'SC'| = 2\alpha$ . Z dvojího vyjádření velikosti úhlu  $\angle B'SC'$  plyne podmínka  $\pi - \alpha = 2\alpha$ ,  $\alpha = \pi/3$ . Podobně dostaneme  $\beta = \gamma = \pi/3$ , tj. musí trojúhelník  $ABC$  je rovnostranný.

## INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Naopak, pokud je trojúhelník  $ABC$  rovnostranný, je úloha triviální a rádi přenecháme tuto část laskavému čtenáři.

Na přednášce jsme se dále zabývali základními vlastnostmi příček v trojúhelníku. Velmi mě potěšilo zjištění, že studenti mají velmi dobré znalosti z geometrie a nebojí se prezentovat (po krátkém přemlouvání :-)) před tabulí.



Obrázek 1: základní vlastnosti trojúhelníku.

Na přednášce jsme zmínili tvrzení o Cévoově a Meneleově větě. Jedním z praktických úkolů bylo například odvození délky těžnice. Studenti použili při odvození kosinovou větu (sledujme Obrázek 1). Z dvojího vyjádření délky těžnice  $t_c$  vyloučíme  $\cos \alpha$ : z trojúhelníků  $AC_1C$  a  $ABC$  postupně určíme

$$t_c^2 = \frac{1}{4}c^2 + b^2 - bc \cos \alpha,$$

$$a^2 = c^2 + b^2 - 2bc \cos \alpha,$$

odkud

$$t_c = \frac{1}{2} \sqrt{2a^2 + 2b^2 - c^2}.$$

Pak je již snadné dokázat následující rovnost

$$a^2 + b^2 + c^2 = \frac{4}{3}(t_a^2 + t_b^2 + t_c^2),$$

která platí pro každý trojúhelník. Stewartův vzorec umožňuje vyjádřit délku obecné příčky v trojúhelníku. Předpokládejme, že na straně  $AB$  je bod  $D$ . Označme

$$p = |AD|/c, \quad q = |BD|/c, \quad p + q = 1.$$

Potom pro délku  $|CD|$  lze (stejně snadno jako pro délku těžnice) dokázat

$$|CD|^2 = pa^2 + qb^2 - pqc^2.$$

Středisko služeb školám, Plzeň, Částkova 78  
Podpora talentovaných žáků v Plzeňském kraji  
CZ.1.07/1.2.03/02.0001

Tento projekt je v letech 2012-16 financován z rozpočtu Plzeňského kraje



## INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Vzorec pro délku těžnice získáme volbou  $p = q = \frac{1}{2}$ .

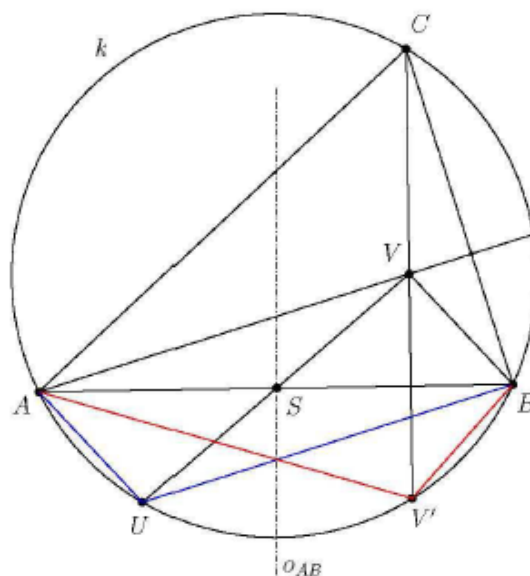
Dalšími jednoduchými příklady bylo určení délky výšky  $CC_0$  a délky osy úhlu. Dále jsme ukázali, že bod  $C'$  je středem oblouku  $AB$  (obsahující bod  $C'$ ). Důkaz lze provést snadno pomocí obvodových úhlů nad tětivami  $AC'$  a  $BC'$ . Totiž, přímka  $CC'$  je osa úhlu  $ACB$ , tj.  $|\angle ACC'| = |\angle BCC'|$ , což je ekvivalentní podmínce  $|AC'| = |BC'|$ . Důkaz je hotov.

Dále jsme zmínili ortický trojúhelník  $A_0B_0C_0$  a některé jeho vlastnosti. Například jsme ukázali, že trojúhelníky  $ABC$  a  $A_0B_0C$  jsou podobné.

Připomněli jsme si také základní vlastnosti kružnice vepsané a opsané trojúhelníku  $ABC$ . Je snadné ukázat, že  $|\angle AOB| = 2|\angle ACB|$  a  $|\angle ASB| = \pi - \gamma$ . Podobných jednoduchých tvrzení bylo na přednášce ukázáno mnoho a důkazy provedli většinou sami studenti.

**Příklad 2.** V ostroúhlém trojúhelníku  $ABC$  označme  $V$  jeho ortocentrum a  $S$  střed  $AB$ . Buď  $U$  bod souměrně sdrúžený bodu  $V$  podle středu  $S$ . Dokažte, že  $|\angle ACV| = |\angle BCU|$ .

**Řešení.**



Obrázek 2: náčrt k příkladu 2.

Ve středové souměrnosti, ve které přejde bod  $V$  na bod  $U$  přejde trojúhelník  $AVB$  na  $BUA$ , a proto

$$\begin{aligned} |\angle AUB| &= |\angle AVB|, \\ |AU| &= |BV| \end{aligned} \quad (1)$$

Velikost  $|\angle AVB|$  dopočítáme z trojúhelníku  $AVB$ . Platí  $|\angle VAB| = \pi/2 - \beta$  a  $|\angle VBA| = \pi/2 - \alpha$ , pak  $|\angle AVB| = \alpha + \beta = \pi - \gamma$ . Proto také  $|\angle AUB| = \pi - \gamma$ , z čehož plyne, že čtyřúhelník  $AUBC$  je tětivový a opsaná kružnice tomuto čtyřúhelníku je totožná s opsanou kružnicí trojúhelníku  $ABC$ .

Označme  $V'$  obraz bodu  $V$  v osové souměrnosti podle přímky  $AB$ . V této souměrnosti přejde trojúhelník

## INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

$AVB$  na trojúhelník  $AV'B$ , takže

$$\begin{aligned} |\angle AV'B| &= |\angle AVB| = \pi - \gamma, \\ |BV'| &= |BV| = |AU|, \quad (\text{viz (1)}) \end{aligned} \quad (2)$$

Jak vidíme, bod  $V'$  leží také na kružnici opsané trojúhelníku  $ABC$ , viz obrázek 2.

Nyní již víme, že body  $U$  a  $V'$  leží na kružnici opsané trojúhelníku  $ABC$ . Protože  $|AU| = |BV'|$ , obvodové úhly nad těmito tětivami jsou shodné:  $|\angle ACU| = |\angle BCV'|$ . Pak

$$\begin{aligned} |\angle ACV| &= |\angle ACV'| = |\angle ACU| + |\angle UCV'| = \\ &= |\angle BCV'| + |\angle V'CU| = |\angle BCU|, \end{aligned}$$

což jsme měli dokázat.

## 2 Teorie čísel a kongruence

Jednou ze základních metod v teorii čísel je matematická indukce. Aplikujeme ji na následující, na první pohled geometrickou, úlohu.

**Příklad 3.** *Dokažte, že  $n$  přímek rozdělí rovinu na nejvýše  $\frac{1}{2}n(n+1) + 1$  částí.*

**Řešení.** Pro první část matematické indukce stačí ukázat, že vzorec platí pro  $n = 1$ . A skutečně, jedna přímka rozdělí rovinu na dvě části. Tvrzení pro  $n = 1$  platí.

V druhém kroku indukce předpokládejme, že máme rovinu rozdělenou  $n$  přímkami maximálně na  $\frac{1}{2}n(n+1) + 1$  částí. Přidáme-li  $(n+1)$ -ní přímku, je rozdělena průsečíky s ostatními přímkami na nejvýše  $n+1$  úseků a každý z nich oddělí novou část roviny.

Rovina bude rozdělena  $n+1$  přímkami na maximálně na  $\frac{1}{2}n(n+1) + 1 + (n+1) = \frac{1}{2}(n+1)(n+2) + 1$  částí, což jsme chtěli dokázat.

**Příklad 4.** *Dokažte, že neexistuje žádná čtveřice  $x, y, z, u$  přirozených čísel splňující rovnost  $x^2 + y^2 = 3(z^2 + u^2)$ .*

**Řešení.** Na této úloze budeme demonstrovat tzv. metodu extrému, konkrétně metodu nekonečného klesání. Pro spor předpokládejme, že taková čtveřice existuje. Mezi všemi takovými čtveřicemi vybereme tu s nejmenší hodnotou  $x^2 + y^2$  (pokud je jich více, vezmeme libovolnou z nich) a označme ji  $(a, b, c, d)$ . Z rovnosti  $a^2 + b^2 = 3(c^2 + d^2)$  plyne  $3|a^2 + b^2$ , a to je možné jen v případě  $3|a$  a současně  $3|b$  (podle malé Fermatovy věty: je-li číslo  $x$  nesoudělné s 3, pak dává  $x^2$  zbytek 1 po dělení 3. V řeči kongruencí:  $x^2 \equiv 1 \pmod{3}$  pokud  $\text{nsd}(x, 3) = 1$ .) Existují proto  $a_0, b_0$ , že  $a = 3a_0, b = 3b_0$ . Dosazením do původní rovnice:  $c^2 + d^2 = 3(a_0^2 + b_0^2)$ . Našli jsme tedy další čtveřici, která splňuje zadanou rovnici. Je jí čtveřice  $(c, d, a_0, b_0)$ , přičemž

$$a^2 + b^2 = 3(c^2 + d^2) > c^2 + d^2.$$

Jak je vidět z předchozí nerovnosti, nově nalezená čtveřice  $(c, d, a_0, b_0)$  má menší součet kvadrátů prvních dvou složek než námi zvolená čtveřice  $(a, b, c, d)$ . To je ale ve sporu s předpokladem, že čtveřice  $(a, b, c, d)$  měla takový součet nejmenší. A to je hledaný spor. Proto žádná čtveřice, která splňuje rovnost ze zadání, neexistuje.

## INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Diofantiickou rovnicí zpravidla označujeme rovnici, kterou řešíme na oboru celých nebo přirozených čísel a neznámých je více než počet rovnic.

**Příklad 5.** Nejděte všechna řešení  $x, y \in \mathbb{Z}$  rovnice

$$7x^2 + 5y + 15 = 0.$$

**Řešení.** Rada první zní: pokud se v rovnici vyskytují prvočísla, zkusíme zbytky po dělení nějakým vhodným prvočíslem. V našem případě zkusíme dělitelnost číslem 5. Levá strana modulo 5 dává

$$L = 7x^2 + 5y + 15 \equiv 2x^2 + 4 \pmod{5}.$$

Kvadrát přirozeného čísla dává pouze zbytky 0, 1, 4 po dělení číslem 5. Výraz  $2x^2 + 4$  může dávat tím pádem jen zbytky 1, 4 po dělení 5, nikdy však zbytek 0 jako pravá strana rovnice. Tím jsme dokázali, že rovnice nemá v oboru celých čísel řešení.

**Příklad 6.** Pro přirozené číslo  $k$  označme  $n_k$  součin prvních  $k$  prvočísel. Např.  $n_3 = 2 \cdot 3 \cdot 5 = 30$ . Zjistěte, pro která čísla  $k$  je možno zlomek

$$\frac{3^{n_k} - 1}{n_k}$$

krátit číslem větším než 2.

**Řešení.** Při úlohách tohoto typu se snažím studenty přesvědčit v první řadě k pokusům, aby zjistili, jak zadání funguje.

Pro  $k = 1$ ,  $n_1 = 2$  a 2 dělí  $3^2 - 1 = 8$ . Pro  $k = 2$ ,  $n_2 = 2 \cdot 3$  a opět pouze 2 dělí  $3^6 - 1$ . Pro  $k = 3$  zkusíme, zda 5 dělí  $3^{2 \cdot 3 \cdot 5} - 1$ . Budeme počítat modulo 5,

$$3^{2 \cdot 3 \cdot 5} - 1 = (3^2)^{15} - 1 = 9^{15} - 1 \equiv (-1)^{15} - 1 \equiv 3 \pmod{5}.$$

Takže číslem 5 zlomek krátit nejde. Pro  $k = 4$ ,  $n_4 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7$ , počítáme modulo 7,

$$(3^2)^{3 \cdot 5 \cdot 7} - 1 \equiv 2^{3 \cdot 5 \cdot 7} - 1 \equiv 8^{5 \cdot 7} - 1 \equiv 1^{5 \cdot 7} - 1 \equiv 0 \pmod{7}.$$

Z tohoto postupu vidíme, že  $3^6$  dává zbytek 1 po dělení 7. Tento poznatek potvrzuje také Eulerova věta, která obecně tvrdí: pro nesoudělná přirozená čísla  $a$ ,  $n$  platí

$$a^{\varphi(n)} \equiv 1 \pmod{n},$$

kde  $\varphi(n)$  je Eulerova funkce udávající počet nesoudělných přirozených čísel, která jsou menší než  $n$ . Je-li  $n$  prvočíslo,  $\varphi(n) = n - 1$ .

- Zkuste najít explicitní vyjádření funkce  $\varphi(n)$  pouze na základě prvočíselného rozkladu  $n$ .

V našem případě jsou 3 a 7 nesoudělná a  $\varphi(7) = 6$ , proto  $7|3^6 - 1$ . Využijeme-li poznatku, že z dělitelnosti  $m|n$  vyplývá také  $(a^m - 1)|(a^n - 1)$  pro každé celé  $a > 1$ , je úloha vyřešena. Vidíme totiž, že pro  $k \geq 4$  je  $6|n_k$ ,  $7|n_k$  a také  $(3^6 - 1)|(3^{n_k} - 1)$  a  $7|3^6 - 1$ .

Závěr: pro  $k = 1, 2, 3$  lze původní zlomek krátit pouze 2, pro  $k \geq 4$  ho lze krátit 7.

Následující úloha nás zavede k metodě, kterou lze nazvat metoda po sobě jdoucích mocnin. Platí totiž tvrzení, které říká, že neexistují celá čísla  $a, b$  a přirozené  $n$ , aby platilo

$$a^n < b^n < (a+1)^n.$$

Středisko služeb školám, Plzeň, Částkova 78  
Podpora talentovaných žáků v Plzeňském kraji  
CZ.1.07/1.2.03/02.0001

Tento projekt je v letech 2012-16 financován z rozpočtu Plzeňského kraje

## INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Pro  $n = 2$  to znamená, že mezi dvěma po sobě jdoucími kvadráty nemůže být kvadrát přirozeného čísla.

**Příklad 7.** V oboru celých čísel řešte rovnici

$$x^2 = y(y + 2).$$

**Řešení.** Protože  $x^2 \geq 0$ , musí být  $y(y + 2) \geq 0$ , tj. v úvahu připadá  $y \leq -2$  a nebo  $y \geq 0$ . Pokud  $y = -2$  nebo  $y = 0$ , musí být  $x = 0$ . Pokud  $y > 0$ , platí nerovnosti

$$y^2 < y(y + 2) = y^2 + 2y < (y + 1)^2$$

a podle naší věty nemůže být  $x$  celé. Musí totiž splňovat  $y^2 < x^2 < (y + 1)^2$ .

Pokud  $y < -2$ , platí nerovnosti

$$(y + 2)^2 < y(y + 2) = y^2 + 2y < (y + 1)^2$$

a číslo  $x$  opět nemůže být celé. Tím jsme ukázali, že rovnice má pouze dvě řešení:  $(x, y) = \{(0, 0), (0, -2)\}$ .

### 3 Posloupnosti a řady

Na následující funkcionální rovnici ukážeme jak její řešení převedeme na řešení rekurentního vztahu.

**Příklad 8.** Najděte všechny funkce  $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$  splňující rovnici  $f(f(x)) + af(x) = b(a + b)x$ , kde  $a, b$  jsou přirozená čísla parametry.

**Řešení.** Pro libovolné  $x_0 \in \mathbb{R}^+$  definujme posloupnost  $x_0, x_1, \dots$ , kde  $x_n = f(x_{n-1})$  pro každé přirozené číslo  $n$ . Funkcionální rovnici jde tak přepsat do tvaru

$$x_{n+2} = ax_{n+1} + b(a + b)x_n.$$

Hledejme řešení ve tvaru  $x_n = \lambda^n$  pro nenulové  $\lambda$ . Tento tvar dosadíme do předchozí rovnice a po vykrácení  $\lambda^{n-2}$  dojdeme k charakteristické rovnici

$$\lambda^2 = a\lambda + b(a + b)$$

s kořeny  $\lambda_1 = -a - b$ ,  $\lambda_2 = b$ . Hledané  $x_n$  hledáme jako lineární kombinaci  $\lambda_1^n = (-a - b)^n$  a  $\lambda_2^n = b^n$ , neboli

$$x_n = \alpha_1(-a - b)^n + \alpha_2 b^n,$$

kde  $\alpha_1$  a  $\alpha_2$  jsou reálná čísla, která se obvykle určí z počátečních podmínek, např. z hodnot  $x_0, x_1$ . Aby bylo  $x_n > 0$  pro každé  $n$ , musí být  $\alpha_1 = 0$ . Totiž, jak snadno vidíme, pokud  $\alpha_1 > 0$ , pak stačí najít lichá  $n$  pro která  $x_n < 0$ , tj.

$$\alpha_2 b^n < -\alpha_1(-a - b)^n = \alpha_1(a + b)^n.$$

Pokud  $\alpha_2 < 0$ , je tato nerovnost splněna automaticky (předpokládáme totiž  $\alpha_1 > 0$  a  $a, b$  jsou přirozená). Pokud  $\alpha_2 > 0$ , stačí, aby

$$\frac{\log(\alpha_2/\alpha_1)}{\log(1 + a/b)} = r_0 < n.$$

V tomto případě bude pro lichá  $n > r_0$  vždy  $x_n < 0$ . Tím jsme zdůvodnili, proč musí být  $\alpha_1 = 0$ . Z počátečních podmínek pak plyne  $x_0 = \alpha_2$ ,  $f(x_0) = x_1 = \alpha_2 b = bx_0$ . A protože bylo  $x_0$  zcela libovolné, je  $f(x) = bx$  pro libovolné číslo  $x$ . Zkouškou snadno ověříme, že je to jediné řešení.



## INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

**Příklad 9.** Nechť  $x_1, x_2, \dots, x_n$  jsou reálná čísla splňující  $|x_1 + x_2 + \dots + x_n| = 1$ , a  $|x_i| \leq \frac{n+1}{2}$  pro  $i = 1, 2, \dots, n$ .

Ukažte, že existuje permutace  $y_1, y_2, \dots, y_n$  z čísel  $x_1, x_2, \dots, x_n$  taková že

$$|y_1 + 2y_2 + \dots + ny_n| \leq \frac{n+1}{2}.$$

**Řešení.** Pro každou permutaci  $\pi = (y_1, y_2, \dots, y_n)$  z  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$  označme  $S(\pi)$  sumu  $y_1 + 2y_2 + \dots + ny_n$ . Pro důkaz sporem předpokládejme  $|S(\pi)| > \frac{n+1}{2}$  pro každou permutaci  $\pi$ .

Vezměme permutaci  $\pi'$ , která se od  $\pi$  liší jen výměnou dvou sousedních členů, např.  $y_k$  a  $y_{k+1}$ . Pak  $S(\pi)$  a  $S(\pi')$  se liší  $|y_k + y_{k+1}| \leq n + 1$  (podle druhého předpokladu ze zadání), což ovšem znamená, že  $S(\pi)$  a  $S(\pi')$  mají stejné znaménko.

Uvažujme nyní identickou permutaci  $\pi_0 = (x_1, \dots, x_n)$  a jí reverzní  $\tilde{\pi}_0 = (x_n, \dots, x_1)$ . Je zřejmé, že existuje posloupnost permutací  $\pi_0, \pi_1, \dots, \pi_m = \tilde{\pi}_0$  taková, že permutaci  $\pi_{i+1}$  získáme z permutace  $\pi_i$  výměnou pouze dvou sousedních členů. To znamená, že postupnými výměnami můžeme  $x_n$  umístit na první místo,  $x_{n-1}$  na druhé a tak dále. Jak víme, všechny součty  $S(\pi_0), S(\pi_1), \dots, S(\pi_m) = S(\tilde{\pi}_0)$  mají stejné znaménko. Pak součet  $|S(\pi_0) + S(\pi_m)| = (n+1)(x_1 + \dots + x_n) = n+1$ , implikuje, že jedna z  $S(\pi_0)$  a  $S(\tilde{\pi}_0)$  je menší než  $\frac{n+1}{2}$  v absolutní hodnotě, což je spor s předpokladem.

## Závěr a poděkování.

Na přednášce jsem se zabývali úlohami z geometrie, teorie čísel a posloupností. Největší přínos vidím hlavně v aktivním zapojení studentů do přednášky.

Rád bych poděkovat všem lidem, kteří se podíleli na přípravě Kempu 2016. Zvláště bych chtěl poděkovat PaedDr. Naděždě Kubešové za pozvání a trpělivost. V neposlední řadě děkuji studentům za skvělou atmosféru při řešení úloh a nematických kvízů.

## Literatura.

- Matematický seminář PRASE, <http://mks.mff.cuni.cz/>
- <http://mo.webcentrum.muni.cz>
- Dušan Djurkiè a kol., The IMO Compendium. A Collection of Problems Suggested for the International

## Kontakt na autora.

Josef Křišťan  
email: [kristan1@email.cz](mailto:kristan1@email.cz)  
tel.: +420777944564

Středisko služeb školám, Plzeň, Částkova 78  
Podpora talentovaných žáků v Plzeňském kraji  
CZ.1.07/1.2.03/02.0001

Tento projekt je v letech 2012-16 financován z rozpočtu Plzeňského kraje

## CELÁ ČÁST REÁLNÉHO ČÍSLA, ABSOLUTNÍ HODNOTA REÁLNÉHO ČÍSLA

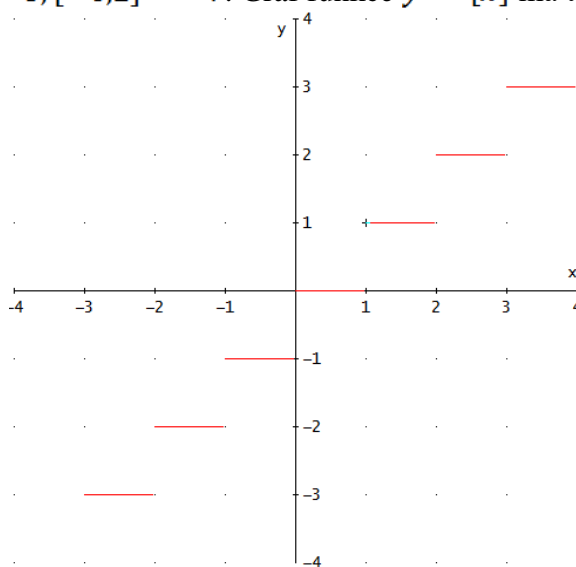
Josef KUBEŠ

### 1 Úvod

Celá část reálného čísla je partie, která se v klasických hodinách matematiky neprobírá. Ovšem je to vděčné téma ke tvorbě netradičních úloh, ve kterých je nutná individuální strategie. Nelze se naučit univerzální postup, je nutné si předem dobře zvážit postup řešení.

### 2 Definice celé části reálného čísla a její graf

Výraz  $[a]$  znamená celou část z reálného čísla  $a$ . Je rovna nejbližšímu nižšímu celému číslu. Tedy  $[1] = 1$ ,  $[3,5] = 3$ ,  $[-6,2] = -7$ . Graf funkce  $y = [x]$  má tvar:



**2.1** Určete všechna reálná čísla, která vyhovují rovnici  $4x - 2[x] = 5$ .

**2.2** V oboru reálných čísel řešte rovnici

$$[3x - 5] = 5x - 8$$

V obou úlohách využijeme definici celé části, tedy  $[x] = x + k$ , kde  $0 \leq k < 1$ .

**2.3** Zjistěte, kolik řešení má v oboru reálných čísel rovnice

$$x = [x] + \frac{x}{2016}$$

## INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Opět lze využít definici celé části, tedy  $[x] = x + k$ , kde  $0 \leq k < 1$ . Úlohu můžeme řešit pomocí jiné vlastnosti celé části -  $[x] \leq x < [x] + 1$ . Dojdeme ke zjištění, že  $0 \leq x < 2016$ . Číslo  $x$  splňující uvedenou nerovnici bude řešením rovnice, právě když  $x - \frac{x}{2016}$  bude celočíselná.

Odtud lze najít řešení -  $\frac{0.2016}{2015}, \dots, \frac{2014.2016}{2015}$ .

**2.4** Určete všechna dvojice reálných čísel  $x, y$ , které vyhovují soustavě rovnic

$$[x + y] = 2016$$

$$[x] - y = p$$

a) pro  $p = 2$ , b) pro  $p = 3$ .

Je třeba si dobře prohlédnout druhou rovnici. Z ní je patrné, že  $y$  musí být z oboru celých čísel a tím  $[x + y] = [x] + y$ . Dál je úloha jednoduchá.

### 3 Závěr

Uvedené úlohy z velké části přesahují rozsah základního středoškolského učiva matematiky. Pro řešení příkladů matematické olympiády jsou však základní a navazuje se na ně ve vyšších kolech. Řešitele zdokonaluje ve strategii a důslednosti řešení.

### 4 Použitá literatura

ŠVRČEK, J., CALÁBEK, P. Sbíрка netradičních matematických úloh. 1. vyd. Praha: Prométheus, spol. s r. o., 2007. 186 s. ISBN 978-80-7196-341-7

### 5 Kontakt na autora

PaedDr. Josef Kubeš

Gymnázium, Plzeň, Mikulášské nám. 23

[Josef.Kubes@mikulasske.cz](mailto:Josef.Kubes@mikulasske.cz)

## DŮKAZOVÉ TECHNIKY - NEROVNOSTI

Josef KUBEŠ

### 1 Úvod

Znalost důkazových technik patří k základnímu vybavení každého řešitele matematické olympiády. Ověřování platnosti zadaných nerovnic vždy vyžaduje originální přístup, určitý nadhled a zkušenost.

Středisko služeb školám, Plzeň, Částkova 78  
Podpora talentovaných žáků v Plzeňském kraji  
CZ.1.07/1.2.03/02.0001

Tento projekt je v letech 2012-16 financován z rozpočtu Plzeňského kraje

## INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

### 2 Nerovnosti a jejich ověřování

Základním stavebním kamenem je nerovnost vyplývající z druhé mocniny dvojčlenu  $(x - 1)^2$ . Pro libovolné reálné číslo platí, že  $(x - 1)^2 \geq 0$ . Odtud plyne  $x + \frac{1}{x} \geq 2$ .

Další důležitá nerovnost je vztah mezi geometrickým a aritmetickým průměrem. Pro libovolnou  $n$ -tici reálných kladných čísel  $x_1, x_2, \dots, x_n$  platí:  $\sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_n} \leq \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}$ .

#### 2.1 Dokažte, že pro každý ostrý úhel $\alpha$ platí

$$\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{cotg} \alpha \geq 2$$

Použijeme vztah mezi funkcemi tangens a kotangens a upravíme na druhou mocninu dvojčlenu.

#### 2.2 Pro libovolná reálná čísla $x, y, z$ taková, že $x < y < z$ , dokažte nerovnost

$$x^2 - y^2 + z^2 > (x - y + z)^2.$$

Umocníme a vhodnou úpravou dospějeme k pravdivé nerovnosti. Je třeba využít zadané uspořádání neznámých.

#### 2.3 Dokažte, že pro libovolná reálná čísla $a, b$ větší nebo rovna 1 platí nerovnost:

$$(a^2 + 1)(b^2 + 1) - (a - 1)^2(b - 1)^2 \geq 4.$$

Roznásobíme a vhodným vytknutím s využitím podmínky ze zadání dospějeme k pravdivé nerovnosti.

#### 2.4 Dokažte, že pro libovolnou trojici kladných čísel $a, b, c$ platí

$$(a + b)(b + c)(c + a) \geq 8abc$$

Roznásobíme a použijeme nerovnost mezi aritmetickým a geometrickým průměrem.

#### 2.5 Dokažte, že pro libovolnou trojici kladných čísel $a, b, c$ platí

$$\left(1 + \frac{a}{b+c}\right) \left(1 + \frac{b}{c+a}\right) \left(1 + \frac{c}{a+b}\right) \geq \frac{27}{8}$$

Upravíme a použijeme nerovnost mezi aritmetickým a geometrickým průměrem pro členy  $a+b, b+c, c+a$ .

#### 2.6 Dokažte, že pro libovolné přirozené číslo $n > 1$ platí:

$$n! < \left(\frac{n+1}{2}\right)^n$$

Využijeme rovnost: Pro libovolné přirozené číslo  $n$  větší než jedna platí:  $1 + 2 + 3 + 4 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$ . Dále je potřeba použít vztah mezi aritmetickým a geometrickým průměrem.



INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

### 3 Závěr

Uvedené úlohy z velké části přesahují rozsah základního středoškolského učiva matematiky. Pro řešení příkladů matematické olympiády jsou však základní a navazuje se na ně ve vyšších kolech. Řešitele zdokonaluje ve strategii a důslednosti řešení. Důkazové úlohy uvedeného typu také vyžadují precizní znalost v upravování algebraických výrazů.

### 4 Použitá literatura

ŠVRČEK, J., CALÁBEK, P. Sbíрка netradičních matematických úloh. 1. vyd. Praha: Prométheus, spol. s r. o., 2007. 186 s. ISBN 978-80-7196-341-7

KUFNER, A. Nerovnosti a odhady. 1. vyd. Praha: Mladá fronta 1975. 120 s. 508/21/82.6

### 5 Kontakt na autora

PaedDr. Josef Kubeš

Gymnázium, Plzeň, Mikulášské nám. 23

[Josef.Kubes@mikulasske.cz](mailto:Josef.Kubes@mikulasske.cz)

## PLANIMETRIE

Josef KUBEŠ

### 1 Úvod

Planimetrie, tedy rovinná geometrie, je velmi stará disciplína, která svou náročností potrápí řadu studentů. Vyžaduje představivost a určitou schopnost si zadanou situaci dobře načrtnout. Každá úloha je vlastně originální, a proto její řešení vyžaduje značnou míru kreativity. Znalost planimetrie je využitelná v běžném životě i v profesní kariéře u řady oborů. Obvykle si školské postupy nepamatujeme, zůstávají v našem podvědomí a přiřazujeme si je k dalším životním zkušenostem.

### 2 Důkazové úlohy v planimetrii

Důkazové úlohy jsou velkým balíkem úloh. Pomáhají k ujasnění vzájemných vztahů a geometrických pouček. Aplikujeme kromě geometrických znalostí také poznatky matematické logiky. Pro snazší vyjadřování využijeme poznatky z teorie množin.

**2.1** Je dána kružnice  $k(S, r)$  a její průměry  $AB$  a  $CD$ , které jsou navzájem kolmé. Sestrojte tětívu  $KN$  kružnice  $k$ , která je rovnoběžná s  $AC$  tak, aby protínala úsečky  $SA$ ,  $SC$  po řadě ve vnitřních bodech  $L$ ,  $M$ , pro něž platí  $|KL| = |LM| = |MN|$ .

Středisko služeb školám, Plzeň, Částkova 78  
Podpora talentovaných žáků v Plzeňském kraji  
CZ.1.07/1.2.03/02.0001

Tento projekt je v letech 2012-16 financován z rozpočtu Plzeňského kraje

## INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Vedeme přímku  $AC$ . Za bod  $A$  i  $C$  na přímku  $AC$  nanese úsečky stejné délky jakou má úsečka  $AC$ . Nové krajní body spojíme se středem kružnice. Kde protnou tyto spojnice kružnici, získáme body  $K$  a  $N$ .

**2.2** V rovině je dán čtyřúhelník  $ABCD$ . Úhlopříčka  $BD$  je kolmá ke straně  $AD$  a strana  $BC$  je rovnoběžná se stranou  $AD$ . Označme  $M$  ( $M \neq A$ ) průsečík přímky  $AC$  s kružnicí o průměru  $AD$ . Dokažte, že osa úsečky  $BM$  prochází středem strany  $CD$ .

Je třeba si uvědomit, že body  $M$  a  $B$  leží na Thaletově kružnici sestrojené nad průměrem  $CD$ . Osa úsečky  $MB$  je vlastně osa tětiny uvedené kružnice, tedy prochází jejím středem. Tím je úloha dokázána.

**2.3** Na kružnici  $k$  jsou dány dva různé body  $X$  a  $Y$  tak, že přímka  $XY$  neprochází středem kružnice  $k$ . Úsečka  $XY$  je průměrem kružnice  $l$ . Na větším oblouku  $XY$  kružnice  $k$  leží bod  $P$  a na kružnici  $l$  bod  $Q$  tak, že čtyřúhelník  $PXQY$  je konvexní a přitom  $PX \parallel QY$ . Dokažte, že velikost úhlu  $PYQ$  nezávisí na poloze bodu  $P$  (za podmínky existence bodu  $Q$ ).

Ukážeme, že úhly  $PXQ$  a  $XQY$  jsou vždy pravé a úhel  $XPY$  nezáleží na poloze bodu  $P$  (obvodový úhel).

**2.4** Označme  $K$ ,  $L$ ,  $M$ ,  $N$  středy stran  $AB$ ,  $BC$ ,  $CD$  a  $DA$  konvexního čtyřúhelníku  $ABCD$ . Dokažte, že z úseček  $KL$ ,  $KM$  a  $KN$  lze sestrotit trojúhelník a vyjádřete jeho obsah pomocí obsahu čtyřúhelníku  $ABCD$ .

Úloha není složitá, stačí použít podobnost trojúhelníků a vlastnosti střední příčky. Při řešení použijeme úhlopříčky čtyřúhelníku.

### 3 Závěr

Planimetrické úlohy včetně důkazových jsou vděčným tématem matematických soutěží a obvykle patří k těm, které oddělují úspěšné řešitele od neúspěšných. Uvedené příklady reprezentují vždy velkou skupinu úloh, proto každá je řešena jiným způsobem.

### 4 Použitá literatura

ŠVRČEK, J., CALÁBEK, P. Sbíрка netradičních matematických úloh. 1. vyd. Praha: Prométheus, spol. s r. o., 2007. 186 s. ISBN 978-80-7196-341-7

### 5 Kontakt na autora

PaedDr. Josef Kubeš

Gymnázium, Plzeň, Mikulášské nám. 23

[Josef.Kubes@mikulasske.cz](mailto:Josef.Kubes@mikulasske.cz)

## ZLATÝ ŘEZ - MATEMATICKÝ DIAMANT

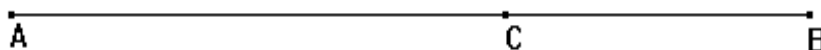
Josef KUBEŠ

### 1 Úvod

Zlatý řez definuje již Eukleidés v 6. knize *Základů*. Můžeme se s ním setkat v matematice i řadě dalších oborů. Lze jej vyzorovat v rostlinné i živočišné říši. Se zlatým řezem pracovala řada malířů, architektů, fotografů a v dnešní době jej lze také nalézt v oblasti tvorby webových stránek a designu.

### 2 Definice zlatého řezu

Je dána úsečka AB a její vnitřní bod C, který leží tak, že délka delšího úseku v poměru k délce kratšího úseku se rovná poměru délky celé úsečky a délky delšího jejího úseku.



Jestliže tento vztah vyjádříme algebraicky, získáme rovnici:

$$\frac{|AB|}{|AC|} = \frac{|AC|}{|BC|} \text{ po dosazení za } |AB| = a, |AC| = x, |BC| = a-x, \text{ dostaneme vztah:}$$

$$\frac{a}{x} = \frac{x}{a-x}$$

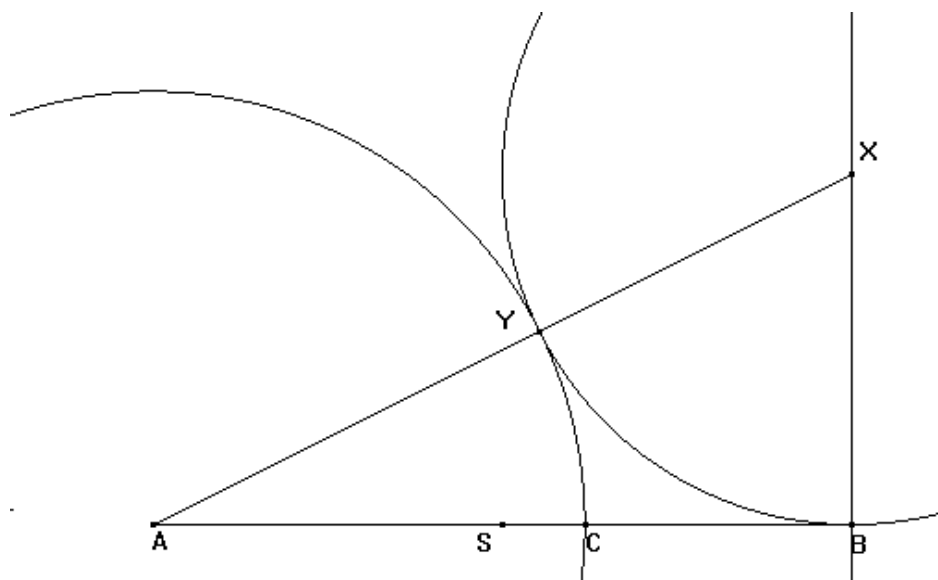
Poměr celé úsečky a její větší části označíme jako  $\phi$ , vyjádříme  $a$  pomocí  $\phi$  a pokračujeme v úpravách až ke kvadratické rovnici, kterou vypočteme (za výsledek můžeme prohlásit jen ten větší nule, protože hledáme poměr mezi délkami úseček).

Hledaný výsledek je vyjádřený hodnotou 1,618033988728.

#### 2.1 Konstrukce zlatého řezu

Je dána úsečka AB a její střed S. V bodě B narýsujeme kolmici na úsečku AB. Na tuto kolmici nanese délku úsečky AS, tak vznikne bod X, který spojíme s bodem A. V bodě X opišeme kružnici o poloměru  $|AS|$ , v průsečíku s úsečkou AX vzniká bod Y. Tímto bodem vedeme kružnici se středem v bodě A. Tato kružnice protíná úsečku AB v bodě C, který dělí úsečku AB ve zlatém řezu.

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ



## 2.2 Zlatý obdélník

Zlatý obdélník je takový obdélník, pro který platí, že poměr jeho délky a šířky odpovídá číslu  $\varphi$ , tedy zlatému poměru.



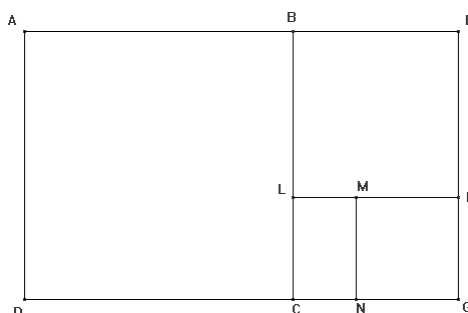
Obdélník, jehož strany jsou vzájemně ve zlatém poměru je považován za nejestetičtější obdélník.

Jestliže zlatý obdélník vepíšeme do čtverce, rozdělí jeho vrcholy strany čtverce ve zlatém poměru.

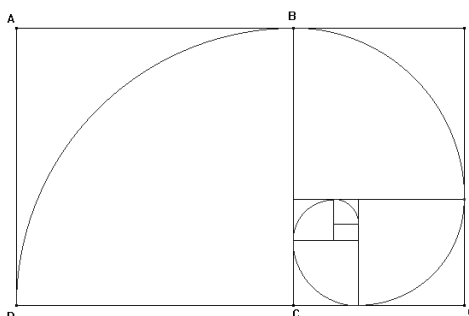
Oddělíme-li z původního zlatého obdélníku čtverec, zbude nám obdélník, který je opět zlatým. Koeficient podobnosti mezi původním a nově vzniklým menším obdélníkem je  $\varphi$ . Tento postup můžeme opakovat v podstatě do nekonečna, stále nám budou vznikat podobné zlaté obdélníky s rozměry násobků  $\varphi$ .



## INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ



Spojením předních rohů, popř. středů čtverců hladkou nepřerušenu křivkou získáme zlatou spirálu, která je velmi podobná spirále logaritmické.



### 2.3 Zlatý trojúhelník

Zlatým trojúhelníkem nazýváme takový rovnoramenný trojúhelník, pro který platí, že poměr délky ramene a základny se rovná číslu  $\phi$ , úhly ležící při základně mají velikost  $72^\circ$  a úhel při vrcholu má velikost  $36^\circ$ .

### 2.4 Fibonacciho posloupnost

Uvažujme následující posloupnost: 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233,... Snadno zjistíme, že počínaje třetím členem, je každý následující člen součtem dvou předcházejících. Tato posloupnost byla první známou rekurzivní posloupností v Evropě. Posloupnost nazval francouzský matematik Edouard Lucas Fibonacciho posloupností. V roce 1634 byl pro Fibonacciho posloupnost matematikem Albertem Girardem zaveden zápis:

$$F_{n+2} = F_{n+1} + F_n.$$

Jedna ze zajímavých vlastností Fibonacciho posloupnosti, kterou objevil Johannes Kepler, se týká druhých mocnin čísel náležejících posloupnosti. Druhá mocnina kteréhokoli jejího členu se liší nanejvýš o jedničku od součinu dvou členů, které sousedí s umocňovaným číslem. Vezmeme-li například šestý člen posloupnosti – číslo 8 – potom jeho druhá mocnina



## INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

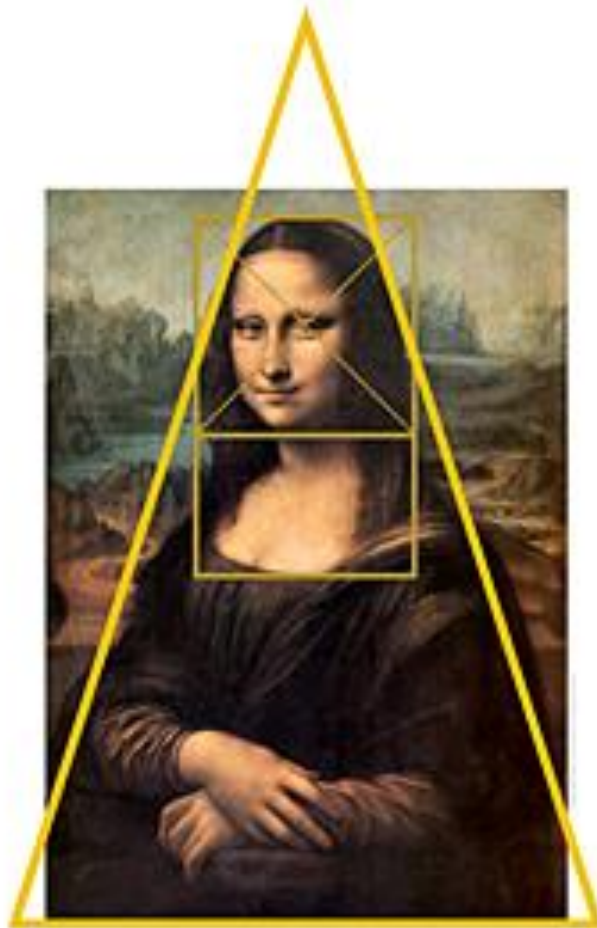
je rovna  $64; 82 = 64$ . Součin jeho okolních členů je  $5 \cdot 13 = 65$ . Tento postup bychom mohli opakovat pro libovolný člen Fibonacciho posloupnosti se stejným výsledkem.

Proslulost Fibonacciho posloupnosti tkví ve skutečnosti, že její stopy můžeme nalézt i v dalších přírodních úkazech. Například světelné paprsky se při průchodu skleněnými deskami v podstatě řídí Fibonacciho posloupností. Nejznámějším příkladem přírodního úkazu, který lze Fibonacciho čísla popsat, je způsob růstu listů na rostlinách. Přejít od jednoho listu ke druhému má charakter šroubovitého výstupu a jejich rozmístění odpovídá právě číslům Fibonacciho posloupnosti. Totéž platí i pro uspořádání šupin borové šišky, semínek slunečnic a šupin ananasu, ty vyrůstají ve spirálách po směru a proti směru hodinových ručiček, jejich počty odpovídají výše uvedeným číslům. Dalším velmi známým příkladem jsou ulity měkkýšů, např. loděnky. Jestliže porovnáme průměr dvou sousedních spirál (které kopírují zlatou spirálu), dostaneme opět Fibonacciho čísla a průměr mezi nimi blíží se číslu 1,618.

### 3 Závěr

Na závěr ukažme na jednom příkladu užití zlatého řezu v malířství. Nejznámějším dílem Leonarda da Vinci dílem je portrét Mona Lisa. O tom, že portrét je umístěn do trojúhelníkové (nebo pyramidové) kompozice není sporu. Kolem postavy lze sestavit zlatý trojúhelník. Dále lze nakreslit zlatý obdélník, který ohraničí oblast od vrcholku hlavy až po živůtek, a v jeho horní části vytvořit čtverec. Pokud se podíváme na obraz poprvé, zřejmě utkvíme pohledem v levém oku modelu. Toto oko nazýváme „dominantním okem“ a leží v průsečíku úhlopříček čtverce vzniklého ve výše popsaném zlatém obdélníku. Všechny předchozí konstrukce ukazuje následující obrázek.

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ



#### 4 Použitá literatura

VRÁTNÍKOVÁ, K. Krása skrytá v číslech. Práce SOČ 2008

<http://www.volny.cz/zlaty.rez/>

#### 5 Kontakt na autora

PaedDr. Josef Kubeš

Gymnázium, Plzeň, Mikulášské nám. 23

[Josef.Kubes@mikulasske.cz](mailto:Josef.Kubes@mikulasske.cz)

Středisko služeb školám, Plzeň, Částkova 78  
Podpora talentovaných žáků v Plzeňském kraji  
CZ.1.07/1.2.03/02.0001

Tento projekt je v letech 2012-16 financován z rozpočtu Plzeňského kraje

## EXKURZE CENTRUM STAVITELSKÉHO DĚDICTVÍ V PLASÍCH

Naděžda KUBEŠOVÁ

### 1 Úvod

Areál bývalého cisterciáckého kláštera v Plasích je místem realizace ojedinělého projektu nazvaného Centrum stavitelského dědictví. V bývalém pivovaru se nachází expozice se sbírkou stavebních prvků představující tradiční (leckdy již pozapomenutá) stavební řemesla.

### 2 Název kapitoly

Cílem expozice je atraktivně a přehledně prezentovat problematiku historického vývoje stavebních prvků, materiálů a konstrukcí. Návštěvník má tak příležitost seznámit se s různými stavebními materiály (dřevo, kámen, hlína) a jejich zpracováním pro použití na stavbách. Na jednotlivých podlažích si může prohlédnout typy stavebních konstrukcí od základů a hrubé stavby přes úpravu povrchů, typy výplní otvorů a příslušnou technickou výbavu budov až po střechy tvořené krovem a krytinami. V areálu pivovaru je rovněž část expozice věnovaná principům statiky. Samostatnou částí je expozice a „kabinet“ architekta Jana Kaplického.



Středisko služeb školám, Plzeň, Částkova 78  
Podpora talentovaných žáků v Plzeňském kraji  
CZ.1.07/1.2.03/02.0001

Tento projekt je v letech 2012-16 financován z rozpočtu Plzeňského kraje



### 3 Závěr

Centrum stavitelského dědictví s expozicemi stavebních řemesel je místem poučení a inspirace z krásy starého řemeslného umu. Vzhledem k tomu, že účastníci exkurze byli studenti se zájmem o matematiku a fyziku, budou se možná někteří ve své budoucí profesi stavitelstvím zabývat.

### 4 Použitá literatura

<http://www.do-muzea.cz>

<http://muzeum-plasy.cz>

### 5 Kontakt na autora

PaedDr. Naděžda Kubešová

Gymnázium L. Pika Plzeň, Opavská 21, 312 00 Plzeň

kubesova@gop.pilsedu.cz



INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

## GAUSSOVA PRVOČÍSLA

Petr NEČESAL

### 1 Úvod

Tento příspěvek je věnován Gaussovým celým číslům (komplexním číslům s celočíselnou reálnou a imaginární částí) a Gaussovým prvočíslům. Ukážeme si, jak je definována prvočíselnost na množině Gaussových celých čísel. Dále se podíváme na to, která prvočísla v  $\mathbb{N}$  jsou zároveň Gaussovými prvočíslly.

### 2 Gaussova celá čísla

Označme  $\mathbb{Z}[i]$  množinu všech komplexních čísel s celočíselnou reálnou a imaginární částí

$$\mathbb{Z}[i] := \{a + ib : a, b \in \mathbb{Z}\},$$

každému prvku  $u = a + ib$  z této množiny  $\mathbb{Z}[i]$  budeme říkat *Gaussovo celé číslo*. Obrazy všech Gaussových celých čísel tvoří v komplexní rovině čtvercovou mřížku (viz obrázek 1). Na množině Gaussových celých čísel dále definujeme zobrazení

$$N(a + ib) := a^2 + b^2,$$

kteřé každému Gaussovu celému číslu přiřazuje kvadrát vzdálenosti jeho obrazu v komplexní rovině od počátku. Hodnoty  $N$  jsou na obrázku 1 vyznačeny u každého obrazu Gaussova celého čísla.

Dále připomeňme, že  $i^2 = -1$  a pro součin dvou Gaussových celých čísel  $u = a + ib$  a  $v = c + id$ , kde  $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$ , platí

$$(1) \quad u \cdot v = (a + ib)(c + id) = ac + iad + ibc + i^2bd = ac - bd + i(ad + bc).$$

Reálná část komplexního čísla  $u \cdot v$  je  $\operatorname{Re}(u \cdot v) = ac - bd$ , což je číslo celé. Imaginární část komplexního čísla  $u \cdot v$  je  $\operatorname{Im}(u \cdot v) = ad + bc$ , což je také číslo celé. Součinem dvou Gaussových celých čísel tedy dostáváme opět Gaussovo celé číslo.

**Věta 1.** Pro každé Gaussovo celé číslo  $u \in \mathbb{Z}[i]$  platí

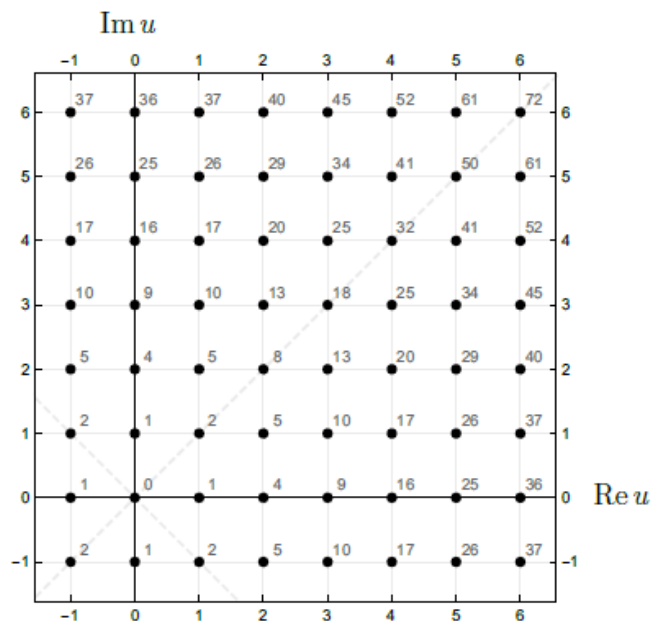
$$N(u) = 1 \quad \Leftrightarrow \quad u \in \{-1, 1, -i, i\}.$$

*Důkaz.* Snadno ověříme, že  $N(-1) = N(1) = N(-i) = N(i) = 1$ . Mějme nyní  $u = a + ib$ , kde  $a, b \in \mathbb{Z}$ . Pokud  $N(u) = 1$ , potom  $a^2 + b^2 = 1$ , a tedy

$$(a = \pm 1 \text{ a zároveň } b = 0) \quad \text{nebo} \quad (a = 0 \text{ a zároveň } b = \pm 1).$$

Což znamená, že  $u = \pm 1$  nebo  $u = \pm i$ . ■

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ



Obrázek 1: Gaussova celá čísla  $u = \text{Re } u + i \text{Im } u$  a hodnoty  $N(u) = (\text{Re } u)^2 + (\text{Im } u)^2$ .

**Věta 2.** Pro každá dvě Gaussova celá čísla  $u, v \in \mathbb{Z}[i]$  platí:

$$(2) \quad N(u \cdot v) = N(u) \cdot N(v).$$

*Důkaz.* Mějme  $u = a + ib$  a  $v = c + id$ , kde  $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$ . Upravme nejprve pravou stranu rovnice (2)

$$(3) \quad N(u) \cdot N(v) = (a^2 + b^2)(c^2 + d^2) = (ac)^2 + (ad)^2 + (bc)^2 + (bd)^2.$$

S využitím (1) upravme i levou stranu rovnice (2)

$$(4) \quad \begin{aligned} N(u \cdot v) &= N(ac - bd + i(ad + bc)) \\ &= (ac - bd)^2 + (ad + bc)^2 \\ &= (ac)^2 - 2abcd + (bd)^2 + (ad)^2 + 2abcd + (bc)^2 \\ &= (ac)^2 + (bd)^2 + (ad)^2 + (bc)^2. \end{aligned}$$

Porovnáním vyjádření (3) a (4) zjistíme, že  $N(u \cdot v) = N(u) \cdot N(v)$ . ■

**Definice 1.** Mějme dvě Gaussova celá čísla  $u, v \in \mathbb{Z}[i]$ . Řekneme, že  $v$  dělí  $u$ , pokud existuje  $w \in \mathbb{Z}[i]$  takové, že platí

$$u = v \cdot w.$$

Skutečnost, že  $v$  dělí  $u$  budeme zapisovat jako  $v \mid u$ .

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

**Věta 3.** Pro každá dvě Gaussova celá čísla  $u, v \in \mathbb{Z}[i]$  platí:

$$v \mid u \Rightarrow N(v) \mid N(u).$$

*Důkaz.* Pokud  $v$  dělí  $u$ , potom existuje  $w \in \mathbb{Z}[i]$  tak, že platí  $u = v \cdot w$ . Užitím (3) ihned dostáváme

$$N(u) = N(v) \cdot N(w),$$

což znamená, že  $N(v) \mid N(u)$ . ■

**Věta 4.** Pro každé Gaussovo celé číslo  $u \in \mathbb{Z}[i]$  platí:

$$N(u) > 1 \Rightarrow (\pm 1 \mid u, \pm i \mid u, \pm u \mid u \text{ a } \pm iu \mid u).$$

Všech osm čísel  $\pm 1, \pm i, \pm u$  a  $\pm iu$  označíme za tzv. *triviální dělitele*  $u$ .

*Důkaz.* Mějme  $u \in \mathbb{Z}[i]$  s  $N(u) > 1$ . S využitím vztahu  $i^2 = -1$  snadno ověříme, že platí

$$\begin{array}{llll} u = (+1) \cdot (+u), & u = (-1) \cdot (-u), & u = (+i) \cdot (-iu), & u = (-i) \cdot (+iu), \\ u = (+u) \cdot (+1), & u = (-u) \cdot (-1), & u = (-iu) \cdot (+i), & u = (+iu) \cdot (-i), \end{array}$$

což znamená, že  $\pm 1 \mid u, \pm i \mid u, \pm u \mid u$  a  $\pm iu \mid u$ . ■

**Věta 5.** Pro každá dvě Gaussova celá čísla  $u, v \in \mathbb{Z}[i]$  platí:

$$(N(u) > 1, v \mid u \text{ a } v \text{ není triviálním dělitelem } u) \Rightarrow 1 < N(v) < N(u).$$

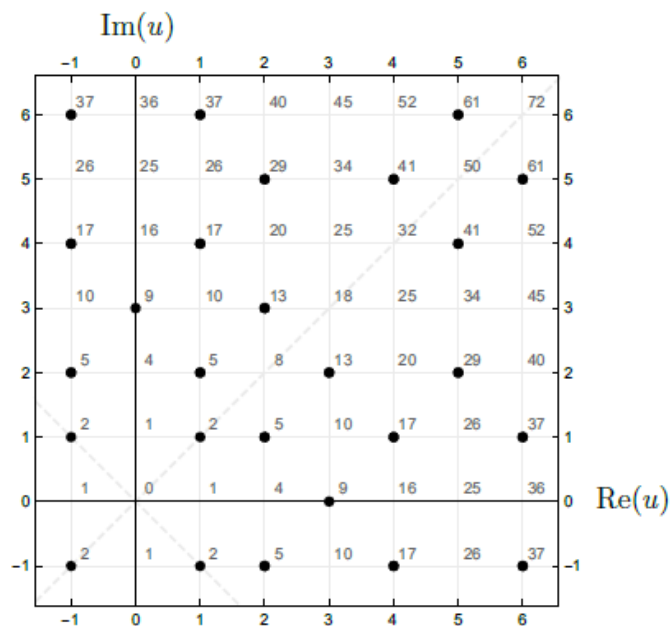
*Důkaz.* Mějme  $u, v \in \mathbb{Z}[i]$  taková, že  $N(u) > 1, v \mid u$  a  $v$  není triviálním dělitelem  $u$ . Jelikož  $v$  dělí  $u$ , existuje  $w \in \mathbb{Z}[i]$  tak, že platí  $u = v \cdot w$ . Užitím (3) dostáváme

$$(5) \quad N(u) = N(v) \cdot N(w).$$

Číslo  $N(v)$  je přirozené číslo, které je větší než 1. Pokud by  $N(v) = 1$ , potom dle věty 1 by  $v = \pm 1$  nebo  $v = \pm i$ , což není možné, protože  $v$  není triviálním dělitelem  $u$ . Číslo  $N(w)$  je také přirozené číslo, které je větší než 1. Pokud by  $N(w) = 1$ , potom dle věty 1 by  $w = \pm 1$  nebo  $w = \pm i$ , a tedy  $u = \pm v$  nebo  $u = \pm iv$ , čili  $v = \pm u$  nebo  $v = \mp iu$ . To ale není možné, protože  $v$  není triviálním dělitelem  $u$ . Celkem tedy víme, že všechna tři čísla  $N(u), N(v)$  a  $N(w)$  jsou přirozená čísla větší než 1. S přihlédnutím k platnosti vztahu (5) tedy ihned dostáváme, že  $N(v) < N(u)$ . ■



INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ



Obrázek 2: Gaussova prvočísla.

### 3 Gaussova prvočísla

**Definice 2.** Mějme Gaussovo celé číslo  $u \in \mathbb{Z}[i]$  s  $N(u) > 1$ . Řekneme, že  $u$  je *Gaussovo prvočísla*, pokud má pouze triviální dělitele.

**Příklad.** Číslo 2 je prvočísla v  $\mathbb{N}$ , ale není Gaussovým prvočísla v  $\mathbb{Z}[i]$ , neboť má netriviální dělitele, a to  $(1 + i)$  a  $(1 - i)$ :

$$2 = (1 + i)(1 - i).$$

Obdobně i číslo 5 není Gaussovým prvočísla v  $\mathbb{Z}[i]$ , přestože je prvočísla v  $\mathbb{N}$ . Číslo 5 lze totiž zapsat jako

$$5 = (1 + 2i)(1 - 2i),$$

a tedy má také netriviální dělitele.

Následující tvrzení nám umožňuje najít Gaussova celá čísla, která nemohou být Gaussovými prvočísla. Pokud pro nějaké Gaussovo celé číslo  $u \in \mathbb{Z}[i]$  zjistíme, že  $N(u)$  je sudé číslo, potom  $u$  nemůže být Gaussovým prvočísla. V takovém případě totiž bude mít netriviálního dělitele  $(1 + i)$ .

**Věta 6.** Pro každé Gaussovo celé číslo  $u \in \mathbb{Z}[i]$  platí:

$$N(u) \text{ je sudé} \Leftrightarrow (1 + i) \mid u.$$

*Důkaz.* Mějme  $u \in \mathbb{Z}[i]$  takové, že  $(1 + i)$  dělí  $u$ . Potom podle věty 3 máme, že  $N(1 + i) = 2$  dělí  $N(u)$ , což znamená, že  $N(u)$  je sudé.

## INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Naopak mějme  $u = a + ib$ ,  $a, b \in \mathbb{Z}$ , takové, že  $N(u)$  je sudé. Jelikož  $N(u) = a^2 + b^2$ , víme, že číslo  $a^2 + b^2$  je sudé, což může nastat tehdy a jen tehdy, pokud

$$(6) \quad (a \text{ je sudé a } b \text{ je sudé}) \text{ nebo } (a \text{ je liché a } b \text{ je liché}).$$

Nyní upravme

$$(7) \quad \frac{u}{1+i} = \frac{a+ib}{1+i} \cdot \frac{1-i}{1-i} = \frac{a+ib-ia+b}{2} = \frac{a+b}{2} + i \frac{b-a}{2}.$$

S přihlédnutím k (6) víme, že obě celá čísla  $(a+b)$  a  $(b-a)$  jsou sudá, a tedy obě čísla  $\frac{a+b}{2}$  a  $\frac{b-a}{2}$  jsou čísla celá. A podle (7) tak dostáváme, že číslo  $(1+i)$  dělí  $u$ . ■

Následující tvrzení představuje postačující podmínku, aby Gaussovo celé číslo  $u \in \mathbb{Z}[i]$  bylo Gaussovým prvočíslem.

**Věta 7.** Pro každé Gaussovo celé číslo  $u \in \mathbb{Z}[i]$  platí:

$$N(u) \text{ je prvočíslo} \Rightarrow u \text{ je Gaussovo prvočíslo.}$$

*Důkaz.* Mějme  $u \in \mathbb{Z}[i]$  takové, že  $N(u)$  je prvočíslo. Dále mějme libovolná dvě Gaussova celá čísla  $v, w \in \mathbb{Z}[i]$  taková, že platí  $u = v \cdot w$ . Dle věty 2 víme, že  $N(u) = N(v) \cdot N(w)$ . Jelikož  $N(u)$  je prvočíslo, je nutně  $N(u) > 1$  a zároveň  $N(v) = 1$  nebo  $N(w) = 1$ , což podle věty 1 znamená, že

$$v = \pm 1 \text{ nebo } v = \pm i \quad \text{nebo} \quad w = \pm 1 \text{ nebo } w = \pm i.$$

To ale znamená, že  $u$  má pouze triviální dělitele, a tedy  $u$  je Gaussovo prvočíslo. ■

Pomocí následujícího tvrzení, dokážeme vybrat některá prvočísla v  $\mathbb{N}$ , která jsou zároveň Gaussovými prvočísly v  $\mathbb{Z}[i]$ .

**Věta 8.** Platí

$$(p \text{ je prvočíslo a } p \equiv 3 \pmod{4}) \Rightarrow p \text{ je Gaussovo prvočíslo.}$$

*Důkaz.* Mějme prvočíslo  $p \in \mathbb{N}$  takové, že  $p \equiv 3 \pmod{4}$ . Dále mějme libovolná dvě Gaussova celá čísla  $v, w \in \mathbb{Z}[i]$  taková, že platí  $p = v \cdot w$ . Dle věty 2 víme, že

$$p^2 = N(p) = N(v) \cdot N(w).$$

Jelikož  $p$  je prvočíslo dostáváme odtud, že nutně  $N(v) = 1$  nebo  $N(v) = p$  nebo  $N(v) = p^2$ .

Ovšem případ  $N(v) = p$  nastat nemůže. Pokud by  $N(v) = p$ , potom  $N(v)$  je liché číslo ( $p$  je prvočíslo), a tedy existuje liché číslo  $a$  a sudé číslo  $b$  takové, že platí

$$N(v) = a^2 + b^2, \quad a = 2n + 1, \quad b = 2m, \quad m, n \in \mathbb{Z}.$$

## INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

A tedy

$$p = N(v) = (2n + 1)^2 + (2m)^2 = 4n^2 + 4n + 1 + 4m^2 = 4(n^2 + n + m^2) + 1,$$

tj.  $p \equiv 1 \pmod{4}$ , což je ve sporu s tím, že  $p \equiv 3 \pmod{4}$ .

Mohou tedy nastat pouze dva případy, a to  $N(v) = 1$  nebo  $N(v) = p^2$ . Pokud  $N(v) = 1$ , potom podle věty 1 máme, že  $v = \pm 1$  nebo  $v = \pm i$ , a tedy  $w = \pm p$  nebo  $w = \mp ip$ , tj.  $w$  je triviálním dělitelem  $p$ . Pokud  $N(v) = p^2$ , potom  $N(w) = 1$  a obdobně získáme, že  $v$  je triviálním dělitelem  $p$ . Celkem tedy máme, že  $N(p) = p^2 > 1$  ( $p$  je prvočíslo) a číslo  $p$  má pouze triviální dělitele. Číslo  $p$  je tedy Gaussovo prvočíslo. ■

Bez důkazu uvedme následující tvrzení, které nám dovoluje vybrat některá prvočísla v  $\mathbb{N}$ , která nejsou Gaussovými prvočíslly v  $\mathbb{Z}[i]$ .

**Věta 9.** Platí

$$(p \text{ je prvočíslo a } p \equiv 1 \pmod{4}) \Rightarrow p \text{ není Gaussovo prvočíslo.}$$

Na obrázku 2 jsou vyobrazena všechna Gaussova prvočísla  $u = a + ib$ , pro která platí  $-1 \leq a, b \leq 6$ .

## 4 Závěr

Seznámili jsme se možným rozšířením prvočíselnosti na množinu komplexních čísel, která mají celočíselnou reálnou i imaginární část (na množinu Gaussových celých čísel). Ukázalo se, že ne každé prvočíslo v  $\mathbb{N}$  je i Gaussovým prvočíslem. K dalšímu čtení doporučujeme čtenáři knihu [1] nebo články [2] a [3].

## 5 Použitá literatura

- [1] John C. Stillwell: Elements of number theory. New York, NY: Springer. xii, 254 p. (2003).
- [2] V. Knichal: Čísla Gaussova. [I.] Časopis pro pěstování matematiky a fyziky, Vol. 62 (1933), No. 4-5, R73–R76. <http://dml.cz/dmlcz/123910>
- [3] V. Knichal: Čísla Gaussova. [II.] Časopis pro pěstování matematiky a fyziky, Vol. 62 (1933), No. 7, R101–R105. <http://dml.cz/dmlcz/108817>

## 6 Kontakt na autora

Ing. Petr Nečesal, Ph.D.  
Katedra matematiky FAV ZČU, Univerzitní 8, 306 14 Plzeň  
[pnecesal@kma.zcu.cz](mailto:pnecesal@kma.zcu.cz)

Středisko služeb školám, Plzeň, Částkova 78  
Podpora talentovaných žáků v Plzeňském kraji  
CZ.1.07/1.2.03/02.0001

Tento projekt je v letech 2012-16 financován z rozpočtu Plzeňského kraje

## ŘETĚZOVÉ ZLOMKY

Petr NEČESAL

### 1 Úvod

V tomto příspěvku se budeme zabývat konečnými řetězovými zlomky, které reprezentují racionální čísla. Například čísla  $\frac{11}{4}$ ,  $\frac{11}{5}$ ,  $\frac{11}{6}$  a  $\frac{11}{7}$  lze vyjádřit pomocí konečných řetězových zlomků jako

$$(1) \quad \frac{11}{4} = 2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{3}}, \quad \frac{11}{5} = 2 + \frac{1}{5}, \quad \frac{11}{6} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{5}}, \quad \frac{11}{7} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{3}}}$$

Nekonečné řetězové zlomky naopak reprezentují čísla iracionální. Jako příklad uveďme reprezentace odmocniny ze dvou a zlatého řezu  $\phi$

$$\sqrt{2} = 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \dots}}}, \quad \phi = \frac{\sqrt{5} + 1}{2} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \dots}}}$$

Poznamenejme, že obě tvrzení v tomto příspěvku (věta 1 a věta 2) včetně jejich důkazů lze nalézt v [1].

### 2 Konečný řetězový zlomek a jeho sblížené zlomky

**Definice 1.** Mějme  $q_1 \in \mathbb{Z}$ ,  $q_2, q_3, \dots, q_n \in \mathbb{N}$ ,  $n \in \mathbb{N}$ . *Řetězovým zlomkem* budeme nazývat výraz tvaru

$$q_1 + \frac{1}{q_2 + \frac{1}{q_3 + \dots + \frac{1}{q_n}}}$$

a budeme jej značit zkráceně jako  $(q_1, q_2, q_3, \dots, q_n)$ . Číslům  $q_1, q_2, q_3, \dots, q_n$  říkáme *prvky* řetězového zlomku.

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Racionální čísla  $\frac{11}{4}$ ,  $\frac{11}{5}$ ,  $\frac{11}{6}$  a  $\frac{11}{7}$  lze tedy zapsat zkráceně pomocí řetězových zlomků (porovnej s (1))

$$\frac{11}{4} = (2, 1, 3), \quad \frac{11}{5} = (2, 5), \quad \frac{11}{6} = (1, 1, 5), \quad \frac{11}{7} = (1, 1, 1, 3).$$

**Definice 2.** Mějme řetězový zlomek  $(q_1, q_2, q_3, \dots, q_n)$ ,  $n \in \mathbb{N}$ . Potom k tomuto řetězovému zlomku definujeme  $n$  sblížených zlomků

$$\begin{aligned} \frac{P_1}{Q_1} &:= (q_1), \\ \frac{P_2}{Q_2} &:= (q_1, q_2), \\ \frac{P_3}{Q_3} &:= (q_1, q_2, q_3), \\ &\vdots \\ \frac{P_n}{Q_n} &:= (q_1, q_2, q_3, \dots, q_n). \end{aligned}$$

**Příklad** K řetězovému zlomku  $(1, 2, 3, 4) = \frac{43}{30}$  jsou definovány celkem 4 sblížené zlomky, a to

$$\frac{P_1}{Q_1} = (1) = \frac{1}{1}, \quad \frac{P_2}{Q_2} = (1, 2) = \frac{3}{2}, \quad \frac{P_3}{Q_3} = (1, 2, 3) = \frac{10}{7}, \quad \frac{P_4}{Q_4} = (1, 2, 3, 4) = \frac{43}{30}.$$

Všimněme si, že všechny zlomky  $\frac{P_1}{Q_1}$ ,  $\frac{P_2}{Q_2}$ ,  $\frac{P_3}{Q_3}$  a  $\frac{P_4}{Q_4}$  jsou v základních tvarech.

Následující věta nám poskytne rekurentní vzorce pro výpočet sblížených zlomků, což bude pro nás znamenat efektivní způsob určení všech sblížených zlomků k zadanému řetězovému zlomku.

**Věta 1.** Mějme řetězový zlomek  $(q_1, q_2, q_3, \dots, q_n)$ ,  $n \in \mathbb{N}$ . Pro čitatele  $P_k$  a jmenovatele  $Q_k$  jeho sblíženého zlomku platí

$$(2) \quad \begin{cases} P_1 = q_1, & Q_1 = 1, \\ P_2 = q_1 q_2 + 1, & Q_2 = q_2, \\ P_k = q_k P_{k-1} + P_{k-2} \text{ pro } k \geq 3, & Q_k = q_k Q_{k-1} + Q_{k-2} \text{ pro } k \geq 3. \end{cases}$$

*Důkaz* provedeme matematickou indukcí. Sblížené zlomky  $\frac{P_1}{Q_1}$ ,  $\frac{P_2}{Q_2}$  a  $\frac{P_3}{Q_3}$  nejprve upravíme

$$\begin{aligned} \frac{P_1}{Q_1} &= (q_1) = \frac{q_1}{1}, & \frac{P_2}{Q_2} &= (q_1, q_2) = q_1 + \frac{1}{q_2} = \frac{q_1 q_2 + 1}{q_2}, \\ \frac{P_3}{Q_3} &= (q_1, q_2, q_3) = q_1 + \frac{1}{q_2 + \frac{1}{q_3}} = q_1 + \frac{q_3}{q_2 q_3 + 1} = \frac{q_1 q_2 q_3 + q_1 + q_3}{q_2 q_3 + 1}. \end{aligned}$$

Středisko služeb školám, Plzeň, Částkova 78

Podpora talentovaných žáků v Plzeňském kraji

CZ.1.07/1.2.03/02.0001

Tento projekt je v letech 2012-16 financován z rozpočtu Plzeňského kraje

### INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Snadno nyní prověříme platnost obou rekurentních vztahů ve (2) pro  $k = 3$

$$\begin{aligned} P_3 &= q_3 P_2 + P_1 = q_3(q_1 q_2 + 1) + q_1 = q_1 q_2 q_3 + q_1 + q_3, \\ Q_3 &= q_3 Q_2 + Q_1 = q_2 q_3 + 1. \end{aligned}$$

Dále předpokládáme, že platí oba rekurentní vztahy ve (2) pro  $k = m$ , kde  $m \in \{3, \dots, n-1\}$ , tj. předpokládáme, že platí

$$(3) \quad P_m = q_m P_{m-1} + P_{m-2}, \quad Q_m = q_m Q_{m-1} + Q_{m-2}.$$

Ukážeme, že oba rekurentní vztahy ve (2) platí i pro  $k = m+1$ . S využitím (3) upravme

$$\begin{aligned} \frac{P_{m+1}}{Q_{m+1}} &= (q_1, q_2, \dots, q_{m-1}, q_m, q_{m+1}) = q_1 + \frac{1}{q_2 + \dots + \frac{1}{q_{m-1} + \frac{1}{q_m + \frac{1}{q_{m+1}}}}} \\ &= (q_1, q_2, \dots, q_{m-1}, q_m + \frac{1}{q_{m+1}}) \\ &= \frac{(q_m + \frac{1}{q_{m+1}}) P_{m-1} + P_{m-2}}{(q_m + \frac{1}{q_{m+1}}) Q_{m-1} + Q_{m-2}} = \frac{q_m q_{m+1} P_{m-1} + P_{m-1} + q_{m+1} P_{m-2}}{q_m q_{m+1} Q_{m-1} + Q_{m-1} + q_{m+1} Q_{m-2}} \\ &= \frac{q_{m+1}(q_m P_{m-1} + P_{m-2}) + P_{m-1}}{q_{m+1}(q_m Q_{m-1} + Q_{m-2}) + Q_{m-1}} = \frac{q_{m+1} P_m + P_{m-1}}{q_{m+1} Q_m + Q_{m-1}}. \end{aligned}$$

Odtud ihned dostáváme, že  $P_{m+1} = q_{m+1} P_m + P_{m-1}$  a  $Q_{m+1} = q_{m+1} Q_m + Q_{m-1}$ . ■

Výpočet sblížených zlomků  $\frac{P_k}{Q_k}$  řetězového zlomku  $(q_1, q_2, q_3, \dots, q_n)$  pomocí rekurentních vztahů ve (2) lze sestavit do následující tabulky:

$q_k$	$q_1$	$q_2$	$q_3$	$q_4$	$\dots$	$q_n$
$P_k$	$q_1$	$q_1 q_2 + 1$	$P_3$	$P_4$	$\dots$	$P_n$
$Q_k$	1	$q_2$	$Q_3$	$Q_4$	$\dots$	$Q_n$

**Příklad** Pro řetězový zlomek  $(1, 1, 1, 1, 1, 1)$  určete všechny jeho sblížené zlomky. S využitím rekurentních vztahů ve (2) postupně sestavíme následující tabulku:

$q_k$	1	1	1	1	1	1
$P_k$	1	2	3	5	8	13
$Q_k$	1	1	2	3	5	8

K řetězovému zlomku  $(1, 1, 1, 1, 1, 1)$  jsou hodnoty jeho sblížených zlomků tedy následující

$$\frac{P_1}{Q_1} = 1, \quad \frac{P_2}{Q_2} = 2, \quad \frac{P_3}{Q_3} = \frac{3}{2}, \quad \frac{P_4}{Q_4} = \frac{5}{3}, \quad \frac{P_5}{Q_5} = \frac{8}{5}, \quad \frac{P_6}{Q_6} = \frac{13}{8}.$$



## INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Navíc jsme určili i hodnotu samotného řetězového zlomku  $(1, 1, 1, 1, 1, 1)$ , neboť

$$1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1}}}}} = (1, 1, 1, 1, 1, 1) = \frac{P_6}{Q_6} = \frac{13}{8}.$$

Na závěr této části dokažme následující tvrzení, které využijeme ve čtvrté části tohoto příspěvku k nalezení řešení diofantické rovnice.

**Věta 2.** Mějme řetězový zlomek  $(q_1, q_2, q_3, \dots, q_n)$ ,  $n \in \mathbb{N}$ ,  $n \geq 2$ . Pro  $2 \leq k \leq n$  platí

$$(4) \quad P_k Q_{k-1} - P_{k-1} Q_k = (-1)^k.$$

*Důkaz* provedeme matematickou indukcí. Vztah (4) platí pro  $k = 2$ , neboť

$$P_2 Q_1 - P_1 Q_2 = q_1 q_2 + 1 - q_1 q_2 = 1.$$

Předpokládejme, že vztah (4) platí pro  $k = m$ , kde  $m \in \{2, 3, \dots, n-1\}$ , tj. předpokládejme, že platí

$$P_m Q_{m-1} - P_{m-1} Q_m = (-1)^m.$$

Ukážeme, že vztah (4) platí i pro  $k = m + 1$ . Upravme tedy levou stranu vztahu (4) pro  $k = m + 1$

$$\begin{aligned} P_{m+1} Q_m - P_m Q_{m+1} &= (q_{m+1} P_m + P_{m-1}) Q_m - P_m (q_{m+1} Q_m + Q_{m-1}) \\ &= q_{m+1} P_m Q_m + P_{m-1} Q_m - q_{m+1} P_m Q_m - P_m Q_{m-1} \\ &= P_{m-1} Q_m - P_m Q_{m-1} \\ &= -(-1)^m \\ &= (-1)^{m+1}, \end{aligned}$$

kde jsme využili rekurentní vztahy ve (2) pro  $k = m + 1$ . Tedy vztah (4) platí i pro  $k = m + 1$ . ■

### 3 Euklidův algoritmus

V této části si ukážeme, jak lze k zadanému racionálnímu číslu nalézt jeho vyjádření pomocí řetězového zlomku. Celý postup je založen na Euklidově algoritmu (viz [1]) a ukažme si ho na následujícím příkladu. Mějme racionální číslo  $\frac{5}{8}$  a hledejme postupně prvky jeho řetězového zlomku. Provedme celočíselné dělení  $5 : 8$ . Dostáváme  $5 : 8 = 0$  se zbytkem 5. Tímto zbytkem 5 opět dělíme původního dělitele 8 a dostáváme  $8 : 5 = 1$  se zbytkem 3. Opět tímto zbytkem 3 dělíme předchozího dělitele 5. A máme tedy  $5 : 3 = 1$  se



### INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

zbytkem 2. Ještě jednou dělíme číslem 2 předchozího dělitele 3 a dostáváme  $3 : 2 = 1$  se zbytkem 1. Nakonec při dělení  $2 : 1 = 2$  máme zbytek 0 a proces celočíselného dělení tak končí. Vše lze schematicky zapsat následovně

$$\begin{aligned} 5 : 8 &= 0 \text{ se zbytkem } 5, \\ 8 : 5 &= 1 \text{ se zbytkem } 3, \\ 5 : 3 &= 1 \text{ se zbytkem } 2, \\ 3 : 2 &= 1 \text{ se zbytkem } 1, \\ 2 : 1 &= 2 \text{ se zbytkem } 0. \end{aligned}$$

Výsledky celočíselného dělení 0, 1, 1, 1, 2 jsou postupně hodnoty prvků hledaného řetězového zlomku  $q_1, q_2, q_3, q_4, q_5$ . Snadno se přesvědčíme, že platí

$$(5) \quad (0, 1, 1, 1, 2) = 0 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2}}}} = \frac{5}{8}.$$

#### 4 Diofantická rovnice

Mějme dána celá čísla  $a, b, c \in \mathbb{Z}$ , přičemž  $a$  a  $b$  jsou čísla nesoudělná. Naším úkolem je najít alespoň nějaká celá čísla  $x, y \in \mathbb{Z}$  tak, že platí

$$(6) \quad ax + by = c.$$

Pomocí Euklidova algoritmu nejprve vyjádříme racionální číslo  $\frac{a}{b}$  ve tvaru řetězového zlomku

$$(7) \quad \frac{a}{b} = (q_1, q_2, q_3, \dots, q_n),$$

kde  $n \in \mathbb{N}$ . Poznamenejme, že  $\frac{P_n}{Q_n} = \frac{a}{b}$  je  $n$ -tý sblížený zlomek řetězového zlomku (7). Dále definujeme

$$(8) \quad x_0 := (-1)^n \cdot Q_{n-1} \cdot c,$$

$$(9) \quad y_0 := (-1)^{n+1} \cdot P_{n-1} \cdot c,$$

kde  $\frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}}$  je  $(n-1)$ -ní sblížený zlomek řetězového zlomku (7). Takto definovaná čísla  $x_0$  a  $y_0$  jsou čísla celá a jsou jedním z řešení rovnice (6). Snadno se o tom přesvědčíme s využitím

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

vztahu (4) pro  $k = n$

$$\begin{aligned} ax_0 + by_0 &= P_n \cdot (-1)^n \cdot Q_{n-1} \cdot c + Q_n \cdot (-1)^{n+1} \cdot P_{n-1} \cdot c \\ &= (-1)^n \cdot c \cdot (P_n Q_{n-1} - Q_n P_{n-1}) \\ &= (-1)^n \cdot c \cdot (-1)^n, \\ &= c. \end{aligned}$$

**Příklad** Určete všechna celá čísla  $x, y \in \mathbb{Z}$  tak, aby platilo

$$(10) \quad 5x + 8y = 2.$$

Nejprve najdeme alespoň nějaká celá čísla  $x_0, y_0 \in \mathbb{Z}$ , která jsou řešením diofantické rovnice (10). Pomocí Euklidova algoritmu najdeme řetězový zlomek racionálního čísla  $\frac{a}{b} = \frac{5}{8}$  (viz (5))

$$(11) \quad \frac{5}{8} = (0, 1, 1, 1, 2).$$

Máme tedy  $n = 5$  a k řetězovému zlomku v (11) dále určíme všechny jeho sblížené zlomky:

$q_k$	0	1	1	1	2
$P_k$	0	1	1	2	5
$Q_k$	1	1	2	3	8

Určili jsme tak hodnoty sblížených zlomků  $\frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}}$  a  $\frac{P_n}{Q_n}$

$$\frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}} = \frac{2}{3}, \quad \frac{P_n}{Q_n} = \frac{5}{8}.$$

Definiční vztahy (8) a (9) pro  $x_0$  a  $y_0$  mají v našem případě tvar

$$\begin{aligned} x_0 &:= (-1)^5 \cdot 3 \cdot 2 = -6, \\ y_0 &:= (-1)^6 \cdot 2 \cdot 2 = 4. \end{aligned}$$

Snadno se přesvědčíme, že  $5x_0 + 8y_0 = 2$ . Podařilo se nám tedy najít jedno řešení diofantické rovnice (10):  $x_0 = -6, y_0 = 4$ . Díky znalosti jednoho řešení rovnice (10) ( $x_0 = -6, y_0 = 4$ ) se nám již podaří najít všechna řešení této rovnice. Rovnici (10) nejprve upravme

$$(12) \quad \begin{aligned} 5x + 8y &= 2, \\ 5x + 8y &= 5(-6) + 8 \cdot 4, \\ 5(x + 6) + 8(y - 4) &= 0, \\ 5(x + 6) &= -8(y - 4). \end{aligned}$$

## INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Levá strana rovnice (12) je dělitelná pěti, a tedy i pravá strana této rovnice je dělitelná pěti. Odtud dostáváme, že 5 dělí  $(y - 4)$ , a tedy existuje  $t \in \mathbb{Z}$  takové, že platí

$$(13) \quad y - 4 = 5t,$$

$$(14) \quad y = 5t + 4.$$

Dosazením (13) do (12) dostáváme

$$(15) \quad \begin{aligned} x + 6 &= -8t, \\ x &= -8t - 6. \end{aligned}$$

Vztahy (14) a (15) určují již všechna řešení diofantické rovnice (10):

$$\begin{aligned} x &= -8t - 6, \\ y &= 5t + 4, \quad t \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

## 5 Závěr

Ukázali jsme, jak lze užít konečné řetězové zlomky k nalezení řešení diofantické rovnice. K dalšímu čtení doporučujeme čtenáři knihu [1], která je dobře čitelná pro studenty středních škol a lze se v ní seznámit i s nekonečnými řetězovými zlomky. Pro případné další rozšiřování znalostí a dovedností s řetězovými zlomky odkazujeme čtenáře na monografii [2].

## 6 Použitá literatura

[1] P. Vít: Řetězové zlomky. Praha: Mladá fronta, 1982.  
<http://dml.cz/dmlcz/404015>

[2] A. J. Chinčín: Řetězové zlomky. Přírodovědecké vydavatelství Praha, 1952.  
<http://dml.cz/dmlcz/402842>

## 7 Kontakt na autora

Ing. Petr Nečasal, Ph.D.  
Katedra matematiky FAV ZČU, Univerzitní 8, 306 14 Plzeň  
[pnecosal@kma.zcu.cz](mailto:pnecosal@kma.zcu.cz)

Středisko služeb školám, Plzeň, Částkova 78  
Podpora talentovaných žáků v Plzeňském kraji  
CZ.1.07/1.2.03/02.0001

Tento projekt je v letech 2012-16 financován z rozpočtu Plzeňského kraje

## „PŘÍKLADY TÁHNOU“ + MATEMATIKA HROU (Vybrané složitější slovní úlohy soutěžní a zábavnou formou)

Jana SOUKUPOVÁ

### 1. Úvod - úlohy do vlaku – prostorová představivost

1. V názorném promítání je zobrazen prostorový objekt.

Plnou čarou jsou naryšovány viditelné čáry, čárkovanou neviditelné.

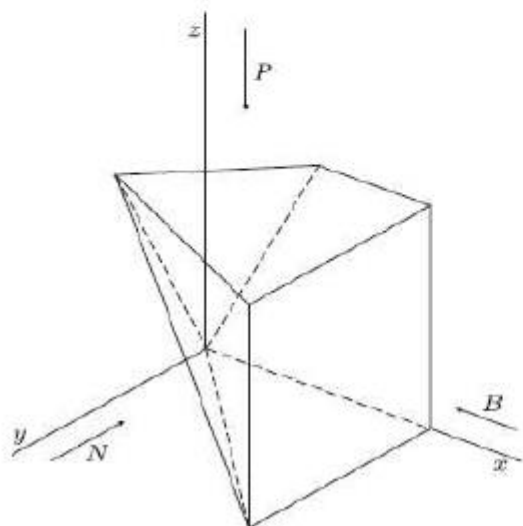
Šipky s písmeny  $P$ ,  $N$ ,  $B$  označují směr pohledu na objekt.

Půdorys objektu je pravoúhlý průmět objektu do roviny  $(x,y)$ , tj. ve směru šipky  $P$ .

Nárys objektu je pravoúhlý průmět objektu do roviny  $(x,z)$ , tj. ve směru šipky  $N$ .

Bokorys objektu je pravoúhlý průmět objektu do roviny  $(y,z)$ , tj. ve směru šipky  $B$ .

Ve třech následujících úlohách zakroužkujte písmeno odpovědi, kterou považujete za správnou.  
(3 × 1 bod)



1.1 Určete půdorys objektu.

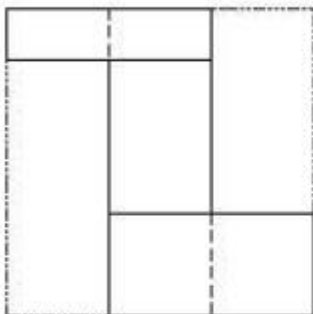
a) není na žádném z uvedených  
obrázků

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

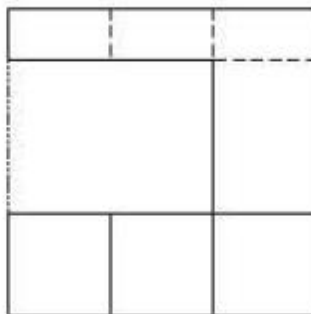
2. Je dán půdorys P, nárys N a bokorys B prostorového objektu, který je umístěn v krychli. (Viditelné a neviditelné hrany jsou rozlišeny plnou a čárkovanou čarou.) Zobrazte daný objekt v názorném promítání, které je určeno obrazem zmíněné krychle. Dodržte rozměry objektu a rozlište viditelné a neviditelné hrany. Pokud použijete hranu pomocné krychle nebo její část, pak to zdůrazněte obtáhnutím.

(2 body)

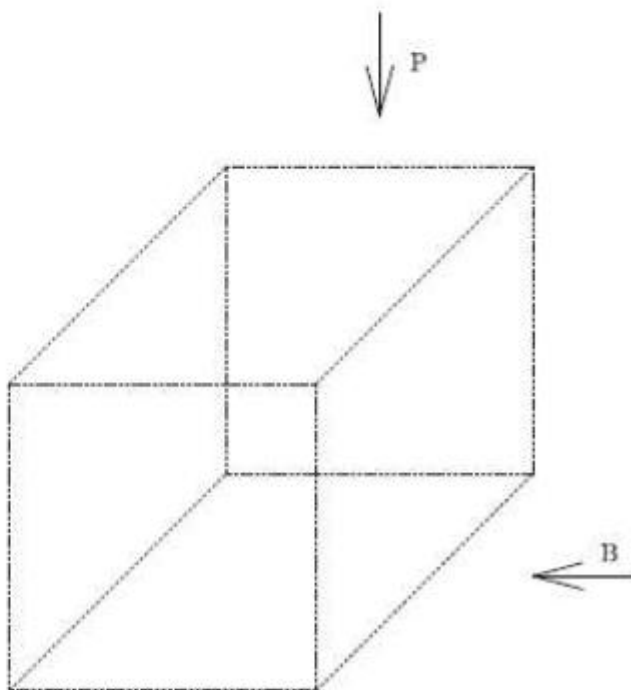
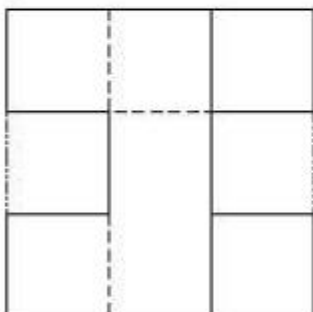
N



B



P



Krychle je pouze pomocná,  
při zobrazení objektu  
ji pokládejte za průhlednou.



INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

**2. Život a dílo významného českého architekta, stavitele a mecenáše Josefa Hlávky**

Lužany - návštěva Hlávkovy sídla, základní informace o životě, technické práci a nejvýznamnějších stavbách.



Středisko služeb školám, Plzeň, Částkova 78  
Podpora talentovaných žáků v Plzeňském kraji  
CZ.1.07/1.2.03/02.0001

Tento projekt je v letech 2012-16 financován z rozpočtu Plzeňského kraje

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

### 3. Zajímavé slovní úlohy

Studenti řešili v rámci pohybových her následující úlohy:

1. Na železniční trati z A do B je tunel dlouhý 192 m a ve vzdálenosti 933 m od tunelu je most délky 350 m . Osobní vlak jede z A do B a od okamžiku, kdy jeho lokomotiva vjede do tunelu, až do okamžiku, kdy jeho poslední vagon opustí tunel, uplyne 15 sekund. Z B do A jede po druhé koleji nákladní vlak a přitom od okamžiku, kdy lokomotiva nákladního vlaku vjede na most, až do okamžiku, kdy jeho poslední vagon opustí most, uplyne 34 sekund, Poslední vagóny obou vlaků opouštějí most nebo tunel ve stejný okamžik a od tohoto okamžiku uplyne právě 19 sekund, kdy se lokomotivy setkají. Místo setkání je vzdáleno 488m od tunelu. Určete délky i rychlosti obou vlaků. [os vl. 108 m, rychlost 72 km/h, nákl. vl. 160 m, rychlost 54 km/h ]
2. Vlak projíždí tunelem dlouhým 220 m. Od okamžiku, kdy vjede do tunelu lokomotiva, až do okamžiku, kdy poslední vagon opustí tunel, uplyne 19 sekund. Od tohoto okamžiku uplyne dalších 42 sekund, než lokomotiva přijede k návěsti, která je 1 km od tunelu. Vlak jede stálou rychlostí. Určete tuto rychlost a délku vlaku. [ 72 km/h , 160 m ]
3. Z místa A do místa B, vzdáleného 9 km, vyšel chodec. Po čtvrt hodině byl za ním z místa A vyslán posel se vzkazem. Posel dohonil chodce a vrátil se zpět do místa A v okamžiku, kdy chodec přišel do místa B. Určete rychlost pohybu chodce a dobu, za kterou posel dohoní chodce, víte-li, že se oba pohybují stálou rychlostí a rychlost pohybu posla je 5 km/h . Přitom dobu potřebnou k předání vzkazu zanedbáváme. [4 km/h , dohoní ho za 1 h ]
4. Tři vojáci - poručík Zamířil, major Vystřelil a generál Strefil - stříleli do terče. Když skončili, spočítali své zásahy. Každý z nich řekl tři věty:  
  
Poručík Zamířil: "Nastřílel jsem 180." a "Nastřílel jsem o 40 méně než major." a "Nastřílel jsem o 20 víc než generál."  
Major Vystřelil: "Nenastřílel jsem nejméně." a "Rozdíl mezi mnou a generálem je 60." a "Generál nastřílel 240."  
Generál Strefil: "Nastřílel jsem méně než poručík." a "Poručík nastřílel 200." a "Major nastřílel o 60 víc než poručík."  
Každý z nich jedenkrát nemluvil pravdu. Kolik každý z nich nastřílel bodů?
5. Naleznete 10.místné číslo, kde první číslice vyjadřuje kolik nul je v číslici, druhá číslice určuje, kolik je zde jedniček atd. až do desáté číslice, která určuje kolik je zde devítek.

Středisko služeb školám, Plzeň, Částkova 78  
Podpora talentovaných žáků v Plzeňském kraji  
CZ.1.07/1.2.03/02.0001

Tento projekt je v letech 2012-16 financován z rozpočtu Plzeňského kraje



INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

#### 4. Ptolemaiova věta, její důkaz a jednoduché užití

**Ptolemaiova věta:** V tětíivém čtyřúhelníku, jehož strany mají délky  $a, b, c, d$  a uhlopříčky mají délky  $e, f$  platí:

$$ef = ac + bd$$

**Příklad 1.** Na kratším oblouku BC kružnice opsané ostroúhlému rovnoramennému ( $|AB| = |AC|$ ) trojúhelníku ABC leží bod X. Dokažte, že platí

$$\frac{|AX|}{|BX| + |CX|} = \frac{|AC|}{|BC|}$$

**Příklad 2.** Na kratším oblouku BC kružnice opsané čtverci ABCD leží bod X. Ukažte, že podíl

$$\frac{|BX| + |CX|}{|AX| + |DX|}$$

nezávisí na volbě bodu X.

**Příklad 3.** Na kratším oblouku BC kružnice opsané čtverci ABCD leží bod X. Ukažte, že platí

$$\frac{|AX| + |CX|}{|BX| + |DX|} = \frac{|DX|}{|AX|}$$



## 5. Úloha, tentokrát z teorie čísel

Určete všechna přirozená čísla  $n$ , pro která je  $\sqrt{n-2012} + \sqrt{n+2012}$  číslo celé.

Řešení:

Výraz se má rovnat celému číslu

$$\sqrt{n-2012} + \sqrt{n+2012} = k, k \in \mathbb{Z} \text{ podm. } n-2012 \geq 0 \text{ a tedy } n \geq 2012.$$

také

$$(\sqrt{n-2012} + \sqrt{n+2012})^2 = k^2 \text{ a } k^2 \text{ je také celé číslo}$$

Úpravou najdeme všechny možné součiny levé strany:

$$\text{Rovnici umocníme (bude nutná zkouška) } [4(n)]^2 - 2012^2 = k^4 - 4k^2n + 4n^2$$

$$4n^2 - 4 \cdot 2012^2 = k^4 - 4k^2n + 4n^2$$

$$-(2 \cdot 2012)^2 = k^2 \cdot (k^2 - 4n)$$

$$(2 \cdot 4 \cdot 503)^2 = k^2 \cdot (4n - k^2)$$

$$\text{Podmínky: } k^2 - 2n \geq 0 \dots k^2 \geq 2 \cdot n \dots k^2 \geq 2 \cdot 2012 \dots k \geq 2 \cdot \sqrt{1006}$$

Máme čtyři možnosti, jak zvolit  $k$ .

a.  $k = 503$

ŠKOLSKO SLUŽEB SKOLAM, FIZEM, ČASIKOVA 10  
Podpora talentovaných žáků v Plzeňském kraji  
CZ.1.07/1.2.03/02.0001

Tento projekt je v letech 2012-16 financován z rozpočtu Plzeňského kraje

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

$n$  není přirozené

b.  $k = 2 \cdot 503$

$$4n - (2 \cdot 503)^2 = 4^2$$

$$n = 4 + 503^2$$

c.  $k = 4 \cdot 503$

$$2 = 4n - (4 \cdot 503)^2$$

$$n = 1 + 4 \cdot 503^2$$

d.  $k = 2 \cdot 4 \cdot 503$

$$1 = 4n - 2^2 \cdot 4^2 \cdot 503^2$$

$n$  není přirozené

Na závěr je nutné provést zkoušky, které pro obě čísla vycházejí

#### 6. Závěr

Den strávený prohlídkou zámku a v lesním prostředí byl pro účastníky příjemným zpestřením kempu. Aktivně se zapojovali nejen při hrách, ale také v přednáškách. Výklad byl střídán s pohybovými aktivitami

#### 7. Použitá literatura

ŠVRČEK J., CALÁBEK P. Sbíрка netradičních matematických úloh 1. vyd. Prometheus, 2007., ISBN 978-80-7196-341-7.

POLÁK J., Středoškolská matematika v úlohách

HERMAN J., CHRÁPAVÁ V., JANČOVIČOVÁ E., ŠIMŠA J. MATEMATIKA Rovnice a jejich soustavy, ISBN 978-80-247-1821-7

Časopis ROZHLEDY – matematicko-fyzikální ročník 87 (2012) č.1. Úlohy z Pražského semináře

<https://www.fa.cvut.cz/Cz/PrijimaciRizeni> - vybrané 2 úlohy

#### 8. Kontakt na autora

RNDr. Jana Soukupová

Gymnázium Mikulášské náměstí 23 Plzeň

E-mail [jana.soukupova@mikulasske.cz](mailto:jana.soukupova@mikulasske.cz)



INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

## ROVNICE A NEROVNICE V PŘÍKLADECH MEZINÁRODNÍCH MATEMATICKÝCH OLYMPIÁD

Petr TOMICZEK

### Úvod

Jedním z největších pokroků v myšlení lidí bylo zavedení proměnných (písmen) při popisu reality. Takový popis skutečnosti pak vede k algebraickým výrazům, rovnicím a nerovnicím. Umět vyřešit algebraické rovnice a nerovnice je jedním ze základních předpokladů porozumění současných technických problémů. Obsahem tohoto příspěvku jsou proto příklady s touto tematikou, které se řešily v uplynulých ročnících matematických olympiád po celém světě.

První kapitola je věnována rovnicím řešeným v oboru celých a racionálních čísel. Ve druhé kapitole je diskutován vztah mezi aritmetickým a geometrickým průměrem a jeho aplikacemi při řešení nerovnic. Pro pochopení některých důkazů je vhodné se nejdříve seznámit s principem matematické indukce.

### 1. Rovnice

Příklad 1.1: (NDR 1974)

Pro  $x, y \in \mathbb{Z}$  řešte rovnici  $(x+2)^4 - x^4 = y^3$ .

Řešení: Výpočtem dostaneme  $8(x^3 + 2(x+1)^2 + x^2) = y^3$ , tudíž  $y$  je sudé  $y = 2k$ ,  $k \in \mathbb{Z}$  a  $x^3 + 2(x+1)^2 + x^2 = k^3$ . Odtud vyplývá, že  $k \geq x+1$ . Pro  $k = x+1$  platí  $x^3 + 2(x+1)^2 + x^2 = x^3 + 3x^2 + 3x + 1$ , tedy  $x = -1$ ,  $y = 0$ . Pro  $k \geq x+2$  musí platit  $x^3 + 2(x+1)^2 + x^2 \geq x^3 + 6x^2 + 12x + 8$ , neboli  $0 \geq 3x^2 + 8x + 6$ , což nikdy nenastane.

Středisko služeb školám, Plzeň, Částkova 78  
Podpora talentovaných žáků v Plzeňském kraji  
CZ.1.07/1.2.03/02.0001

Tento projekt je v letech 2012-16 financován z rozpočtu Plzeňského kraje

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Příklad 1.2: (Bulharsko 1981)

Dokažte následující tvrzení. Jestliže  $n \in \mathbb{N}$  je liché, pak rovnice  $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{4}{n}$  má v množině  $\mathbb{N}$  řešení právě tehdy, když  $n = m(4k - 1)$ , kde  $m, k \in \mathbb{N}$ .

Řešení: Důkaz ekvivalence rozdělíme do dvou kroků.

Nejdříve " $\Rightarrow$ ": Z rovnice  $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{4}{n}$  dostaneme  $n(x + y) = 4xy$  a použijeme, že  $n$  je liché. Tedy a)  $x, y$  jsou obě sudá nebo b) obě lichá čísla. V případě a) platí  $x = 2x_1, y = 2y_1$ , kde  $x_1, y_1 \in \mathbb{N}$ . Odtud  $n(x_1 + y_1) = 8x_1y_1 \Rightarrow 2|(x_1 + y_1)$  a opět obě čísla  $x_1, y_1$  jsou sudá nebo lichá. Proto existuje  $p \in \mathbb{N} \cup \{0\}$  takové, že  $x = 2^p x_p, y = 2^p y_p$ , kde  $x_p, y_p \in \mathbb{N}$  jsou lichá čísla (pokud  $p = 0$ , tak dostáváme případ b)). Po dosazení do původní rovnice dostaneme  $n2^p(x_p + y_p) = 4 \cdot 2^p 2^p x_p y_p$ . Odtud  $4|(x_p + y_p)$  a  $x_p = 4k - 1, y_p = 4l - 3$ , kde  $k, l \in \mathbb{N}$ . Po dosazení  $n(4k - 1 + 4l - 3) = 4 \cdot 2^p(4k - 1)(4l - 3)$ , tudíž  $n(k + l - 1) = 2^p(4k - 1)(4l - 3)$ . Jestliže  $(k + l - 1) \cdot \alpha = 4k - 1$ , kde  $\alpha \in \mathbb{N}$ , pak  $l = \frac{4k-1}{\alpha} - k + 1$  a  $4l - 3 = (4k - 1)(\frac{4}{\alpha} - 1)$ . Tedy  $n(k + l - 1) = 2^p(k + l - 1) \cdot \alpha \cdot (4k - 1)(\frac{4}{\alpha} - 1) \Rightarrow n = 2^p(4k - 1)(\alpha - 4)$ , cbd.

Obráceně " $\Leftarrow$ ": nyní  $n = m(4k - 1)$  a hledáme čísla  $x, y \in \mathbb{N}$  tak, aby řešila rovnici  $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{4}{n} = \frac{4}{m(4k-1)}$ . Řešení zkusíme najít ve tvaru  $x = a \cdot m, y = b \cdot (4k - 1)$ , kde  $a, b \in \mathbb{N}$ . Potom  $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{x+y}{xy} = \frac{am+b(4k-1)}{am \cdot b(4k-1)} = \frac{4}{m(4k-1)}$ , odtud  $4ab = am + b(4k - 1)$ , tedy  $a = k, b = am = km$ . Neboli  $x = km, y = km(4k - 1)$ , cbd.

Příklad 1.3: (NDR 1973)

Pro  $x \in \mathbb{Z}$  řešte rovnici  $x(x + 1)(x + 7)(x + 8) = y^2$ .

Řešení: Substitucí  $z = x + 4$  přejdeme k  $(z^2 - 16)(z^2 - 9) = y^2$ . Pro  $z = 0$  je  $y = \pm 12$ , pro  $z = \pm 3, z = \pm 4$  je  $y = 0$ , pro  $z = \pm 5$ , je  $y = \pm 12$ . Pro  $z = \pm 1, \pm 2$  řešení v celých číslech neexistuje. Zbývá uvažovat  $|z| \geq 6$ . Pak  $z^4 - 25z^2 + 144 = y^2 = (z^2 - 12)^2 - z^2$ . Tedy  $(z^2 - 12)^2 \geq y^2$  a  $y^2 > (z^2 - 13)^2 = z^4 - 25z^2 + 144 - (z^2 - 25)$ , neboť  $(z^2 - 25) > 0$  pro  $|z| \geq 6$ . Další řešení tudíž neexistují.

Příklad 1.4: (Rumunsko 1981)

Pro  $x, y \in \mathbb{Z}$  řešte rovnici  $x^6 + 3x^3 + 1 = y^4$ .

Řešení: Substitucí  $z = x^3$  přejdeme ke kvadratické rovnici  $z^2 + 3z + 1 - y^4 = 0$ , pro jejíž diskriminant musí platit  $D = 5 + 4y^4 = n^2, n \in \mathbb{N}$ , abychom dostali řešení v celých číslech. Položíme  $m = 2y^2$ , pak  $n^2 = m^2 + 5$  a  $n \geq m + 1$ , tedy  $m^2 + 5 \geq (m + 1)^2 = m^2 + 2m + 1$ . Odtud plyne  $2 \geq m = 2y^2$ , tudíž  $1 \geq |y|$ . Pro  $y = 0$  řešení neexistuje, pro  $y = \pm 1$  je  $x = 0$ .



## INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Příklad 1.5: (New York 1977)

Pro  $x, y \in \mathbb{Z}$  řešte rovnici  $2^x + 1 = y^2$ .

Řešení: Z nerovnosti  $0 < 2^x = y^2 - 1$  vyplývá pro  $x, y \in \mathbb{Z}$ , že  $2^x = y^2 - 1 \geq 3$  a  $x > 1$ . Tedy  $2^x + 1$  je liché číslo i  $y$  je liché. Pak  $y = 2k + 1, k \in \mathbb{Z}$  a  $2^x + 1 = (2k + 1)^2$ , odtud  $2^{x-2} = (k + 1)k$ . Tato rovnost nastane pouze pro  $k = 1$ , neboli  $x = 3, y = 3$ .

Příklad 1.6: (Jugoslávie 1974)

Pro  $x, y \in \mathbb{Z}$  řešte rovnici  $x^2 + xy + y^2 = x^2y^2$ .

Řešení: Díky symetrii příkladu můžeme bez újmy na obecnosti předpokládat, že  $y = ax, |a| \geq 1$ . Potom  $x^2(1 + a + a^2) = a^2x^4$  a  $x^2 = \frac{1+a+a^2}{a^2} \leq 3$ , tedy pro  $x = -1$ , je  $y = 1$ , pro  $x = 0$ , je  $y = 0$ , pro  $x = 1$ , je  $y = -1$ .

Příklad 1.7: (NDR 1970)

Dokažte, že pro lichá čísla  $a, b, c \in \mathbb{Z}$  rovnice  $ax^2 + bx + c = 0$  nemá řešení v  $\mathbb{Q}$ .

Řešení: Aby kořeny kvadratické rovnice byly racionální čísla, tak pro její diskriminant musí platit  $D = b^2 - 4ac = n^2, n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ . Z lichosti čísel  $a, b, c$  a rovnosti  $b^2 - 4ac = n^2$  plyne, že i  $n$  je liché číslo. Položíme  $a = 2a_1 + 1, b = 2b_1 + 1, c = 2c_1 + 1, n = 2n_1 + 1$ , potom  $4b_1^2 + 4b_1 + 1 - 4(4a_1c_1 + 2a_1 + 2c_1 + 1) = 4n_1^2 + 4n_1 + 1$  a  $b_1^2 + b_1 - (4a_1c_1 + 2a_1 + 2c_1 + 1) = n_1^2 + n_1$ . Jelikož  $b_1^2 + b_1$  i  $n_1^2 + n_1$  jsou sudá čísla, tak číslo na levé straně poslední rovnosti je liché a vpravo sudé, což je spor s předpokladem, že kořeny rovnice jsou racionální čísla.

Příklad 1.8: (Bulharsko 1983)

Dokažte, že rovnice  $x^3 + 3y^3 + 9z^3 - 9xyz = 0$  má v  $\mathbb{Q}$  pouze triviální řešení.

Řešení: Nejdříve budeme předpokládat, že čísla  $x, y, z$  jsou celá, nenulová a nemají společného dělitele  $d$  (jinak tímto číslem můžeme rovnici vydělit). Dokážeme, že všechna čísla  $x, y, z$  jsou dělitelná třemi, což bude spor. Platí  $x^3 = -3(y^3 + 3z^3 - 3xyz) \Rightarrow x = 3x_1, x_1 \in \mathbb{Z} \Rightarrow 3 \cdot 9x_1^3 = 3(9x_1yz - 3z^3 - y^3) \Rightarrow y = 3y_1, y_1 \in \mathbb{Z} \Rightarrow 9x_1^3 = 27x_1y_1z - 3z^3 - 27y_1^3 \Rightarrow z = 3z_1, z_1 \in \mathbb{Z}$ , což je spor. Nyní budeme předpokládat, že  $x, y, z$  lze zapsat ve tvaru zlomků  $x = \frac{p_x}{q_x}, y = \frac{p_y}{q_y}, z = \frac{p_z}{q_z}$ . Potom platí  $(\frac{p_x}{q_x})^3 + 3(\frac{p_y}{q_y})^3 + 9(\frac{p_z}{q_z})^3 - 9\frac{p_x p_y p_z}{q_x q_y q_z} = 0 \Rightarrow (p_x q_y q_z)^3 + 3(p_y q_x q_z)^3 + 9(p_z q_x q_y)^3 - 9(p_x q_y q_z p_y q_x q_y p_x q_y q_z)^3 = 0 \Rightarrow \tilde{x}^3 + 3\tilde{y}^3 + 9\tilde{z}^3 - 9\tilde{x}\tilde{y}\tilde{z} = 0$ , kde  $\tilde{x} = p_x q_y q_z$  atd. a  $\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}$  jsou celá čísla, což opět povede ke sporu, stejně jako v první části důkazu.



INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Příklad 1.9: (Anglie 1970)

Pro  $x, y \in \mathbb{Q}$  řešte rovnici  $\sqrt{2\sqrt{3}-3} = \sqrt{x\sqrt{3}} - \sqrt{y\sqrt{3}}$ .

Řešení: Po umocnění dostaneme  $2\sqrt{3}-3 = x\sqrt{3} - 2\sqrt{xy\sqrt{3}} + y\sqrt{3}$ , vydělíme  $\sqrt{3}$ , pak  $2 - \sqrt{3} = x - 2\sqrt{xy} + y$  a  $2 - x - y = \sqrt{3} - 2\sqrt{xy}$ . Opět umocníme, potom  $(2 - x - y)^2 = 3 - 4\sqrt{xy\sqrt{3}} + 4xy$ . Odtud plyne, že  $\sqrt{xy\sqrt{3}} \in \mathbb{Q}$ . V první rovnosti  $2\sqrt{3}-3 = x\sqrt{3} - 2\sqrt{xy\sqrt{3}} + y\sqrt{3}$  vytkneme  $\sqrt{3}$ , pak  $\sqrt{3}(2-x-y) = 3 - 2\sqrt{xy\sqrt{3}} \in \mathbb{Q}$ . Nutně tedy  $2-x-y = 0$  a  $3 - 2\sqrt{xy\sqrt{3}} = 0$ . Odtud již dostaneme řešení  $x = \frac{3}{2}, y = \frac{1}{2}$ .

Příklad 1.10:

Řešte rovnici  $x^{x+y} = (x+y)^y$  v kladných racionálních číslech.

Řešení: Rovnici  $x^{x+y} = (x+y)^y$  upravíme  $x^x = (1 + \frac{y}{x})^y \Rightarrow x^x = (1 + \frac{y}{x})^{\frac{y}{x}}$  a položíme  $z = \frac{y}{x}$ . Potom  $x = (1 + \frac{1}{z})^z$ ,  $x, z \in \mathbb{Q}$  a  $x = \frac{m}{n}$ ,  $z = \frac{p}{q}$ , kde  $m, n$  a  $p, q$  jsou nesoudělná přirozená čísla. Po dosazení dostaneme  $\frac{m}{n} = (1 + \frac{p}{q})^{\frac{p}{q}}$  a  $m^q \cdot q^p = n^q \cdot (q+p)^p$ . Z nesoudělnosti  $m, n$  a  $p, q+p$  plyne  $q^p | n^q$  a  $n^q | q^p$ , tudíž  $q^p = n^q \Rightarrow q^{\frac{p}{q}} = n$ . Rozložíme  $q$  na součin prvočísel  $q = q_1^{r_1} \cdot q_2^{r_2} \cdots q_k^{r_k}$ ,  $r_i \in \mathbb{N}$ . Potom  $q^{\frac{p}{q}} = q_1^{\frac{p r_1}{q}} \cdot q_2^{\frac{p r_2}{q}} \cdots q_k^{\frac{p r_k}{q}} = n$ . Z nesoudělnosti  $p, q$  plyne, že  $q | r_i$ , tedy  $r_i \geq q$  a  $q = q_1^{r_1} \cdot q_2^{r_2} \cdots q_k^{r_k} \geq q^q \Rightarrow q = 1 \Rightarrow n = 1$ . Tudíž  $z = p$ ,  $x = (1 + \frac{1}{p})^p$  a  $y = p(1 + \frac{1}{p})^p$ , kde  $p \in \mathbb{N}$ .

V dalších příkladech použijeme následující jednoduché tvrzení.

**Věta 1.1:** (modulo 4)

Nechť  $x \in \mathbb{Z}$ , pak při dělení  $x^2$  číslem 4 jsou zbytky pouze 0, když  $x$  je sudé, a 1, když  $x$  je liché. Píšeme  $x^2 |_{\text{mod } 4} \equiv 0$  ( $x$  sudé),  $x^2 |_{\text{mod } 4} \equiv 1$  ( $x$  liché). Podobně  $x^2 |_{\text{mod } 16} \equiv 0$  ( $x$  sudé),  $x^2 |_{\text{mod } 16} \equiv 1$  ( $x$  liché).

Příklad 1.11: (ČSSR 1976)

Pro  $x, y, z \in \mathbb{Z}$  řešte rovnici  $x^2 + y^2 = 3z^2$ .

Řešení: Triviální řešení  $x = 0, y = 0, z = 0$  je zřejmé. Bez újmy na obecnosti můžeme tedy předpokládat, že  $x, y, z$  jsou nesoudělná čísla a alespoň jedno je nenulové. Podle předchozího tvrzení 1.1 platí  $(x^2 + y^2) |_{\text{mod } 4} \equiv 0$  nebo 1 nebo 2 a  $3z^2 |_{\text{mod } 4} \equiv 0$  nebo 3. Tudíž  $(x^2 + y^2) |_{\text{mod } 4} \equiv 0$  a  $3z^2 |_{\text{mod } 4} \equiv 0$ , což nastane pouze v případě, že všechna čísla  $x, y, z$  jsou sudá. Dostali jsme spor s předpokladem nesoudělnosti. Úloha tedy nemá netriviální řešení.

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Příklad 1.12: (USA 1976)

Pro  $x, y, z \in \mathbb{Z}$  řešte rovnici  $x^2 + y^2 + z^2 = x^2y^2$ .

Řešení: Opět úloha má triviální řešení  $x = 0, y = 0, z = 0$ . Podle tvrzení 1.1 buď a)  $x^2y^2 \mid_{\text{mod } 4} \equiv 1$  nebo b)  $x^2y^2 \mid_{\text{mod } 4} \equiv 0$ .

ad a) Tedy  $x, y$  jsou liché, pak i  $z$  je liché a  $x^2 + y^2 + z^2 \mid_{\text{mod } 4} \equiv 3 \neq x^2y^2 \mid_{\text{mod } 4} \equiv 1$ . Tedy možnost a) nenastane.

ad b) Necht'  $x$  je sudé,  $y$  je liché, pak  $z$  je též liché a  $x^2 + y^2 + z^2 \mid_{\text{mod } 4} \equiv 2 \neq x^2y^2 \mid_{\text{mod } 4} \equiv 0$ . (Analogicky  $y$  je sudé,  $x$  je liché.) Zbývá možnost  $x$  je sudé,  $y$  je sudé, pak i  $z$  je sudé. Potom  $x = 2x_1, y = 2y_1, z = 2z_1$  a  $x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 = 4x_1^2y_1^2$ . Odtud  $x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 \mid_{\text{mod } 4} \equiv 4x_1^2y_1^2 \mid_{\text{mod } 4} \equiv 0$ , což nastane pouze v případě, že  $x_1, y_1, z_1$  jsou sudá čísla atd. Čísla  $x, y, z$  jsou tedy dělitelná libovolnou mocninou čísla 2, tato situace nastane pouze pro  $x = 0, y = 0, z = 0$ .

Příklad 1.13: (USA 1979)

V celých číslech řešte rovnici  $x_1^4 + x_2^4 + \dots + x_{14}^4 = 1599$ .

Řešení: Platí  $x^4 \mid_{\text{mod } 16} \equiv 0$  nebo  $x^4 \mid_{\text{mod } 16} \equiv 1$ . Tedy  $(x_1^4 + x_2^4 + \dots + x_{14}^4) \mid_{\text{mod } 16} \leq 14$  a  $1599 \mid_{\text{mod } 16} \equiv 15$ . Proto úloha nemá řešení.

## 2. Nerovnice

Vzdálenost dvou čísel  $a, b$  na reálné ose se rovná  $|a - b| = \sqrt{(a - b)^2}$ . Zřejmě  $(a - b)^2 \geq 0$ , což je ekvivalentní se základní nerovností

$$2ab \leq a^2 + b^2, \quad \text{popřípadě} \quad ab \leq \frac{a^2 + b^2}{2} \quad \text{nebo} \quad \sqrt{ab} \leq \frac{a + b}{2} \quad \text{pro } a, b \geq 0, \quad (\text{N1})$$

kteřou lze zobecnit do následující podoby.

**Věta 2.2:** (o průměrech)

Necht'  $a_i > 0, i = 1, 2, \dots, n$ , pak platí

$$\frac{n}{\frac{1}{a_1} + \dots + \frac{1}{a_n}} \leq \sqrt[n]{a_1 \cdot \dots \cdot a_n} \leq \frac{a_1 + \dots + a_n}{n} \leq \sqrt{\frac{a_1^2 + \dots + a_n^2}{n}}. \quad (\text{N2})$$

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

**Definice 2.1:** Necht'  $a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ , aritmetický průměr se nazývá číslo

$$\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n}.$$

Necht'  $a_i \geq 0, i = 1, 2, \dots, n$ , geometrický průměr se nazývá číslo

$$\sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_n}.$$

Necht'  $a_i > 0, i = 1, 2, \dots, n$ , harmonický průměr se nazývá číslo

$$\frac{n}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n}}.$$

Necht'  $a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ , kvadratický průměr se nazývá číslo

$$\sqrt{\frac{a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2}{n}}.$$

Důkaz věty 2.1: Nejdříve dokážeme vztah mezi geometrickým a aritmetickým průměrem

$$\sqrt[n]{a_1 \cdot \dots \cdot a_n} \leq \frac{a_1 + \dots + a_n}{n}. \quad (\text{GA})$$

Upravíme (GA) do tvaru  $n \leq \frac{a_1 + \dots + a_n}{\sqrt[n]{a_1 \cdot \dots \cdot a_n}}$ , a položíme  $x_i = \frac{a_i}{\sqrt[n]{a_1 \cdot \dots \cdot a_n}}, i = 1, \dots, n$ .

Potom  $x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_n = 1$  a pomocí matematické indukce budeme dokazovat, že  $n \leq x_1 + x_2 + \dots + x_n$ . Pro  $n = 1$  tvrzení zřejmě platí. Z využitím indukčního předpokladu  $n \leq x_1 + x_2 + \dots + x_n$  chceme dokázat, že  $n + 1 \leq x_1 + x_2 + \dots + x_n + x_{n+1}$ , pokud  $x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_n \cdot x_{n+1} = 1$ . Bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že  $x_1 \geq 1$  a  $x_2 \leq 1$ , potom  $(x_1 - 1)(x_2 - 1) \leq 0$ , tedy  $1 + x_1x_2 \leq x_1 + x_2$  a také

$$1 + x_1x_2 + x_3 + \dots + x_n + x_{n+1} \leq x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_n + x_{n+1}.$$

Pro  $n$  čísel  $x_1x_2, x_3, \dots, x_{n+1}$  platí  $x_1x_2 \cdot x_3 \cdot \dots \cdot x_{n+1} = 1$  a podle indukčního předpokladu  $n \leq x_1x_2 + x_3 + \dots + x_n + x_{n+1}$ . Odtud již dostaneme

$$1 + n \leq 1 + x_1x_2 + x_3 + \dots + x_n + x_{n+1} \leq x_1 + x_2 + \dots + x_n + x_{n+1},$$

což jsme měli dokázat.

Pokud položíme  $a_i = \frac{1}{b_i}, i = 1, \dots, n$  v nerovnosti (GA), pak dostaneme  $\sqrt[n]{\frac{1}{b_1} \cdot \dots \cdot \frac{1}{b_n}} \leq \frac{\frac{1}{b_1} + \dots + \frac{1}{b_n}}{n}$ . Odtud již snadno plyne nerovnost mezi harmonickým a geometrickým průměrem

$$\frac{n}{\frac{1}{b_1} + \dots + \frac{1}{b_n}} \leq \sqrt[n]{b_1 \cdot \dots \cdot b_n}. \quad (\text{HG})$$

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Nerovnost mezi aritmetickým a kvadratickým průměrem dokážeme také pomocí matematické indukce. Chceme tedy dokázat

$$\frac{a_1 + \dots + a_n}{n} \leq \sqrt{\frac{a_1^2 + \dots + a_n^2}{n}}, \quad (\text{AK})$$

což pro  $n = 1$  zřejmě platí.

Za indukčního předpokladu  $(a_1 + \dots + a_n)^2 \leq n(a_1^2 + \dots + a_n^2)$ , dokážeme platnost  $(a_1 + \dots + a_n + a_{n+1})^2 \leq (n+1)(a_1^2 + \dots + a_n^2 + a_{n+1}^2)$ .

Platí

$$(a_1 + \dots + a_n + a_{n+1})^2 = (a_1 + \dots + a_n)^2 + 2(a_1 + \dots + a_n)a_{n+1} + (a_{n+1})^2 \stackrel{(N1)}{\leq} n(a_1^2 + \dots + a_n^2) + a_1^2 + a_{n+1}^2 + \dots + a_n^2 + a_{n+1}^2 + a_{n+1}^2 = (n+1)(a_1^2 + \dots + a_n^2 + a_{n+1}^2),$$

což jsme měli dokázat.

Poznamenejme, že rovnost v (N2) nastane pouze pro  $a_1 = a_2 = \dots = a_n$ .

S nerovnostmi z předchozí věty se často setkáme v úlohách z matematických olympiád.

Příklad 2.1: (2.ročník MO kat. A)

Dokažte, že pro  $a_i > 0$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ , platí nerovnost

$$(a_1 + a_2 + \dots + a_n) \left( \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n} \right) \geq n^2.$$

Řešení: Jednoduchou úpravou dostaneme

$$\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} \geq \frac{n}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n}}, \quad (\text{HA})$$

což je nerovnost mezi harmonickým a aritmetickým průměrem, viz (N2).

Řešení však můžeme dostat i jiným postupem s využitím základní nerovnosti (N1).

$$(a_1 + a_2 + \dots + a_n) \left( \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n} \right) = \sum_{i=1}^n a_i \cdot \frac{1}{a_i} + \sum_{\substack{i \neq j \\ i, j=1}}^n a_i \cdot \frac{1}{a_j} =$$

$$n + \sum_{1 \leq i < j \leq n} \underbrace{\frac{a_i}{a_j} + \frac{a_j}{a_i}}_{\geq 2} \geq n + \binom{n}{2} \cdot 2 = n^2.$$

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Příklad 2.2:

Dokažte, že pro trojici kladných čísel  $a, b, c$ , platí nerovnost

$$(a + b)(a + c)(b + c) \geq 8abc.$$

Kdy nastane rovnost?

Řešení: Podle (GA) nerovnosti je  $a + b \geq 2\sqrt{ab}$ , odtud plyne  $(a + b)(a + c)(b + c) \geq 2\sqrt{ab}2\sqrt{ac}2\sqrt{bc} = 8abc$ , což jsem měli dokázat. Rovnost nastane pouze v případě, kdy  $a = b = c$ .

Příklad 2.3: (17.ročník MO kat. A)

Dokažte, že pro trojici nezáporných čísel  $a, b, c$ , platí nerovnost

$$a(a - \sqrt{bc}) + b(b - \sqrt{ac}) + c(c - \sqrt{ab}) \geq 0.$$

Řešení: Podle (GA) nerovnosti je  $\sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2}$ , tudíž  $a(a - \sqrt{bc}) + b(b - \sqrt{ac}) + c(c - \sqrt{ab}) \geq a(a - \frac{b+c}{2}) + b(b - \frac{a+c}{2}) + c(c - \frac{a+b}{2}) = \frac{1}{2}((a-b)^2 + (b-c)^2 + (a-c)^2) \geq 0$ .

Příklad 2.4:

Dokažte, že pro libovolné přirozené číslo  $n$ , platí nerovnost  $n! \leq \left(\frac{n+1}{2}\right)^n$ .

Řešení: Platí  $1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$ , pak  $\left(\frac{n+1}{2}\right)^n = \left(\frac{1+2+\dots+n}{n}\right)^n \stackrel{(GA)}{\geq} n!$ .

Poznámka: Lze to dokázat i matematickou indukcí a binomickou větou.

Příklad 2.5: (NewYork 75)

Dokažte, že pro dvě libovolná různá kladná čísla  $a, b$  platí nerovnosti

$$\sqrt{ab} < \frac{(a-b)^2}{8\left(\frac{a+b}{2} - \sqrt{ab}\right)} < \frac{a+b}{2}.$$

Řešení: Označíme  $A = \frac{a+b}{2}$  a  $G = \sqrt{ab}$ , pak  $\frac{(a-b)^2}{8\left(\frac{a+b}{2} - \sqrt{ab}\right)} = \frac{(a-b)^2}{8(A-G)} = \frac{(a+b)^2 - 4ab}{8(A-G)} = \frac{4A^2 - 4G^2}{8(A-G)} = \frac{A+G}{2}$  a zřejmě  $G < \frac{A+G}{2} < A$ .

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Příklad 2.6: (Jugoslávie 75)

Dokažte, že pro tři libovolná čísla  $a, b, c$  větší než 1 platí nerovnost

$$2\left(\frac{\log_b a}{a+b} + \frac{\log_c b}{b+c} + \frac{\log_a c}{c+a}\right) \geq \frac{9}{a+b+c}.$$

Řešení: Platí odhady  $2\left(\frac{\log_b a}{a+b} + \frac{\log_c b}{b+c} + \frac{\log_a c}{c+a}\right) \stackrel{(GA)}{\geq} 6\sqrt[3]{\frac{\log_b a \log_c b \log_a c}{(a+b)(b+c)(c+a)}} = \frac{6}{\sqrt[3]{(a+b)(b+c)(c+a)}} \stackrel{(GA)}{\geq} \frac{18}{(a+b)+(b+c)+(c+a)}$ .

Příklad 2.7: (Jugoslávie 1976)

Nechť součin třech čísel se rovná jedné a jejich součet je větší než součet jejich převrácených hodnot. Dokažte, že pak právě jedno z těchto čísel je větší než jedna.

Řešení: Platí  $abc = 1$  a  $a + b + c > \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$ . Potom  $a + b + c > \frac{bc+ac+ab}{abc} \stackrel{abc=1}{\Rightarrow} a + b + c - (bc + ac + ab) + abc - 1 > 0 \Rightarrow a - 1 + b(1 - a) + bc(a - 1) + c(1 - a) > 0 \Rightarrow (a - 1)(1 - b + bc - c) \Rightarrow (a - 1)(b - 1)(c - 1) > 0$ . Odtud již plyne požadované tvrzení.

Příklad 2.8: (Bulharsko 1984)

Dokažte, že pro všechna  $m, n \in \mathbb{N}$  a všechna  $x_i, y_i \in [0, 1]$ , splňující  $x_i + y_i = 1, i = 1, \dots, n$ , platí:

$$(1 - x_1 \cdots x_n)^m + (1 - y_1^m) \cdots (1 - y_n^m) \geq 1.$$

Řešení: Důkaz povedeme pomocí Matematické indukce ve dvou krocích. Nejdříve pro  $n$  (s pevným  $m$ ) a pak pro  $m$ .

1. První krok, pro  $n = 1, m \in \mathbb{N}$  nerovnost

$$(1 - x_1)^m + (1 - y_1^m) = y_1^m + (1 - y_1^m) \geq 1$$

platí.

V druhém kroce Matematické indukce předpokládáme, že platí

$$(1 - x_1 \cdots x_{n-1})^m + (1 - y_1^m) \cdots (1 - y_{n-1}^m) \geq 1$$

a pro levou stranu dokazované nerovnosti dostaneme odhad

$$(1 - x_1 \cdots x_n)^m + (1 - y_1^m) \cdots (1 - y_n^m) \geq (1 - x_1 \cdots x_{n-1}(1 - y_n))^m + (1 - (1 - x_1 \cdots x_{n-1})^m)(1 - y_n^m).$$



## INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Pro jednoduchost označíme  $a = 1 - x_1 \cdots x_{n-1}$  a  $b = y_n$ , pak chceme dokázat pro každé  $m \in \mathbb{N}$  platnost nerovnosti

$$(a + (1 - a)b)^m + (1 - a^m)(1 - b^m) \geq 1.$$

2. Opět v prním kroce MI pro  $m = 1$  nerovnost

$$(a + (1 - a)b) + (1 - a)(1 - b) \geq 1$$

zřejmě platí.

V druhém kroce předpokládáme platnost nerovnosti pro  $m - 1$

$$(a + (1 - a)b)^{m-1} - a^{m-1} - b^{m-1} + a^{m-1}b^{m-1} \geq 0$$

a můžeme odhadnout

$$\begin{aligned} (a + (1 - a)b)^m + (1 - a^m)(1 - b^m) &= (a + b - ab)^{m-1}(a + b - ab) - a^m - b^m + a^m b^m \stackrel{MI}{\geq} \\ &= (a^{m-1} + b^{m-1} - a^{m-1}b^{m-1})(a + b - ab) - a^m - b^m + a^m b^m = \\ &= a^m + ab^{m-1} - a^m b^{m-1} + ba^{m-1} + b^m - a^{m-1}b^m - a^m b - ab^m + a^m b^m - a^m - b^m + a^m b^m = \\ &= a(b^{m-1} - b^m) - a^m(b^{m-1} - b^m) + b(a^{m-1} - a^m) - b^m(a^{m-1} - a^m) = \\ &= (a - a^m)(b^{m-1} - b^m) + (b - b^m)(a^{m-1} - a^m), \end{aligned}$$

což jsme měli dokázat.

### 2.1 Bernoulliho nerovnost

Máme dokázat, že  $\forall n \in \mathbb{N} \forall x \in \mathbb{R}, x \geq -2$  platí:

$$(1 + x)^n \geq 1 + nx.$$

1. Pro  $n = 1$  nastane rovnost  $1 + x = 1 + x$ .
2. Ukážeme, že platí:  $(1+x)^{n+1} \geq 1+(n+1)x$ . Upravíme uvedenou nerovnost a dostaneme

$$\begin{aligned} (1+x)^n(1+x) &\geq 1+nx+x, \\ (1+x)^n + (1+x)^n x &\geq 1+nx+x. \end{aligned}$$

Podle indukčního předpokladu je  $(1+x)^n \geq 1+nx$  a stačí tedy dokázat, že

$$(1+x)^n x \geq x.$$

Pro  $x \geq 0$  nerovnost zřejmě platí. Pokud  $x < 0$  danou nerovnost vydělíme  $x$  a dostaneme  $(1+x)^n \leq 1$ . Tato nerovnost platí pro  $-2 \leq x < 0$ . Což jsme měli dokázat.

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Poznámka: Důkaz nerovnosti  $(1+x)^n \geq 1+nx$  pro  $x \geq -1$  podal švýcarský matematik Jacob I. Bernoulli (1654-1705). Její další zobecnění následuje.

**Věta 2.3:** (Bernoulliho nerovnost)

Nechť  $x > -1$ ,  $x \neq 0$ , pak

$$\begin{aligned} (1+x)^\alpha &< 1+\alpha x, & \text{pro } 0 < \alpha < 1 \\ (1+x)^\alpha &> 1+\alpha x, & \text{pro } \alpha \notin [0, 1] \end{aligned} \quad (\text{BN})$$

Příklad 2.9: (Kanada 1982)

Dokažte, že pro  $x > 0$ ,  $x \neq 1$ ,  $a < 1$  platí  $\frac{1-x^a}{1-x} < (1+x)^{a-1}$ .

Řešení: Nejprve budeme předpokládat, že  $x \in (0, 1)$ , potom  $(1+x)^{a-1} - \frac{1-x^a}{1-x} > 0 \Leftrightarrow (1-x)(1+x)^{a-1} - (1-x^a) > 0$ .

Nyní využijeme Bernoulliho nerovnost:  $(1-x)(1+x)^{a-1} - (1-x^a) \stackrel{(\text{BN})}{>} (1-x)(1+(a-1)x) - 1 + x^a = 1 + (a-1)x - x - (a-1)x^2 - 1 + x^a = (a-1)(x-x^2) + x(x^{a-1}-1) = (a-1)(x-x^2) + x((1-(x-1))^{a-1}-1) \stackrel{(\text{BN})}{>} (a-1)(x-x^2) + x(1+(a-1)(x-1)-1) = 0$ .

Pro  $x > 1$  položíme  $t = \frac{1}{x}$ , pak  $t \in (0, 1)$  a využijeme dokázanou nerovnost:

$$\frac{1-x^a}{1-x} = \frac{1-\left(\frac{1}{t}\right)^a}{1-\frac{1}{t}} = t^{1-a} \frac{t^a-1}{t-1} < t^{1-a}(1+t)^{a-1} = \left(1+\frac{1}{t}\right)^{a-1} = (1+x)^{a-1}.$$

Příklad 2.10: (SSSR 1982)

Dokažte, že pro  $1 \geq x_1 \geq x_2 \geq \dots \geq x_n \geq \dots > 0$ ,  $a \leq 1$  platí

$$(1+x_1+x_2+\dots+x_n)^a \leq 1+1^{a-1}x_1^a+2^{a-1}x_2^a+\dots+n^{a-1}x_n^a.$$

Řešení: K důkazu použijeme matematickou indukci.

Pro  $a < 0$  zřejmě  $(1+x_1+x_2+\dots+x_n)^a \leq 1$ , tedy platí i naše tvrzení.

Pro  $n = 1$  ( $x_1 \in (0, 1)$ ), pak pro  $a \in [0, 1]$  platí  $(1+x_1)^a \leq 1+x_1 \leq 1+x_1^a$ .

V druhém kroku chceme dokázat, že  $(1+x_1+x_2+\dots+x_n+x_{n+1})^a \leq 1+1^{a-1}x_1^a+2^{a-1}x_2^a+\dots+n^{a-1}x_n^a+(n+1)^{a-1}x_{n+1}^a$ .

Odhadneme  $(1+x_1+\dots+x_n+x_{n+1})^a - (1+x_1+\dots+x_n)^a = (1+x_1+\dots+x_n)^a \left( \left(1+\frac{x_{n+1}}{1+x_1+\dots+x_n}\right)^a - 1 \right) \leq (1+x_1+\dots+x_n)^{a-1} \cdot x_{n+1} \leq (n+1)^{a-1}x_{n+1}^a$ .

Díky indukčnímu předpokladu dostaneme

$$(1+x_1+x_2+\dots+x_n+x_{n+1})^a \leq (1+x_1+\dots+x_n)^a + (n+1)^{a-1}x_{n+1}^a \leq 1+1^{a-1}x_1^a+2^{a-1}x_2^a+\dots+n^{a-1}x_n^a+(n+1)^{a-1}x_{n+1}^a.$$



INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

## Závěr

Příklady použité v tomto textu se již vyskytly v některé národní či mezinárodní matematické olympiádě. Věřím, že budou dobrou přípravou našim talentovaným matematikům. Některá řešení jsou originální a nejsou přejatá z dostupné literatury. Přeji čtenářům, aby se jim dařilo nacházet ještě jednodušší a elegantnější řešení.

## Použitá literatura

Alois Kufner : Nerovnosti a odhady, Škola mladých matematiků(39), Nakladatelství Mladá Fronta, Praha 1975

František Veselý: O nerovnostech a nerovnicích, Škola mladých matematiků(48), Nakladatelství Mladá Fronta, Praha 1982

Konjagin, Tonojan, Šarigin, a jiní: Zarubežnye matematičeskie olimpiady, M. Nauka, Hlavní redakce fiz.-mat. literatury, 1987

## Kontakt na autora

RNDr. Petr Tomiczek CSc.  
Západočeská univerzita v Plzni  
tomiczek@kma.zcu.cz

Středisko služeb školám, Plzeň, Částkova 78  
Podpora talentovaných žáků v Plzeňském kraji  
CZ.1.07/1.2.03/02.0001

Tento projekt je v letech 2012-16 financován z rozpočtu Plzeňského kraje

## POKUSY S ASTRONOMICKOU TÉMATIKOU

Marek ČESAL

### 1 Úvod

Astronomické pokusy slouží k jednoduché demonstraci něčeho tak nekonečného jako je vesmír. Pomocí jednoduchých a nenáročných experimentů, lze nasimulovat spoustu úkazů probíhajících ve vesmíru.

### 2 Popisy pokusů

Jednotlivé pokusy mají jasný chemikální nebo fyzikální základ, ale astronomickými činí pak spojení se stejnými jevy ve vesmíru. Proto je základem všech těchto pokusů i astronomické porovnání se skutečností. Doplněním pokusů o ukázky práce s tekutým dusíkem pak jen zvyšuje efektivitu ukázek.

#### 2.1 Simulace sopky

Nejenom na Zemi, ale i na jiných tělesech sluneční soustavy nalezneme sopečnou činnost, např. na Jupiterovo měsíci IO. Simulace lávy vytékající z jícnu se dá vytvořit pomocí malé lahvičky a modelu sopky z plastelíny (může se použít i sádra nebo dokonce obyčejná zem). Do lahvičky se nasype jedlá soda. Pak se ve víčku od PET láhve rozmíchá ocet s červeným potravinářským barvivem a nalije se do lahvičky. Při reakci směsi s jedlou sodou se vytvoří červená pěna, která začne vytékat a připomíná tekoucí lávu z jícnu sopky.

#### 2.2 Tornádo

Další z dynamických jevů pozorovatelný nejen na Zemi, ale i na jiných tělesech Sluneční soustavy je větrný vír – tornádo. Ve školních podmínkách se jeho tvar dá nasimulovat pomocí vodního víru v PET láhvi. K tomuto pokusu stačí 2 PET lahve spojené víčky, ve kterých je 0,5 cm otvor. Do jedné PET lahve se nalije voda a při otočení PET lahve začne voda proudit dolů a vzduch nahoru. Vzniklý vodní vír připomíná tornádo.

### 3 Závěr

Pokusy se dají použít ve školách při výuce astronomie, ale i v astronomických kroužcích pro přiblížení jednotlivých úkazů. Jejich použití při přednášce může daný problém více přiblížit. V dnešní moderní době není problém nalézt na internetu další návody na zajímavé pokusy a stačí pak je jen převést do astronomie spárováním s vhodným astronomickým úkazem.



INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

#### 4 Použitá literatura

MEISER T., Jednoduché experimenty demonstrující jevy a procesy ve vesmíru, bakalářská práce, 2008

MEISER T., Demonstrace astrofyzikálních procesů a jevů a jejich použití pro žáky základních škol, diplomová práce, 2010

KERROD, Robin, SPARRROW, Giles. Jak funguje Vesmír. Pavel Příhoda, Universum, 2005. 160 s. ISBN 80-242-1373-7.

MIKULÁŠEK, Zdeněk, MIŠ, Leon, RUMLER, Josef. Návod na použití vesmíru [online]. 2004 [cit. 2008-02-02].

Dostupné na internetu: <<http://navod.hvezdarna.cz/navod/konvekce.htm>>.

#### 5 Kontakt na autora

Marek Česal

ZpČAS

mcesal@volny.cz

## VZNIK FYZIKY, CHEMIE A BIOLOGIE ANEB VELKÝ TŘESK ZA VŠECHNO MŮŽE

Jiří GRYGAR

### 1 Úvod

Termín „Velký třesk“ je obrazný, protože ho neumíme vědecky popsat. Fyzika fakticky začíná až v tzv. Planckově čase, tj.  $+10^{-43}$  s po Velkém třesku. Vesmír se počíná vyvíjet z velmi horkého a hustého stavu, v němž panuje nejvyšší matematická souměrnost – supersymetrie. Ta se však rychle narušuje vinou rozpínání vesmíru a vzniku nestejného množství hmoty a antihmoty. V prvním zlomcích první sekundy po velkém třesku dochází k narušování souměrnosti, jež vede k odštěpení gravitace jako první samostatné síly, následuje odštěpení silné jaderné a posléze slabé jaderné interakce, takže naposledy se osamostatní elektromagnetická interakce. Souběžně se původní superčástice rozpadají na kvarky a leptony a posléze též na hadrony a mezony. Jednotlivé interakce se uskutečňují pomocí výměnných částic, pro gravitaci jsou to gravitony, pro silnou jadernou interakci gluony, pro slabou jadernou interakci bosony a pro elektromagnetickou interakci fotony.

### 2 První tři minuty až první milion let po Velkém třesku

Většina zásadních fyzikálních událostí ve vesmíru se odehrála během prvních tří minut po Velkém třesku. Na konci tohoto intervalu vznikají jádra vodíku a hélia v hmotnostním poměru 3:1. V čase 380 tisíc let se odděluje vývoj zářivé složky vesmíru od složky částicové. Zářivá složka je zprvu velmi horká, ale při zmíněném oddělení má Planckovu teplotu již jen

Středisko služeb školám, Plzeň, Částkova 78  
Podpora talentovaných žáků v Plzeňském kraji  
CZ.1.07/1.2.03/02.0001

Tento projekt je v letech 2012-16 financován z rozpočtu Plzeňského kraje



## INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

3 kK, takže volné elektrony se mohou spojovat s kladně nabitými jádry vodíku a hélia a vesmír do té doby neprůhledný pro elektromagnetické záření se stane průhledným a upadne do šera.

### 3 Tři pokolení hvězd

Chladnoucí vesmír dovolí atomům vodíku a helia, aby se začaly shlukovat do větších a hmotnějších struktur. Nejpozději za 200 milionů let od Velkého třesku tak vznikají hvězdy I. generace, které jsou 100krát až 1 000krát hmotnější než Slunce a v jejich nitrech začne probíhat termonukleární reakce přeměny vodíku na helium při teplotě nad 12 MK. Tyto hvězdy však velmi rychle svůj vodík spotřebují a mají dvě možnosti: zhroutit se na černé díry, anebo vybuchnout jako supernovy a svůj materiál rozhodit do kosmického prostoru. Série termonukleárních reakcí při rostoucí teplotě v nitru hvězdy vede ke vzniku jader chemických prvků počínaje uhlíkem a konče železem. Z tohoto zašpiněného materiálu mohou pak vznikat hvězdy II. generace, které mají nižší hmotnost srovnatelnou s hmotností Slunce, a následkem toho jejich termonukleární vývoj probíhá pomaleji. I tyto hvězdy však nakonec vybuchují jako supernovy a dokáží tak obohatit vesmír vyšším zastoupením těžších chemických prvků až po drahé kovy, olovo, thorium a uran. Z tohoto materiálu vznikají hvězdy III. generace, mezi nimi také naše Slunce

### 4 Vznik chemie

Jakmile se ve vesmíru objevil uhlík a hvězdy rozprášily svůj vnitřek do chladných oblastí vesmíru, mohla vzniknout nejprve anorganická a posléze i organická chemie díky slučování atomů chemickými vazbami. Tak vznikala obří molekulová mračna s teplotami jen desítky až stovka kelvinů, rozměry stovek světelných let a hmotnostmi milionů Sluncí. Vinou různých gravitačních poruch se některé chuchvalce molekulových mračen počaly smršťovat a to nakonec vedlo ke vzniku rotujících plochých disků s definovanou osou rotace. Z centrální části disku pak vznikaly zárodky dalšího pokolení hvězd a na periferii se z menších chuchvalců vytvářely planety, planety a jádra komet. Tak vznikla i naše Sluneční soustava před 4,6 mld. let.

### 5 Vznik biologie

Zatím nemáme žádné důkazy o mimozemském životě. Můžeme se opírat jenom o poznatky, jak se rozvíjel život na Zemi. Nejstarší jednobuněčné organismy na Zemi jsou doloženy ze zkamenělin starých asi 3,5 mld. let. První život zřejmě vznikl na mořském dně a na souši se mohl odvážit až po dostatečné ochraně, kterou před ultrafialovým zářením Slunce poskytuje tříatomová molekula kyslíku (ozon). To se stalo teprve před necelou miliardou let. Kromě původní domény archea přibyly bakterie a nakonec eukaryota (rostliny a živočichové). Soudobá biologie studuje projevy života na Zemi v širokém rozsahu fyzikálním a chemických podmínek. Život se dokáže přizpůsobit rozpětí teplot tekuté vody, ale nízkých i vysokých tlaků, kyselému nebo zásaditému prostředí a dokonce i radioaktivitě. Život na Zemi se dokázal vzpamatovat z pěti velkých katastrof za poslední půl miliardu roků a bude se na Zemi rozvíjet ještě další miliardu let.

Středisko služeb školám, Plzeň, Částkova 78  
Podpora talentovaných žáků v Plzeňském kraji  
CZ.1.07/1.2.03/02.0001

Tento projekt je v letech 2012-16 financován z rozpočtu Plzeňského kraje





INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

## 6 Závěr

Soudobá astronomie objevuje tisíce exoplanet u cizích hvězd, které jsou často dosti podobné Zemi svými rozměry, hmotností, výskytem atmosféry atd. Přesto nejsme schopni na dálku zjistit, zda se tam život nachází, ať už v primitivní jednobuněčné formě, nebo dokonce jako technicky pokročilá cizí civilizace. Argumenty pro častý výskyt inteligentního života ve vesmíru však kritizuje Fermiho paradox: navzdory možnosti, že inteligentní život ve vesmíru vzniká po určité době evoluce na planetách zákonitě, je v rozporu se skutečností, že Zemi dosud mimozemšťané nenavštívili, ačkoliv mnoho hvězd a tudíž i planetárních soustav je daleko starších než naše Sluneční soustava, takže pro tamější technicky daleko zdatnější civilizace by mělo být hračkou nás navštívit, kolonizovat nebo třeba sníst.

## 7 Kontakt na autora

RNDr. Jiří Grygar, CSc.  
Fyzikální ústav AV ČR  
grygar@fzu.cz

# CO UKAZUJE ASTROLÁB PRAŽSKÉHO ORLOJE

Lumír HONZÍK

## 1 Úvod

Pražský staroměstský orloj patří k nejznámějším orlojům na světě. Stal se turisticky hojně navštěvovanou významnou kulturní památkou v historickém centru Prahy. Je nedílnou součástí Staroměstské radnice v Praze.

Orloj je umístěn na jižní straně věže radnice. Věž je významnou technickou a uměleckou gotickou památkou. Podoba věže i orloje se postupně měnila. Historicky je orloj poprvé doložen v listině z 9. října 1410. Patrně se jedná o nejlépe zachovaný středověký orloj vůbec. K nejstarším částem orloje patří mechanický hodinový stroj a astronomický číselník z roku 1410. Stroj pravděpodobně vytvořil hodinář Mikuláš z Kadaně podle návrhu astronoma Jana Šindela. Mistr Hanuš pouze orloj r. 1490 opravil.

## 2 Pověst o orloji

Nejznámější pověst o pražském orloji zvěčnil Alois Jirásek v publikaci Staré pověsti české (1894). Nutno podotknout, že Jirásek A. Jirásek čerpal ze starších zdrojů a také z pramenů méně známého historika a spisovatele Josefa Svátka (1835 - 1897). Tyto podněty převáděl s fabulací jemu vlastní do rozsáhlých epických útvarů, takže v podstatě fabuloval. K orloji se ale váže pověstí více.

Středisko služeb školám, Plzeň, Částkova 78  
Podpora talentovaných žáků v Plzeňském kraji  
CZ.1.07/1.2.03/02.0001

Tento projekt je v letech 2012-16 financován z rozpočtu Plzeňského kraje

### 3 Osobnosti

#### 3.1 Jan Šindel (\* 1375 +1456)

Jan Ondřejův z Hradce Králové, zvaný Šindel byl autorem návrhu funkcí pražského orloje (matematického modelu). Byl matematikem, astronomem a profesorem na pražské univerzitě. Ve své době patřil mezi přední evropské učence.

#### 3.2 Mikuláš z Kadaně (\* asi 1350 + 1419)

Šindelův návrh realizoval hodinář Mikuláš z Kadaně. O jeho životě mnoho nevíme. V dobových materiálech je přímých zpráv o něm jen velmi málo.

#### 3.3 Mistr Hanuš

Předlohou pro postavu mistra Hanuše se pravděpodobně stal hodinář Jan Růže z Jilské ulice v Praze. Ten dostal roku 1490 od pražských konšelů za úkol orloj opravit. Orloj byl po husitských válkách, kdy nebyl na jeho údržbu čas ve velmi špatném stavu. Hodinář orloj opravil a navíc přidal i pohyblivou figuru kostlivce. Právě tehdy zřejmě začaly kolem stroje vznikat mezi prostým lidem strašidelné pověsti. Navíc hrůzy husitské revoluce vymazaly z historické paměti mnohé události, které jí předcházely, a tak se zapomnělo i na původní autory orloje. Jan Růže byl pak proto nadlouho považován za stavitele stroje.

### 4 Významné opravy orloje

- 1552 – 1560 Větší oprava a zdokonalení orloje. Jan Táborský z Klokotské hory. Orloj poté zanedbáván a poškozen.
- 1613 Opraven hodinářem Kryštofem Švarcpachem. Po opravě šel stále hůř, až došlo k jeho úplnému zastavení.
- 1618 – 1648 Drobné opravy během 30 - leté války. V chodu jen několik týdnů.
- V 17. stol. osazen figurkami apoštolů od sochaře a řezbáře Eduarda Wesselého.
- 1787 Nebyly finance na opravu, uvažovalo se o prodeji do starého železa.
- 1787 Hodinář Jan Landesberger opravil mechanickou část hodin astronomický kalendář a orloj. Bez opravy skoro celé další století
- 1861 Se zastavily hodiny. Uvažovalo se podruhé o prodeji, nebylo 4000 zlatých na jeho opravu. Uspořádána veřejná sbírka.
- 1864 Požárem zničeny figurky apoštolů od sochaře a řezbáře Eduarda Wesselého. Později nahrazeny novými figurkami od českého sochaře, řezbáře, restaurátora a loutkaře Vojtěcha Suchardy (6. 1. 1884 – 31. 10. 1968).
- 1865 Opravena mechanická část orloje v továrně V. Daňka, hodinář L. Heinz.
- 1865 Orloj opatřen kalendářní deskou od českého malíře, grafika, ilustrátora a představitele českého romantismu Josefa Mánese (12. 5. 1820 – 9. 12. 1871)
- 18. 8. 1866 Orloj slavnostně odhalen.
- 14. 9. 1866 Definitivně spuštěn prakticky v dnešní podobě
- 8. 5. 1945 Silně poškozen (téměř zničen) během Pražského květnového povstání
- 1945 – 1948 Celková oprava a rekonstrukce.

## INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

1. 7. 1948 Orloj opět spuštěn. Měl nové sošky apoštolů od Vojtěcha Suchardy. Kopii kalendářní desky zhotovil Bohumil Číla. Originál (od Josefa Mánese) uložen v městském muzeu v Praze.

Od 2. sv. války se uskutečnilo několik oprav orloje a také řada restaurátorských prací.

### 5 Popis orloje

Pražský staroměstský orloj má tři hlavní části:

- Nejzajímavější je část astronomická (astroláb), ukazující polohy nejvýznamnějších nebeských těles (Slunce a Měsíce). Kolem astrolábu jsou umístěny statické i pohyblivé figurky.
- Pod ní je kalendářové kolo s malbami J. Mánese.
- Nejatraktivnější součástí orloje zůstává pohyblivé procesí dvanácti apoštolů, kteří se ukazují každou celou denní hodinu.

### 6 Popis soustrojí orloje

- Celý orloj byl původně poháněn jediným strojem, který obstarával všechny čtyři pohyby astronomického ciferníku.
- Od 16. století navíc hlavní stroj poháněl také pohyb kalendářní desky.
- Zřejmě v 17. století byl připojen i bicí stroj, který byl snesený z věže. Orloj byl také doplněn o samostatný otáčivý pohon měsíční koule.
- V r. 1866 byl nepřesný krok nahrazen samostatným chronometrem, který hlavní stroj řídí.
- Ve 20. stol. dostaly měsíční ručka a čtyřiadvacetník samostatné pohony.

#### 6.1 Sestava orloje

Stroj orloje se skládá z několika částí (strojů). Každá část (dílní stroj) má svoji funkci a ovládá jednotlivé části orloje. Soubor strojů tvořící jeden celek.

Orloj se skládá z těchto částí:

- Stroj hlavní (jící nebo také minutní stroj)
- Stroj ukazovací
- Stroj čtyřiadvacetníku
- Stroj bicí
- Stroj Měsíce
- Stroj pro pohyb apoštolů
- Stroj kalendářní
- Božkův chronometr

## INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

### 7 Figurální výzdoba

Na staroměstském orloji se vyskytuje několik soch, které mají různý význam. Kromě hlavních figurálních motivů je možné spatřit celou řadu různých drobných a poměrně málo nápadných figurek.

Nad deskou astrolábu mezi otevíracími okny s apoštoly je soška anděla. Instalována byla zřejmě již od počátku. Symbolizuje existenci Boha.

V levé horní řadě je vedle desky astrolábu dvojice pohyblivých soch. Představují Marnivce a Lakomce. Marnivec je pohyblivá socha, která si při pohybu si prohlíží vlastní tvář v zrcadle. Lakomec je pohyblivá postava vedle Marnivce. Potřásá měšcem a kývá holí.

V pravé horní řadě je vedle desky astrolábu dvojice pohyblivých soch. Představují Smrtku a Turka. Smrtka je pohyblivá socha, která tahá za provaz zvonu a zároveň překlápí přesýpací hodiny. Vyjadřuje plynutí a odměřování času života. Postava Turka je považována za symbol rozkoše a neřesti.

V levé spodní řadě je vedle kalendářní desky dvojice pohyblivých soch. Představují Filozofa a Archanděla Michaela. Socha Filozofa představuje zkoumání světa. Socha Archanděla Michaela svírá v ruce kopí. Kopí původně ukazovalo na kalendářní desce aktuální údaj. Od Mánesova pootočení kalendária ale ukazuje na ukazatel v horní části ciferníku.

V pravé dolní řadě je vedle kalendářní desky dvojice pohyblivých soch. Představují Hvězdáře a Kronikáře. Postava Hvězdáře (hvězdopравce, astronoma) drží v ruce dalekohled. Symbolizuje zkoumání oblohy. Postava Kronikáře drží v rukou rozevřenou kroniku. Symbolizuje záznam událostí a dějin.

V horní části orloje nad otevíracími okny s apoštoly a nad soškou anděla se nachází pozlacená soška kohouta. Kohout mává křídly a zakokrhá na konci průvodu apoštolů.

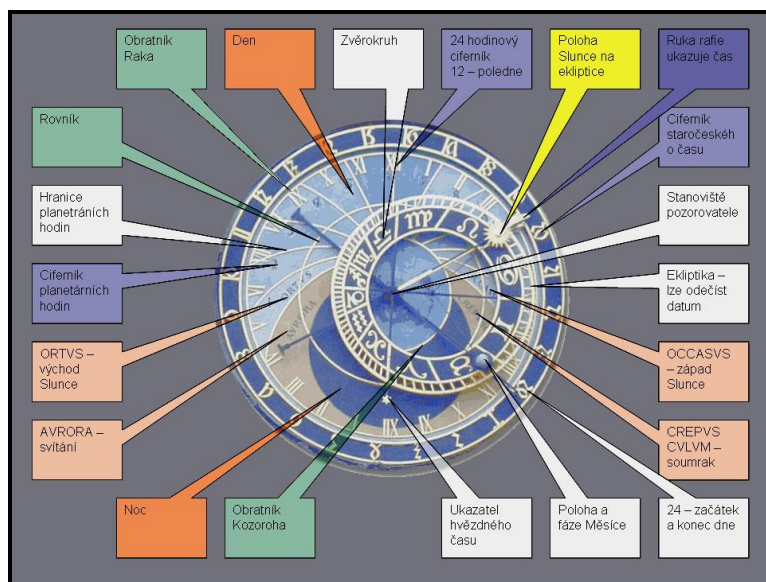
Asi pro většinu návštěvníků zůstává nejatraktivnější součástí orloje pohyblivé procesí dvanácti apoštolů. Ty se ukazují po otevření dvou okýnek nad astrolábem každou celou hodinu (od 9 do 23 hod.). Současní apoštolové nejsou původní. Dochovaly se dva přehledy podoby apoštolů. Jeden pocházející z doby před velkou opravou v roce 1865. Druhý po opravě v r. 1865 sochařem Eduardem Wesselým a poté osazenými na orloj (spolu s nově Wesselým zhotovenými figurami Matouše a Bartoloměje), kde byly až do požáru v roce 1945.

Sochy apoštolů se postupně objevují v levém a pravém okénku orloje při pohledu z náměstí v tomto pořadí dvojic: sv. Petr a sv. Matěj, sv. Jan a sv. Ondřej, sv. Filip a sv. Jakub, sv. Pavel a sv. Tomáš, sv. Šimon a sv. Tadeáš, sv. Bartoloměj a sv. Barnabáš.

### 8 Popis astronomické části orloje (astrolábu)

Astronomická část orloje představuje model Ptolemaiovvy zeměstředné soustavy, uspořádaný jako astroláb poháněný hodinovým strojem. Základem viditelné části orloje je nepohyblivý velký kruh o průměru 2,6 metru, který má pozadí rozdělené na jednotlivá barevná pole. Nad deskou astrolábu orloje se nachází několik rafičkových ukazatelů. Jedná se o pozlacenou ruku, ukazatel Slunce, ukazatel Měsíce, ukazatel hvězdného času.

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ



### 8.1 Orlojní Země

Umístění: uprostřed pevného ciferníku. Znázorňuje: střed vesmíru podle geocentrické Ptolemaiovy soustavy. V modrém středovém kruhu je vyobrazen glóbus, ale netradičně od severního pólu. Je to z důvodu určení místa pozorování oblohy, tedy středová hlavní osa ciferníku prochází právě Prahou.

### 8.2 Modré pole

Modré pole v horní části astrolábu představuje denní oblohu.

### 8.3 Tmavé pole

Tmavé pole ve spodní části astrolábu představuje noční oblohu.

### 8.4 Hnědé pole

Hnědé (hnědooranžové) pole představuje soumrakové pásy. V nich jsou dva nápisy. V levém poli představujícím pás svtání je nápis AVRORA (svítání). V pravém poli představujícím pás soumraku je nápis CREPVSCVLVM (soumrak).

Pozn.: V nápisech se písmeno V čte jako U [AURORA, CREPUSCULUM, ORTVS, OCCASVS].

### 8.5 Čáry obzoru

Mezi modrým polem denní oblohy a pásem soumraku se nachází čáry obzoru. Nad nimi jsou dva nápisy. U čáry východního obzoru je nápis ORTVS (východ). U čáry západního obzoru je nápis OCCASVS (západ).

## INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

### 8.6 Rovník a obratníky

V modrém poli se nachází ještě další čáry představující světový rovník a obratníky Raka a Kozoroha. Čára obratníku Raka, ke kterému se ukazatel Slunce přiblíží během letního slunovratu, je na vnější straně ciferníku. Naopak čára obratníku Kozoroha, ke kterému se ukazatel Slunce dostává během zimního slunovratu, je poblíž Země. Uprostřed mezi nimi se nachází čára světového rovníku, kterou ukazatel Slunce překračuje během jarní a podzimní rovnodennosti.

### 8.7 Ciferník s časem babylonským

Zlacené křivky v modrém poli s číselníkem s černými arabskými číslicemi jsou babylonské nebo také planetární hodiny. Tento čas se dělil od východu Slunce do jeho západu vždy na 12 hodin a po západu Slunce do jeho východu na dalších dvanáct hodin. Z toho vyplývá, že babylonské hodiny měly čas nerovnoměrný (např. délka hodiny v letním období byla jiná než v období zimním). Význam babylonských hodin nebyl jen časoměrný, ale sloužil zejména pro astrologii.

### 8.8 Ciferník s časem střeoevropským

Pevný ciferník ukazuje střeoevropský čas (SEČ) případně v minulosti ukazoval i čas střeoevropský letní (SELČ). Tento číselník má římské číslice v rozsahu 2x I. – XII. Číslice XII. V horní části ciferníku značí poledne, číslice XII. Ve spodní části značí půlnoc.

### 8.9 Ciferník s časem staročeským

Pohyblivý ciferník na vnější části astrolábu má kývavý pohyb. Ukazuje čas staročeský. Ten se počítal od západu Slunce, což byl začátek nového dne. Číselník má gotické číslice v rozsahu 0 – 24 hod.

### 8.10 Zvířetník (ekliptika)

Prstenec zvěrokruhu (ekliptiky) je umístěn otočně a excentricky ve střední části astrolábu. Má podobu mezikruží s 12 znaky zvířetníku. Zvířetník se otočí 1x kolem středu astronomické sféry (ciferníku) za 1 hvězdný den.

### 8.11 Pozlacená ruka

Zlatá ruka patří mezi hlavní ukazatele orloje. Celý kruh oběhne za 24 hodin. Zasahuje přes celý průměr ciferníku, až po kývavou stupnici čtyřřadvacetníku, kde ukazuje staročeský čas. Zároveň ukazuje občanský SEČ (SELČ), dříve také „německý“ čas, v němž den začíná o půlnoci a má  $2 \times 12$  hodin. Orloj má pouze hodinový ukazatel. Minutový není.

### 8.12 Orlojní Slunce

Ukazatel Slunce (zlaté sluníčko) je symbolizováno Sluncem ze zlaceného plechu. Slunce se posouvá po hlavní hodinové ručce táhlem, spojeným se zvířetníkem. Slunce oběhne ciferník jednou za 24 hodin a posouvá se po obvodu zvířetníku, který oběhne jednou do roka.



## INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Symbol Slunce ukazuje:

- denní pohyb, východ a západ Slunce (na čárách obzoru ORTVS a OCCASVS), jeho kulminaci, úsvit, soumrak a noc
- roční pohyb - výšku Slunce nad obzorem
- postavení Slunce ve zvěrokruhu
- přibližné kalendářní datum (dílek na obvodu zvířetníku odpovídá asi 5 dnům)
- na zakřivených zlatých liniích na modré ploše ciferníku lze odečítat babylonský čas.

### 8.13 Orlojní Měsíc

Orlojní Měsíc se pohybuje v blízkosti ekliptiky. Měsíc obíhá po ciferníku v tropickém cyklu 27 dní, 7 hodin, 43 minut a 5 sekund. Lze určit: východ, kulminaci a západ Měsíce, polohu Měsíce na obloze a polohu na zvířetníku. Orloj znázorňuje i fázi Měsíce.

### 8.14 Hvězdný čas

Ukazatel hvězdného času tvoří rafička se zlacenou hvězdou. Hvězdný čas se odečítá na pevném ciferníku z římských číslic.

## 9 Kalendárium – popis

Kalendářní deska od Josefa Mánesa z roku 1865 byla v roce 1880 nahrazena kopií od J. K. Lišky. Na desce jsou zobrazeny měsíce v roce, znamení zvěrokruhu, pražský znak a kalendářní údaje. Větší obrázky na obvodu desky představují dvanáct měsíců v roce. Jedná se o alegorii měsíců s venkovskou a zemědělskou tematikou. Menší obrázky představují dvanáct znamení zvěrokruhu. Uprostřed kalendária je obrázek se zlatými hradbami a věžemi. Je to středověký znak Prahy. Na okraji kruhu je pohyblivé církevní kalendárium, kde jsou zaznamenány veškeré významné svátky v roce. Obsahuje jména 365 světců a názvy pevných svátků. Jedná se o takzvaný cisioján, neboli veršovaný kalendář, který se v minulosti velmi hojně využíval.

## 10 Orloje v ČR a ve světě

Kromě Staroměstského orloje je na území ještě několik orlojů. Poměrně rozsáhlý se nachází v Olomouci. Malý orloj je v Litomyšli, další v Mnichově Hradišti. Novodobý orloj byl vybudován v bývalé trafostanici v Kryštofově údolí. S různými typy orlojů je možné se také setkat v ostatních státech.

## 11 Závěr

Pražský orloj je důkazem duševního i manuálního umění našich předků. Svědčí o jejich nápaditosti, představivosti a značných znalostech v oblasti astronomie a matematiky. Rovněž svědčí o manuální šikovnosti a zručnosti jeho tvůrců. Naštěstí v současné době je stav orloje snad nejlepší za dobu své existence. Nicméně je zapotřebí tuto významnou památku bedlivě chránit.



INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

## 12 Použitá literatura

Staroměstský orloj, Jakub Malina, Nakladatelství Eminent, Praha, ISBN 80-7281-202-5

Dostupné na internetu:

<http://www.orloj.eu/>

[http://cs.wikipedia.org/wiki/Starom%C4%9Bstsk%C3%BD\\_orloj](http://cs.wikipedia.org/wiki/Starom%C4%9Bstsk%C3%BD_orloj)

## 13 Kontakt na autora

Lumír Honzík

Hvězdárna v Rokycanech a Plzni, p. o., Pobočka Plzeň

E-mail: [lumir.honzik@seznam.cz](mailto:lumir.honzik@seznam.cz)

# ODHALENÁ TAJEMSTVÍ PLUTA

Lumír HONZÍK

## 1 Úvod

V roce 2015 po letu trvajícím více jak devět let se dostala kosmická sonda New Horizons do blízkosti kdysi deváté planety sluneční soustavy. Poprvé bylo možné prostřednictvím přístrojů na palubě této sondy si prohlédnout nejenom Pluto, ale i pět měsíců, které kolem tohoto tělesa obíhají.

## 2 Historie k objevu Pluta - vývoj představ o vesmíru

Představy o naší Zemi, její velikosti, tvaru, významu vesmíru se v průběhu času měnily. A nejen o Zemi, ale i o vesmíru a jeho fungování. Do určité míry se tyto představy vztahovaly zejména na Sluneční soustavu, speciálně její model, později se ale rozšířily mnohem dále. Příčinou názorových změn bylo postupné poznávání přírodních zákonů, dokonalejší pomůcky a přístroje od jednoduchých úhломěrných zařízení až k mnohem složitějším optickým dalekohledům, které se stále zdokonalovaly a dodnes zdokonalují.

Představ o modelu naší Sluneční soustavy bylo několik. Dominantními se stala geocentrická soustava (se Zemí ve středu), která přetrvala po několik století. Ta později byla vystřídána soustavou heliocentrickou (se Sluncem ve středu). Po určitou dobu existovaly i kombinované systémy, např. Tychonův. Ve Sluneční soustavě se měnil i počet těles a jejich význam. Planetě Zemi byl zpočátku přisuzován mnohem větší význam, než má ve skutečnosti. Slunce bylo vnímáno jako vládce dne (v některých civilizacích např. v Egyptě jako božstvo). Měsíc zase jako vládce noci. Bylo známo také pět tzv. bludných hvězd, které se vůči hvězdnému pozadí pohybovaly. Dnes víme, že se jednalo o planety: Merkur, Venuše, Mars, Jupiter a Saturn. Hranice naší Sluneční soustavy končila drahou planety Saturn.

Dne 13. 3. 1781 byla pomocí dalekohledu v Anglii objevena planeta Uran. Objevil ji anglický astronom William Herschel se svojí sestrou Karolínou. Hranice Sluneční soustavy se rozšířila. Titivův – Bodeův zákon naznačoval, že chybí těleso ve vzdálenosti přibližně 2,8 au,

Středisko služeb školám, Plzeň, Částkova 78  
Podpora talentovaných žáků v Plzeňském kraji  
CZ.1.07/1.2.03/02.0001

Tento projekt je v letech 2012-16 financován z rozpočtu Plzeňského kraje

## INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

tedy mezi dráhou planety Mars a Jupiter. Italský astronom Giuseppe Piazzi objevil 1. 1. 1801 v této oblasti těleso, které bylo považováno za chybějící planetu. Ve skutečnosti byla objevena první planetka, která dnes nese označení (1) Ceres. Později se podařilo v této oblasti najít i další tělesa, planetky: (2) Pallas (28. 3. 1802), (3) Juno (1. 9. 1804), (4) Vesta (29. 3. 1807), (5) Astrea (8. 12. 1845 a další. V současné době je v této oblasti tzv. Hlavní pás planetek, který čítá řádově stovky tisíc těles. Další planetu se podařilo objevit na základě poruch planety Uran. Dva matematici, ve Francii Urbain Jean Joseph Le Verrier a v Anglii John Couch Adams, nezávisle na sobě spočítali matematickou výpočetní metodou polohu nového tělesa. A toto těleso se skutečně podařilo astronomu Johanu Gottfriedu Gallemu dne 23. 9. 1846 objevit. Nově objevená planeta dostala název Neptun. Protože i Neptun vykazoval odchylky od předem vypočtené polohy, usoudilo se, že za Neptunem je ještě další planeta. A skutečně dne 21. 1. 1930 na Lowellově hvězdárně v Arizoně americký astronom Clyde Tombaugh objevil další těleso, známé dnes jako Pluto. Objev byl ale oznámen až 13. 3. 1930 (149 let od objevu Urana a 75 let od narození Percivala Lowella). Sluneční soustava od té doby měla 9 planet a byla mnohem větší, než se původně předpokládalo.

Pozn.: Název pro Pluto navrhla tehdy 11letá dívka Venetia Burney. Ta usoudila, že tento vzdálený chladný a temný svět vystihuje nejlépe římská varianta jména boha podsvětí.

### 3 Mytologie

#### 3.1 Pluto - Bůh podsvětí - Hádes (latinsky)

Jeho říše byla přesně taková, aby vyhovovala jeho temné povaze. Skrývala se v hlubinách země a neproklidil do ní žádný sluneční paprsek. Říši tohoto temného boha tvořila bezútěšná rovina porostlá bledými květy. Říši protékalo pět řek, které tvořily zároveň její hranice: vše zmrazující řeka Styx, řeka nářků Acherón, řeka zármutku Kókytos, ohnivá řeka Pyriflegothón, temná řeka Léthé.

#### 3.2 Charón (řecky Χάρων, lat. Charon)

Největší měsíc Pluta Charon je pojmenován po synu boha věčné tmy Ereba a bohyně noci Nykty. Charon je mytologický převozník mrtvých do podsvětí. Bývá znázorněn jako hrubý, vyzáblý a nevládný stařec nebo jako okřídlený démon s dvojitou sekýrou, s kladivem.

#### 3.3 Kerberos

Měsíc Kerberos je pojmenován po strašlivém trojhlavém psu, který hlídal vstupní bránu do říše podsvětí. Kerberos ochotně pouštěl lidi dovnitř, ale ven už nikoliv. Podle jiných představ střežil především podsvětí před vstupem živých. Kerberos bývá zpodobňován různě. Nejčastěji jako pes se třemi hlavami, dračím ohonem a na hlavách má místo srsti hady. Později se mu připisovalo i sto hlav, jedovatý dech a množství hadích hlav na šijích.

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

### 3.4 Styx

Malý satelit Pluta Styx je pojmenován podle hrůzné řeky Styx, která v podsvětí obtéká celou říši mrtvých. Řeka je nepřekročitelnou hranicí podsvětí. Řeka Styx v podsvětí tvoří západní hranici Tartaru. Vlévají se do ní řeky Acherón, Flegethón, Kókytos, Aornis a Léthé. Nemá-li mrtvý minci pro převozníka Charóna, musí navždy zůstat na břehu.

### 4 Pluto – parametry

Vzdálenost od Slunce:	39,24 au	
Délka dne:	6,5 dne	
Délka roku:	249,2 let	
Průměr:	2 274 km	
Gravitace:	0,69 m/s <sup>2</sup>	
Povrchová teplota:	- 228 °C	
Atmosféra:	řidká, dusík a metan	
Měsíce:	5 (P1 Charon, P2 Nix, P3 Hydra, P4 Kerberos, P5 Styx)	
Prstence:	nemá	
Hustota:	2 100 kg/m <sup>3</sup>	
Hmotnost:	1,530.1022 kg	
Parametry dráhy:	Sklon dráhy: 17,12°	Sklon osy: 118,5°

### 5 Přístrojová aparatura sondy New Horizons

Návrh průzkumné sondy a její konstrukce pochází z institutu Johns Hopkins University Applied Physics Laboratory (JHU-APL).

#### 5.1 Přístrojové vybavení

**LORRI** - Vysokorozlišující kamera LORRI (LOng Range Reconnaissance Imager) s dlouhým dosahem. Zařízení sloužící k pořízení detailních snímků povrchu těles a ke studiu geologických vlastností Pluta, Charónu a případných dalších těles.

**ALICE** - Ultrafialový zobrazovací spektrometr.

**PEPSSI** - Spektrometr energetických částic PEPSSI (Pluto Energetic Particle Spectrometer Science Investigation) je určen ke studiu hustoty, složení a původu energetických částic a plazmatu v atmosféře Pluta.

**Ralph** - Kamerový systém Ralph je zařízení určené k dokumentaci topografických prvků a spektrálních charakteristik povrchů a atmosfér navštívených objektů ve středním rozlišení.

Tvoří ho: 1. IF mapující spektrometr LEISA (Linear Etalon Imaging Spectral Array)  
2. MVIC (Multispectral Visible Imaging Camera), multispektrální zobrazovací kamery ve viditelném pásmu.

**REX** - Rádiová aparatura REX (Radio science EXperiment) tvoří doplňkové zařízení ke komunikačnímu systému. Dále je určena k zákrytovým experimentům.



## INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

**SWAP** - Detektor slunečního větru SWAP (Solar Wind At Pluto) je aparatura pro měření interakcí slunečního větru s atmosférou Pluta a ztráty atmosférických částic únikem do kosmického prostoru.

**SDC** - Detektor mikrometeoritů SDC. Aparatura je složena z desky detektoru namontované na boku sondy a malé skřínky elektroniky umístěné uvnitř tělesa. Přístroj měří hmotnost a rychlost prachových částic dopadajících na desku detektoru.

**Energetický zdroj** - Sonda získává el. energii pomocí termoelektrického generátoru RTG, v němž dochází k uvolňování tepla přirozeným rozpadem izotopu plutonia 238.

**Komunikace** - Sonda komunikuje pomocí parabolické antény.

### 6. Mise k Plutu

Mise k Plutu odstartovala 19. 1. 2006 z amerického kosmodromu na mysu Canaveral (stát Florida). Raketový nosič Atlas V udělil průzkumné sondě New Horizons (Nové horizonty) rychlost 16,26 km/s, což je zatím nejvyšší udělená rychlost. Let k Plutu trval přibližně 9,5 roku. Během letu sonda nejprve zachytila v červnu 2006 svými detekčními systémy asteroid označený 132524 APL. V září 2006 dokázala svými detekčními systémy zachytit na hvězdném pozadí i cíl své cesty – planetu Pluto. Během ledna 2007 se uskutečnilo palubními přístroji fotografování planety Jupiter a jejích největších satelitů. Důvodem bylo testování palubní aparatury. Zachyceny byly některé detaily atmosféry Jupitera, Velká rudá skvrna, prstenec planety apod. Byly pořízeny snímky měsíce Io včetně zachycení vulkanické aktivity, snímky ledové pokrývky Europy i portréty měsíců Ganymed a Callisto. Poté byla sonda převedena do stavu hibernace.

K částečné aktivaci sondy došlo již v srpnu 2014, k úplné aktivaci v prosinci 2014. Sonda začala během přiblížování snímkovat blížící se Pluto včetně jeho satelitů. S klesající vzdáleností se postupně zlepšovala rozlišovací schopnost. Nejbližší průlet sondy New Horizons nastal 14. července 2015. Sonda minula Pluto ve vzdálenosti pouhých asi 12 500 kilometrů. Během krátkého průletu pořídila řadu fotografií Pluta i jeho satelitů. Snímky byly nahrány na palubní aparaturu. Po průletu je sonda postupně začala odesílat k Zemi. Odeslání všech snímků bude trvat několik měsíců. Z došlých snímků byly získány informace o povrchových strukturách jak na Plutu, tak i na Charónu. Byly zachyceny krátery, oblasti planin s ledovým příkrovem, horské oblasti apod. Podařilo se zachytit neobvyklé terénní útvary, obtékající led kolem horských masívů, buněčnou strukturu povrchu apod. Na Plutu byla detekována namodralá atmosféra i činnost větru. Podařilo se změřit a určit tvar Pluta i jeho satelitů.

### 7 Závěr

Mise sondy New Horizons nekončí průletem okolo systému Pluta. Sonda pokračuje do nitra Kuiperova pásu. Cílem bude prozkoumat některý z vybraných objektů. Jedním z možných vybraných dalších cílů je těleso s označením KBO 2014 MU69.

Středisko služeb školám, Plzeň, Částkova 78  
Podpora talentovaných žáků v Plzeňském kraji  
CZ.1.07/1.2.03/02.0001

Tento projekt je v letech 2012-16 financován z rozpočtu Plzeňského kraje

## 8 Použitá literatura

Dostupné na internetu:

<http://spaceprobes.kosmo.cz/index.php?sekce=galerie&gid=33&page=1>

<http://www.astro.cz/clanky/slunecni-soustava/cilove-teleso-pro-kosmickou-sondu-new-horizons-objeveno.html>

[https://www.nasa.gov/mission\\_pages/newhorizons/main/index.html](https://www.nasa.gov/mission_pages/newhorizons/main/index.html)

[https://cs.wikipedia.org/wiki/New\\_Horizons](https://cs.wikipedia.org/wiki/New_Horizons)

## 9 Kontakt na autora

Lumír Honzík

Hvězdárna v Rokycanech a Plzni, p. o., Pobočka Plzeň

E-mail: [lumir.honzik@seznam.cz](mailto:lumir.honzik@seznam.cz)

# POLÁRNÍ ZÁŘE A PŘÍČINY JEJICH VZNIKU

Lumír HONZÍK

## 1 Úvod

Mysteriózní a tajemné polární záře fascinují lidi od pradávna. Fascinující divadlo odehrávající se čas od času na severské noční obloze od nepaměti podněcovalo lidskou fantazii. Polární záře hrály významnou roli v mytologii nejen severských národů, ale také civilizací Číny, či Japonska.

## 2 Polární záře – představy

Vikingové polární záři považovali za světla mrtvých panen. Norští Sámové (Laponci) měli polární záři za projev zlobících se bohů a měli k ní velký respekt. Když se záře objevila, snažili se před jejími paprsky schovat. Věřili, že je to projev rozezlených, mezi sebou bojujících bohů. Skotové zase polární záři považovali za nebeské tanečníky, nadpřirozené bytosti bojující na nebi o krásnou ženu. Severoameričtí domorodci ji přirovnávali k tančícím bohům. Grónští eskymáci spojovali záři se světem mrtvých. Pokud během záře světla blikala rychle (záře byla dynamická), věřili, že se mrtví přátelé právě snaží spojit s živými. Aljašští Inuité mysleli, že polární záře je duší zvířat, která lovili: tuleňů, lososů, jelenů nebo běluh.

## 3 Polární záře – mýty

Přestože je v současnosti fenomén polární záře vědecky podrobně objasněn, stále se objevují mylná vysvětlení. Lidé si například myslí, že se jedná o odrazy světla od severských ledovců. Polární záře také bývají spojovány s některými historickými událostmi.

Silné polární záře byly prý pozorovány:

- Před Velkou francouzskou revolucí na konci 18. století.
- Před bombardováním Pearl Harboru za 2. světové války.

Středisko služeb školám, Plzeň, Částkova 78  
Podpora talentovaných žáků v Plzeňském kraji  
CZ.1.07/1.2.03/02.0001

Tento projekt je v letech 2012-16 financován z rozpočtu Plzeňského kraje



## INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

- Vzácnou červenou polární září bylo možné pozorovat dokonce i v období tzv. sametové revoluce v tehdejší Československu v listopadu 1989.

### 4 Polární záře – příčiny

#### 4.1 Aktivita Slunce

Příčinou polárních září je aktivita Slunce. Ta se projevuje v různých vrstvách sluneční atmosféry rozličně. Např. ve spodní vrstvě, ve fotosféře, jsou pozorovatelné velké a rozvinuté skupiny slunečních skvrn. Ve střední vrstvě, v chromosféře, zase vznikají silné erupce a mohutné protuberance. Během silné sluneční aktivity dochází k silné erupční činnosti, ke vzniku erupčních protuberancí a k zesílení slunečního větru. Ten obsahuje shluk energetických částic protonů, elektronů a dalších energetických částic ve formě slunečního větru. Tyto energetické částice se pohybují značnou rychlostí kosmickým prostorem po předem dané trajektorii.

#### 4.2 Interakce s atmosférou Země

Jakmile energetické částice doputují do blízkosti Země, zemské magnetické pole většinu z nich odkloní. Magnetické pole Země je dipólové a vytváří ho rotující tekuté jádro tvořené převážně Fe a Ni. Severní mg. pól se nachází na jižní polokouli. Jižní magnetický pól zase na polokouli severní. Mg. póly se ale neshodují s póly rotačními a jejich poloha se časem mění. Nad oblastí mg. pólů jsou mg. silokřivky (silotrubic) otevřené a proto v těchto oblastech mohou energetické částice hlouběji vniknout do zemské atmosféry. K tomu dochází ve výškách 1000 km až 80 km nad zemským povrchem. Ve vysoké atmosféře se energetické částice ze Slunce sráží s molekulami atmosféry Země. Podle toho s jakými atmosférickými částicemi se srazí, se mění i barva polární záře. Může se srazit s molekulami kyslíku v nižších či vyšších vrstvách ionosféry nebo se srazit s molekulami dusíku.

### 5 Polární záře – pozorovatelné parametry

#### 5.1 Barva

Polární záře mají zpravidla barvu zelenou nebo červenou. V některých případech lze ale pozorovat i jiné barevné odstíny (modrou, fialovou, žlutou). Barva může být i kombinovaná (např. část červená a část zelená) a v průběhu jevu mohou být pozorovatelné i barevné změny.

#### 5.2 Intenzita

Polární záře mohou mít různou intenzitu. Od sotva viditelných (častější u nás) po velmi výrazné se zřetelnými barvami a strukturou.

#### 5.3 Tvary

Polární záře mohou mít různé tvary. Zpravidla je lze pozorovat ve tvaru: měnících se pruhů, závoje, vějíře či obřích "plamenů,.. Pokud se pozorovatel nachází přímo pod místem průniku částic do ionosféry, záře vytváří tvar jakési růžice či paprsky rozbíhající se ze středu všemi směry. Tento jev se nazývá korona a patří ke vzácnějším.

## 6 Polární záře – výskyt

Polární záře se vyskytují jak na severní (Aurora Borealis), tak i na jižní (Aurora Australis) polokouli v zeměpisných šířkách kolem 67°. Úkaz se může vyskytovat jak na výseku oblohy, tak i na její značné části. Rovněž výskyt není omezen ani časově. Ke srážkám slunečního větru s ionosférou dochází samozřejmě kdykoliv během dne a kdykoliv během roku. Sluneční erupce jsou nepravidelným, ale průběžným jevem. Za dne či letních světlých severských nocí ovšem září nespátříte. V některých případech je možné pozorovat polární záře i při částečně nebo úplně zatažené obloze. Může se jednat o řídkou cirrovou oblačnost nebo díry v mracích. Může dojít k různým zajímavým efektům. Polární záře jsou nejčastěji pozorovatelné v oblastech poblíž severního a jižního polárního kruhu (polární kruhy v zeměpisné šířce 66,5°).

## 7 Pokusy s polárními zářemi

Polární záře jsou natolik atraktivní záležitostí, že se našli jedinci, kteří se je pokusili polární září vytvořit uměle. Jedním z nich byl i Karl Selim Lemström (17. 11. 1838 – 2. 11. 1904), profesor fyziky na univerzitě v Helsinkách. Krom výzkumu polárních září (pořádal za nimi i expedice) se také zabýval zemským magnetismem, vlivy elektřiny na zemědělské plodiny, ochrany plodin před prudkými mrazy apod.

## 8 Předvídání polárních září

Pravděpodobnost, že vznikne a bude pozorovatelná polární záře, závisí na aktivitě Slunce. Aktivitu Slunce lze přímo pozorovat např. v podobě výskytu velkých a komplikovaných skupin slunečních skvrn ve fotosféře. Aktivita Slunce ale v průběhu času kolísá. Jsou období, kdy na Slunci skvrny jsou a naopak období, kdy je jich málo, nebo nejsou vůbec žádné. Aktivita Slunce se určuje z  $R_c$ , což je jeden z indexů sluneční aktivity. Slunce pracuje v tzv. 11letém cyklu. Aktivita Slunce se ale neprojevuje jen skvrnami ve fotosféře, ale i v ostatních vrstvách atmosféry. V chromosféře lze pozorovat i jiné její projevy: erupce a protuberance. Na vznik polárních září mají vliv nejvíce mimořádně silné erupční protuberance. O aktivitě Slunce se lze také dozvědět z různých internetových stránek věnovaných právě sluneční aktivitě a aktuálním předpovědím polárních září. Existují různá vyobrazení i s mapovým podkladem, ze kterého lze vyčíst, kde lze nejpravděpodobněji polární záře pozorovat na S a J hemisféře včetně barevné škály ukazující očekávanou intenzitu. Předpovědi polárních září lze sledovat v grafu – Kp Indexu, což je číselné vyjádření, které naznačuje, do jak nízkých zeměpisných šířek může polární záře zasáhnout. Další možnosti jsou data z družice ACE, která je určena kromě jiného i ke studiu vlastností slunečního větru. Existují i jednoduché indikátory naznačující energetický příkon, parametry slunečního větru, intenzitu geomagnetické bouře atd.

## 9 Výskyt polárních září ve Sluneční soustavě

Kromě planety Země byly pozorovány polární záře ještě na dalších dvou planetách. Na obou planetách se podobně jako na naší planetě vyskytují v obou polárních oblastech. Mechanismus polární záře na Jupiteru je však jiný. Pravděpodobně jí způsobuje jeden



## INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

z velkých satelitů - měsíc Io. Rovněž na Saturnu byly polární záře zaznamenány. Jejich mechanismus však ještě není zcela objasněn.

### 10 Závěr

Polární záře je neobyčejně zajímavý a dynamický úkaz. Fotografie a ani video sice lze pořídit, ale tato média většinou nedokáží úplně zachytit celkový průběh úkazu v atmosféře Země. Lze jen doporučit shlédnout tento úkaz na vlastní oči. Je ale zapotřebí vybrat vhodné pozorovací období se silnou sluneční aktivitou, dostatečně dlouhou nocí a stabilnějším počasím, což ale v praxi není jednoduché.

### 11 Použitá literatura

Dostupné na internetu:

<http://www.astro.cz/rady/ukazy/polar/>

<http://www.treking.cz/astronomie/polarni-zare.htm>

### 12 Kontakt na autora

Lumír Honzík

Hvězdárna v Rokycanech a Plzni, p. o., Pobočka Plzeň

E-mail: [lumir.honzik@seznam.cz](mailto:lumir.honzik@seznam.cz)

## PROČ LÉTÁME DO VESMÍRU

Lumír HONZÍK

### 1 Úvod

Od vypuštění (4. 10. 1957) prvního umělého kosmického tělesa, sovětského Sputniku 1 uplyne příští rok již 60 let. Zdálo by se, že většina lidí si význam kosmonautiky za tuto dlouhou dobu dostatečně uvědomuje. Bohužel se ale ukazuje, že dost velká část populace nechápe, proč se vlastně do kosmu létá.

### 2 Význam kosmonautiky

Lety kosmických raket a raketoplánů, vypouštění družic a sond do vesmíru nejsou samoúčelné. Ve svém počátku se jednalo o politickou, mocenskou (vojenskou a špionážní), vědeckou a technickou prestiž států. V současné době je kosmonautika využívána hlavně pro praktické účely a stala se i komerční záležitostí. Velkou roli hraje v oblasti astronomie pro poznávání blízkého i vzdáleného vesmíru, a to jak pomocí průzkumných sond, tak i přímý průzkum. Kosmonautika má nadále význam pro vojenské, zpravodajské a špionážní účely. Začala se ale prosazovat i v mnoha jiných oborech jako jsou telekomunikace, meteorologie, navigace, kartografie, vývoj a výroba nových materiálů, léků apod.

Středisko služeb školám, Plzeň, Částkova 78  
Podpora talentovaných žáků v Plzeňském kraji  
CZ.1.07/1.2.03/02.0001

Tento projekt je v letech 2012-16 financován z rozpočtu Plzeňského kraje

## INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

### 3 Počátky kosmonautiky – průzkum Země a Měsíce

Počátky raketové techniky tak, jak ji známe dnes, spadají do poválečného období, kdy se prováděly pokusy s ukořistěnými německými raketami typu A-4. V roce 1957 (4. 10.) byla vypuštěna v tehdejší SSSR první umělá družice Sputnik 1, která se stala zároveň družicí geofyzikální. Tím začala epocha průzkumu zprvu naší planety Země a později i Měsíce a dalších těles ve Sluneční soustavě. Měřeními byly získány první údaje o vyšších vrstvách atmosféry naší planety, první byť nedokonalé meteorologické snímky. Zkoumal se tvar Země, její gravitační a magnetické pole, vlastnosti jednotlivých atmosférických vrstev včetně ionosféry a Van Allenových radiačních pásů.

Dalším intenzivně zkoumaným tělesem se stal Měsíc a to zejména po vyhlášení cíle dosáhnout jeho povrchu. Byly uskutečněny pokusy o umístění umělé družice na jeho orbitu, následovali pokusy o tvrdá i měkká nepilotovaná přistání, a to jak ze strany SSSR, tak i USA. V rámci průzkumu jeho vlastností, mapování, výběru místa přistání lidské posádky obě velmoci uskutečnily řadu startů v nejrůznějších programech. V SSSR se jednalo o programy: Luna, Zond, v USA o programy: Ranger, Lunar Orbiter, Surveyor a další. Průzkum Měsíce vyvrcholil pilotovaným přistáním v rámci programu Apollo. SSSR zase vyslal v sedmdesátých letech minulého století dvě automatizovaná vozítka Lunochod 1 a Lunochod 2. Průzkum Měsíce však pokračuje i v současné době.

### 4 Průzkum vesmíru

#### 4.1 Průzkum těles Sluneční soustavy

Prakticky neustále probíhá průzkum jednotlivých těles ve Sluneční soustavě. Sondy zkoumají Slunce, jednotlivé planety včetně jejich přirozených satelitů, jednotlivé objekty meziplanetární hmoty (asteroidy, komety), připravuje se i průzkum transneptunických objektů.

##### 4.1.1 Průzkum Slunce

Prováděn pomocí výzkumných programů družic SOHO, Hinode, Solar Dynamics Observatory, družic Stereo apod. Monitorují se aktivní oblasti na Slunci v různých spektrálních oborech a jevy, které na Slunci vznikají (skvrny, erupce, protuberance a filamenty, granule apod.) Zkoumají se cykly sluneční aktivity, sluneční vítr, vlivy Slunce na planetu Zemi.

##### 4.1.2 Průzkum planet a jejich satelitů

Provádí se většinou z orbitální dráhy daného tělesa případně přistáním na tělese, případně vysazením robotického vozítka (Mars). Průzkumem se získávají a zpřesňují informace o jednotlivých tělesech, jejich atmosférách, magnetosférách, prstencích apod. Získává se i rozsáhlý kartografický materiál. Blízké planety (Venuše a Mars) byly zkoumány intenzivněji než planety vzdálené. Dlouhodobý průzkum byl realizován u planety Jupiter a zatím trvá u planety Saturn. Zcela specifický je dlouhodobý průzkum planety Země, který je prováděn hlavně pomocí kosmických orbitálních laboratoří.

## INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

### 4.1.3 Průzkum meziplanetární hmoty

Provádí se podobně jako u planet – tedy většinou z orbitální dráhy daného tělesa případně přistáním na tělese. Průzkumem se získávají a zpřesňují informace o asteroidech a kometách, případně meteorických rojů. Zvýšená pozornost je věnována zejména blízkozemním objektům. U těchto těles se zjišťují parametry jejich dráhy, chemické a mechanické vlastnosti, které mohou být důležité v případě nebezpečí kolize. Tato tělesa také mohou poskytnout informace o vzniku Sluneční soustavy.

### 4.1.4 Průzkum transneptunických objektů

V této oblasti je zatím kosmický průzkum v počátečním stádiu. Existují sice sondy, které jsou na hranici Sluneční soustavy (Pioneer 10 a 11, Voyager 1 a 2), nicméně tato oblast vyžaduje důkladnější průzkum. Zatím se uskutečnil průzkum trpasličí planety Pluto a jeho měsíců. Na další objekty za jeho dráhou si musíme počkat.

## 4.2 Průzkum vzdáleného vesmíru

Vzhledem ke vzdálenostem ve vesmíru není možné provádět přímý průzkum vzdáleného vesmíru kosmickými prostředky. Proto se umísťují na oběžnou dráhu kolem Země nebo např. do libračních bodů průzkumné sondy s výkonnými dalekohledy. Zřejmě nejznámějším vesmírným dalekohledem je HST (Hubblův kosmický dalekohled). Toto zařízení je umístěné mimo zemskou atmosféru, světelné i běžné prachové znečištění. Tento přístroj přinesl cenné informace o objektech, které se ve vzdáleném vesmíru nacházejí. HST pracuje v několika spektrálních oborech. V poslední době byly vypuštěny další specializované přístroje pracující např. v infračervené, rentgenové nebo ultrafialové oblasti spektra. Bylo také realizováno několik programů s cílem zmapovat vesmír a zpřesnit jeho strukturu.

## 5 Pozemské aplikace

Kosmická technika je však využívána i pro praktické účely. Existuje celá řada možných aplikací pro pozemské potřeby. V některých případech kosmonautika zasahuje i do odvětví, kde bychom ji nečekali.

### 5.1 Meteorologie

Na oběžné dráze kolem Země se pohybuje řada meteorologických družic, ty sledují nejen aktuální meteorologická data, ale i klimatologii. Tyto družice mohou vyhodnocovat i nebezpečné meteorologické jevy jako jsou např. cyklony (jejich pohyb, mohutnost). Naopak družice nejsou schopny účinně monitorovat náhlé krátkodobé meteorologické jevy, jako jsou tornáda. Mohou sledovat dlouhodobé i krátkodobé změny a to jak globálního, tak i lokálního charakteru. Mezi dlouhodobé změny patří např. monitoring globálního proudění v atmosféře i v oceánech (El Niño, La Niña), tání ledovců a vysychání vodních ploch. Krátkodobý monitoring se provádí např. u povodní, tsunami, písečných bouří, sopečné aktivity apod. Meteorologické sledovací družice mohou sloužit i jako varovné prostředky.

## INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

### 5.2 Monitoring ionosféry

Družice monitorují stav a vývoj ionosférické vrstvy, která zabraňuje nebezpečnému průniku záření z vesmíru (zejména od Slunce) směrem k zemskému povrchu.

### 5.3 Monitoring světelného znečištění

Z fotografií pořízených z kosmického prostoru bylo možné postupně zmapovat úroveň i negativní vývoj světelného znečištění. Tuto problematiku lze velmi dobře monitorovat z oběžné dráhy.

### 5.4 Telekomunikace

Velký význam má kosmonautika pro telekomunikační účely (televizní, radiové, telefonické, telemetrické a jiné přenosy). Existuje celá řada různých telekomunikačních družic sloužících pro nejrůznější účely. Některé z nich jsou umístěny na geostacionární dráze ve výšce přibližně 36 000 km. Díky telekomunikačním družicím se značně snížily pořizovací a přenosové náklady a přitom se zvýšila kvalita a přenosová rychlost.

### 5.5 Navigace

Další odvětví, kde v posledních letech došlo a ještě bude docházet k výrazným změnám. Existující americký systém (původně vojenský) družic GPS pojmenovaná NAVSTAR bude doplněn ruským satelitním navigačním systémem GLONAS a evropským systémem Galileo (bude mít sídlo v Praze). Zpočátku byly navigační systémy využívány např. v lodní a letecké dopravě. V současnosti se stávají běžným doplňkem v osobních automobilech. Postupně se zavádí i do nákladní automobilové a železniční dopravy (např. sledování pohybu auta, nákladu). Tyto systémy však mají velký význam i v oblasti vojenské techniky a pro geodety.

### 5.6 Kartografie

Kosmickou techniku používá i další odvětví - kartografie. Nejedná se o mapování jen vesmírných těles (planet, měsíců apod.), ale hlavně pozemské mapování. Ve spojení s přesnými navigačními přístroji se dosahuje přesnějších a efektivnějších výsledků.

### 5.7 Zpravodajské, špionážní a vojenské účely

Již v minulosti byla kosmonautika využívána pro, zpravodajské a špionážní účely. Tato zařízení např. mohla monitorovat pohyb a sílu protivníka. Vzhledem k výškám, ve kterých se vojenské družice pohybují, nebylo jednoduché jednak tato zařízení objevit a jednak proti nim účinně zasáhnout. Většina států totiž neměla pro zásah žádné prostředky. Tato situace je nyní komplikovanější, neboť již některé země mají k raketové technice přístup. Nicméně i tak zůstává řada států, pro něž je tato technika nedostupná. Vojenské družice však nemusí být pouze pasivní. Pokud ponесou zbraňový systém (např. laserový), mohou se stát potenciálně nebezpečnými.





## INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

### 5.8 Vývoj a výroba nových materiálů

Vzhledem ke specifickým podmínkám, které panují ve stavu beztláče lze v kosmickém prostoru vyvíjet a vyrábět zcela nové materiály, které mají naprosto jiné vlastnosti, než kdyby byly vyráběny na Zemi. Navíc i při vývoji a výrobě kosmické techniky bylo nutné se zabývat materiály, které mají unikátní vlastnosti. Ty pak našly uplatnění i pro potřeby běžného života.

### 5.9 Zdravotnictví

Posádky prochází náročnou přípravou a výcvikem. Během letu se pohybují v omezeném prostoru a navíc ve stavu beztláče. Může na ně působit ve větší míře kosmické záření, zažívají i stresové situace. To nutí efektivně řešit některé zdravotní problémy, které během letu mohou nastat. Naopak posádky mají určitá specifika, která se mohou promítnout do postupů např. u dlouhodobě ležících pacientů. Ve stavu beztláče lze také v kosmickém prostoru vyvíjet a vyrábět zcela nové typy léků.

### 5.10 Získávání elektrické energie

Kosmická zařízení musí řešit energetické problémy. Většina přístrojů potřebuje pro svůj chod elektřinu. Ta se v kosmickém prostoru nechá získat jen v omezené míře. Lze ji získat z chemických článků, z izotopových článků, nebo ze slunečních panelů. Je proto nutné na jedné straně se zaměřit na to, aby zdroje energie byly co nejvýkonnější, na druhé straně aby spotřeba byla co nejnižší. To pak lze aplikovat i v běžné výrobě na Zemi.

### 5.11 Hledání a těžba nerostných surovin

Pomocí družicového průzkumu lze vyhledávat ložiska nerostného bohatství. Existují metody, které umožňují z velké výšky určit výskyt některých ložisek. Podobnými metodami lze např. zjistit i lokality, kde bude výhodný rybolov.

## 6 Závěr

Aplikací v oblasti kosmonautiky existuje samozřejmě mnohem více. Do budoucna lze předpokládat, že počet aplikací bude dále narůstat a kosmonautika bude prostředkem k většímu využití kosmického prostoru.

## 7 Použitá literatura

Malá encyklopedie KOSMONAUTIKY, Petr Lála, Antonín Vítek, Mladá fronta Praha, 1982, ISBN 23-079-82

Rakety a kosmodromy, Bedřich Růžička, Lubomír Popelínský, Naše vojsko, 1986, ISBN 28-028-86

Vojenské rakety, Jiří Kroulík, Bedřich Růžička, Naše vojsko, 1985, ISBN 28-067-85

Člověk a vesmír (z ang. orig. Man In Space), Ilustrovaná historie kosmických letů, H. J. P. Arnold, C. Peebles, A. Wilson, Nakladatelství a vydavatelství CESTY, 1996, ISBN 80-7181-028-2

Středisko služeb školám, Plzeň, Částkova 78  
Podpora talentovaných žáků v Plzeňském kraji  
CZ.1.07/1.2.03/02.0001

Tento projekt je v letech 2012-16 financován z rozpočtu Plzeňského kraje



## INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Kosmické rakety dneška, Jan Kusák, Hvězdárna Valašské Meziříčí, 1998,

ISBN 80-902445-3-X

Z historie a současnosti kosmických raketoplánů, František Martínek, Hvězdárna Valašské Meziříčí, 1997, ISBN 80-902445-2-1

Příběh stanice MIR, Tomáš Příbyl, Brno 2001, ISBN 80-238-6789-X

Dostupné na internetu:

<http://www.lib.cas.cz/space.40/index.html>

[http://www.nasa.gov/mission\\_pages/shuttle/main/index.html](http://www.nasa.gov/mission_pages/shuttle/main/index.html)

### 8 Kontakt na autora

Lumír Honzík

Hvězdárna v Rokycanech a Plzni, p. o., Pobočka Plzeň

E-mail: [lumir.honzik@seznam.cz](mailto:lumir.honzik@seznam.cz)

## DALEKOHLED

Josef JÍRA

### 1 Úvod

Přednáška seznámila studenty s historií objevu dalekohledu, která ani v dnešní době není zcela jasná a přináší spíše řadu otázek, které čekají ještě na vyřešení. Zároveň byli studenti seznámeni s prvními velkými objevy za pomoci dalekohledu.

### 2 Vynález dalekohledu

Je to více než 400 let, co holandský brusič skel Hans Lippershey z Middelburgu předložil svůj patent na přístroj, který přibližoval vzdálené věci. Nebyl ale první, kdo si tohoto jevu všiml. Již staří Peršané a jiné civilizace především z arabského poloostrova experimentovali s přibližováním skel. Přesto je datum 2. října 1608 zapsáno v našich novodobých dějinách jako den, kdy byla podána patentová žádost, která popisovala vhodné uložení čoček v tubusu. Pozorovaný předmět byl tak větší, dalekohled ho „přibližoval“.

Náhle se o tento vynález strhl nebývalý zájem. Dokonce byla tato patentová žádost zpochybněna novou patentovou žádostí brusiče Jakoba Metiuse z Aalkmaru, který ji podal po čtrnácti dnech. Dalším mužem, který si dělal nárok na vynález dalekohledu, byl i Zacharias Janssen, který žil a pracoval ve stejném městě jako Hans Lippershey. Veřejnosti je však Janssen znám spíše jako vynálezce mikroskopu, o který se dělí se svým otcem. Rozhodnout, kdo byl skutečným vynálezcem dalekohledu, proto neumíme. Všichni tito pánové byli zručnými brusiči a celý svůj život experimentovali s optikou a je tedy dosti pravděpodobné, že se i oni dopracovali k funkčnímu dalekohledu. Rozhodnout to nedokázala ani patentová

Středisko služeb školám, Plzeň, Částkova 78  
Podpora talentovaných žáků v Plzeňském kraji  
CZ.1.07/1.2.03/02.0001

Tento projekt je v letech 2012-16 financován z rozpočtu Plzeňského kraje



## INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

komise, která nakonec na vynález dalekohledu neudělila žádná patentová práva Hansi Lippersheyovi ani brusiči Jakobu Metiusovi či Zachariasi Janssenovi. Hans Lippershey ale nemusel být příliš smutný, protože o jeho dalekohled, který sice zvětšoval pouze 3x, projevil velký zájem armádní námořnictvo, které díky tomu získalo převahu na bitevním poli.

### 2.1 První objevy

Do dějin astronomie se dalekohled zapsal již o rok později 1609 a to díky italskému učenici Galileo Galilei, který byl mezi prvními, kteří použili tento vynález při zkoumání vesmíru. Galileo Galilei si osvojil konstrukci dalekohledu, kterou následně zdokonalil natolik, že jeho „největší“ dalekohled dosáhl třidvaceti násobného zvětšení. S jeho pomocí pak Galileo pozoroval měsíční krátery a hory. Je také objevitelem čtyř největších jupiterových měsíců Io, Europa, Ganyméd a Kalisto, které jsou označovány podle objevitele jako Galileovské měsíce. Mezi další objevy patří pozorování fází Venuše, pozorování slunečních skvrn. Galileo

také objevil, že Mléčná dráha je složena z velkého množství slabých, okem nerozlišitelných hvězd a vytváří tak na obloze souvislý světlý pás. Na základě těchto objevů se přikláněl k myšlence Mikuláše Koperníka o heliocentrismu, kde ve středu této soustavy je Slunce, kolem kterého obíhají jednotlivé planety. Tento myšlenkový názor však katolická církev zavrhla a jeho stoupence pronásledovala. Galilei byl obviněn, že jeho teorie odporují bibli a byl udán římské inkvizici, se kterou měl do konce života velké problémy. Zemřel v roce 1642 v domácím vězení.

### 3 Závěr

O historii dalekohledu toho bylo napsáno hodně, přesto jeho prvního vynálezce s největší pravděpodobností znát nikdy nebudeme. To však historii promineme. Podstatné je, že se tímto velmi jednoduchým zařízením otevřely astronomii nevídané možnosti v poznávání vesmíru.

### 4 Použitá literatura

KLEČEK, J. Velká encyklopedie vesmíru. 1. vyd. Praha: Academia, 2002. 582 s. ISBN 80-200-0906-X.

WATERFIELD, R. L. A Hundred Years of Astronomy. 1. vyd. London, 1938. Duckwort, 3 Henrietta Street

### 5 Kontakt na autora

Mgr. Josef Jíra, DiS.

Západočeská pobočka České astronomické společnosti

josef.jira@seznam.cz

Středisko služeb školám, Plzeň, Částkova 78  
Podpora talentovaných žáků v Plzeňském kraji  
CZ.1.07/1.2.03/02.0001

Tento projekt je v letech 2012-16 financován z rozpočtu Plzeňského kraje

## ASTRONOMICKÝ KVÍZ

Ota KÉHAR

### 1 Úvod

V rámci příspěvku si účastníci mohli ověřit své znalosti z astronomie. U všech otázek následovalo podrobné zdůvodnění odpovědi. Účastníci například hledali odpovědi otázky: kolik známe souhvězdí? Kdy nastává astronomická noc? Existují severní sluneční hodiny? Čím je výjimečná Polárka? Jaký je rozdíl mezi večernicí a jitřenkou? Kolik měří astronomická jednotka?

### 2 Témata astronomického kvízu

Z počátku byly otázky velmi jednoduché, začínalo se např. dotazem, kterým směrem se slunce poprvé objeví nad obzorem? Samozřejmě, že správná odpověď zněla – východním. Mezi další, už o něco složitější otázky, patřilo: „Kolikrát slunce během roku vyjde přesně na východě a zapadne přesně na západě?“ Zde už nemusí být odpověď jednoznačná, záleží, jak chápeme slovo „přesně“. Za správnou odpověď lze považovat – dvakrát, při březnové (jarní) a zářijové (podzimní) rovnodennosti. V rámci kvízu jsme se dostali i na předpověď počasí, kde je pravidelně udávaná informace o západu a východu slunce, málokdo ovšem ví, co tento údaj znamená, pro jaké postavení slunečního kotouče jsou data počítána. Je totiž nutné započítat i nemalý vliv atmosférické refrakce, která nám způsobí, že se bílá část dne prodlouží až o 15 min. S nocí je spjata i informace o tzv. astronomické noci, který v našich zeměpisných šířkách nastává v červnu a částečně v červenci, kdy slunce neklesá více než 18 stupňů pod obzor.

Samostatným blokem byly hvězdy. Proč vlastně hvězdy září? Většinu z nás napadne hned odpověď: „Přece proto, že v nich probíhají termonukleární reakce!“ Ale co hnědí nebo bílí trpaslíci, to jsou také hvězdy a termonukleární reakci v nich již neprobíhají. Správná odpověď zní: „Hvězdy září, protože je jejich povrch zahřát na vysokou teplotu několika tisíc Kelvinů.“ Čím je výjimečná Severka? Řada lidí si myslí, že je to nejjasnější hvězda na noční obloze, nicméně Severka nebo správněji Polárka je významná pouze tím, že se v její blízkosti nachází místo, kam směřuje osa otáčení Země, takže severní světový pól. Řekli jsme si, že mezi pojmy Severka a Polárka není žádného rozdílu, jedná se o nejjasnější hvězdu v souhvězdí Malého medvěda. A co pojmy večernice a jitřenka? To je zase označení planety Venuše, podle toho, zda ji nacházíme na večerní nebo ranní obloze.

Závěrečná část se zabývala objekty ve sluneční soustavě. Začínalo se otázkou, ve které jsem se ptal, kolik procent hmotnosti sluneční soustavy představuje Slunce. Dal jsem k dispozici několik možných odpovědí a v případě nutnosti je možné uvést nápovědu, že nejhmotnější objekt ve sluneční soustavě má hmotnost  $10^{30}$  kg a druhý v pořadí má  $10^{27}$  kg.

Středisko služeb školám, Plzeň, Částkova 78  
Podpora talentovaných žáků v Plzeňském kraji  
CZ.1.07/1.2.03/02.0001

Tento projekt je v letech 2012-16 financován z rozpočtu Plzeňského kraje

## INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

I z těchto čísel se dá odvodit, že Slunce představuje 99,9 % hmotnosti celé sluneční soustavy. Zajímavý závěr přinese otázka, kde se ptáme, na které planetě je nejtepleji. Očekávatelné je, že by to měla být nejbližší planeta ke Slunce, ale ve skutečnosti je o 37 °C tepleji na Venuši, kde je průměrná teplota 464 °C, zatímco maximální teplota na Merkuru dosahuje „jen“ 427 °C. Neméně zajímavá může být i otázka na výčet planet, které mají prstence. Nikoho nepřekvapí, že planeta Saturn, ale i ostatní plynné planety mají prstence, i když viditelné většinou jen v infračerveném spektru. Součástí této části byla i záležitost týkající se nesnadné úlohy při definování pojmu planeta a s tím spojená úskalí.

### 3 Závěr

Ukazuje se, že tento způsob podání astronomického kvízu je mezi studenty oblíbený, protože umožňuje vtáhnout posluchače do tématu. U většiny položených otázek je k dispozici několik možností, přičemž student si může udělat svůj názor, může jej sdělit ostatním, nesouhlasit s nimi a pak svoji odpověď konfrontovat se správnou odpovědí.

### 4 Použitá literatura

KÉHAR, O. Astronomia [online]. [cit. 1. 9. 2016]. Dostupné z <http://astronomia.zcu.cz>

### 5 Kontakt na autora

PhDr. Ing. Ota Kéhar, Ph.D.

Fakulta pedagogická Západočeské univerzity v Plzni

kehar@kmt.zcu.cz

## DATA, VŠUDE SAMÁ DATA

Ota KÉHAR

### 1 Úvod

V rámci příspěvku se účastníci seznámili s netradičním způsobem využití dat, která se nacházejí v katalogích astronomických objektů.

### 2 Data

Porozumění různým druhům grafů, diagramů považuji za klíčovou vlastnost každého vzdělaného člověka. Proto mě zajímalo, jaké znalosti si odnášejí žáci ze základní školy. V rámcovém vzdělávacím programu (2013) se v části „Zpracování a prezentace informací“ dozvíme, že mezi očekávané výstupy je využití pokročilých funkcí aplikačního software, mezi který můžeme zařadit i tabulkové kalkulátory. Co jsou to ovšem pokročilé funkce? Na toto může mít každý jiný názor, já za ně považuji např. kontingenční tabulky, makra, databáze.

Středisko služeb školám, Plzeň, Částkova 78  
Podpora talentovaných žáků v Plzeňském kraji  
CZ.1.07/1.2.03/02.0001

Tento projekt je v letech 2012-16 financován z rozpočtu Plzeňského kraje

## INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Ukazuje se (Kéhar, 2011), že žáci, případně studenti neumí základní funkce jako např. funkce, vložení sloupců, použití vzorců, vytvoření grafů nebo seřazení dat.

Proto se nabízí vytvoření úloh, které by toto napravily. Pokud totiž máme k dispozici aplikační software (Excel, Calc apod.), studenty, většinou nám chybí nějaká data, v ideálním případě reálná, aby obsahovala i různé chyby a nepřesnosti, se kterými se setkáváme v každodenním životě. Nic totiž není ideální.

V tomto případě se nabízí použití dat z astronomických katalogů, kterých máme k září 2016 přes 14 tisíc. Některé z nich jsou vhodným způsobem zpracovány na stránkách Astronomia. Jde o seznam očíslovaných planetek, katalogy hvězd SIMBAD a HIPPARCOS a katalogy plošných objektů (tzv. deep-sky) – Messierův katalog a katalog NGC.

Jsou dva základní způsoby, jak data použít. První způsob je zaměřen na stáhnutí dat do počítače a jejich přímé zpracování v Excelu. Tato metoda (časově náročnější) je vhodná na procvičování základních a mírně pokročilých funkcí v tabulkovém procesoru. Druhý způsob spočívá ve využití online webových aplikací, které řadu rutinních věcí udělají za uživatele. Popsat veškeré možnosti, které online webové aplikace dostupné na stránkách Astronomia přinášejí, by bylo nad rámec tohoto příspěvku, a proto odkazují zájemce na disertační práci (Kéhar, 2014), kde je vše velmi podrobně popsáno.

### 3 Závěr

Ukazuje se, že využití reálných dat z astronomických katalogů může přinést pro žáky a studenty zajímavé zpestření hodin při práci s výpočetní technikou. Nejenom že se naučí používat tabulkové procesory a jejich základní nebo rozšířené funkce, zároveň si použitím reálných vědeckých dat vyzkouší práci, která může mít praktický přínos pro jejich další pracovní kariéru.

### 4 Použitá literatura

- KÉHAR, O. *Astronomia* [online]. [cit. 1. 9. 2016]. Dostupné z <http://astronomia.zcu.cz>
- KÉHAR, O. *Využití katalogů astronomických objektů ve výuce*. 2011. Rigorózní práce. Dostupné z <http://www.kof.zcu.cz/st/rz/prace/kehar.pdf>
- KÉHAR, O. *Katalogy astronomických objektů na webových stránkách Astronomia a jejich použití ve školách*. 2014. Disertační práce, vedoucí Miroslav Randa. Dostupné z [http://kof.zcu.cz/st/dis/kehar/disertacni\\_prace\\_kehar.pdf](http://kof.zcu.cz/st/dis/kehar/disertacni_prace_kehar.pdf)
- Rámcový vzdělávací program pro základní vzdělávání*. Upravená 3. verze. Praha: Výzkumný ústav pedagogický v Praze, 2013. 146 s.
- Strasbourg astronomical Data Center. CDS [online]. 2015 [cit. 1. 9. 2016]. Dostupné z <http://vizier.u-strasbg.fr/viz-bin/VizieR>



## 5 Kontakt na autora

PhDr. Ing. Ota Kéhar, Ph.D.

Fakulta pedagogická Západočeské univerzity v Plzni

kehar@kmt.zcu.cz

# HLEDÁME DRUHOU ZEMI

Ota KÉHAR

## 1 Úvod

Jedním z bouřlivě se rozvíjejících oborů astronomie je oblast exoplanet – těles planetárního charakteru na drahách kolem vzdálených hvězd. Ještě před nedávnem nebyla sebemenší šance tyto objekty detekovat. To nám umožnil až nebývalý pokrok technického vybavení, kterým astronomové dnes disponují a který doznává prakticky den ode dne další vylepšení. Navíc ke špičkové technice se čím dál častěji mohou dostávat i astronomové-amatéři a provádět tak pozorování, o nichž se v nedávné době nesnilo ani profesionálům. Seznámíme se se základy výzkumu exoplanet a současným stavem našeho poznání v tomto oboru. Kdy nalezneme druhou Zemi? Nebo už jsme ji objevili?

## 2 Metody

Nejsnáze představitelná metoda používaná při hledání planet u jiných hvězd (pro tyto planety používáme pojem exoplanety) je metoda přímého zobrazení, která spočívá v přímém vyfotografování exoplanety obíhající okolo vzdálené hvězdy. Tato metoda má ovšem svá omezení a nelze ji (snadno) použít. Na vině jsou rozlišovací schopnost přístrojů (úhlová vzdálenost mezi hvězdou a exoplanetou) a kontrast (relativní jasnost hvězdy a exoplanety). Podíváme se na poměry ve sluneční soustavě: zářivý výkon Slunce je  $4 \cdot 10^{26}$  W, odražený výkon od Země je  $5 \cdot 10^{16}$  W, od Jupiteru  $2,5 \cdot 10^{17}$  W; tzn. kontrastní poměr je 1:1 000 000 000, což odpovídá změně o 23 mag. Detekovat takovouto změnu je za současného technického vybavení snímacích prvků nemožné. Kdybychom uvažovali hvězdu ve vzdálenosti 100 světelných let a chtěli odhalit exoplanetu ve vzdálenosti 1 astronomické jednotky, znamenalo by to rozlišovací schopnost dalekohledu lepší než 0,03 úhlové vteřiny. K tomu by byl zapotřebí objektiv o průměru 4 m. To je technicky realizovatelné, nicméně museli bychom vyřešit vliv atmosféry Země – její neklid neboli seeing, který je v řádu jedné úhlové vteřiny. To lze řešit adaptivní optikou nebo umístěním dalekohledu mimo atmosféru Země.

Jak si ale představit kontrastní poměr jedna ku jedné miliardě? Představme si maják a světlušku, kterou bychom umístili do vzdálenosti 30 cm od majáku. Celé toto uskupení bychom pozorovali ze vzdálenosti 700 km, což znamená umístit maják např. do Bruselu a pozorovat vše z Prahy. Nesmíme v tomto případě brát v úvahu zakřivení Země (ale ani

Středisko služeb školám, Plzeň, Částkova 78  
Podpora talentovaných žáků v Plzeňském kraji  
CZ.1.07/1.2.03/02.0001

Tento projekt je v letech 2012-16 financován z rozpočtu Plzeňského kraje

## INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

atmosférickou refrakci), protože jinak bychom potřebovali maják, který bude vysoký několik desítek km, abychom ho mohli z této vzdálenosti pozorovat.

Mezi další metody užívané při hledání exoplanet patří: změna radiální rychlosti, tranzity (přechody) nebo gravitační mikročočkování. Posledně jmenovaná metoda má jistě svoji budoucnost před sebou, protože se jedná o metody, která nám může pomoci najít exoplanetu i v jiné galaxie.

### 3 Závěr

I když se nám podaří najít řadu exoplanet, někdy i v bezprostřední blízkosti sluneční soustavy, i tak bude jakékoliv navázání kontaktu velmi obtížné, stejně tak ověření, že na některé exoplanetě se může nacházet inteligentní život v různých fázích vývoje.

### 4 Použitá literatura

Exoplanet.eu [online]. [cit. 1. 9. 2016]. Dostupné z <http://exoplanet.eu>  
exoplanets.org [online]. [cit. 1. 9. 2016]. Dostupné z <http://exoplanets.org>

### 5 Kontakt na autora

PhDr. Ing. Ota Kéhar, Ph.D.  
Fakulta pedagogická Západočeské univerzity v Plzni  
kehar@kmt.zcu.cz

## JAK SI V ASTRONOMII PŘEDSTAVIT NEPŘEDSTAVITELNÉ

Ota KÉHAR

### 1 Úvod

Astronomie je plná nepředstavitelných rozměrů, pojďme si je přiblížit a představit. Jak moc je řídký vzduch na Marsu? Kolik vody obsahuje marsovská atmosféra? Proč je obtížné pořídit fotografii exoplanety? Jaké vzdálenosti nás dělí od nejbližší hvězdy? Jak je to s modelem Galaxie?

### 2 Srovnávací metoda

K nejobtížnějším vzdělávacím cílům výuky astronomických poznatků patří bezesporu tvorba základních představ o velikostech vesmírných těles různých typů (planeta, hvězda, sluneční soustava, galaxie, vesmír) a prostorových vzdálenostech mezi nimi. V tomto okamžiku je možné použít srovnávací metodu, kdy různá číselná, obrazová a modelová srovnání ulehčují žákům pochopení rozmanitosti rozměrů a hmotností vesmírných těles (planety kamenné a plynné, trpasličí planety, planetky, komety atd.) ve sluneční soustavě,

Středisko služeb školám, Plzeň, Částkova 78  
Podpora talentovaných žáků v Plzeňském kraji  
CZ.1.07/1.2.03/02.0001

Tento projekt je v letech 2012-16 financován z rozpočtu Plzeňského kraje

## INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

rozměrů hvězd v jednotlivých stádiích jejich vývoje (hvězdy hlavní posloupnosti, obří, závěrečná stadia – bílý trpaslík, neutronová hvězda, černá díra). K snadnému pochopení prostorových měřítek ve vesmíru jsou vhodná srovnání vzdáleností kosmických těles, např. Země–Měsíc, Země–Slunce, Slunce–nejbližší hvězdy apod. Hojně používané je srovnání poloměru a hmotnosti Země s ostatními planetami, poloměru a hmotnosti Slunce s různými typy hvězd, naší Galaxie s jinými galaxiemi.

### 3 Závěr

Srovnávací metodu najdeme již u J. A. Komenského, kdy vyžadoval přirozenou metodu vzdělávání, odvozenou z poznání a napodobování přírody. Z vlastní zkušenosti mám ověřené, že studentům tato metoda vyhovuje a lépe je to vtáhne do diskuze ohledně možných výsledků. Pokud student odhadne výsledek, je potom mnohem více zvědavý, jaká je správná odpověď a jak blízký jí on sám byl, případně jak na tom byl v porovnání s dalšími studenty.

### 4 Použitá literatura

KÉHAR, O. Astronomie: Jak si představit nepředstavitelné in *Veletrh nápadů učitelů fyziky 20*. Dostupné z [http://vnuf.cz/sbornik/rocniky/Veletrh\\_20\\_\(Praha\\_2015\).pdf](http://vnuf.cz/sbornik/rocniky/Veletrh_20_(Praha_2015).pdf)

### 5 Kontakt na autora

PhDr. Ing. Ota Kéhar, Ph.D.  
Fakulta pedagogická Západočeské univerzity v Plzni  
kehar@kmt.zcu.cz

## LUCIE NOCI UPIJE – PRANOSTIKY Z HLEDISKA ASTRONOMIE

Ota KÉHAR

### 1 Úvod

Tématem přednášky jsou známé lidové pranostiky našich předků. Jaké souvislosti museli znát naši předci, aby odhalili správnou podstatu známých přísloví jako například „Lucie noci upije a dne nepřidá“, „Na Boží narození o bleší převalení“, „Na Nový rok o slepičí krok“ nebo „Na Tři krále o skok dále“ a podobně. Pokusíme se jim porozumět a odhalit jejich vznik a pravou příčinu. Podíváme se na některé astronomické jevy – pravý a střední sluneční čas, západy, východy slunce, soumraky, atmosférická refrakce apod.

### 2 Pranostiky

Příspěvek začal informací, co jsou to pranostiky. Jedná se o řeckolatinské slovo, které v překladu znamená „předpovídání“. Zpravidla nemají autora a předávaly se mezi generacemi pouze ústně. Úzce souvisí s lidskou zkušeností a nejvíce souvisí s ročním obdobím nebo

Středisko služeb školám, Plzeň, Částkova 78  
Podpora talentovaných žáků v Plzeňském kraji  
CZ.1.07/1.2.03/02.0001

Tento projekt je v letech 2012-16 financován z rozpočtu Plzeňského kraje

## INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

výrazným meteorologickým jevem. Pranostiky nenajdeme pro všechny dny v roce, dají se najít pouze pro 190 dnů. Řada jich souvisí s jarem, tedy s velmi důležitým okamžikem – úrodou. V současnou chvíli některé pranostiky postrádají smysl, protože příroda prochází změnami, nemalý vliv mají i města nebo se u některých pranostik jednalo o náhodu, která se již neopakovala.

Zahájení jsem věnoval známé pranostice „Lucie noci upije a dne nepřidá“, která se datuje k 13. prosinci, ke svaté Lucii, která může za vánoční uklízení. Nejpozději na svátek svaté Lucie musela být domácnost jako ze škatulky, jinak se totiž Lucie zlobila. Samotný úvod vysvětlení jsem věnoval dotazům: Který den slunce vychází nejpozději? Který den slunce zapadá nejdříve? Který den je nejdelší noc? Zmínil jsem i rozdíl mezi hvězdným a slunečným časem, který je pro vysvětlení důležitý. Souvisí s tím i nerovnoměrný pohyb Země okolo Slunce, který popisuje zejména první a druhý Keplerův zákon. Hvězdný den je stále stejně dlouhý, protože souvisí s rovnoměrným otáčením Země kolem své vlastní osy ve vztahu ke vzdáleným hvězdám. Zatímco slunečný den je různě dlouhý podle toho, zda se země nachází v odsluní (kratší sluneční den) nebo v přísluní (delší sluneční den). Rozdíl pravého a středního (čas užívaný pro civilní potřebu, protože plyne rovnoměrně) slunečního času je roven tzv. časové rovnici. Rozdíl je způsobem eliptickou trajektorií a sklonem ekliptiky k rovníku. Během roku není stejný, spojitě se mění od -14 minut (12. února) až +15 minut (3. listopadu). Další pranostika „Když přijde svatá Lucie, najde tu už zimu.“ souvisí se změnou juliánského na gregoriánský kalendář, ke které došlo okolo roku 1584. Obdobná situace jako je prosinci nastává i od 15. června do 24. června. Východ slunce se začne zpožďovat již okolo 15. června, západ nastane dříve, jak předešlého dne až od 24. června. K 15. červnu se tak váže pranostika „Na svatého Víta hlava ještě nedoléhá, u paty již svítá“.

### 3 Závěr

Jevy, které jsou občas popsány pranostikou, mohou být velmi komplikované. Ukazuje se ale, že dokonale stručná formulace pranostiky je vzhledem k té složitosti problému tak jemně vybroušená, že je až s podivem, že se jedná o lidovou pranostiku. Byl autor pranostiky astronom? Je zřejmé, že naši předkové sledovali oblohu a děje na ní velmi pečlivě. Je také možné, že pranostika mohla vzniknout náhodou nebo na papíře.

### 4 Použitá literatura

KÉHAR, O. Astronomia [online]. [cit. 1. 9. 2016]. Dostupné z <http://astronomia.zcu.cz>

### 5 Kontakt na autora

PhDr. Ing. Ota Kéhar, Ph.D.

Fakulta pedagogická Západočeské univerzity v Plzni

kehar@kmt.zcu.cz

Středisko služeb školám, Plzeň, Částkova 78  
Podpora talentovaných žáků v Plzeňském kraji  
CZ.1.07/1.2.03/02.0001

Tento projekt je v letech 2012-16 financován z rozpočtu Plzeňského kraje

# DIAGNOSTIKA PLAZMATU PŘI MAGNETRONOVÉM NAPRAŠOVÁNÍ UNIKÁTNÍCH TENKOVSTVÝCH MATERIÁLŮ

Jiří KOHOUT

## 1 Úvod

V různých odvětvích průmyslu se stále častěji prosazují tenkovrstvé materiály (tloušťka typicky v rozmezí 10 nm – 10  $\mu$ m) se zajímavými vlastnostmi (např. vysoká tvrdost a ořezuvzdornost, nízký koeficient tření, vysoká elektrická vodivost, zajímavé optické vlastnosti apod.). Tyto unikátní materiály mohou být připraveny mnoha různými cestami, z nichž mnohé využívají plazmový výboj. Patří k nim i tzv. magnetronové naprašování. Jedná se o efektivní a z hlediska životního prostředí šetrnou technologii založenou na rozprašování různých terčů v plazmovém výboji. Tento příspěvek je zaměřen jednak na uvedení nejzákladnějších informací o fyzice plazmatu a technice magnetronového naprašování, jednak pak na stručné uvedení do problematiky diagnostiky záporných iontů, která se u této metody běžně užívá k charakterizaci plazmového výboje.

## 2 Fyzika plazmatu, magnetronové naprašování a jeho fyzikální souvislosti

### 2.1 Úvod do fyziky plazmatu

Již starořecká filozofie pracovala se čtyřmi základními živly (oheň, voda, vzduch a země). I přes to se po staletí mluvilo pouze o 3 skupenstvích (pevné odpovídající zemi, kapalně vodě a plynně vzduchu). Celkem přirozené by tedy bylo, kdyby existovalo ještě jedno skupenství, jež by v uvedené analogii odpovídalo ohni. Toto 4. skupenství, které vlastně odpovídá vysoce ionizovanému plynu a jež je možné získat buď díky vysokým teplotám, nebo pomocí silného elektrického pole, poprvé popsal v roce 1879 William Crookes, který jej označil jako *radiant matter* (v překladu zářící hmota). Slovo plazma (v ženském rodě) odvozené z řeckého *plassein* (tvořit) začalo být užíváno v medicíně (zásluhou J. E. Purkyně) kolem r. 1845 pro označení krevní tekutiny.

Slovo plazma (ve středním rodě) jako označení pro uvedené skupenství hmoty (zpravidla uváděné jako čtvrté, ovšem s tím, že více než 99 % hmoty ve Sluneční soustavě se nachází právě v tomto skupenství) bylo poprvé použito až v roce 1927 Irvingem Langmuirem. Ten pozoroval, jak elektrické pole unáší elektrony a ionty a připomnělo mu to situaci, kdy krevní plazma unáší bílé a červené krvinky.

Aby mohl být ionizovaný plyn označen za plazma, musí vykazovat dvě základní vlastnosti - kolektivní chování a kvazineutralitu. První podmínka odpovídá tomu, že je plazma schopné generovat globální elektrická a magnetická pole a reagovat na ně. Kvazineutralita pak vyžaduje přibližně stejné množství kladných a záporných částic. Do plazmatu se proto nezahrnuje plamen svíčky (nesplňuje kolektivní chování) či svazek nabitých částic (např. elektronů), který nesplňuje požadavek na kvazineutralitu. Naopak sluneční vítr, vnitřek hvězd,

## INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

jádro galaxie, blesk, polární záři či různé druhy výbojů je možné označit za plazma. Plazma můžeme rozdělit podle několika různých kritérií, detaily jsou uvedeny v práci Krbce (2012).

### 2.2 Princip magnetronového naprašování

Máme depoziční komoru napuštěnou plynem (např. argon). Tlak plynu je velmi nízký, typicky několik desetin pascalu až několik pascalů. Na jednu stranu komory umístíme (např. titanový) terč. Na druhou stranu depoziční komory je poté umístěn substrát, což může být třeba křemíková destička. Následně připojíme zdroj napětí tak, že titanový terč funguje jako katoda a křemíkový substrát jako anoda. Toto napětí je zpravidla v řádu stovek voltů.

Nabitě částice, tj. záporně nabitě elektrony a kladně nabitě ionty začnou být elektrickým polem urychlovány. Díky velké střední volné dráze způsobené nízkým tlakem a tudíž nízkým počtem srážek je možné je urychlit natolik, aby při srážkách dokázaly efektivně ionizovat atomy plynu. Kladně nabitě ionty jsou přitahovány ke katodě a vzhledem k velké intenzitě pole v její těsné blízkosti získávají před dopadem na ni značnou rychlost. Díky tomu jsou schopny po dopadnutí na titanový terč tvořící katodu vyrazit z něj atomy titanu, které následně procházejí napříč výbojem a dopadají na křemíkový substrát. Na něm poté vzniká tenká vrstva, jež často má díky popsanému způsobu přípravy „atom po atomu“ mnohdy zajímavé vlastnosti. Podrobně je uvedený proces popsán v knize Ohringa (1992, s. 145).

### 2.3 Diagnostika záporných iontů při magnetronovém naprašování

Značná pozornost je v posledních letech věnována vysokovýkonovému pulznímu naprašování oxidových vrstev. Patří k nim například vrstvy na bázi  $\text{HfO}_2$ , jež mají velmi vysokou dielektrickou konstantu (zhruba 30). Z tohoto důvodu by do budoucna mohly v elektronice nahradit dosud převážně užívaný  $\text{SiO}_2$ , jehož dielektrická konstanta je mnohem menší (pouze 3,9), což s sebou nese jisté praktické nevýhody.

Jedním z problémů vznikajících při přípravě vrstev uvedenou technikou je nezanedbatelný počet vysokoenergetických záporných iontů  $\text{O}^-$  a  $\text{O}_2^-$  vznikajících několika cestami, z nichž nejvýznamnější je záchyt elektronů. Tyto ionty často vznikají v blízkosti katody, jsou od ní odpuzovány a v důsledku toho získávají energii v řádu stovek elektronvoltů, díky níž dokáží při dopadu na substrát vyvolat defekty způsobující nárůst povrchové drsnosti či dokonce degradující vlastnosti vrstvy. V rámci přednášky bylo na velmi aktuálním příkladu přípravy vrstev  $\text{HfO}_2$  demonstrováno, že pomocí hmotnostní spektroskopie je možné detekovat, kolik těchto vysokoenergetických iontů dopadá na substrát v závislosti na poloze přívodu kyslíku do vakuové komory. Možnost efektivně redukovat tok uvedených iontů na substrát tak má zásadní význam z hlediska přípravy kvalitních tenkovrstvých materiálů s velkým aplikačním potenciálem.

## 3 Závěr

Prezentovaný příspěvek slouží k popsání základních trendů uplatňujících se ve fyzice plazmatu, magnetronovém naprašování a rovněž v oblasti diagnostiky plazmového výboje využitého při tomto naprašování. Řadu dalších informací lze vedle výše uvedených odkazů najít rovněž na webových stránkách Katedry fyziky ZČU [www.kfy.zcu.cz](http://www.kfy.zcu.cz).



#### 4 Použitá literatura

KRBEC, M. Plazma jako nástroj k vytváření nových materiálů - možnosti zařazení tématu do výuky na ZŠ a SŠ. Bakalářská práce, FPE ZČU, 2012. Dostupné na internetu: <<http://home.zcu.cz/~jkohout4/plazma.pdf>>.

OHRING, M. The materials science of thin films. San Diego, Academic Press, 1992.

#### 5 Kontakt na autora

Mgr. Jiří Kohout, Ph.D.

Oddělení fyziky, Katedra matematiky, fyziky a technické výchovy, Fakulta pedagogická, Západočeská univerzita v Plzni

[jkohout4@kmt.zcu.cz](mailto:jkohout4@kmt.zcu.cz)

## MATEMATIKA VE FYZICE 1

Jiří KOHOUT

### 1 Úvod

V tomto úvodním kurzu bloku věnovaného užití matematiky ve fyzice byli účastníci kempu seznámeni se základy diferenciálního počtu, konkrétně s pojmem derivace funkce jedné proměnné, geometrickým významem derivace a rovněž možnostech užití derivací ve fyzice. Většina kurzu byla věnována praktickému procvičování základních typů derivací.

### 2 Derivace funkce jedné proměnné. Název kapitoly

Po teoretickém výkladu byly na řadě společně řešených konkrétních příkladů procvičeny techniky derivování, především pak derivace elementárních funkcí, pravidla pro derivování součtu, součinu a podílu a rovněž derivaci složených funkcí. Níže jsou uvedeny některé úlohy i s řešením:

#### 2.1 Derivace součtu a rozdílu

$$\text{Vzorce: } (u + v)' = u' + v' \quad ; \quad (u - v)' = u' - v'$$

$$(x + x^2)' = (x)' + (x^2)' = 1 + 2x, \quad (x^5 + \sin x)' = 5x^4 + \cos x, \quad (5x^2 + 3)' = 10x$$
$$(5x^2 + 3)'' = (10x)' = 10, \quad (32x^2 + 5x)' = 64x + 5, \quad (\ln x + 7x^6)' = \frac{1}{x} + 42x^5,$$

$$(tgx + \cos x)' = \frac{1}{\cos^2 x} - \sin x, \quad \left( \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} - 2x \right)' = \frac{1}{3} \cdot 3x^2 + \frac{1}{2} \cdot 2x - 2.$$

Středisko služeb školám, Plzeň, Částkova 78  
Podpora talentovaných žáků v Plzeňském kraji  
CZ.1.07/1.2.03/02.0001

Tento projekt je v letech 2012-16 financován z rozpočtu Plzeňského kraje

## 2.2 Derivace součinu

Vzorec:  $(u \cdot v)' = u'v + uv'$

$$\begin{aligned}(x^2 \cdot x)' &= 2x \cdot x + x^2 \cdot 1 = 2x^2 + x^2 = 3x^2, & (x^2 \cdot \sin x)' &= 2x \sin x + x^2 \cos x, \\(x^2 \cdot \cos x)' &= 2x \cdot \cos x + x^2 \cdot (-\sin x), & (\cot gx \cdot 4x^7)' &= -\frac{1}{\sin^2 x} \cdot 4x^7 + \cot gx \cdot 28x^6, \\(tgx \cdot \cot gx)' &= \left(\frac{1}{\cos^2 x} \cdot \cot gx\right) + \left(tgx \cdot \left(-\frac{1}{\sin^2 x}\right)\right) = \left(\frac{1}{\cos^2 x} \cdot \frac{\cos x}{\sin x}\right) + \left(\frac{\sin x}{\cos x} \cdot \left(-\frac{1}{\sin^2 x}\right)\right) = \\&= \left(\frac{1}{\cos x \cdot \sin x}\right) + \left(-\frac{1}{\cos x \cdot \sin x}\right) = 0\end{aligned}$$

## 2.3 Derivace podílu

Vzorec:  $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$

$$\begin{aligned}\left(\frac{5x^3}{7x^7}\right)' &= \frac{15x^2 \cdot 7x^7 - 5x^3 \cdot 49x^6}{(7x^7)^2} = \frac{105x^9 - 245x^9}{49x^{14}} = \frac{140x^9}{49x^{14}} = \frac{20}{7x^5}, \\ \left(\frac{2x}{1-x^2}\right)' &= \frac{2 \cdot (1-x^2) - 2x \cdot (-2x)}{(1-x^2)^2} = \frac{2 - 2x^2 + 4x^2}{(1-x^2)^2} = \frac{2 + 2x^2}{(1-x^2)^2}, \\ \left(\frac{\sin x}{x}\right)' &= \frac{\cos x \cdot x - \sin x \cdot 1}{(x)^2}.\end{aligned}$$

## 2.4 Derivace složené funkce

$$\begin{aligned}(\sin 2x)' &= \cos 2x \cdot 2, & (\sin^2 x)' &= 2 \cdot \sin x \cdot \cos x = \sin 2x, & (\cos x^2)' &= -\sin x^2 \cdot 2x, \\(tg 5x^2)' &= \frac{1}{\cos^2(5x^2)} \cdot 10x, & (\cos^3 x^4)' &= 3(\cos x^4)^2 \cdot \sin x^4 \cdot 4x^3 = -12x^3 \cdot \sin x^4 \cdot \cos^2 x^4, \\(\ln x^3 + 7)' &= \frac{1}{x^3} \cdot 3x^2 = \frac{3x^2}{x^3} = \frac{3}{x}, & (\cos x^3)' &= -\sin x^3 \cdot (x^3)' = -\sin x^3 \cdot 3x^2, \\[\sin(x^3 + 1)]' &= \cos(x^3 + 1) \cdot (x^3 + 1)' = \cos(x^3 + 1) \cdot 3x^2,\end{aligned}$$

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

$$(\cos 2x - 2 \sin x)' = (-\sin 2x) \cdot 2 - 2 \cos x, (x \cdot \sqrt{1+x^2})' = 1 \cdot \sqrt{1+x^2} + x \cdot \frac{1}{2} \cdot (1+x^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot 2x.$$

### 3 Závěr

Byly procvičeny základní techniky derivování a účastníci kurzu získali informaci, že další podrobnosti k tématu stejně jako řadu příkladů k procvičení lze nalézt ve studijním textu pro řešitele FO autorů Jarešové a Volfa.

### 4 Použitá literatura

JAREŠOVÁ, M., VOLF, J. Diferenciální počet ve fyzice. Studijní text pro řešitele FO. Dostupné na internetu: <<http://fyzikalniolympiada.cz/texty/matematika/difpoc.pdf>>

### 5 Kontakt na autora

Mgr. Jiří Kohout, Ph.D.

Oddělení fyziky, Katedra matematiky, fyziky a technické výchovy, Fakulta pedagogická, Západočeská univerzita v Plzni

[jkohout4@kmt.zcu.cz](mailto:jkohout4@kmt.zcu.cz)

## MATEMATIKA VE FYZICE 2

Jiří KOHOUT

### 1 Úvod

V návaznosti na předchozí kurz Matematika ve fyzice 1 bylo procvičeno základní využití derivací při řešení fyzikálních úloh. Počítány byly vybrané úlohy z mechaniky a elektřiny, přičemž hlavní důraz byl kladen na pochopení souvislosti derivace s vyjádřením pomocí diferencí, které je užíváno na SŠ (např. pro okamžitou rychlost či zrychlení).

### 2 Využití derivací ve fyzice

V rámci kurzu byly mimo jiné řešeny následující úlohy:

1. Určete časové závislosti rychlosti  $v(t)$  a zrychlení  $a(t)$  pro harmonický kmitavý pohyb, víte-li, že závislost výchylky na čase je dána vztahem  $y(t) = y_m \cdot \sin(\omega \cdot t + \varphi)$ , kde  $y_m$  je amplituda,  $\omega$  je úhlová frekvence a  $\varphi$  je fáze.
2. Užitím diferenciální rovnice se dá dokázat, že závislost dráhy na čase u přímočarého pohybu auta rozjíždějícího se s konstantním výkonem  $P$  je při zanedbání odporu

## INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

prostředí dána vztahem  $s(t) = \frac{m}{3 \cdot P} \cdot \left( \frac{2 \cdot P}{m} \cdot t \right)^{\frac{3}{2}}$ , kde  $m$  je hmotnost vozidla. Určete časové závislosti rychlosti  $v(t)$  a zrychlení  $a(t)$ .

3. Uvažujme čtvercový závit o délce strany  $a$  rotující kolem své osy v homogenním magnetickém poli o magnetické indukci  $B$  úhlovou rychlostí  $\omega$ . Určete časovou závislost napětí indukovaného v závitě  $U_i(t)$ .

### 3 Závěr

Bylo procvičeno využití derivací ve fyzice a účastníci kurzu získali informaci, že další podrobnosti k tématu lze nalézt ve studijním textu pro řešitele FO autorů Jarešové a Volfa.

### 4 Použitá literatura

JAREŠOVÁ, M., VOLF, J. Diferenciální počet ve fyzice. Studijní text pro řešitele FO. Dostupné na internetu: <<http://fyzikalniolympiada.cz/texty/matematika/difpoc.pdf>>

### 5 Kontakt na autora

Mgr. Jiří Kohout, Ph.D.

Oddělení fyziky, Katedra matematiky, fyziky a technické výchovy, Fakulta pedagogická, Západočeská univerzita v Plzni

[jkohout4@kmt.zcu.cz](mailto:jkohout4@kmt.zcu.cz)

## MATEMATIKA VE FYZICE 3

Jiří KOHOUT

### 1 Úvod

Příspěvek byl v návaznosti na předchozí kurzy Matematika ve fyzice 1 a 2 zaměřen na praktické využití diferenciálního počtu k řešení jednoduchých optimalizačních úloh s fyzikální tematikou. Řešeny byly příklady z různých oblastí fyziky tak, aby účastníci získali komplexní představu o možnostech dané metody.

### 2 Úlohy na hledání extrémů

V rámci kurzu byly ve spolupráci s účastníky počítány následující úlohy:

1. Pod jakým úhlem musí plavat člověk schopný vyvinout ve vodě rychlost  $v_c = 1 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$  přes řeku širokou  $d = 2000 \text{ m}$ , jejíž proud má ve všech částech rychlost

Středisko služeb školám, Plzeň, Částkova 78  
Podpora talentovaných žáků v Plzeňském kraji  
CZ.1.07/1.2.03/02.0001

Tento projekt je v letech 2012-16 financován z rozpočtu Plzeňského kraje

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

$v_p = 1,5 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ , aby ho proud snesl o co možná nejmenší vzdálenost. O jakou vzdálenost  $x$  ho v tomto krajním případě snese?

2. Uvažujme dva stejné bodové kladné náboje o velikosti  $Q$  umístěné ve vzdálenosti  $2a$  od sebe. Určete, kde na ose úsečky spojující oba náboje bude velikost intenzity elektrického pole maximální a jaká bude?

3. V kvantové mechanice se dá dokázat, že hustota pravděpodobnosti výskytu elektronu v základním stavu atomu vodíku (tj. stavu  $1s$ ) závisí na vzdálenosti od jádra vztahem

$$f(r) = \frac{4}{a^3} \cdot r^2 \cdot e^{-\frac{2r}{a}}, \text{ kde } a = 5,3 \cdot 10^{-11} \text{ m je tzv. Bohrovův poloměr atomu. Určete, v jaké}$$

vzdálenosti od jádra je největší pravděpodobnost výskytu elektronu.

4. Z bodu A na silnici je třeba se dostat do bodu B na louce vzdáleného od silnice  $b$  v co nejkratší době. Vzdálenost bodů A a C, který je patou kolmice spuštěné z bodu B na silnici, je  $a$ . Víte-li, že rychlost auta po louce je třikrát menší než po silnici, určete, v jaké vzdálenosti od bodu C je třeba sjet ze silnice.

U úlohy číslo 1 bylo vedle klasického řešení pomocí derivací prezentováno i numerické řešení provedené v programu EXCEL. Pro ilustraci ukažme řešení příkladu 3:

Budeme hledat maximum uvedené funkce  $f(r)$ . Extrémy vždy určujeme tak, že danou funkci derivujeme podle  $r$  a derivaci položíme rovnu nule. Pozor, musíme derivovat jako součin tj. funkci  $r^2$  derivovat krát funkci  $e^{-\frac{2r}{a}}$  opsat plus funkci  $r^2$  opsat krát funkci  $e^{-\frac{2r}{a}}$  derivovat. Výraz  $\frac{4}{a^3}$  je z hlediska derivování podle  $r$  konstanta a proto nehraje žádnou roli.

Bude platit:

$$\begin{aligned} \frac{df(r)}{dr} &= \frac{d}{dr} \left( \frac{4}{a^3} \cdot r^2 \cdot e^{-\frac{2r}{a}} \right) = \frac{4}{a^3} \cdot \frac{d}{dr} \left( r^2 \cdot e^{-\frac{2r}{a}} \right) = \frac{4}{a^3} \cdot \left[ 2 \cdot r \cdot e^{-\frac{2r}{a}} + r^2 \cdot \left( -\frac{2}{a} \right) \cdot e^{-\frac{2r}{a}} \right] = \\ &= \frac{4}{a^3} \cdot e^{-\frac{2r}{a}} \cdot 2 \cdot r \cdot \left( 1 - \frac{r}{a} \right). \end{aligned}$$

$$\frac{df(r)}{dr} = 0 \Rightarrow \frac{4}{a^3} \cdot e^{-\frac{2r}{a}} \cdot 2 \cdot r \cdot \left( 1 - \frac{r}{a} \right) = 0 \Rightarrow 1 - \frac{r}{a} = 0 \Rightarrow r = a.$$

## INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Zjistili jsme, že extrém může nastávat ve vzdálenosti  $r = a$  od jádra. Korektně bychom měli ještě ověřit, že se rovná o maximum. Vzhledem k tomu, že funkce  $f(r)$  v intervalu  $(0, \infty)$  nabývá pouze kladných hodnot a pro její limity v krajních bodech platí následující výrazy:

$$\lim_{r \rightarrow \infty} f(r) = \lim_{r \rightarrow \infty} \left( \frac{4}{a^3} \cdot r^2 \cdot e^{-\frac{2r}{a}} \right) = 0. \quad \lim_{r \rightarrow 0} f(r) = \lim_{r \rightarrow 0} \left( \frac{4}{a^3} \cdot r^2 \cdot e^{-\frac{2r}{a}} \right) = 0,$$

se o nic jiného, než o maximum, jednat nemůže.

Při výpočtu jsme vytkli výrazy, které nulové být nemohou. Zjistili jsme tedy, že pro základní stav atomu vodíku je největší pravděpodobnost nalezení elektronu ve vzdálenosti  $r = a$  od jádra.

### 3 Závěr

V rámci daného kurzu bylo procvičeno využití diferenciálního počtu k hledání extrémů funkcí jedné proměnné a užití ve fyzice. Účastníkům bylo rovněž řečeno, že další příklady k procvičení i podrobný teoretický výklad lze najít například v studijním textu k fyzikální olympiádě autorů Jarešové a Volfa.

### 4 Použitá literatura

JAREŠOVÁ, M., VOLF, J. Diferenciální počet ve fyzice. Studijní text pro řešitele FO. Dostupné na internetu: <<http://fyzikalniolympiada.cz/texty/matematika/difpoc.pdf>>

### 5 Kontakt na autora

Mgr. Jiří Kohout, Ph.D.

Oddělení fyziky, Katedra matematiky, fyziky a technické výchovy, Fakulta pedagogická,  
Západočeská univerzita v Plzni

[jkohout4@kmt.zcu.cz](mailto:jkohout4@kmt.zcu.cz)



## MATEMATIKA VE FYZICE 4

Jiří KOHOUT

### 1 Úvod

Účastníci byli stručně seznámeni s principy integrálního počtu, technikami integrování, souvislostí určitého a neurčitého integrálu a rovněž s možností využití integrálů jedné proměnné ve fyzice. Značná pozornost byla věnována procvičení základních integračních technik.

### 2 Techniky integrování

Byly propočítány příklady týkající se základních integrálů, integrace metodou per partes a rovněž integrace substitucí. Vybrané řešené příklady jsou uvedeny v následujících podkapitolách.

#### 2.1 Základní integrály

$$\int x^5 dx = \frac{x^6}{6} + C, \int \frac{1}{x^4} dx = \int (x^{-4}) dx = \frac{x^{-3}}{(-3)} + C, \int (x^2 + 3) dx = \frac{x^3}{3} + 3x + C,$$

$$\int (x^3 - 6x + 7) dx = \int x^3 dx - 6 \cdot \int x dx + 7 \cdot \int 1 dx = \frac{x^4}{4} - 6 \cdot \frac{x^2}{2} + 7 \cdot x + C,$$

$$\int (x-2)^2 \cdot (x^2+1) dx = \int (x^2-4x+4) \cdot (x^2+1) dx = \int (x^4+x^2-4x^3-4x+4x^2+4) dx =$$

$$\int (x^4-4x^3+5x^2-4x+4) dx = \frac{x^5}{5} - 4 \cdot \frac{x^4}{4} + 5 \cdot \frac{x^3}{3} - 4 \cdot \frac{x^2}{2} + 4x + C,$$

$$\int \frac{2x^5-3x^3+1}{4x^3} dx = \int \left( \frac{x^2}{2} - \frac{3}{4} + \frac{1}{4x^3} \right) dx = \frac{1}{2} \cdot \frac{x^3}{3} - \frac{3}{4}x + \frac{1}{4} \cdot \frac{x^{-2}}{(-2)} + C,$$

$$\int (3 \cdot 2^x - 5 \sin x + 1) dx = 3 \cdot \frac{2^x}{\ln 2} - 5(-\cos x) + x = 3 \cdot \frac{2^x}{\ln 2} + 5 \cos x + x + C,$$

$$\int \cot g^2 x dx = \int \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x} dx = \int \frac{1 - \sin^2 x}{\sin^2 x} dx = \int \frac{1}{\sin^2 x} dx - \int \frac{\sin^2 x}{\sin^2 x} dx = -\cot gx - x + C.$$

## 2.2 Integrace metodou per partes

$$\int x \cdot \sin x dx = \left| u(x) = x, u'(x) = 1, v'(x) = \sin x, v(x) = -\cos x \right|$$

$$= x \cdot (-\cos x) - \int 1 \cdot (-\cos x) dx = -x \cdot \cos x + \int 1 \cdot \cos x dx = -x \cdot \cos x + \sin x + C$$

$$\int \ln x dx = \left| u(x) = \ln x, u'(x) = \frac{1}{x}, v'(x) = 1, v(x) = x \right| =$$

$$= \ln x \cdot x - \int \frac{1}{x} \cdot x dx = x \cdot \ln x - x + C,$$

$$\int_1^5 x \cdot e^{2x} dx = \left| u = x; v' = e^{2x}; u' = 1; v = \frac{e^{2x}}{2} \right| =$$

$$= \left[ \frac{x \cdot e^{2x}}{2} \right]_1^5 - \int_1^5 1 \cdot \frac{e^{2x}}{2} = \left[ \frac{x \cdot e^{2x}}{2} \right]_1^5 - \left[ \frac{e^{2x}}{4} \right]_1^5 =$$

$$\left[ \frac{5 \cdot e^{2 \cdot 5}}{2} - \frac{1 \cdot e^{2 \cdot 1}}{2} \right] - \left[ \frac{e^{2 \cdot 5}}{4} - \frac{e^{2 \cdot 1}}{4} \right] = \left[ \frac{5 \cdot e^{10}}{2} - \frac{e^2}{2} \right] - \left[ \frac{e^{10}}{4} - \frac{e^2}{4} \right].$$

## 3 Závěr

Byly procvičeny základní techniky integrování a účastníci kurzu byli informováni, že další podrobnosti k tématu stejně jako řadu příkladů k procvičení lze nalézt ve studijním textu pro řešitele FO autorů Jarešové a Volfa.

## 4 Použitá literatura

JAREŠOVÁ, M., VOLF, J. Diferenciální počet ve fyzice. Studijní text pro řešitele FO. Dostupné na internetu: < <http://fyzikalniolympiada.cz/texty/matematika/intpoc.pdf> >

## 5 Kontakt na autora

Mgr. Jiří Kohout, Ph.D.

Oddělení fyziky, Katedra matematiky, fyziky a technické výchovy, Fakulta pedagogická, Západočeská univerzita v Plzni

[jkohout4@kmt.zcu.cz](mailto:jkohout4@kmt.zcu.cz)



INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

## JEDNODUCHÉ EXPERIMENTY 1

Pavel KRATOCHVÍL

### 1 Úvod

Přednáška se zabývala jednoduchými experimenty na téma: kapaliny a plyny.

### 2.2 Experimenty

Přelévání plynů, vajíčko v lahvi, utopení přiklopené svíčky, obrácená sklenice s papírem, obrácená sklenice se sítkem, obrácená láhev s malým otvorem, lihová raketa, Bernoulliho jev, Magnusův jev.

### 3 Kontakt na autora

PhDr. Pavel Kratochvíl, Ph.D.

Západočeská univerzita v Plzni, Katedra matematiky, fyziky a technické výchovy

E-mail: [kratinek@kof.zcu.cz](mailto:kratinek@kof.zcu.cz)

## JEDNODUCHÉ EXPERIMENTY 2

Pavel KRATOCHVÍL

### 1 Úvod

Přednáška se zabývala experimenty na téma: transformátory.

### 2.2 Experimenty

Vznik vířivých proudů v měděné trubičce, indukované napětí v cívce, transformátory s transformačním poměrem menším než 1 – indukční pec, svářečka, vysoké napětí – bleskojistky, vedení elektrického proudu ve skle, ztráty na vedení vysokého napětí.

### 3 Kontakt na autora

PhDr. Pavel Kratochvíl, Ph.D.

Západočeská univerzita v Plzni, Katedra matematiky, fyziky a technické výchovy

E-mail: [kratinek@kof.zcu.cz](mailto:kratinek@kof.zcu.cz)

Středisko služeb školám, Plzeň, Částkova 78  
Podpora talentovaných žáků v Plzeňském kraji  
CZ.1.07/1.2.03/02.0001

Tento projekt je v letech 2012-16 financován z rozpočtu Plzeňského kraje



INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

## JEDNODUCHÉ EXPERIMENTY 3

Pavel KRATOCHVÍL

### 1 Úvod

Pokračování přednášky se zajímavými experimenty na téma: transformátory.

### 2.2 Experimenty

Experimenty s indukčním vaříčem, Ruhmkorffův induktor, Teslův transformátor.

### 3 Kontakt na autora

PhDr. Pavel Kratochvíl, Ph.D.

Západočeská univerzita v Plzni, Katedra matematiky, fyziky a technické výchovy

E-mail: [kratinek@kof.zcu.cz](mailto:kratinek@kof.zcu.cz)

## JEDNODUCHÉ EXPERIMENTY 4

Pavel KRATOCHVÍL

### 1 Úvod

Přednáška se zabývala nevěšedními experimenty na téma: kapalný dusík.

### 2.2 Experimenty

Leiden-Frostův jev, zmrazení hopíku, rozlomení gumy, zmrazení salátu, rajčete a jiných potravin, vystřelení špuntu, pohyb křídly na plynném polštáři, roztočení ping-pongového míčku, protékání vody a dusíku hadrem, žárovka bez baňky, kapalnění kyslíku, desublimace SF<sub>6</sub>, levitace supravodiče I. a II. typu, model supravodivého vlaku Maglev.

### 3 Kontakt na autora

PhDr. Pavel Kratochvíl, Ph.D.

Západočeská univerzita v Plzni, Katedra matematiky, fyziky a technické výchovy

E-mail: [kratinek@kof.zcu.cz](mailto:kratinek@kof.zcu.cz)

Středisko služeb školám, Plzeň, Částkova 78  
Podpora talentovaných žáků v Plzeňském kraji  
CZ.1.07/1.2.03/02.0001

Tento projekt je v letech 2012-16 financován z rozpočtu Plzeňského kraje

## ŘEŠENÍ JEDNODUCHÝCH ÚLOH O POHYBU – GRAVITAČNÍ ZÁKON

Pavel KRATOCHVÍL

### 1 Úvod

Přednáška se zabývala řešením úloh na téma: Gravitační zákon.

### 2.1 Příklad č.1 dle [1]

Jak velkou gravitační silou přitahuje sedmikráska o hmotnosti  $m_s=0,15$  g otakárka fenyklového o hmotnosti  $m_o=0,3$  g je-li ve vzdálenosti metr od ní? Jak velkou gravitační silou ho přitahuje Slunce? Porovnejte velikosti obou sil.

### 2.2 Příklad č.2 dle [2]

Poblíž stromu, na kterém bydlí veverka, se nachází tunel, který prochází středem Země. Veverka se rozhodla, že do něj schová oříšek o hmotnosti  $m$ .

a) Jaký pohyb bude oříšek konat, když ho veverka pustí do tunelu? Napište jeho pohybovou rovnici.

b) Jakou rychlostí proletí oříšek středem Země?

c) Vráť se oříšek k veverce? Pokud ano, jak dlouho mu to bude trvat?

Poznámka: Předpokládejte, že v tunelu je vzduchoprázdno, že Země je homogenní koule a zanedbejte rotaci Země.

### 2.3 Příklad č.3 dle [3]

Vypočítejte, v jaké výšce nad rovníkem se pohybuje geostacionární družice (tj. družice, která se pohybuje stále nad stejným místem Země).

### 3 Použitá literatura

[1] Motyl, květina a Slunce. In: *Sbírka řešených úloh z fyziky* [online]. 2016 [cit. 2016-09-16]. Dostupné z: <http://reseneulohy.cz/1246/motyl,-kvetina-a-slunce>

[2] Skryš pro oříšek. In: *Sbírka řešených úloh z fyziky* [online]. 2016 [cit. 2016-09-16]. Dostupné z: <http://reseneulohy.cz/1215/skryš-pro-orisek>

[3] Výška družice. In: *Sbírka řešených úloh z fyziky* [online]. 2016 [cit. 2016-09-16]. Dostupné z: <http://reseneulohy.cz/204/vyska-druzice>

#### 4 Kontakt na autora

PhDr. Pavel Kratochvíl, Ph.D.

Západočeská univerzita v Plzni, Katedra matematiky, fyziky a technické výchovy

E-mail: [kratinek@kof.zcu.cz](mailto:kratinek@kof.zcu.cz)

## ŘEŠENÍ ÚLOH Z HYDROMECHANIKY

Pavel KRATOCHVÍL

### 1 Úvod

Přednáška se zabývala řešením úloh z hydromechaniky.

#### 2.1 Příklad č.1 dle [1]

Princip funkce barometru je tento: úzká skleněná, na jednom konci zatavená trubice délky 1 metr je částečně naplněna rtuťí a ponořena svisle do misky rovněž naplněné rtuťí.

Ráno, při teplotě  $0\text{ }^{\circ}\text{C}$ , sahá sloupec rtuťí v barometru do výšky  $h$ . V předpovědi počasí bylo právě uvedeno, že atmosférický tlak je  $99,7\text{ kPa}$  a tlaková tendence je setrvalá (tj. atmosférický tlak se během experimentu nemění).

Později sluníčko ohřeje povrch Země, od něhož se následně ohřeje i vzduch (a tedy i rtuť) na  $30\text{ }^{\circ}\text{C}$ . Jak se změní výška rtuťového sloupce v barometru?

Hustota rtuťí při  $0\text{ }^{\circ}\text{C}$  je  $13\,595\text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$  a při  $30\text{ }^{\circ}\text{C}$  je  $13\,521\text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$ .

#### 2.2 Příklad č.2 dle [2]

Otevřená cisterna, která má tvar komolého rotačního kužele s průměrem dolní podstavy  $1,2\text{ m}$  a úhlem mezi boční stěnou a svislicí  $30^{\circ}$ , je naplněna vodou do výšky  $3\text{ m}$ . Nad hladinou vody je tlak vzduchu  $0,1\text{ MPa}$ . Určete:

1. Objem a hmotnost vody v cisterně.
2. Tlak vody u dna cisterny.
3. Velikost síly, kterou působí voda na dno.
4. Velikost výsledné síly, kterou působí voda na kuželovou stěnu.

#### 2.3 Příklad č.3 dle [3]

Kapilára délky  $50\text{ cm}$  je uzavřená na obou koncích. Obsahuje vzduch, který je rtuťovým sloupcem délky  $10\text{ cm}$  rozdělen na dva vzduchové sloupce. Pokud je kapilára ve vertikální poloze, pak jsou vzduchové sloupce dlouhé  $15\text{ cm}$  a  $25\text{ cm}$ . Umístíme-li kapiláru do horizontální polohy, bude délka obou vzduchových sloupců  $20\text{ cm}$ .

Jaký je tlak vzduchu v kapiláře, když je v horizontální poloze?



## INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

### 2.4 Příklad č.4 dle [4]

Zlatý předmět má na vzduchu hmotnost 96,25 g. Ponořen ve vodě je vyvážen závažím o hmotnosti 90,25 g. Rozhodněte, zda je předmět dutý. Pokud ano, určete objem dutiny. Hustota zlata je  $19,25 \text{ g}\cdot\text{cm}^{-3}$ .

### 2.5 Příklad č.5 dle [5]

Nádoba má ve stěně vyvrtány dva otvory, jeden ve výšce  $h_1$  ode dna a druhý ve výšce  $h_2$ . V jaké výšce  $h$  musí být hladina vody v nádobě, chceme-li, aby voda z obou otvorů stříkala do stejné vzdálenosti  $x$ ? Odpor vzduchu zanedbejte.

Řešte nejprve obecně a potom pro hodnoty  $h_1 = 10 \text{ cm}$  a  $h_2 = 30 \text{ cm}$ .

### 3 Použitá literatura

- [1] Počítání s barometrem. In: *Sbírka řešených úloh z fyziky* [online]. 2016 [cit. 2016-09-16]. Dostupné z: <http://reseneulohy.cz/998/pocitani-s-barometrem>
- [2] Cisterna ve tvaru komolého kužele. In: *Sbírka řešených úloh z fyziky* [online]. 2016 [cit. 2016-09-16]. Dostupné z: <http://reseneulohy.cz/1002/cisterna-ve-tvaru-komoleho-kuzele>
- [3] Kapilára s rtutí. In: *Sbírka řešených úloh z fyziky* [online]. 2016 [cit. 2016-09-16]. Dostupné z: <http://reseneulohy.cz/1155/kapilara-s-rtuti>
- [4] Zlato vyvážené závažím. In: *Sbírka řešených úloh z fyziky* [online]. 2016 [cit. 2016-09-16]. Dostupné z: <http://reseneulohy.cz/1034/zlato-vyvazene-zavazim>
- [5] Voda stříkající z nádoby. In: *Sbírka řešených úloh z fyziky* [online]. 2016 [cit. 2016-09-16]. Dostupné z: <http://reseneulohy.cz/925/voda-strikajici-z-nadoby>

### 4 Kontakt na autora

PhDr. Pavel Kratochvíl, Ph.D.

Západočeská univerzita v Plzni, Katedra matematiky, fyziky a technické výchovy

E-mail: [kratinek@kof.zcu.cz](mailto:kratinek@kof.zcu.cz)

## ZAJÍMAVÉ EXPERIMENTY

Pavel KRATOCHVÍL

### 1 Úvod

Na této pracovní hodině si studenti mohli vyzkoušet focení metodou „pinhole“, postavit „da Vinciho most“ nebo most z novinových ruliček.

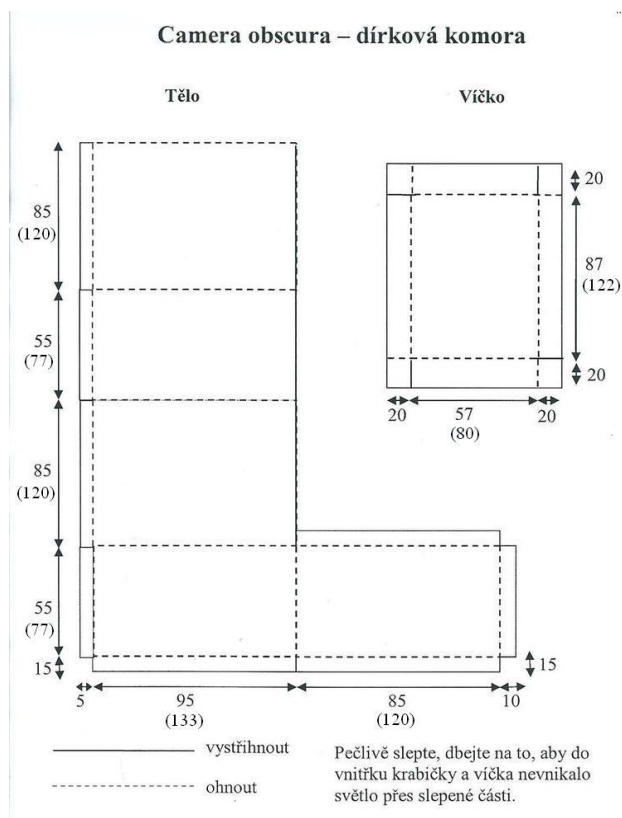
Středisko služeb školám, Plzeň, Částkova 78  
Podpora talentovaných žáků v Plzeňském kraji  
CZ.1.07/1.2.03/02.0001

Tento projekt je v letech 2012-16 financován z rozpočtu Plzeňského kraje

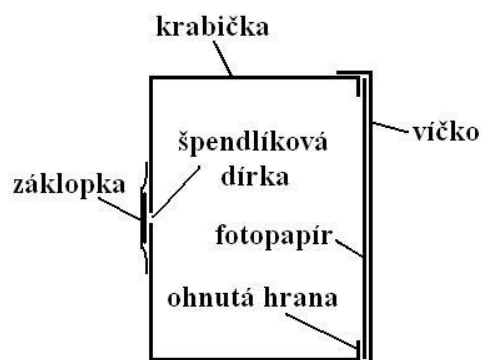
INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

## 2.2 Focení metodou „pinhole“

Vystříhnete a slepte z černé čtvrtky pinole krabičku (obr. 1, obr. 2). Do přední stěny udělejte špendlíkem díрку. Do víčka, které tvoří zadní stěnu, vložte fotografický papír. Nechte zhruba jednu minutu exponovat (podle světelných podmínek). A fotografii vyvolejte.



Obr. 1

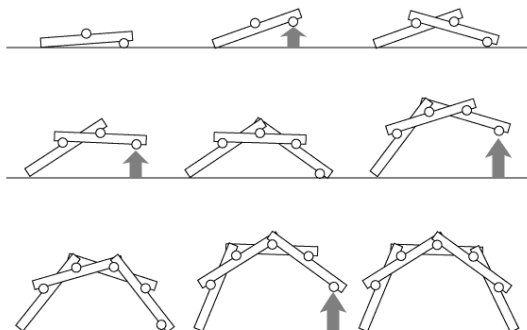


Obr. 2

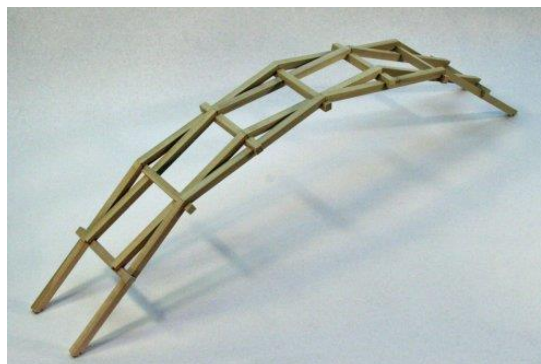
INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

### 2.3 Stavba da Vinciho mostu

Dřevěná prkýnka je možné skládat různými způsoby. Jeden z nich je zachycen na obr. 3 a obr. 4.



Obr. 3



Obr.43

<http://ask.metafilter.com/38289/How-to-build-da-Vincis-selfsupporting-bridge>

<http://ecx.images-amazon.com/images/I/41ExcEIGhIL.jpg>

### 2.2 Stavba mostů z novinových ruliček

Základním stavebním kamenem je list novin smotaný do ruličky. Z těch je možné skládat a lepit různé mostové konstrukce. Například příhradový most nebo zavěšená lávka. Úkolem je co největší nosnost mostu.

### 4 Kontakt na autora

PhDr. Pavel Kratochvíl, Ph.D.

Západočeská univerzita v Plzni, Katedra matematiky, fyziky a technické výchovy

E-mail: [kratinek@kof.zcu.cz](mailto:kratinek@kof.zcu.cz)

## KIRCHHOFFOVY ZÁKONY

Pavel MASOPUST

### 1 Úvod

Přednáška ukázala, jak pomocí Kirchhoffových zákonů řešit základní úlohy teorie obvodů. Zmíněna byla i aplikace pro výpočet střídavých obvodů a přechodových jevů v obvodech s kondenzátory.

O zákonech lze nalézt mnoho informací jak v odborné literatuře, tak na internetu. V použité literatuře je seznam počítaných příkladů i teorie v množství dostatečném k dokonalému pochopení přednesené problematiky. Především [1] obsahuje mnoho multimediálních materiálů a komentovaných příkladů.

### 2 Použitá literatura

[1] REICHL J., *Kirchhoffovy zákony*, [Online], [cit. 1. 9. 2016],

Dostupné na internetu: <<http://fyzika.jreichl.com/index.php?page=257&sekce=browse>>

[2] SVOBODA J., *Kirchhoff's Laws*, [Online], [cit. 1. 9. 2016],

Dostupné na internetu:

<[http://people.clarkson.edu/~jsvoboda/Syllabi/ES250/ckts/KCL\\_KVL.pdf](http://people.clarkson.edu/~jsvoboda/Syllabi/ES250/ckts/KCL_KVL.pdf)>

[3] Wikipedie, *Kirchhoffovy zákony*, [Online], [cit. 2. 9. 2016],

Dostupné na internetu: <[http://cs.wikipedia.org/wiki/Kirchhoffovy\\_z%C3%A1kony](http://cs.wikipedia.org/wiki/Kirchhoffovy_z%C3%A1kony)>

### 3 Kontakt na autora

PhDr. Pavel Masopust, PhD.

ZČU, FPE, katedra matematiky, fyziky a technické výchovy

Klatovská 51, Plzeň

pmasop@kmt.zcu.cz

## OHMŮV ZÁKON

Pavel MASOPUST

### 1 Úvod

Dvoudílná přednáška se věnovala známému Ohmovu zákonu. Přednáška postupovala od Coulombova zákona a od silového působení elektrického pole na nabitě částice, které jsou tímto působením urychlované. Analýzou vnitřních poměrů ve vodiči byla nalezena souvislost mezi elektrickým odporem a objemovou koncentrací nosičů elektrického náboje, jejich

## INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

nábojem, střední dobou mezi srážkami. Odvozen byl Ohmův zákon v diferenciálním tvaru a diskutováno bylo, jak tento tvar souvisí se známějším integrálním tvarem. Na základě tohoto teoretického výkladu byly počítány modelové příklady. Přednáška byla doprovázena několika experimenty.

### 2 Závěr

Přednáška ukázala odvození Ohmova zákona a jeho aplikaci při výpočtech i měření.

### 3 Použitá literatura

[1] LIAO S., DOURMASHKIN P., BELCHER J., *Fyzika 8.02: Elektrina a magnetismus*, [Online], [cit. 1. 9. 2016],

Dostupné na internetu: < <http://www.aldebaran.cz/elmg/kurz.html> >

[2] HALLIDAY, D., RESNICK, R., WALKER, J., *FYZIKA*. Prometheus, 2000, ISBN 81-7196-213-9

### 4 Kontakt na autora

PhDr. Pavel Masopust, PhD.

ZČU, FPE, katedra matematiky, fyziky a technické výchovy

Klatovská 51, Plzeň

pmasop@kmt.zcu.cz

## FYZIKA V POHÁDKÁCH

Pavel MASOPUST

### 1 Úvod

Úvodní přednáška kempu se věnovala fyzice, kterou je možné nalézt ve známých pohádkách. Fyzikální rozbor se věnoval pohádkám:

### 2 Mrazík

V Mrazíkovi byly analyzovány dvě pasáže. První se týkala Ivánkova odhození loupežnických klacků tak, že se vrátily až za 200 dnů. Vrh byl modelován jako vrh svislý vzhůru v neproměnném i v proměnném tíhovém poli. Citát z pohádky o tom, že Ivánek musel mít ukrutnou sílu, se ukázal jako nanejvýš pravdivý.

Druhá analyzovaná část se dotýkala Nastěncina doplétání punčochy. Nastěnka zde „přemluví“ Slunéčko jasné, aby ještě nevycházelo, neb ji stihne krutý trest. Jaké možnosti k obrácení vycházejícího Slunce Nastěnka měla, probrala další část přednášky. Ukázalo se, že Nastěnka by musela být ještě daleko výkonnější, než Ivánek.

Středisko služeb školám, Plzeň, Částkova 78  
Podpora talentovaných žáků v Plzeňském kraji  
CZ.1.07/1.2.03/02.0001

Tento projekt je v letech 2012-16 financován z rozpočtu Plzeňského kraje

## INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

### 2.1 Tři oříšky pro Popelku

Ve známé scéně nahlíží Popelka zamrzlým oknem do sálu a předtím oškrabává zvenku namrzlé okno. Jaké asi musely uvnitř sálu panovat teplotní poměry hodnotila další část přednášky. Mluvílo se o pojmech jako desublimace, rosný bod, apod.

### 2.2 Císařův pekař – Pekařův císař

„Záleží na tom, jak se do toho třískne“, říká v pohádce Josef Kemr. To, jak by se do toho muselo třísknout, zkoumala třetí část přednášky. Jakou kinetickou energii by musela mít železná palice, aby se po dopadu na olovo spustila jaderná reakce a bylo vyrobeno zlato? Co s radioaktivní mědí, která by při procesu vznikla?

### 2.3. Tři veteráni

Princezna sní plody z Frňákovníku a začne se jí zvětšovat nos. Jakou by měl nos hmotnost, jakou rychlostí se pohyboval, kolik energie by vyzářil kdybychom jej modelovali jako absolutně černé těleso, bylo by možné takovým nosem nasát kapalinu tak, jak jsme to viděli v pohádce? I toto z pohledu fyziky přednáška hodnotila.

### 3 Závěr

Přednáška se snažila humornou formou fyzikálně analyzovat několik známých pohádek a ověřit, jak moc se v nich zobrazené děje s fyzikou rozcházejí.

### 4 Použitá literatura

[1] HALLIDAY, D., RESNICK, R., WALKER, J., *FYZIKA*. Prometheus, 2000, ISBN 81-7196-213-9

### 5 Kontakt na autora

PhDr. Pavel Masopust, PhD.

ZČU, FPE, katedra matematiky, fyziky a technické výchovy

Klatovská 51, Plzeň

pmasop@kmt.zcu.cz



## ŘEŠENÍ VYBRANÝCH ÚLOH ŠKOLNÍCH KOL FO

Petr Mazanec

### 1 Úvod

V přednášce bylo ukázáno řešení úloh z minulých ročníků fyzikální olympiády.

### 2 Stať

#### Příklad 1 (51.ročník FO kategorie A – školní kolo)

Automobil (za jízdy po přímé trati)

Automobil má motor o maximálním výkonu  $P_m = 95 \text{ kW}$  a jeho hmotnost s jednou osobou je  $m = 1000 \text{ kg}$ . K uvedení do pohybu odbrzděného automobilu se zařazeným neutrálem na vodorovné silnici musel přivolaný pomocník vyvinout ve vodorovném směru sílu o velikosti  $F_0 = 120 \text{ N}$ . Předpokládejte, že velikost odporové síly je popsána funkcí

$$F_t = Av^2 + F_0,$$

kde  $A$  je konstanta a  $v$  je velikost okamžité rychlosti.

- Řidič provedl experiment: vyjel na vrchol kopce, z něhož se přímočarý vozovka svažuje pod stálým úhlem  $\alpha = 4,0^\circ$ . Automobil po rozjezdu z kopce a po zařazení neutrálu dosáhl stálé rychlosti  $v_1 = 72 \text{ km/h}$ . Určete konstantu  $A$ .
- Jaký musí být výkon  $P_1$  motoru, aby se automobil pohyboval stálou rychlostí  $v_1 = 72 \text{ km/h}$  po vodorovné vozovce?
- Při jízdě stálou rychlostí musí motor pracovat se stálým výkonem. Sestrojte graf závislosti výkonu  $P$  motoru na rychlosti  $v$  a určete maximální rychlost  $v_m$  při výkonu  $P_m$ .

**Řešení:**

- Auto jelo rovnoměrně přímočaře stálou rychlostí z kopce dolů, protože složka tíhové síly  $F = mg \sin \alpha$  je v rovnováze s odporovou silou  $F_t$ .

$$F = F_t$$

$$mg \sin \alpha = Av_1^2 + F_0$$

$$A = \frac{mg \sin \alpha - F_0}{v_1^2} = 1,41 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-1}$$

$$\text{b) Okamžitý výkon } P_1 = F_t v_1 = (Av_1^2 + F_0) \cdot v_1 = v_1 mg \sin \alpha = 14 \text{ kW}$$

Středisko služeb školám, Plzeň, Částkova 78  
Podpora talentovaných žáků v Plzeňském kraji  
CZ.1.07/1.2.03/02.0001

Tento projekt je v letech 2012-16 financován z rozpočtu Plzeňského kraje

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

- c) Výkon motoru  $P = F_t v = (Av^2 + F_0) \cdot v = Av^3 + F_0 v$   
je kubickou funkcí rychlosti  $v$ .  
Pomocí grafu funkce a její tabulky můžeme numericky zjistit, že  
 $P = P_m = 95 \text{ kW}$   
při maximální rychlosti  $v = v_m = 40 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} = 144 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$ .

**Příklad 2 (51.ročník FO kategorie B – školní kolo)**

2. Pohyby v planetární soustavě

O planetě Mars zjistili astronomové na základě měření z povrchu Země, že siderická doba oběhu Marsu je  $T_M = 1,881$  roku. V úloze vystačíme při řešení problémů s modelem, v němž se obě planety pohybují po kružnicích, jejichž střed splývá se středem Slunce.

- Určete poloměr kružnice, po níž se pohybuje střed Marsu, a rychlost pohybu středů obou planet při jejich pohybu kolem středu Slunce.
- Z údajů o pohybu Marsu kolem Slunce určete hmotnost Slunce.
- Jestliže se středy Slunce, Země a Marsu dostanou přibližně do téže polo-přímky, pak právě o půlnoci začneme naše pozorování. Za jak dlouho se tato situace bude opakovat? Tato doba se nazývá synodická oběžná doba.

**Řešení:**

- a) Podle 3. Keplerova zákona platí

$$\left(\frac{r_m}{r_z}\right)^3 = \left(\frac{T_m}{T_z}\right)^2$$

$$r_m = r_z \cdot \left(\frac{T_m}{T_z}\right)^{\frac{2}{3}} = 1,524 \text{ AU}$$

$$v_m = \frac{2\pi r_m}{T_m} = 24,1 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1}$$

$$v_z = \frac{2\pi r_z}{T_z} = 29,8 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1}$$

- b) Gravitační síla, kterou působí Slunce o hmotnosti  $M$  na Mars o hmotnosti  $m$  je silou dostředivou, která způsobuje pohyb Marsu po kružnici o poloměru  $r = r_m$  stálou rychlostí  $v = v_m$ .

$$F_g = F_d$$

$$\frac{\kappa m M}{r^2} = \frac{m v^2}{r}$$

$$M = \frac{v^2 r}{\kappa} = 1,99 \cdot 10^{30} \text{ kg}$$

- c) Synodická úhlová rychlost je rovna rozdílu úhlových rychlostí Země a Marsu při oběhu kolem Slunce. Synodická oběžná doba odpovídá této úhlové rychlosti a je to perioda dvou po sobě jdoucích opozic nebo konjunkcí Marsu a Země se Sluncem, kterou naměří pozorovatel na Zemi.

$$\omega_s = \omega_z - \omega_m$$

$$T_s = \frac{T_z \cdot T_m}{T_m - T_z} = 2,135 \text{ roku}$$

### Příklad 3 (51.ročník FO kategorie C – školní kolo)

#### 1. Macocha

Z okraje vyhlídkové plošiny Macochy vrhl chlapec svisle dolů kámen s počáteční rychlostí o velikosti  $5,0 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ . Za dobu  $5,20 \text{ s}$  od začátku vrhu byl slyšet dopad kamene na vodní hladinu. K vrhu došlo při teplotě vzduchu  $20 \text{ }^\circ\text{C}$ , při níž se zvuk ve vzduchu šíří rychlostí  $343 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ . Určete

- výšku horního okraje propasti nad vodní hladinou a dobu od začátku vrhu, za kterou dopadl kámen na vodní hladinu,
- velikost rychlosti, s jakou dopadl kámen do vody.

Odpor vzduchu zanedbejte.

**Řešení:**

**Kámen při pádu s počáteční rychlostí  $v_0$  padal do propasti po dobu  $t_1$  na dráze  $s = h$  a při dopadu do vody měl rychlost  $v$ . Pro jeho dráhu a rychlost platí:**

$$v = v_0 + gt_1$$

$$s = h = v_0 t_1 + \frac{gt_1^2}{2}$$

Po nárazu kamene na hladinu vody se šíří vzduch k chlapci rychlostí  $v_1$  rovnoměrně přímočaře po stejné dráze

$$s = h = v_1 \cdot t_2$$

kde  $t_2$  je doba pohybu zvukové vlny k chlapci.

Ze zadání plyne, že  $t_1 + t_2 = t = 5,20s$  .

Matematickým řešením výše uvedených rovnic ( 3 lineární a 1 kvadratická) vypočteme všechny neznámé veličiny:

$$t_1 = 4,80s \quad t_2 = 0,40s \quad h = 140m \quad v = 52m \cdot s^{-1} = 187km \cdot h^{-1}$$

### 3 Závěr

Bylo provedeno řešení tří fyzikálních úloh, zadaných v 51. ročníku této soutěže v kategoriích A, B a C ve školním kole.

### 4 Použitá literatura

Zadání školního kola FO v 51.ročníku této soutěže, www-stránky ÚV FO

### 5 Kontakt na autora

Mgr. Petr Mazanec  
Gymnázium, Plzeň, Mikulášské nám. 23  
pmazanec@mikulasske.cz

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

## VYUŽITÍ MATEMATIKY VE FYZICE 1

Petr Mazanec

### 1 Úvod

V přednášce byly ukázány 2 příklady fyzikálních dějů s exponenciální závislostí.

### 2 Stat'

#### Příklad 1 (teplotní délková roztažnost tyče)

Odvoďte závislost délky  $l$  tyče na její teplotě  $t$ , jestliže při teplotě  $t_0$  má tyč délku  $l_0$ .

Řešení:

Změna délky tyče  $\Delta l$  je přímo úměrná změně teploty  $\Delta t$  a původní délce tyče  $l$ .

$$\Delta l = \alpha \Delta t$$

Koeficient přímé úměrnosti  $\alpha$  je součinitel teplotní délkové roztažnosti materiálu tyče. Tento vztah platí pro malé změny obou veličin ( $\Delta l \rightarrow 0$   $\alpha \Delta t \rightarrow 0$ ). V tomto případě můžeme změny nahradit diferenciály a dostaneme diferenciální rovnici, kterou vyřešíme separací proměnných a dvěma určitými integrály:

$$dl = \alpha \cdot l \cdot dt$$

$$\int_{l_0}^l \frac{dl}{l} = \alpha \cdot \int_{t_0}^t dt$$

$$[\ln l]_{l_0}^l = \alpha \cdot [t]_{t_0}^t$$

$$\ln l - \ln l_0 = \alpha(t - t_0) = \alpha \Delta t$$

$$\ln \left( \frac{l}{l_0} \right) = \alpha \Delta t = x$$

Veličina  $x$  je bezrozměrná veličina.

$$\frac{l}{l_0} = e^x$$

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Hledaná závislost tedy je exponenciální a rostoucí (tyč se při zahřívání prodlužuje a při ochlazování zkracuje).

$$l = l_0 \cdot e^x = l_0 \cdot e^{\alpha \Delta t}$$

Součinitel  $\alpha \approx 10^{-5} K^{-1}$  a pro  $\Delta t = \Delta T \in \langle -100K; +100K \rangle$  je  $x \in \langle -0,001; 0,001 \rangle$ .

Protože je  $x \rightarrow 0$ , bude platit velmi dobře i původní rovnice pro změny

$$\Delta l = l - l_0 \quad a \quad \Delta t = t - t_0$$

$$l - l_0 = \alpha l_0 \Delta t$$

Úpravou dostaneme jednoduchý vztah lineární

$$l = l_0 \cdot (1 + \alpha \Delta t) = l_0 \cdot (1 + x)$$

Porovnáním přesné exponenciální a přibližné lineární závislosti dostáváme

$$e^x \approx 1 + x \quad \text{pro } x \rightarrow 0$$

Přímka o rovnici  $y = 1 + x$  je tečnou exponenciální křivky  $y = e^x$  v bodě  $x = 0$ .

Kvádr má při teplotě  $t_0$  objem  $V_0 = a_0 b_0 c_0$ . Potom při teplotě  $t$  má objem

$$V = abc = a_0 \cdot e^x \cdot b_0 \cdot e^x \cdot c_0 \cdot e^x = V_0 \cdot e^{3x}$$

$$V = V_0 \cdot e^{3\alpha \Delta t} = V_0 \cdot e^{\beta \Delta t} \quad \beta = 3\alpha$$

Pro malé teplotní změny objemu můžeme odvodit jednodušší vztah:

$$e^{3x} = (e^x)^3 \approx (1 + x)^3 = 1 + 3x + 3x^2 + x^3 \approx 1 + 3x$$

Vyšší mocniny  $x$  můžeme zanedbat ( $x \rightarrow 0 \Rightarrow x^2 \rightarrow 0 \Rightarrow x^3 \rightarrow 0$ ) a funkci linearizovat pro malá  $x$ , blížíci se k nule.

Přímka o rovnici  $y = 1 + 3x$  je tečnou exponenciální křivky  $y = e^{3x}$  v bodě  $x = 0$ .

Tyto dva výsledky jdou zobecnit na větu:

Přímka o rovnici  $y = 1 + kx$  je tečnou exponenciální křivky  $y = e^{kx}$  v bodě  $x = 0$ .

$$e^{kx} \approx 1 + kx \quad \text{pro } x \rightarrow 0 \quad a \quad \text{pro } k \in R$$

Pro malá  $x$  tedy platí:



$$V = V_0 \cdot (1 + \beta \Delta t) \quad \beta = 3\alpha$$

### Příklad 2 (radioaktivní rozpad jader atomů)

Odvoďte závislost počtu nerozpadlých jader  $N$  radioaktivního materiálu na čase  $t$ , jestliže na začátku pozorování v čase  $t = 0$  byl počet nerozpadlých jader ve vzorku  $N_0$  a poločas rozpadu je  $T$ .

**Řešení:**

**Za poločas rozpadu klesne původní počet jader na poloviční počet, protože druhá polovina jader se rozpadla rozpadem  $\alpha$  nebo  $\beta$ . Potom platí:**

$$t = 0 \rightarrow N = N_0$$

$$t = T \rightarrow N = \frac{N_0}{2}$$

$$t = 2T \rightarrow N = \frac{N_0}{4}$$

$$t = 3T \rightarrow N = \frac{N_0}{8}$$

$$t = kT \quad \Rightarrow \quad N = \frac{N_0}{2^k} = N_0 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^k = N_0 \cdot 2^{-k} \quad k = \frac{t}{T}$$

**Po dosazení dostaneme zákon radioaktivního rozpadu:**

$$N = N_0 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{T}} = N_0 \cdot 2^{-\frac{t}{T}}$$

**Počet nerozpadlých jader exponenciálně klesá s časem. Počet rozpadlých jader  $x$  v čase  $t$  je  $x = N_0 - N = -\Delta N$ .**

**Ted' odvodíme stejný zákon řešením diferenciální rovnice. Počet  $x$  rozpadlých jader za malý časový interval  $\Delta t$  je přímo úměrný původnímu počtu jader a délce časového intervalu.**

## INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

$$x = -\Delta N = \lambda \cdot N \cdot \Delta t$$

$\lambda$  je rozpadová konstanta radionuklidu.

Tento vztah opět platí pro malé změny obou veličin ( $\Delta N \rightarrow 0$  a  $\Delta t \rightarrow 0$ ). V tomto případě můžeme změny nahradit diferenciály a dostaneme diferenciální rovnici, kterou vyřešíme separací proměnných a dvěma určitými integrály:

$$dN = -\lambda \cdot N \cdot dt$$

$$\int_{N_0}^N \frac{dN}{N} = -\lambda \cdot \int_0^t dt$$

$$[\ln N]_{N_0}^N = -\lambda \cdot [t]_0^t$$

$$\ln \left( \frac{N}{N_0} \right) = -\lambda t = -x$$

$$N = N_0 \cdot e^{-x} = N_0 \cdot e^{-\lambda t}$$

Dostali jsme vyjádření rozpadového zákona pomocí přirozené exponenciální funkce. Platí tedy exponenciální závislost pro  $t > 0$ .

$$N_0 \cdot 2^{-\frac{t}{T}} = N_0 \cdot e^{-\lambda t}$$

$$2^{-\frac{t}{T}} = e^{-\lambda t}$$

Obě strany rovnosti zlogaritmujeme přirozeným logaritmem:

$$\ln \left( 2^{-\frac{t}{T}} \right) = \ln \left( e^{-\lambda t} \right)$$

$$-\frac{t}{T} \cdot \ln 2 = -\lambda t$$

$$\lambda = \frac{\ln 2}{T}$$



INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Úpravou jsme dostali vztah mezi poločasem rozpadu a rozpadovou konstantou.

$$\text{Závěr: } N = N_0 \cdot 2^{-\frac{t}{T}} = N_0 \cdot e^{-\lambda t} \quad \lambda = \frac{\ln 2}{T}$$

### 3 Závěr

Na příkladech teplotní roztažnosti a radioaktivního rozpadu jsme ukázali rostoucí a klesající exponenciální závislost mezi fyzikálními veličinami a řešení diferenciální rovnice  $dy = k \cdot y \cdot dt$  separací proměnných.

### 4 Použitá literatura:

časopis Kvant, číslo 12, ročník 1972

### 5 Kontakt na autora:

Mgr. Petr Mazanec  
Gymnázium, Plzeň, Mikulášské nám. 23  
pmazanec@mikulasske.cz

Středisko služeb školám, Plzeň, Částkova 78  
Podpora talentovaných žáků v Plzeňském kraji  
CZ.1.07/1.2.03/02.0001

Tento projekt je v letech 2012-16 financován z rozpočtu Plzeňského kraje

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

## VYUŽITÍ MATEMATIKY VE FYZICE 2

Petr Mazanec

### 1 Úvod

V přednášce bylo ukázáno využití matematického řešení kvadratických, exponenciálních a goniometrických rovnic při řešení fyzikálních úloh.

### 2. Stat'

#### Příklad 1

Kaskadér o hmotnosti  $m=90$  kg, přivázaný k pružnému lanu, používanému na bungee-jumping, o tuhosti  $k=50\text{N/m}$  a délce v nezatíženém stavu  $l=30\text{m}$ , skáče z vrcholu mostu, který je ve výšce  $h$  nad hladinou přehrady. Určete tuto výšku, jestliže ho pružné lano při pádu zastaví těsně nad hladinou a pak ho vymrští zpět nahoru. Zanedbejte odpor vzduchu při prvním pádu a předpokládejte, že lano při deformaci vyhovuje Hookovu zákonu.

Řešení:

Úlohu vyřešíme užitím zákona zachování mechanické energie, který platí při zanedbání odporu vzduchu.

Polohová energie kaskadéra v tíhovém poli Země na začátku pádu v poloze 1 se přemění na polohovou energii deformovaného lana v nejnižší poloze 2 při pádu brzděném natahujícím se pružným lanem. Nulovou hladinu polohové energie v tíhovém poli země volíme v poloze 2. V obou polohách je kinetická energie kaskadéra nulová.

Tedy platí:

$$E_1 = E_2$$

$$mgh = \frac{kx^2}{2}$$

Z geometrie obou poloh vyplývá vztah  $h = l + x$ , jehož dosazením do předchozí rovnice dostaneme kvadratickou rovnici pro prodloužení lana  $x$  při deformaci v poloze 2.

$$kx^2 - 2mgx - 2mgl = 0$$

Podmínka pro neznámé prodloužení  $x$  je

$$x > 0$$

Obecně můžeme řešení vyjádřit ve tvaru

$$x_{1,2} = \frac{mg \pm \sqrt{m^2 g^2 + 2mgkl}}{k}$$

Číselně vychází při dosazení  $g = 9,81 \text{ ms}^{-2}$

$$x_1 = 54,7 \text{ m} \quad x_2 = -19,4 \text{ m}$$

Záporné řešení nesplňuje podmínku pro prodloužení a nemá fyzikální smysl, protože lano se nemůže při kmitu směrem vzhůru zkracovat.

Tedy maximální prodloužení lana je  $x = 54,7 \text{ m}$  a výška mostu  
 $h = l + x = 30 \text{ m} + 54,7 \text{ m} = 84,7 \text{ m}$ .

### Příklad 2

Odpor termistoru v digitálním teploměru s měřicím rozsahem  $t \in \langle 0^\circ\text{C}; 100^\circ\text{C} \rangle$  je funkcí termodynamické teploty čidla  $T$  v kelvinech podle vztahu

$$R = R_B \cdot e^{\frac{B}{T}}$$

kde  $B$  a  $R_B$  jsou konstanty pro daný polovodičový materiál. Při teplotě  $25^\circ\text{C}$  jsme naměřili odpor termistoru  $100\Omega$  a při teplotě  $25^\circ\text{C}$  odpor  $40\Omega$ . Vypočítejte :

- konstanty  $B$  a  $R_B$
- odpor termistoru při teplotě  $100^\circ\text{C}$
- teplotu ve  $^\circ\text{C}$ , při které má termistor odpor  $50\Omega$

Řešení:

Využijeme funkční předpis a matematického vztahu  $\ln(e^x) = x$ .

$$R_0 = R_B \cdot e^{\frac{B}{T_1}} \quad T_1 = 273,15 \text{ K}$$

$$R_{25} = R_B \cdot e^{\frac{B}{T_2}} \quad T_2 = 298,15 \text{ K}$$

$$R_{100} = R_B \cdot e^{\frac{B}{T_3}} \quad T_3 = 373,15 \text{ K}$$

$$R = R_B \cdot e^{\frac{B}{T}} \quad T \in \langle 273,15 \text{ K}; 373,15 \text{ K} \rangle \quad t = T - 273,15$$

Vydělením první a druhé rovnice dostaneme

$$\frac{R_0}{R_{25}} = e^x \quad \text{kde } x = \frac{B \cdot (T_2 - T_1)}{T_2 \cdot T_1}$$

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Řešením této exponenciální rovnice logaritmováním obou stran rovnice přirozeným logaritmem podle výše uvedeného matematického vztahu dostaneme

$$x = \ln\left(\frac{R_0}{R_{25}}\right)$$

$$B = \frac{T_2 \cdot T_1}{T_2 - T_1} \cdot \ln\left(\frac{R_0}{R_{25}}\right)$$

Číselně vychází  $B = 2985\text{K}$ .

Užitím B z první rovnice vyjádříme pomocí vztahu  $\frac{1}{e^x} = e^{-x}$

$$R_B = \frac{R_0}{e^{\frac{B}{T_1}}} = R_0 \cdot e^{\frac{-B}{T_1}}$$

Číselně vychází  $R_B = 1,795 \cdot 10^{-3} \Omega$ .

Dosazením B a  $R_B$  do třetí rovnice vypočítáme  $R_{100} = 5,3 \Omega$ .

Z funkčního předpisu vyjádříme

$$\frac{R}{R_R} = e^x \quad \text{kde } x = \frac{B}{T}$$

Řešením této exponenciální rovnice dostáváme

$$x = \ln\left(\frac{R}{R_R}\right)$$

$$T = \frac{B}{\ln\left(\frac{R}{R_B}\right)}$$

$$t = \frac{B}{\ln\left(\frac{R}{R_B}\right)} - 273,15$$

Číselně pro  $R=50\Omega$  dostaneme  $t = 18,5^\circ\text{C}$ .

### Příklad 3

Za jakou dobu  $t$  od počátku pádu se kaskadér v příkladu 1 dostane do nejnižší polohy, jestliže opět v tomto časovém intervalu zanedbáme odpor vzduchu?



INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

**Řešení:**

Pád můžeme rozdělit na 2 úseky – volný pád na dráze  $l = 30\text{m}$  než se napne lano za dobu  $t_1$  a na něj navazující část netlumeného kmitu na dráze  $x_1 = 54,7\text{m}$  za dobu  $t_2$ .  
Celková doba pádu  $t = t_1 + t_2$ .

Ze vztahu pro dráhu volného pádu dostaneme

$$l = \frac{gt_1^2}{2}$$

$$t_1 = \sqrt{\frac{2l}{g}} = 2,47\text{s}$$

Těsně před napnutím lana má okamžitou rychlost  $v_1 = gt_1 = 24,26\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$ .

Kmity kaskadéra se díky odporu vzduchu nakonec utlumí, a zůstane v klidu viset v rovnovážné poloze s prodloužením lana  $x_0$ . V této poloze je tíhová síla svisle dolů v rovnováze se silou pružiny svisle vzhůru. Z toho odvodíme velikost  $x_0$ .

$$F_G = F_P$$

$$mg = kx_0$$

$$x_0 = \frac{mg}{k} = 17,7\text{m}$$

V této rovnovážné poloze je okamžitá výchylka  $y$  z této polohy při kmitání nulová. Pokud orientujeme osu  $y$  svisle vzhůru, můžeme okamžitou výchylku  $y$  v čase  $t$  od začátku kmitu vyjádřit  $y = x_0 - x$ , kde  $x$  je okamžité prodloužení v čase  $t$ .

Považujeme-li část kmitu z polohy  $x = 0$  do polohy  $x = x_1 = 54,7\text{m}$  za netlumený kmit přes rovnovážnou polohu  $x = x_0 = 17,7\text{m}$ , potom jeho amplituda výchylky je  $y_m = x_1 - x_0 = 37\text{m}$ .

Perioda netlumeného kmitu je

$$T = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{m}{k}} = 8,43\text{s}$$

a úhlová frekvence netlumených kmitů  $\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{\sqrt{5}}{3} \text{rad} \cdot \text{s}^{-1}$ .

Počáteční výchylka kmitajícího kaskadéra v čase  $t = 0$  je

$$y_0 = x_0 = 17,7\text{m} \text{ a počáteční rychlost kmitání } v_0 = -v_1 = -24,26\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$$

( $v_0$  má opačný směr než osa  $y$ , a proto je záporná!).

$$\text{Amplituda rychlosti } v_m = \omega y_m = 27,58\text{m} \cdot \text{s}^{-1}.$$

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Pro okamžitou výchylku  $y$  a okamžitou rychlost  $v$  v kaskadéra při netlumeném kmitání platí tyto vztahy v závislosti na čase  $t$ :

$$y = y_m \cdot \sin(\omega t + \varphi_0)$$

$$v = v_m \cdot \cos(\omega t + \varphi_0)$$

Dosazením  $t = 0$  a počátečních podmínek kmitu  $y_0$  a  $v_0$  dostaneme soustavu goniometrických rovnic pro počáteční fázi kmitu  $\varphi_0$ .

$$\sin\varphi_0 = \frac{y_0}{y_m} = 0,4784 \quad \cos\varphi_0 = \frac{v_0}{v_m} = -0,8796$$

Řešení této soustavy leží v intervalu  $(\frac{\pi}{2}; \pi)$  a je rovno přibližně  $\varphi_0 = 2,64 \text{ rad}$ .

Nyní již můžeme počítat dobu kmitu  $t_2$  od okamžiku  $t = 0$  do nejnižší polohy, kde  $y = -y_m = -37 \text{ m}$  a  $v = 0$ . Pro tyto hodnoty okamžité výchylky a rychlosti dostáváme soustavu goniometrických rovnic s neznámou  $t$  a  $t_2$  je nejmenší kladné řešení libovolné z těchto rovnic. Pro jednodušší výpočet si vybereme okamžitou rychlost, která je nulová v nejnižší poloze. Proto platí:

$$\cos(\omega t + \varphi_0) = 0$$

$$\omega t + \varphi_0 = \frac{\pi}{2} + k\pi \quad k \in \mathbb{Z}$$

Nejmenší kladné řešení dostaneme pro  $k = 1$ :

$$\omega t_2 + \varphi_0 = \frac{3\pi}{2}$$

$$t_2 = \frac{3\pi - 2\varphi_0}{2\omega} = 2,78 \text{ s}$$

Celková doba pádu do nejnižšího bodu je  $t = t_1 + t_2 = 2,47 \text{ s} + 2,78 \text{ s} = 5,25 \text{ s}$ .

### 3 Závěr

Ve třech příkladech bylo ukázáno využití matematického řešení kvadratických, exponenciálních a goniometrických rovnic ve fyzikálních úlohách.

### 4 Použitá literatura:

ŠEDIVÝ, P.: Teplotní závislosti fyzikálních veličin, knihovnička FO, studijní text

### 5 Kontakt na autora

Mgr. Petr Mazanec

Gymnázium, Plzeň, Mikulášské nám. 23

pmazanec@mikulasske.cz

Středisko služeb školám, Plzeň, Částkova 78  
Podpora talentovaných žáků v Plzeňském kraji  
CZ.1.07/1.2.03/02.0001

Tento projekt je v letech 2012-16 financován z rozpočtu Plzeňského kraje

**VYUŽITÍ MATEMATIKY VE FYZICE 3**

Petr Mazanec

**1 Úvod**

V přednášce byla ukázána na 2 fyzikálních úlohách souvislost součtu nekonečné řady a určitého integrálu.

**2 Stat'****Příklad 1**

Závislost okamžité rychlosti rovnoměrně zrychleného pohybu na čase je lineární funkcí

$$v = v_0 + at$$

V čase  $t = 0$  jsou počáteční podmínky  $v = v_0$  a  $s = 0$ .

Odvoďte funkční závislost dráhy  $s$  na čase  $t$ .

Řešení:

a) Součtem nekonečné řady

Časový interval

$\{0; t\}$  rozdělíme na  $n$  intervalů o délce  $\Delta t = \frac{t}{n}$  ( $n \in \mathbb{N}$ ).

Pokud je  $n$  dostatečně velké přirozené číslo ( $n \rightarrow \infty$ ), pak můžeme předpokládat že v těchto krátkých intervalech se rychlost téměř nezmění. Označme  $k$  pořadí intervalu od začátku pohybu ( $k \in \{1, 2, 3, \dots, n\}$ ).

Určíme rychlosti  $v_k$  a dráhy  $s_k = v_k \cdot \Delta t$  v těchto intervalech.

$$k = 1 \quad t = \Delta t \quad v_1 = v_0 + a\Delta t \quad s_1 = v_1 \cdot \Delta t$$

$$k = 2 \quad t = 2\Delta t \quad v_2 = v_0 + 2a\Delta t \quad s_2 = v_2 \cdot \Delta t$$

$$k = k \quad t = k\Delta t \quad v_k = v_0 + ka\Delta t \quad s_k = v_k \cdot \Delta t$$

·  
·  
·

Středisko služeb školám, Plzeň, Částkova 78  
Podpora talentovaných žáků v Plzeňském kraji  
CZ.1.07/1.2.03/02.0001

Tento projekt je v letech 2012-16 financován z rozpočtu Plzeňského kraje

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

$$k = n \quad t = n\Delta t \quad v_n = v_0 + na\Delta t \quad s_n = v_n \cdot \Delta t$$

Celkovou dráhu  $s(n)$  v intervalu  $(0; t)$  pro zvolené dělení  $n$  intervalu vypočteme

$$s(n) = s_1 + s_2 + \dots + s_k + \dots + s_n = \sum_{k=1}^n s_k = \Delta t \cdot \sum_{k=1}^n v_k$$

$$\sum_{k=1}^n v_k = \sum_{k=1}^n (v_0 + ka\Delta t) = \sum_{k=1}^n v_0 + a\Delta t \cdot \sum_{k=1}^n k = n v_0 + a\Delta t \cdot \frac{n(n+1)}{2}$$

Při výpočtu předchozího součtu jsme využili známý vzorec pro součet přirozených čísel od 1 do  $n$ :

$$\sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}$$

Z výše odvozených vztahů plyne:

$$s(n) = n v_0 \Delta t + a(\Delta t)^2 \cdot \frac{n(n+1)}{2}$$

Po dosazení za  $\Delta t = \frac{t}{n}$  a úpravě dostaneme

$$s(n) = v_0 t + at^2 \cdot \frac{n+1}{2n}$$

Výsledek bude tím přesnějším, čím bude číslo  $n$  větší (v limitě se musí blížit k  $\infty$ ).

Tedy celková dráha  $s = \lim_{n \rightarrow \infty} s(n) = v_0 t + at^2 \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{2n} = v_0 t + at^2 \cdot \frac{1}{2}$

Matematicky jsme provedli součet nekonečné řady pomocí limity poslounosti

$$f(n) = \frac{n+1}{2n} = \frac{1 + \frac{1}{n}}{2}$$

Z předchozí úpravy a z toho, že  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$  vyplývá, že  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(n) = \frac{1}{2}$ .

Závěr:  $s = v_0 t + \frac{at^2}{2}$

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Tato úvaha o součtu nekonečných řad velmi malých kladných čísel blížících se k nule dovedla Isaaca Newtona k objevu integrálního počtu.

b) Pomocí určitého integrálu

V zápise určitého integrálu je  $dt = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \Delta t$ . Určitý integrál funkce  $v(t)$  v mezích od 0 do  $t$  ( v intervalu  $\{0; t\}$  ) je roven součtu nekonečné řady v řešení a).

$$s = \int_0^t v \cdot dt = \int_0^t (v_0 + at) \cdot dt = v_0 \cdot \int_0^t dt + a \cdot \int_0^t t \cdot dt = v_0 \cdot [t]_0^t + a \cdot \left[ \frac{t^2}{2} \right]_0^t$$

$$\text{Závěr: } s = v_0 t + \frac{at^2}{2}$$

Využili jsme pravidla a vzorce pro výpočet určitého integrálu, při jejichž znalosti velmi rychle dojdeme ke stejnému výsledku.

Příklad 2

Tenká tyč o hmotnosti  $m$  a délce  $l$  leží na ose  $x$  s levým krajním bodem v počátku soustavy souřadnic a začne se otáčet kolem osy  $z$  úhlovou rychlostí  $\omega$  tak, že je stále kolmá na osu  $z$  ( $z$  je pevná osa otáčení a počátek je pevný bod tyče při otáčení). Určete kinetickou energii tyče při otáčení.

a) Součtem nekonečné řady

Délkový interval tyče  $x \in \{0; l\}$  rozdělíme na  $n$  intervalů o délce  $\Delta x = \frac{l}{n}$  ( $n \in N$ ).

Pokud je  $n$  dostatečně velké přirozené číslo ( $n \rightarrow \infty$ ), pak můžeme předpokládat že jsme

tyč rozdělili na  $n$  hmotných bodů o stejné hmotnosti  $\Delta m = \frac{m}{n}$ . Označme  $k$  pořadí hmotného bodu od počátku soustavy souřadnic ( $k \in \{1, 2, 3, \dots, n\}$ ).

Určíme rychlosti  $v_k$  a poloměry otáčení  $r_k$  a kinetické energie  $E_k$  těchto hmotných bodů.

$$k = 1 \quad r_1 = \Delta x \quad v_1 = r_1 \omega \quad E_1 = \frac{\Delta m v_1^2}{2}$$

$$k = 2 \quad r_2 = 2\Delta x \quad v_2 = r_2 \omega \quad E_2 = \frac{\Delta m v_2^2}{2}$$

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

$$\begin{aligned}
 k = 1 \quad r_1 = 1\Delta x \quad v_1 = r_1\omega \quad E_1 &= \frac{\Delta m v_1^2}{2} \\
 &\vdots \\
 &\vdots \\
 &\vdots \\
 k = n \quad r_n = n\Delta x \quad v_n = r_n\omega \quad E_n &= \frac{\Delta m v_n^2}{2}
 \end{aligned}$$

Celkovou kinetickou energii  $E(n)$  tyče vypočteme jako součet

$$E(n) = \sum_{k=1}^n E_k = \frac{\Delta m}{2} \cdot \sum_{k=1}^n v_k^2 = \frac{\Delta m \omega^2}{2} \cdot \sum_{k=1}^n r_k^2 = \frac{\Delta m \omega^2 \cdot (\Delta x)^2}{2} \cdot \sum_{k=1}^n k^2$$

Pro součet druhých mocnin přirozených čísel od 1 do  $n$  platí vzorec

$$\sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

Užitím vzorce dostaneme

$$E(n) = \frac{\Delta m \omega^2 \cdot (\Delta x)^2 \cdot n(n+1)(2n+1)}{12}$$

Po dosazení za  $\Delta m$  a  $\Delta x$  z výše uvedených vztahů dostaneme po úpravě:

$$E(n) = \frac{m\omega^2 l^2}{12} \cdot \frac{(n+1)(2n+1)}{n^2}$$

Výsledek bude tím přesnější, čím bude číslo  $n$  větší (v limitě se musí blížit k  $\infty$ ).

Tedy celková kinetická energie 
$$E = \lim_{n \rightarrow \infty} E(n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{m\omega^2 l^2}{12} \cdot \frac{(n+1)(2n+1)}{n^2}$$



INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

$$E = \frac{m\omega^2 l^2}{12} \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)(2n+1)}{n^2} = \frac{m\omega^2 l^2}{12} \cdot 2 = \frac{m\omega^2 l^2}{6}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)(2n+1)}{n^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right) \left(2 + \frac{1}{n}\right) = (1+0)(2+0) = 2$$

$$\text{Závěr: } E = \frac{m\omega^2 l^2}{6}$$

b) Pomocí určitého integrálu

Poloměr otáčení hmotného bodu o hmotnosti  $dm = \lim_{\Delta m \rightarrow 0} \Delta m$  a délce  $dx = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta x$  v poloze o souřadnici  $x$  je  $r = x$ . Jeho rychlost  $v = r\omega = x\omega$ .

Diferenciál hmotnosti můžeme vyjádřit vztahem  $dm = \frac{m}{l} \cdot dx$  pomocí diferenciálu délky.

Diferenciál kinetické energie  $dE = \lim_{\Delta E \rightarrow 0} \Delta E$  můžeme vyjádřit pomocí diferenciálu hmotnosti:

$$dE = \frac{dm \cdot v^2}{2}$$

Po dosazení výše uvedených vztahů a úpravě dostaneme vztah mezi diferenciály  $dE$  a  $dx$ .

$$dE = \frac{m\omega^2}{2l} \cdot x^2 \cdot dx$$

Určitý integrál diferenciálu  $dE$  v mezích od 0 do  $l$  (v intervalu  $x \in \{0; l\}$ ) je roven součtu nekonečné řady v řešení a), a tedy celkové kinetické energii tyče.

$$E = \int_0^l dE = \frac{m\omega^2}{2l} \cdot \int_0^l x^2 \cdot dx = \frac{m\omega^2}{2l} \cdot \left[ \frac{x^3}{3} \right]_0^l = \frac{m\omega^2}{2l} \cdot \frac{l^3}{3} = \frac{m\omega^2 l^2}{6}$$

Opět jsme velmi rychle došli ke správnému výsledku pomocí určitého integrálu.



INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

### 3 Závěr

Bylo provedeno řešení dvou fyzikálních úloh, na kterých byl ilustrován určitý integrál jako součet konvergentní nekonečné řady, pomocí kterého je definován v matematické analýze.

### 4 Použitá literatura:

Časopis Kvant, číslo 10, ročník 1983

### 5 Kontakt na autora

Mgr. Petr Mazanec  
Gymnázium, Plzeň, Mikulášské nám. 23  
pmazanec@mikulasske.cz

## OPTICKÉ KLAMY

Jitka PROKŠOVÁ

### 1 Úvod

Optické klamy patří k zajímavým úkazům, se kterými se můžeme setkat v běžném životě. Dochází při nich k lomu a odrazu světla, k disperzi a rozptylu světla a k projevům vlnové povahy světla (interferenci a difrakci).

Lidské oko, které pro nás představuje nejdůležitější optickou soustavu, může v jistých případech interpretovat pozorované jevy mylně. Při zpracování daného vjemu mozem pak dochází k závěrům, které neodpovídají skutečnosti. Tyto zvláštní zrakové vjemy bývají souhrnně označovány jako optické klamy. Podle příčiny jejich vzniku je lze rozdělit do tří hlavních skupin:

- klamy objektivní
- klamy fyziologické
- klamy psychologické

Přednáška se zabývá zmíněnými jevy podrobně v následujícím členění.

Středisko služeb školám, Plzeň, Částkova 78  
Podpora talentovaných žáků v Plzeňském kraji  
CZ.1.07/1.2.03/02.0001

Tento projekt je v letech 2012-16 financován z rozpočtu Plzeňského kraje

## INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

### 2 Objektivní optické klamy

Mezi klamy **objektivní**, řadíme ty, které jsou vyvolány lomem a odrazem světla v atmosféře, jejíž hustota se spojitě mění. Jedná se tedy většinou o jevy tzv. atmosférické optiky, mezi které patří např. astronomická či terestrická refrakce.

#### 2.1 Astronomická refrakce

Zdroj světla je vně atmosféry (např. Slunce). Průchodem světla nehomogenním prostředím (zemskou atmosférou) dochází stále více k lomu ke kolmici, takže pozorovatel vnímá vzdálený zdroj v jiném místě, než ve skutečnosti je. Důsledkem astronomické refrakce je např. zploštění slunečního kotouče u obzoru, prodloužení trvání dne apod.

#### 2.2 Terestrická refrakce

Zdroj světla je uvnitř atmosféry (např. plocha odrážející sluneční záření v oáze na poušti). Pozorovatel tak vnímá vzdálené předměty blíže (fata morgána v poušti nebo v arktických krajinách). Výklad o obou typech refrakce je doprovázen obrázkem a potřebnými vztahy.

### 3 Fyziologické optické klamy

Do druhé skupiny **fyziologických** klamů patří klamy z iradiace, trvání vjemu a z kontrastu. Jev iradiace (Helmholtzův klam) se projevuje tím, že světlé plochy na tmavém pozadí se zdají být větší než stejně velké tmavé plochy na světlém pozadí. Každý svítící bod totiž nepodráždí jen zcela určité jedno jediné místo sítnice, ale celou přilehlou oblast. Vzhledem k tomu se každý bod zobrazí jako ploška (nebodové zobrazení), se jasně ohraničení zdá větší. Zrakový vjem nevzniká při podráždění buněk sítnice okamžitě a také okamžitě s vnějším podnětem nezaniká. Doba doznívání závisí na intenzitě a vlnové délce světla. Čím je vjem silnější, tím déle doznívá. Vjem způsobený osvětlením předmětu bílým světlem trvá déle než vjem při stejně intenzivním osvětlení žlutým světlem. Zároveň však dochází k následnému snížení citlivosti – oslníme-li oko například intenzivní červenou barvou, bude pak oko vůči této barvě po nějakou dobu (přibližně 1/3 s) méně citlivé. Klam trvání vjemu se uplatňuje v kinematografii, kde se využívá efektu otáčející se rozžaté žárovky, kterou lidské oko vnímá jako spojitý světelný kruh. Jevy kontrastu vznikají při pozorování více ploch s různými jasy nebo ploch různě zbarvených. Také předmět položený na jasném podkladě se jeví oku tmavší než tentýž na tmavém podkladě. Příčinou těchto jevů je únava oka, která se projevuje především při pozorování jasných ploch. V případě objektu pozorovaného na tmavém pozadí je sítnice méně unavena, a tudíž ho vidíme jasnější, než ve skutečnosti je.

### 4 Psychologické optické klamy

Do třetí skupiny **psychologických** klamů patří například klamy odhadu vzdálenosti a velikosti úhlů. Tyto klamy většinou vznikají z řady psychologických příčin při pozorování stejných předmětů z téže vzdálenosti a při stejném zorném úhlu. Klam odhadu vzdálenosti



## INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

bývá příčinou řady dopravních nehod, kdy řidiči za jasného počasí podcení vzdálenost druhého vozidla či naopak za mlhy nebo šera tuto vzdálenost přecení.

### 5 Závěr

Optické klamy jsou zajímavým zpestřením poznatků z geometrické i vlnové optiky, proto je užitečné umět mezi nimi rozlišovat a dokázat tak užívat zákonitosti optiky, které studenti SŠ probírají ve výuce.

### 6 Použitá literatura

MALÝ, P. Optika, 1. vyd. Praha: Academia, 2008, 362 s. ISBN 978-80-246-1342-0  
FUKA, J., HAVELKA, B. Optika a atomová fyzika 1. 1. vyd. Praha: SPN, 1961. 842 s.

### 7 Kontakt na autora

RNDr. Jitka Prokšová, Ph.D.  
oddělení fyziky KMT FPE ZČU v Plzni  
proksovj@kmt.zcu.cz

## JAK POČÍTAT V ASTRONOMII? SEMILOGARITMICKÝ TVAR ČÍSEL VE FYZICE A ASTRONOMII

Miroslav RANDA

### 1 Úvod

V astronomických a fyzikálních výpočtech se může řešitel velmi často setkat s velkými, nebo naopak malými hodnotami veličin. Zápis takových čísel pomocí značného počtu nul je nepřehledný, a to i při zachovávání pravidla oddělování trojic cifer malými mezerami. Navíc zápis i přečtení takových čísel trvá relativně dlouho. S takovými čísly se velmi často řešitel fyzikální a astronomické olympiády setkává při řešení úloh z astronomie či mikrosvěta.

### 2 Semilogaritmický tvar čísel

Téma semilogaritmického tvaru čísel se běžně vyskytuje až na střední škole ve druhém až třetím ročníku. Je to z toho důvodu, že vychází z funkce logaritmus, jejíž zvládnutí je poměrně obtížné. Samotný princip semilogaritmického zápisu čísel je však srozumitelný i pro žáky základních škol a odpovídajících ročníků víceletých gymnázií a umožňuje s pomocí kalkulačky provádět i komplikované výpočty v oboru astronomie či fyziky mikrosvěta.

Počátek výkladu bude věnován semilogaritmickému zápisu čísel, která jsou násobkem deseti. Zde je totiž zápis jednoduchý, průhledný a srozumitelný. Poté přejdeme k celočíselným násobkům takových čísel. Dále následuje procvičení jednoduchých

Středisko služeb školám, Plzeň, Částkova 78  
Podpora talentovaných žáků v Plzeňském kraji  
CZ.1.07/1.2.03/02.0001

Tento projekt je v letech 2012-16 financován z rozpočtu Plzeňského kraje

## INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

matematických operací (sčítání, odčítání, násobení a dělení) s takovými čísly a odvození pravidel pro násobení a dělení semilogaritmicky zapsaných čísel.

Obdobně si vyzkoušíme společně zápis čísel menších než jedna a matematických operací s takovými čísly jednak bez pomoci kalkulačky, jednak s jejím využitím. Právě v této části výuky bude spočívat těžiště, protože je důležité, aby si účastníci vyzkoušeli zadávání čísel v semilogaritmickém tvaru do své kalkulačky,

V závěru využijeme získané znalosti k řešení jednoduchých fyzikálních a astronomických úloh (například velikosti gravitační síly mezi dvěma hmotnými objekty, elektrické síly mezi dvěma elektrony a protony, ...).

### 3 Závěr

Zápis čísel v semilogaritmickém tvaru je velice účinným nástrojem pro fyzikální a astronomické výpočty v rámci FO a AO, ale i v rámci běžných výpočtů ve školách.

### 4 Kontakt na autora

RNDr. Miroslav Randa, Ph.D.  
Západočeská univerzita v Plzni  
randam@kmt.zcu.cz

## NĚKTERÉ APLIKACE A ÚLOHY NA TÉMA COULOMBŮV ZÁKON

Miroslav RANDA

### 1 Úvod

Coulombův zákon je základním zákonem v oboru elektrostatiky. Stejně jako Newtonův gravitační zákon řeší silové působení dvou hmotných těles, Coulombův zákon řeší silové působení dvojice nabitých těles. Oba zákony jsou analogické i co do tvaru jejich matematického zápisu.

### 2 Vektory a jejich grafické sčítání

U sčítání vektorových veličin nestačí znát velikosti sčítaných vektorů; pro nalezení jejich výslednice je zapotřebí znát i směry jednotlivých sil. Grafické sčítání umožňuje najít výslednici grafickým postupem, kdy jednotlivé vektory pečlivě narýsujeme tak, aby se za sebou zřetězily, a pak spojíme počátek s koncem získaného „řetězu“, získáme tak výsledný vektor. Tento postup má ovšem své nevýhody, zejména jej nelze použít, když neznáme přesné velikosti vektorů.

Středisko služeb školám, Plzeň, Částkova 78  
Podpora talentovaných žáků v Plzeňském kraji  
CZ.1.07/1.2.03/02.0001

Tento projekt je v letech 2012-16 financován z rozpočtu Plzeňského kraje

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

### 3 Goniometrické funkce v úlohách na sčítání vektorových fyzikálních veličin

Pokud chceme sčítat vektory algebraicky, analyticky, je nejuhodnější všechny vektory rozložit do dvou navzájem kolmých směrů (v prostoru do tří navzájem kolmých směrů) a sečíst souřadnice dílčích vektorů postupně v těchto osách. Tím získáme souřadnice výsledného vektoru. Pro rozklad vektorů a určení směru jejich výslednice s výhodou využíváme goniometrické funkce.

### 4 Coulombův zákon v úlohách

Sčítání vektorů je typické pro řešení úloh se silovým působením mezi více elektrickými náboji. Jde-li o bodové náboje, využíváme Coulombův zákon. Typickou úlohou na procvičení Coulombova zákona a algebraický součet nestejně velkých sil je hledání elektrického bodového náboje, který po umístění do středu pravidelného  $n$ -úhelníku způsobí, že všechny (stejně) náboje ve vrcholech pravidelného  $n$ -úhelníku budou v rovnovážných polohách. Řešení tohoto typu úloh (pro případ pravidelného šestiúhelníku a případně dalších pravidelných  $n$ -úhelníků) bude součástí lekce.

### 5 Kontakt na autora

RNDr. Miroslav Randa, Ph.D.  
Západočeská univerzita v Plzni  
randam@kmt.zcu.cz

## NEWTONŮV ZÁKON. KEPLEROVY ZÁKONY

Miroslav RANDA

### 1 Úvod

Newtonův gravitační zákon formulovaný I. Newtonem v roce 1687 a Keplerovy zákony publikované Johannem Keplerem v letech 1609 a 1619, které jsou Newtonovu gravitačnímu zákonu ekvivalentní, jsou základními zákony, které popisují mechanický pohyb těles ve sluneční soustavě. Popisují ale také pohyby dvojhvězd a pohyby hvězd v galaxiích.

### 2 Newtonův gravitační zákon

Newton svůj gravitační zákon formuloval v roce 1687 v publikaci Principy přírodní filozofie (*Philosophiæ Naturalis Principia Mathematica*). Zákon vychází z pozorování, nikoli z teorie. Konstatuje, že gravitační síla mezi dvěma tělesy závisí na hmotnosti obou těles a na jejich vzdálenosti.

Středisko služeb školám, Plzeň, Částkova 78  
Podpora talentovaných žáků v Plzeňském kraji  
CZ.1.07/1.2.03/02.0001

Tento projekt je v letech 2012-16 financován z rozpočtu Plzeňského kraje



## INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

### 3 Využití Keplerových zákonů

Kepler své zákony formuloval pro pohyby planet ve sluneční soustavě. Keplerovy zákony však umožňují určit základní charakteristiky pohybu i dalších těles sluneční soustavy, například trpasličích planet, planetek a komet. Můžeme je využít ale rovněž k popisu pohybu měsíců, družic a sond.

Lekce se skládá ze dvou částí.

V první části jsou jmenované zákony podrobně prodebatovány včetně různých způsobů formulace zákonů, a to jak pro případ problému jednoho tělesa, tak i v případě problému dvou těles (využívaného například pro dvojhvězdy). Přitom je zvláštní pozornost věnována formulaci Keplerových zákonů v přirozených jednotkách pro tělesa sluneční soustavy (v astronomických jednotkách, rocích a hmotnostech Slunce). Protože se uvedené zákony probírají obvykle až na střední škole,

ve druhé části jsou řešeny úlohy z předchozích ročníků fyzikální a astronomické olympiády, dále úlohy ze sbírek úloh z astronomie a astrofyzika (Široký, Široká, 1973 a Štefl, Krtička, 2002) a ze studijních textů FO (Ungermann, Volf, 1985 a Volf, Jarešová, 2009). Jsou rovněž ukázány úlohy týkající se pádu v radiálním gravitačním poli Slunce a Země a ukázáno řešení takových úloh bez použití integrálního počtu, ale s využitím zákonů pro pohyb v gravitačním poli.

### 4 Závěr

Keplerovy zákony popisují pohyby těles ve sluneční soustavě i pohyby dvojhvězd a hvězd v galaxiích.

### 5 Použitá literatura

ŠTEFL, V., KORČÁKOVÁ, D., KRTIČKA, J. Úlohy z astrofyziky. 1. vyd. Brno: Masarykova univerzita, 2002. 82 s.

UNGERMANN, Z., VOLF, I.: Pohyb tělesa v radiálním gravitačním poli. Praha: SPN, 1985.

VOLF, I., JAREŠOVÁ, M. Fyzika je kolem nás (Pohyby těles v planetární soustavě). 1. vyd. Hradec Králové. MAFY, 2009.

ŠIROKÝ, J., ŠIROKÁ, M. Základy astronomie v příkladech. 2. vyd. Praha: Státní pedagogické nakladatelství, 1973. 158 s.

### 6 Kontakt na autora

RNDr. Miroslav Randa, Ph.D.  
Západočeská univerzita v Plzni  
randam@kmt.zcu.cz

Středisko služeb školám, Plzeň, Částkova 78  
Podpora talentovaných žáků v Plzeňském kraji  
CZ.1.07/1.2.03/02.0001

Tento projekt je v letech 2012-16 financován z rozpočtu Plzeňského kraje

## ŘEŠENÍ OBTÍŽNĚJŠÍCH ÚLOH MINULÝCH KOL FO A AO

Miroslav RANDA

### 1 Úvod

Poučení z minulých ročníků FO a AO je pro řešitele obou soutěží velmi významné, protože umožňuje jednak seznámit se s typem zadávaných úloh, jednak poskytuje ukázkou, jak má vypadat řešení úloh FO a AO, aby bylo pro opravující dostatečně popsáno.

### 2 Pohybové úlohy řešené s využitím grafu $v(t)$

Běžně se v kategoriích D, E a F fyzikální olympiády vyskytují úlohy, kde se počítá dráha pohybů rovnoměrně zrychlených a zpomalených bez znalosti fyzikální veličiny zrychlení. Je přitom využito toho, že grafem rovnoměrně zpomaleného či rovnoměrně zrychleného pohybu v grafu závislosti rychlosti na čase je přímka s nenulovou směrnici. Plocha pod touto přímkou je buď trojúhelníková, nebo lichoběžníková, popř. jde o lineární kombinaci obou funkcí, takže výpočet plochy je pak dostupný i žákům základní školy.

### 3 Nekonečná síť rezistorů

Ne zcela typickou fyzikální úlohou je úloha typu „nekonečná síť rezistorů“. Takové úlohy se nemusí řešit pomocí Kirchhoffových zákonů, dokonce je to takto jen velmi složité, ale řeší se náhradou části sítě rezistorů rezistorem s výsledným odporem. Příkladem je úloha z 55. ročníku FO, kategorie C.

### 4 Zákony zachování ve fyzikálních úlohách

Velmi často musejí řešitelé FO používat při řešení úloh zákony zachování energie a hybnosti. Z výuky na středních školách si studenti často odnášejí nesprávnou představu, že zákon zachování energie znamená rovnost potenciální a kinetické energie. Druhou nesprávnou představou je, že tyto zákony zachování se mohou použít v různých situacích. Je proto pro ně překvapivé, že oba zákony platí za stejné podmínky, totiž v izolované soustavě. V úlohách FO se tyto zákony využívají nejen u úloh z mechaniky, ale též v úlohách z atomové a jaderné fyziky a fyziky vysokých energií.

### 5 Pohyby v gravitačním poli Slunce a gravitačním poli Země

Jak v úlohách fyzikální olympiády, tak i v úlohách astronomické olympiády se velmi často řešitelé setkávají s úlohami o pohybu těles v radiálním poli. Základním typem úlohy je jednak výpočet dalších charakteristik kruhového pohybu, jednak výpočet charakteristik přechodové, tzv. Hohmannovy trajektorie.



INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

## 6 Použitá literatura

Fyzikální olympiáda. Dostupné na internetu: <<http://fo.cuni.cz>>.

Astronomická olympiáda. Dostupné na internetu: <<http://olympiáda.astro.cz>>.

UNGERMANN, Z., VOLF, I.: Pohyb tělesa v radiálním gravitačním poli. Praha: SPN, 1985.

VOLF, I., JAREŠOVÁ, M. Fyzika je kolem nás (Pohyby těles v planetární soustavě). 1. vyd. Hradec Králové. MAFY, 2009.

## 7 Kontakt na autora

RNDr. Miroslav Randa, Ph.D.

Západočeská univerzita v Plzni

randam@kmt.zcu.cz

# SLUNCE A JEHO VÝZNAM PRO ŽIVOT NA ZEMI

Miroslav RANDA

## 1 Úvod

Slunce je nejbližší hvězda. Při jeho vzniku zároveň kolem něho vznikla Země a spolu s ní z protoplanetárního disku také všechny planety a spousta menších těles. Význam Slunce pro život na Zemi však není omezen pouze na vznik naší planety. Ze Slunce neustále proudí elektromagnetické záření a další částice k Zemi a jejich dopad na Zemi má klíčový význam pro vznik, vývoj a zachování života na Zemi.

## 2 Historická pozorování Slunce

Významu Slunce pro život na Zemi si lidé nebyli odpradáвна. Je to spjato s tím, že první civilizace vznikaly převážně v rovníkových oblastech, kde nejsou změny ročních období tak významné, jak známe z naší každodenní zkušenosti my. Proto se uctívání Slunce rozvíjelo pomaleji než například uctívání Měsíce.

Výjimkou je Egypt, kde si lidé brzy všimli, že záplavy Nilu se opakují v periodě jednoho roku. Už starověcí Egypťané proto stavěli kamenné menhiry do směrů odpovídajících různým místům východu slunce v rozličných ročních obdobích. Uctívání Slunce se později projevilo ve stavbě honosného chrámu v Karnaku.

Známou stavbou vymezující východy slunce v různých ročních obdobích je anglické obětiště Stonehenge, které vymezuje pomocí velkých kamenných bloků význačné směry. Jejich pomocí byly zaměřeny východy slunce v různých okamžicích, a tak bylo možné oběti přinášet „ve správných chvílích“.

Další pozorovatelný Slunce najdeme po celé Zemi. Velký význam měly tyto observatoře v mayské civilizaci, kde bylo bohu Slunce vymezeno dokonce ústřední místo v symbolu mayského kalendáře, tak výrazného dokladu intelektuálních schopností starých Mayů.

Středisko služeb školám, Plzeň, Částkova 78  
Podpora talentovaných žáků v Plzeňském kraji  
CZ.1.07/1.2.03/02.0001

Tento projekt je v letech 2012-16 financován z rozpočtu Plzeňského kraje



## INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Pozorovatelný a chrámy boha Slunce nalezneme nejen v Chichén Itzá, ale i v Teotihuacanu či Chaco Canyonu.

Pyramidy egyptské i mayské, ale i další stavby po celém světě obsahují stejné tvarové prvky. Ty patrně odrážejí tvar zapadajícího slunečního kotouče v podmínkách malého proudění vzduchu. Takové prvky objevíme například i na střechách chrámového komplexu v Ankor Watu v dnešní Kambodži.

Stavby sloužící pro pozorování Slunce umožňovaly často zařízení pro určování pravého poledne na daném místě a zařízení pro určení rovnodenností a slunovratů. Takovou stavbou je například čínský Gao-cheng. Ale i v Praze sloužil těmto účelům astronomická věž Klementina, a to až do první poloviny 20. století.

### 4 Sluneční aktivita

Při pozorování Slunce brzy lidé zjistili, že se na Slunci vyskytují tmavší oblasti – sluneční skvrny. Teprve později se ale zjistilo, že počet slunečních skvrn souvisí s aktivitou Slunce a ovlivňuje i život na Zemi. Počet slunečních skvrn se mění s periodou 11,2 let, příčinou je změna magnetického pole Slunce v souvislosti s rotací tohoto tělesa z plazmatu.

Objevení periodicity slunečních skvrn bylo v historii spojeno s několika významnými astronomy-amatéry, jejichž péčí byl význam slunečních skvrn rozpoznán. Historii tohoto objevu popisuje velmi podrobně Kippenhahn.

### 5 Použitá literatura

KIPPENHAHN, R. Odhalená tajemství Slunce. Praha: Mladá fronta, 1999. 275 s. ISBN 80-204-0805-3.

### 6 Kontakt na autora

RNDr. Miroslav Randa, Ph.D.  
Západočeská univerzita v Plzni  
randam@kmt.zcu.cz

## VYUŽITÍ GRAFŮ VE FYZICE

Miroslav RANDA

### 1 Úvod

Grafy se využívají ve fyzice nejen ke znázornění závislostí fyzikálních veličin nebo k zobrazení charakteristik jednotlivých fyzikálních prvků, ale též jako prostředek řešení fyzikálních úloh, v neposlední řadě také jako významný prostředek při fyzikálním měření.

Středisko služeb školám, Plzeň, Částkova 78  
Podpora talentovaných žáků v Plzeňském kraji  
CZ.1.07/1.2.03/02.0001

Tento projekt je v letech 2012-16 financován z rozpočtu Plzeňského kraje



INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

## 2 Rozdíl mezi grafy v matematice a fyzice

Žáci a studenti se během školní výuce setkávají s grafy zejména v matematice. Na první pohled by se mohlo zdát, že používat grafy ve fyzice znamená jen využít znalostí z matematiky ve fyzikální problematice. Ve skutečnosti je situace komplikovanější. Hlavní rozdíl je totiž v tom, že matematici pracují s přesnými čísly, kdežto fyzici nikdy nemohou z principu mít hodnotu fyzikální veličiny naprosto přesnou.

To se projevuje i ve znázornění grafů. Matematik do grafu vynesou číselné hodnoty a pak je propojí, kdežto fyzik takto postupovat nemůže, protože každá fyzikální hodnota je zatížena určitou chybou. Proto fyzik prokládá grafy tak, aby proložená křivka byla velmi blízká znázorněným hodnotám, ale jen výjimečně některými znázorněnými hodnotami prochází. Grafické programy prokládají závislost pomocí metody nejmenších čtverců, tedy tak, aby součet vzdáleností bodů od proložené křivky byl nejmenší možný.

## 3 Grafy a analýza dat

Součástí lekce bude řešení úlohy z loňské astronomické olympiády pro kategorii EF. Pozorované souřadnice hvězdy S2 se vynesou do grafu a výsledkem budou body znázorňující polohy hvězdy S2 v centru Galaxie. Obtížnost vnesení souvisí s netypickými jednotkami souřadnic hvězdy, s nimiž se žáci zřejmě neměli dosud příležitost se setkat, totiž v tisícinách úhlové vteřiny (mas). Po vnesení všech bodů do grafu žáci proloží (ručně) elipsu, která je trajektorií hvězdy kolem středu Galaxie.

Z trajektorie elipsy pak zjistí účastníci kempu parametry elipsy a následně s využitím třetího Keplerova zákona hmotnost supermasivní černé díry ve středu Galaxie.

## 4 Použitá literatura

ŠTEFL, V., KORČÁKOVÁ, D., KRTIČKA, J. Úlohy z astrofyziky. 1. vyd. Brno: Masarykova univerzita, 2002. 82 s.

## 5 Kontakt na autora

RNDr. Miroslav Randa, Ph.D.  
Západočeská univerzita v Plzni  
randam@kmt.zcu.cz

Středisko služeb školám, Plzeň, Částkova 78  
Podpora talentovaných žáků v Plzeňském kraji  
CZ.1.07/1.2.03/02.0001

Tento projekt je v letech 2012-16 financován z rozpočtu Plzeňského kraje

## FYZIKA KAPALIN A PLYNŮ I - ZA CO MOHOU MOLEKULY

Václav SOUKUP

### 1 Úvod

Věříte v existenci částicové struktury látek? Které fyzikální jevy není možné vysvětlit na základě představy spojitě struktury hmoty a je nutné uvažovat o částicové struktuře látek. Jaké pro ni máme důkazy?

### 2 Fyzikální jevy podmíněné molekulovou strukturou látek

#### 2.1 Platí $0,5 + 0,5 = 1$ ?

Smísíme-li v dlouhé trubici stejné objemy dvou mísitelných kapalin a promícháme, výsledný objem směsi bude menší než součet původních objemů obou kapalin. Příčina je v existenci mezimolekulových prostorů (a tedy existence molekulové struktury) obou kapalin. Modelovou situací je možno znázornit např. pomocí směsi zrn hrachu a máku.

#### 2.2 Kolik molekul je?

Johann Josef Loschmidt odvodil počet molekul v  $1\text{m}^3$  a z něj byla odvozena po definování jednotky mol Avogadrova konstanta. Hodnoty těchto konstant ukázaly na obrovský počet molekul ( $N_0 = 268 \cdot 10^{23} \text{ m}^{-3}$ ,  $N_A = 6,02 \cdot 10^{23} \text{ mol}^{-1}$  za tlaku 101325 Pa, teploty  $0^\circ \text{C}$ ) a umožňují vypočítat objemy a hmotnosti molekul. Všimněte si, že tyto konstanty mají stejnou hodnotu pro různé plyny. Znalost těchto konstant umožňuje pomocí jednoduchých výpočtů vytvořit si základní představy o velikosti a rozměrech molekul.

Úlohy: Jak se změní počet molekul, změní-li se objem plynu?

Jaký vztah platí mezi oběma konstantami? Jaký objem zaujímá 1 mol plynu (za tlaku 101325 Pa, teploty  $0^\circ \text{C}$ )?

Jak je definován 1 mol látky?

Jak lze určit hmotnost 1 molu?

Jaký objem připadá na 1 molekulu vodíku (za tlaku 101325 Pa, teploty  $0^\circ \text{C}$ )

Jaký objem připadá na 1 molekulu vody ( $\rho = 1 \text{ g} \cdot \text{cm}^{-3}$ )?

Určete řádově průměr molekuly vody jako délku hrany krychle, do které se vejde právě jedna molekula.

Jaká je hmotnost jednoho atomu železa?

#### 2.3 Jak se molekuly chovají?

Přidáme-li do dvou válců, jednoho s teplou a druhého se studenou vodou barvivo, posléze se rozšíří do celého objemu válců, u teplé vody rychleji. Zmáčkнутý balónek se po uvolnění nabude původního tvaru. Jevy dokazují pohyb molekul.



## INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Jak by probíhaly tyto jevy, kdyby se molekuly nepohybovaly? Najděte modely takových situací.

Lammertův pokus umožňuje zjistit velikost rychlostí molekul. Z grafu rozdělení molekul podle rychlosti lze určit střední kvadratickou rychlost, jejíž velikost závisí na teplotě. Na základě rovnic odvozených pro střední kvadratickou rychlost si lze vytvořit představu o rychlostech molekul při běžných teplotách.

Úlohy: Jak se změní průběh grafu závislosti počtu molekul na rychlosti zvýšením teploty?

Určete rychlost molekul hélia při teplotě 27° C.

Proč „přežijeme“ rychlosti molekul vzdušných plynů v řádech stovek metrů za sekundu, když vichřice s rychlostí větru 40 m/s má ničivé účinky?

Jak se změní střední kvadratická rychlost, vzroste-li termodynamická teplota plynu 4x?

Jak závisí na teplotě celková kinetická energie molekul plynu? Určete tuto energii pro 1 mol hélia při teplotě 27° C.

Jak to, že vlhká skříčka lze jen obtížně od sebe oddělit?

Žiletka položená na hladinu vody na ní plave a popírá tak Archimédův zákon. Proč? Příčinou jsou mezimolekulové síly, jejichž charakter je závislý na vzdálenosti mezi molekulami. Na povrchu kapalin vrstva molekul působí jako blanka, která udrží lehčí předměty na hladině. Mezimolekulové síly jsou příčinou přilnavosti látek, kapilární elevace a kapilární deprese a dalších jevů.

Úlohy: Jak by se chovala voda ve dvou trubičkách různých průměrů tvořících spojené nádoby, kdyby neexistovaly mezimolekulové síly?

Vysvětlete průběh grafu vystihujícího závislost výslednice mezimolekulových sil na vzdálenosti molekul. Za jakých podmínek lze mezimolekulové síly modelovat pružinkou?

Najděte souvislosti mezimolekulových sil a skupenství látek.

Najděte souvislost mezimolekulových sil a „hloubky“ potenciálové jámy, ve které se molekuly nacházejí v různých skupenstvích.

### 3 Závěr

Správné pochopení chování molekul uvnitř látek umožňuje vysvětlit a využít řadu fyzikálních jevů, se kterými se běžně setkáváme v přírodě i v praxi.

### 4 Použitá literatura

BARTUŠKA, K., SVOBODA, E. Fyzika pro gymnázia - Molekulová fyzika a termika. 4. vyd. Praha: Prometheus, 2007. 155 s. ISBN 80-7196-200-7

SOUKUP, V., VESELÝ, J. Maturitní otázky – fyzika, 1. vyd. Praha: Fragment 2007, 201 s. ISBN 978-80-253-0501-0

### 5 Kontakt na autora

RNDr. Václav Soukup

Masarykovo gymnázium Plzeň

soukup@mgplzen.cz

Středisko služeb školám, Plzeň, Částkova 78  
Podpora talentovaných žáků v Plzeňském kraji  
CZ.1.07/1.2.03/02.0001

Tento projekt je v letech 2012-16 financován z rozpočtu Plzeňského kraje

## FYZIKA KAPALIN A PLYNŮ II - ZA CO MOHOU IONTY

Václav SOUKUP

### 1 Úvod

Pokusme se zodpovědět následující otázky: Jak vznikají mezimolekulové síly? Které jevy jsou způsobeny iontovou strukturou látek?

### 2 Fyzikální jevy podmíněné existencí nabitých částic v látkách

#### 2.1 Proč jsou zadečky v suchu?

Umístíme-li na dno kelímku látku obsaženou v dětských plenkách a nalijeme-li do kelímku vodu, voda se nadá vylít. Příčinou jsou silné mezimolekulové síly mezi polyakrylátem a molekulami vody, jejichž podstatou jsou elektrostatické síly mezi polárními molekulami vody a náboji vzniklými na řetězci polyakrylátu.

Úloha: Určete velikost dipólového momentu trojatomové lomené molekuly, je-li délka chemické vazby 0,05 nm, parciální náboj centrálního atomu  $Q = e$  a úhel mezi vazbami je  $90^\circ$ .

#### 2.2 Proč vzniká blesk?

Nabijeme elektroskop pomocí novodurové tyče. Při přiblížení plamene se elektroskop vybije. Proč? Suchý vzduch je izolant, neobsahuje nabitě částice. Plamen dodává energii, molekuly ionizuje, vzduch vede elektrický proud. Při dostatečně silném elektrickém náboji dochází k ionizaci nárazem, není třeba vnějšího ionizátoru. Je-li nabitých částic, dostatek, dojde k elektrickému výboji.

Úlohy: Při jakém napětí se rozsvítí neonová lampa, je-li ionizační energie 21,6 eV a stř. volná dráha je 1mm? Vzdálenost elektrodo je 1 cm.

Při velikosti intenzity  $E = 3 \cdot 10^6$  V/m nastává výboj. Jakou kinetickou energii a rychlost má elektron, jehož střední volná dráha je  $l = 5 \cdot 10^{-6}$  m?

#### 2.3 Proč slaná voda vede elektrický proud a sladká nikoliv?

Některé látky se ve vodě rozpouštějí. Opět jde o projev silového působení mezi nabitými molekulami polárních nebo iontových látek. Roztoky iontových sloučenin obsahují volně pohyblivé ionty, které mohou vést elektrický proud (slaná voda). Sacharóza se sice ve vodě rozpouští, ale v roztoku jsou celé molekuly, nikoliv ionty. Proto není elektricky vodivý.

Úlohy: Určete náboj, který prošel roztokem chloridu hlinitého, jestliže se na katodě vyloučilo 9 g hliníku.

Určete poměr hmotností vyloučené mědi a hliníku v sériově zapojených elektrolyzérch.

## INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

### 2.4 Jaké jsou důsledky rovnováhy mezi kovem a roztokem s jeho ionty?

Ponoříme-li měděnou destičku do roztoku síranu měďnatého, vznikne mezi roztokem a destičkou dvojvrstva, která se vyznačuje rozdílem potenciálů. Totéž nastane mezi zinkovou destičkou a roztokem síranu zinečnatého. Po vodivém spojení obou systémů vznikne zdroj napětí – galvanický článek. Podobný článek vznikne i tehdy, jestliže obě destičky uchopíme do rukou. Jev je možné vysvětlit putováním iontů v takto vzniklém systému.

### 3 Závěr

Nabité částice a ionty jsou zodpovědné za řadu jevů, které často využíváme v praxi (nabíječky, baterie, lékařská diagnostika).

### 4 Použitá literatura

LEPIL, O., ŠEDIVÝ, P. Fyzika pro gymnázia – Elektřina a magnetismus. 6. vyd. Praha: Prometheus, 2001. 220 s. ISBN 978-80-7196-385-1

7178-463-X.

SOUKUP, V., VESELÝ, J. Maturitní otázky – fyzika, 1. vyd. Fragment 2007, 201 s. ISBN 978-80-253-0501-0

### 5 Kontakt na autora

RNDr. Václav Soukup  
Masarykovo gymnázium Plzeň  
soukup@mgplzen.cz

## AKTUÁLNÍ ÚSPĚCHY VODÍKOVÝCH TECHNOLOGIÍ

Martin TOMÁŠ

### 1 Úvod

Zatímco v České republice nejsou patrné výrazné investice do vodíkových technologií, v zahraničí můžeme pozorovat silný entuziasmus k tomuto typu obnovitelných zdrojů. Především v zemích, jako je Nizozemí, Německo či Francie, dochází k mohutné podpoře vodíkových technologií a je zřejmá snaha o zapojení těchto zdrojů elektrické energie do rozvodné sítě.

Můžeme sledovat nové mobilní aplikace, které využívají vodíkových technologií jako alternativy ke spalovacímu motoru. Velice perspektivní je spojení vodíkových technologií a dalších obnovitelných zdrojů v rámci energeticky soběstačných budov. Vodíkové palivové články jsou rovněž slibným záložním zdrojem pro aplikace, kde je nutné zajistit nepřetržitý provoz. Pro svou spolehlivost jsou využívány v telekomunikacích či jako záložní generátory v nemocnicích.

Další rozvoj těchto zdrojů bude záviset na zvládnutí technologie a zapojení do sériové výroby. V současnosti se stále jedná o nákladná zařízení, jejichž vysokou pořizovací cenu musí ospravedlnit jiná výhoda oproti konvenčním zdrojům elektrické energie.

### 2 Výkladní skříň vodíkových technologií

Využití vodíkových technologií stále nedosahuje masového měřítka. Můžeme se však setkat s množstvím demonstračních jednotek, které dokazují postupný vývoj technologie. Velmi sledovanou aplikací je mobilní jednotka schopná konkurovat spalovacím motorům. Na poli automobilové dopravy bylo vytvořeno hned několik modelů, které k pohonu využívají vodíkový palivový článek. Jedná se například o model Toyota Mirai, Toyota Prius, BMW i8 či Mercedes-Benz F-cell. Z tohoto stručného výčtu je zřejmé, že největší hráči na automobilovém trhu vodíkovými technologiím důvěřují. Přesto se jako vlajková loď automobilů s alternativním pohonem v médiích nejvíce objevuje automobil Tesla, který využívá baterií. Nevýhodou tohoto pohonu je doba dobíjení baterie a její tepelná zátěž. Doplnění vodíku je časově srovnatelné s tankováním běžného paliva. Pořizovací cena automobilu Tesla je rovněž faktorem, který limituje cílovou skupinu zákazníků. Oproti tomu plánovaný vodíkový automobil od Mercedes-Benz má cenově konkurovat běžným modelům.

Ve stacionárních aplikacích se s vodíkovými technologiemi počítá jako s prvkem chytrých sítí. Tyto sítě produkují elektrickou energii díky solárním či větrným elektrárnám. Nevýhodou těchto zdrojů je jejich nepředvídatelnost. Při spojení např. s elektrolyzérem lze elektrickou energii konvertovat do vodíku a následně využít v palivovém článku. Tím lze odložit produkovaný výkon do období, kdy je nutné uspokojit poptávku po elektrické energii a kdy solární či větrné zdroje nefungují optimálně (typicky noční bezvětří).



INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

### 3. Problémy vodíkových technologií

Vodíkové technologie sice představují perspektivní zdroj elektrické energie, nicméně stále se nejedná o dokonale ovládnutou technologii. Kromě problémů s jednotlivými komponentami můžeme sledovat obtížné zapojení do komplexnějších systémů. Takzvané systémové řízení stále představuje oblast, která vyžaduje hlubší výzkum. Mnoho vědeckých skupin se zaměřuje na materiálový výzkum, který si za cíl stanovil syntézu materiálu s vlastnostmi překonávajícími současné materiály (Borup, 2007). Tento nákladný výzkum vede k mnoha úspěchům, ale klíčové komponenty (membrána) zůstávají nepokořeny.

Dalším problémem je degradace jednotlivých komponent (de Bruijn, 2008). Pro zavedení do sériové výroby je potřeba vysoká životnost finálního zařízení. V současnosti dosahují palivové články životnosti mnoha desítek tisíc hodin provozu. Jednotlivé komponenty provozem trpí a jejich funkce se zhoršuje (Collier, 2006). Stabilita komponent tak hraje důležitou roli při vývoji palivových článků. Příkladem může být katalytická vrstva, kde je nutné vytvořit kompromis mezi účinností vrstvy a jejím obsahem platiny. Platina funguje jako katalyzátor a její vlastnosti není možné jednoduše nahradit. V současných palivových člancích se využívá jen zlomek množství platiny oproti množství před zhruba deseti lety. Malé obohacení katalytické vrstvy platinou však vede k její postupné degradaci a ztrátě katalytické funkce. Chemicky lze platinu z degradovaných katalytických vrstev získat s vysokou účinností (cca 95%). Platina ale patří mezi strategické suroviny, a proto je tendence k redukci jejího použití.

### 3 Závěr

Vodík jako nosič energie představuje perspektivní alternativu současným energetickým zdrojům. V zahraničí se problematice vodíkových technologií věnuje vysoká pozornost, v České republice se však jedná spíše o okrajové téma. Rozšíření technologie je přitom možné předpokládat již v blízké budoucnosti. Při podrobnějším pohledu lze ale vypořádat oblasti, kde vodíkové technologie vyžadují posun pro zvýšení jejich konkurenceschopnosti.

### 4 Použitá literatura

- BORUP, R. et al. Chem. Rev., 2007, 107, 3904-3951  
DE BRUIJN, F.A., DAM, V.A.T., JANSSEN, G.J.M. Fuel Cells, 2008, 1, 3-22  
COLLIER, A. et al. Int. J. Hydrogen. Energ., 2006, 31, 1838-1854

### 5 Kontakt na autora

PhDr. Martin Tomáš, Ph.D.  
Nové Technologie - výzkumné centrum, Západočeská univerzita v Plzni  
mtomas@ntc.zcu.cz

Středisko služeb školám, Plzeň, Částkova 78  
Podpora talentovaných žáků v Plzeňském kraji  
CZ.1.07/1.2.03/02.0001

Tento projekt je v letech 2012-16 financován z rozpočtu Plzeňského kraje

## ŘEŠENÍ SLOŽITĚJŠÍCH ÚLOH Z MECHANIKY 1

Josef VESELÝ

### 1 Úvod

V této přednášce budou řešeny úlohy o soustavách těles, která konají různé druhy pohybu, bude pojednáno o otáčivém rovnoměrně zrychleném pohybu. Experimentálně ověříme vliv zjednodušování na použitelnost výsledku.

### 2 Vliv otáčení kladky

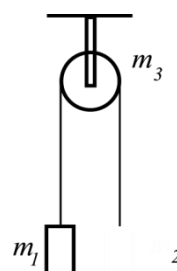
Hledáme-li zrychlení soustavy na obr. 1 a zanedbáme tření v kladce a její hmotnost, dojdeme k výsledku  $a = \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2} \cdot g$ .

Pro závaží o hmotnostech 20 g a 30 g a použití hodnoty  $g = 9,8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$  nalezneme pro zrychlení soustavy  $a = 1,96 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$ . Hmotnější závaží necháme klesat rovnoměrně zrychleným pohybem z výšky  $h$ , v našem případě to bylo 1,56 m. Pokus jsme opakovali vícekrát, čas měřili téměř všichni přítomní. Průměrný čas počítaný ze všech cca 20 měření byl asi 1,59 s. Reálné zrychlení soustavy pak je asi  $1,23 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$ . Rozdíl je poměrně veliký, hmotnost kladky nelze v této soustavě zanedbat.

Užitím siloměru určíme hmotnost kladky tvaru válce  $m_3 = 48 \text{ g}$ .

Kladka koná rovnoměrně zrychlený otáčivý pohyb s úhlovým zrychlením  $\varepsilon$ . Sestavíme pohybové rovnice pro všechna tři tělesa, musíme zde použít vnitřní síly napínající provázek na obou stranách kladky, pro kladku to bude  $(m_2 - m_1)r = \frac{1}{2}mr^2\varepsilon$ , kde  $\varepsilon = \frac{a}{r}$ . Sečtením rovnic

a úpravou  $a = \frac{(m_2 - m_1)g}{m_1 + m_2 + \frac{1}{2}m_3}$ , číselně asi  $1,33 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$ . Tato hodnota je již blízká skutečnému zrychlení soustavy. Zbývající rozdíl je způsoben třením v ose kladky.



Obr. 1

### 3 Valení bez prokluzování

Za jakých podmínek se bude váleček valit po nakloněné rovině bez prokluzování? Otáčení válce je způsobeno třecí silou mezi válcem a rovinou. Třecí síla uděluje válci úhlové zrychlení. Pokud je tečné zrychlení na povrchu válce stejné jako zrychlení posuvného pohybu válce, k prokluzování nedojde. Jednoduchým výpočtem zjistíme, že tomu tak bude pro  $\text{tg} \alpha \leq 3f$ , kde  $\alpha$  je sklon nakloněné roviny a  $f$  je součinitel smykového tření mezi válcem a nakloněnou rovinou. Hodnoty součinitele smykového tření najdeme v tabulkách (Mikulčák, str. 161)

Pro váleček a obruč pak bude číslo 3 nahrazeno jiným číslem. Doporučujeme čtenáři tato čísla najít.



#### 4 Padající „špulka“

Příklad:

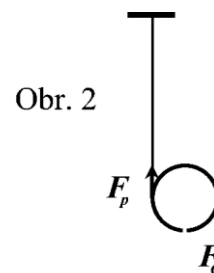
Na válci je navinuta tenká, lehká, dokonale ohebná pevná nit, jejíž volný konec je upevněn vysoko nad válcem. Válec „padá“ tak, že se nit odvíjí (viz obr. 2). Určete zrychlení válce.

Řešení: Použijeme pohybové rovnice pro posuvný pohyb válce a pro otáčivý pohyb válce

$$F_G - F_p = ma$$

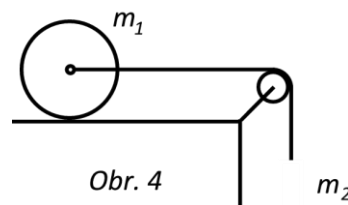
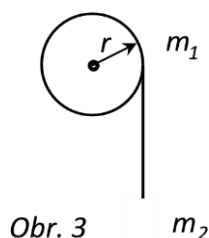
$$F_p r = \frac{1}{2} m r^2 \varepsilon$$

Sečtením a úpravou  $a = \frac{2}{3} g$ .



#### 5 Soustavy těles spojených vlákem

Dále byla řešena a diskutována řada úloh o soustavách těles spojených vlákem. Jednalo se o soustavy podle následujících obrázků:



#### 6 Závěr

Při řešení úloh o pohybu soustavy těles, kde tělesa konají různý druh pohybu, řešíme soustavu pohybových rovnic pro jednotlivá tělesa. Čím více učiníme zjednodušujících předpokladů při řešení úlohy, tím je matematické řešení pohodlnější, výsledek je ale méně reálný.

#### 7 Použitá literatura

MIKULČÁK, J. a kolektiv, Matematické, fyzikální a chemické tabulky pro střední školy. Dotisk 1. vydání Praha: SPN, 1989. ISBN15 084/87-210

#### 8 Kontakt na autora

Mgr. Josef Veselý  
Gymnázium Jaroslava Vrchlického Klatovy  
[jvesely@gym-kt.cz](mailto:jvesely@gym-kt.cz)

## ŘEŠENÍ SLOŽITĚJŠÍCH ÚLOH Z MECHANIKY 2

Josef VESELÝ

### 1 Úvod

V této části vyřešíme ještě několik úloh o pohybu soustavy těles. Dále se budeme věnovat zavedení účinnějšího matematického aparátu a ukázkám jeho možného užití.

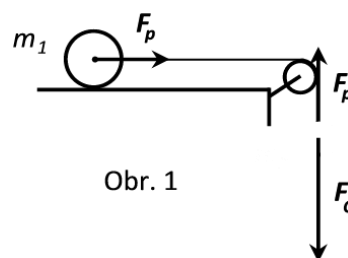
### 2 Soustava těles

#### Příklad 1

Určete zrychlení soustavy těles (viz obr. 1) a velikost síly napínající vlákno. Hmotnost vlákna a kladky zanedbejte, neuvažujte ani valivý odpor.

Řešení: Pohybové rovnice  $F_G - F_p = m_2 a$

$$F_p - F_t = m_1 a$$



Obr. 1

Úpravami a řešením soustavy

$$a = \frac{m_2}{m_2 + \frac{3}{2}m_1} \cdot g, \quad F_p = \frac{3m_1 m_2}{2m_2 + 3m_1} \cdot g$$

#### Příklad 2

Určete zrychlení těles soustavy (viz obr. 2) a velikost síly napínající vlákno. Hmotnost vlákna a kladky zanedbejte, neuvažujte ani valivý odpor.

Řešení: Vlákno se odvíjí z válce, zrychlení válce  $a_2$  je poloviční než zrychlení  $a_1$  závaží.

Pohybové rovnice  $F_G - F_p = m_1 a_1$

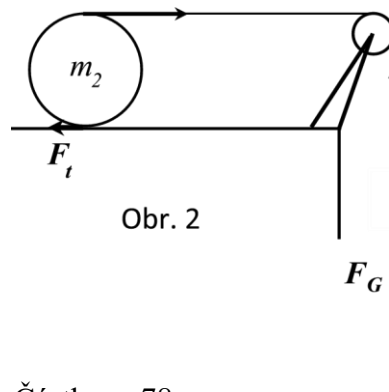
$$F_t r_2 = \frac{1}{2} m_2 r^2 \frac{a_2}{r}$$

Úpravami a řešením soustavy

$$a_2 = \frac{m_1}{2m_1 + \frac{5}{4}m_2} \cdot g$$

$$a_1 = \frac{m_1}{m_1 + \frac{5}{8}m_2} \cdot g$$

$$F_p = \frac{5m_1 m_2}{8m_1 + 5m_2} \cdot g$$



Obr. 2

### 3 Derivace

K zavedení pojmu derivace je třeba nejprve objasnit pojem limita. Potom můžeme definovat derivaci. V praktickém počítání pak používáme vzorce a pro derivace funkce, která uvádí například Mikulčák, str.47 a 48.

Okamžitá rychlost hmotného bodu je derivace polohového vektoru podle času, (okamžitě) zrychlení je derivace okamžité rychlosti podle času.

Příklad 3

Pro závislost souřadnice  $x$  hmotného bodu pohybujícího se po ose  $x$  na čase  $t$  platí

$$\{x\} = \frac{1}{3}\{t\}^3 - \frac{1}{2}\{t\}^2 - 6. \text{ Určete polohu, okamžitou rychlost } v \text{ a zrychlení } a \text{ hmotného}$$

bodů v čase 6 s.

Řešení:  $x = 54 \text{ m}$

$$v = \frac{dx}{dt} = (\{t\}^2 - \{t\}) \text{ m}\cdot\text{s}^{-1} = 30 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$$

$$a = \frac{dv}{dt} = 2\{t\} \text{ m}\cdot\text{s}^{-2} = 12 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$$

Příklad 4

Určete maximální výšku šikmého vrhu počáteční rychlostí  $v_0 = 40 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$  pod elevačním úhlem  $30^\circ$ . Odpor vzduchu neuvažujte. Pro numerické řešení počítejte  $g = 10 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$ .

$$y = v_0 t \sin \alpha - \frac{1}{2} g t^2$$

Řešení: Pro svislou souřadnici platí

funkce může mít maximum tam, kde má nulovou derivaci.

$$\frac{dy}{dt} = v_0 \sin \alpha - g t = 0, \quad t = \frac{v_0 \sin \alpha}{g}, \quad y = \frac{v_0^2 \sin^2 \alpha}{2g}$$

Maximální výška vrhu je 20 m.

### 4 Neurčitý a určitý integrál

Integrace je opačný proces k derivování, lze též mluvit o hledání primitivní funkce k funkci dané. Určitý integrál počítáme jak rozdíl příslušných primitivních funkcí. V jednoduchých případech vystačíme se vzorci, které uvádí Mikulčák, str. 48 až 49.

$$v = \int a dt, \quad x = \int v dt$$

V kinematice hmotného bodu potom platí

Příklad 5

Malé těleso padá ve vzduchu a díky jeho odporu pro zrychlení tělesa platí  $a = g e^{-bt}$ . Nalezněte rovnici pro okamžitou rychlost  $v$  a dráhu pádu  $y$ .

$$\text{Řešení: } v = \int a dt = \int g e^{-bt} dt = -g b e^{-bt} + c.$$

Integrační konstantu  $c$  určíme z počátečních podmínek:  $0 = -g b e^{-b \cdot 0} + c$

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

$$c = gb$$

### Příklad 6

Mějme pružinovou soustavu, pro jejíž sílu platí  $F = kx^2$ , kde  $k$  je konstanta a  $x$  je prodloužení pružiny. Určete práci  $W$ , kterou je třeba vykonat, abychom pružinu prodloužili z délky  $a$  na délku  $b$ .

Řešení: 
$$W = \int_a^b F dx = \int_a^b kx^2 dx = \left[ \frac{1}{3} kx^3 \right]_a^b = \frac{1}{3} k(b^3 - a^3)$$

### 5 Závěr

Po vyřešení dalších příkladů studenti získali solidní dovednost pro jejich řešení. Užití derivace a integrálů prokázalo, že zdokonalením matematického aparátu je možné snadno řešit i úlohy dříve řešitelné jen obtížně, nebo zcela neřešitelné.

### 6 Použitá literatura

MIKULČÁK, J. a kolektiv, Matematické, fyzikální a chemické tabulky pro střední školy. Dotisk 1. vydání Praha: SPN, 1989. ISBN15 084/87-210

### 7 Kontakt na autora

Mgr. Josef Veselý  
Gymnázium Jaroslava Vrchlického Klatovy  
[jvesely@gym-kt.cz](mailto:jvesely@gym-kt.cz)

## ŘEŠENÍ VYBRANÝCH ÚLOH Z MECHANIKY

Josef VESELÝ

### 1 Úvod

V této přednášce byla věnována pozornost pohybu tělesa na nakloněné rovině a pohybu soustavy těles spojených vláknem. Jednalo se o úlohy teoretické i experimentální.

### 2 Kvádr a koule

Pozorování 1:

Mírně nakloněná rovina, kvádr se nepohybuje, koule ano.

Pozorování 2:

Při větším sklonu se pohybují obě tělesa, koule rychleji.

Pozorování 3: Kvádr na vzduchové dráze, koule na nakloněné rovině (s žlábkem) se stejným sklonem jako vzduchová dráha. Kvádr se pohybuje rychleji než koule.

Středisko služeb školám, Plzeň, Částkova 78  
Podpora talentovaných žáků v Plzeňském kraji  
CZ.1.07/1.2.03/02.0001

Tento projekt je v letech 2012-16 financován z rozpočtu Plzeňského kraje

### INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Kvádr se pohybuje téměř bez tření a proto se prakticky všechna potenciální tíhová energie přeměňuje na kinetickou energii posuvného pohybu. U koule se potenciální energie přeměňuje na kinetickou energii posuvného pohybu a na kinetickou energii otáčivého pohybu.

#### Příklad 1

Kvádr klouže po nakloněné rovině z výšky  $h$ . Určete jeho rychlost při opuštění nakloněné roviny a) zanedbáme-li tření a odpor vzduchu, b) je-li součinitel smykového tření  $f$  a sklon nakloněné roviny je  $\alpha$ .

Výsledky: a)  $v = \sqrt{2hg}$ , b)  $v = \sqrt{2hg \left(1 - \frac{f}{\tan \alpha}\right)}$

#### Příklad 2

Koule se valí po nakloněné rovině z výšky  $h$ . Jak velikou rychlostí koule rovinu opustí? Odpor vzduchu a valivý odpor neuvažujte.

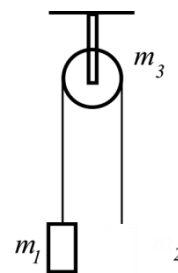
Výsledek:

### 3 Kladky

#### Příklad 3

Tělesa o hmotnostech  $m_1$  a  $m_2$  jsou zavěšena přes velmi lehkou kladku (viz obr. 1). Určete zrychlení soustavy, tření v ose kladky neuvažujte.

Výsledek:  $a = \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2} \cdot g$

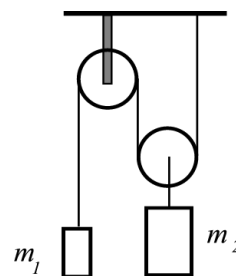


Obr. 1

#### Příklad 4

Určete zrychlení tělesa o hmotnosti  $m_1$  na obr. 2. Hmotnost kladek a provázku a tření neuvažujte.

Výsledek:  $a = \frac{4m_1 - 2m_2}{4m_1 + m_2} \cdot g$



Obr. 2

### 4 Závěr

Byly též podrobně diskutovány podmínky pro řešení a četné obměny uvedených úloh.

### 5 Kontakt na autora

Mgr. Josef Veselý  
Gymnázium Jaroslava Vrchlického Klatovy  
[jvesely@gym-kt.cz](mailto:jvesely@gym-kt.cz)