



INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Podpora talentovaných žáků v Plzeňském kraji Reg. č. CZ.1.07/1.2.03/02.0001

SBORNÍK ODBORNÝ PŘÍRODOVĚDNÝ KEMP

MATEMATIKA, FYZIKA

2. - 6. ZÁŘÍ 2013

WWW.PODPORATALENTU.CZ

Středisko služeb školám, Plzeň, Částkova 78
Podpora talentovaných žáků v Plzeňském kraji
CZ.1.07/1.2.03/02.0001

Tento projekt je v roce 2013 financován z rozpočtu Plzeňského kraje



INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

MATEMATICKÝ KEMP	5
Diofantovské rovnice	5
Diofantovské rovnice I	7
Diofantovské rovnice II	9
Rovnice a nerovnice s parametrem I	11
Rovnice a nerovnice s parametrem II	13
Soustavy algebraických rovnic II	16
Soustavy lineárních rovnic	18
Dirichletův princip v úlohách	20
Soustavy algebraických rovnic I	24
Úlohy MO využívající ciferný zápis čísel	28
Úlohy o turnajích	31
Funkcionální a diofantické rovnice, netradiční nerovnosti	35
Celá část reálného čísla, absolutní hodnota reálného čísla	50
Důkazové techniky – nerovnosti	52
Kruhová inverze, apolloniovy úlohy	55
Planimetrie	57
Exkurze do Českého hydrometeorologického ústavu v Praze-Komořanech	59
Příklady z Matematických olympiád na rovnosti, nerovnosti a posloupnosti	63
Zajímavé dvojice trojúhelníků	76
FYZIKÁLNÍ KEMP	84
Astronomické a raketové experimenty	84
Pokusy s astronomickou zápletkou	86
Noční obloha	88
Stellarium - praktikum	95
Zatmění Slunce a Měsíce	98

Středisko služeb školám, Plzeň, Částkova 78
Podpora talentovaných žáků v Plzeňském kraji
CZ.1.07/1.2.03/02.0001

Tento projekt je v roce 2013 financován z rozpočtu Plzeňského kraje



INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Praktikum z astrofotografie	102
Astronomické úlohy	106
Fyzika plazmatu jako nástroj k vytváření materiálů s výjimečnými vlastnostmi	114
Řešení úloh z kinematiky	116
Řešení úloh – skládání a rozkládání sil	117
Řešení úloh – práce, výkon, energie.....	119
Řešení úloh z termiky – tepelná výměna	120
Zajímavé experimenty	121
Jak zpracovat záznam z fyzikálního měření, praktická měření.....	122
Základy zpracování fyzikálního měření	124
Byl jsem v CERNu	126
Kirchhoffovy zákony.....	127
Řešení obtížnějších úloh z elektřiny a magnetismu	128
Exponenciální závislost fyzikálních veličin	129
Řešení rovnic ve fyzikálních úlohách	134
Teplotní roztažnost pevných látek, kapalin a plynů,	139
Součet nekonečné řady a určitý integrál ve fyzice	143
Fyzika a hudební nástroje.....	149
Vybrané problémy z nauky o kmitech a vlnách	150
Vlnová optika v příkladech	152
Zajímavé jevy atmosférické optiky	154
Keplerovy zákony	156
Semilogaritmický tvar čísel ve fyzice a v astronomii	158
Za co můžou molekuly	159
Za co můžou nabitě částice	161
Vzdálenosti ve vesmíru	163
Vesta – poslední z protoplanet	165
Zajímavosti ze světa planetárních sond.....	168

Středisko služeb školám, Plzeň, Částkova 78
Podpora talentovaných žáků v Plzeňském kraji
CZ.1.07/1.2.03/02.0001

Tento projekt je v roce 2013 financován z rozpočtu Plzeňského kraje



evropský
sociální
fond v ČR



EVROPSKÁ UNIE



MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ,
MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY



OP Vzdělávání
pro konkurenceschopnost



INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Archimédův zákon	173
Řešení obtížnějších úloh z dynamiky	176
Řešení obtížnějších úloh z kinematiky	178

Středisko služeb školám, Plzeň, Částkova 78
Podpora talentovaných žáků v Plzeňském kraji
CZ.1.07/1.2.03/02.0001

Tento projekt je v roce 2013 financován z rozpočtu Plzeňského kraje

MATEMATICKÝ KEMP

DIOFANTOVSKÉ ROVNICE

Jaroslav HORA

1 Úvod

S teorií potřebnou pro řešení tzv. lineární diofantovské rovnice $ax + by = c$ o dvou neznámých $x, y \in \mathbb{Z}$, kde a, b, c jsou celočíselné parametry, budou řešitelé již seznámeni snad i z předchozích kempů. Ukazuje se, že pokud číslo $d = D(a, b)$ nedělí c , pak daná rovnice nemá řešení. Pokud ale největší společný dělitel d čísel a, b dělí c , pak existuje nekonečně mnoho řešení, která lze zapsat ve tvaru $x = x_0 + (b/d)t$, $y = y_0 - (a/d)t$, kde $t \in \mathbb{Z}$ je celočíselný parametr a jedno řešení $[x_0, y_0]$ dané lineární diofantovské rovnice lze získat tzv. rozšířeným Euklidovým algoritmem nebo v jednodušším případě i uhodnout.

2 Elementární úvod do pokročilejší teorie

Dostupnou teorii pro některé typy diofantovských rovnic lze nalézt např. na internetu nebo v uvedené literatuře. To platí např. pro pythagorejskou rovnici $x^2 + y^2 = z^2$. Ta má opět nekonečně mnoho řešení již v \mathbb{N}^3 . Existují ale úlohy, pro něž je nejlepší mít nějaký dobrý nápad...

2.1 Příklad (diofantovská rovnice řešená tzv. metodou rozkladu)

Řešte diofantovskou rovnici

$$y^3 - x^3 = 91.$$

Rozložíme levou stranu rovnice a dostaneme

$$(y - x)(x^2 + xy + y^2) = 91.$$

Také číslo 91 lze rozložit na součin následovně: $91 = 1 \cdot 91 = 7 \cdot 13 = 13 \cdot 7 = 91 \cdot 1$. Dostáváme čtyři soustavy rovnic. Vyřešme zde jen první z nich.

a) $y - x = 1$, $x^2 + xy + y^2 = 91$.

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Vyjádríme z první rovnice $y = x + 1$ a dosadíme do rovnice druhé, načež ze získané kvadratické rovnice $x^2 + x - 30 = 0$ vypočteme kořeny 5 a - 6. Vidíme, že naší soustavě vyhovují dvojice [5, 6] a [- 6, - 5].

Obdobně postupujeme i v dalších případech. Množina řešení dané diofantovské rovnice je nakonec $P = \{[5, 6], [- 6, - 5], [- 3, 4], [- 4, 3]\}$.

V daném případě má zadaná diofantovská rovnice konečný počet řešení.

3 Závěr

Dobrou motivací pro další studium diofantovských rovnic druhého stupně o dvou neznámých může být webová stránka <http://www.alpertron.com.ar/QUAD.HTM>. Po povolení výpočtu (Run) a zadání celočíselných koeficientů buď získáme výpis (některých) řešení anebo informaci, že daná diofantovská rovnice řešení nemá. Můžeme rovněž získat informaci o metodách řešení. Jde však spíše o záležitost vysoké školy matematiky.

4 Použitá literatura

ZNÁM, Š.: Teória čísel, Alfa, Bratislava, 1977.

5 Kontakt na autora

Doc. RNDr. Jaroslav Hora, CSc.

katedra matematiky, fyziky a technické výchovy FPE ZČU, Klatovská 51, Plzeň.

horajar@kmt.zcu.cz

DIOFANTOVSKÉ ROVNICE I

Jaroslav HORA

1 Úvod

Je dobré se seznámit s trochou teorie potřebné pro řešení lineární diofantovské rovnice $ax + by = c$ o dvou neznámých $x, y \in \mathbb{Z}$, kde a, b, c jsou celočíselné parametry. Existuje totiž množství slovních úloh, jejichž řešení vyžaduje znalost této teorie, užitečný je též způsob, jak zapisovat nekonečnou množinu řešení pomocí parametru.

2 Elementární úvod do pokročilejší teorie

V následujícím příkladu bude výhodné dospět k vyjádření jednoho přirozeného čísla ve tvaru součtu čtverců. V dalším příkladu pomůže uvedení rovnice do součinnového tvaru.

2.1 Příklad

Řešte diofantovskou rovnici

$$x + y = x^2 - xy + y^2.$$

Řešení: Pišme $x^2 - x + y^2 - y - xy = 0$ a pracujme se dvojnásobkem této rovnice:

$$2x^2 - 2x + 2y^2 - 2y - 2xy = 0. \quad (1)$$

Nyní si povšimněme, že součet druhých mocnin

$$(x-1)^2 + (y-1)^2 + (x-y)^2 = x^2 - 2x + 1 + y^2 - 2y + 1 + x^2 - 2xy + y^2$$

je až na sčítanec 2 přesně roven levé straně v (1), proto můžeme namísto (1) řešit rovnici

$$(x-1)^2 + (y-1)^2 + (x-y)^2 = 2. \quad (2)$$

Naštěstí možností, jak zapsat číslo 2 ve tvaru součtu tří druhých mocnin, je málo a jejich průzkum lze přenechat čtenáři.

Množina řešení dané diofantovské rovnice je nakonec $P = \{[0, 0], [1, 0], [0, 1], [2, 1], [1, 2], [2, 2]\}$.

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

2.2 Příklad

Řešte diofantovskou rovnici

$$x y + 3 x - 5 y = -3.$$

Řešení: Pokusme se uvést levou stranu rovnice do součinnového tvaru. Je

$(x - 5)(y + 3) = x y + 3 x - 5 y - 15$, takže zadanou rovnici upravíme do tvaru

$$(x - 5)(y + 3) = -18.$$

Nyní je třeba prozkoumat všechny způsoby, jak zapsat číslo -18 ve tvaru součinu dvou celých čísel a poté vyřešit příslušné soustavy dvou lineárních rovnic o dvou neznámých. I tuto práci lze přenechat čtenáři. Získá se tak množina všech řešení dané diofantovské rovnice

$P = \{[-6, -21], [4, 15], [7, -12], [3, 6], [8, -9], [2, 3], [11, -6], [-1, 0], [14, -5], [-4, -1], [23, -4], [-13, -2]\}$.

3 Použitá literatura

GALPERIN, G. A., TOLPYGO, A. K.: Moskovskije matematičeskije olympiady, Prosveščeniye, Moskva, 1986.

4 Kontakt na autora

Doc. RNDr. Jaroslav Hora, CSc.

katedra matematiky, fyziky a technické výchovy FPE ZČU, Klatovská 51, Plzeň
horajar@kmt.zcu.cz

DIOFANTOVSKÉ ROVNICE II

Jaroslav HORA

1 Úvod

Budeme směřovat k obtížnějším úlohám, vyžadujícím netriviální algebraické úpravy.

2 Elementární úvod do pokročilejší teorie

V prvním příkladu bude hlavní potíž s nalezením rozkladu jistého polynomu s celočíselnými koeficienty. Pak již bude možné nahlédnout, že daná diofantovská rovnice nemá řešení. V dalším příkladu opět pomůže uvedení rovnice do součinného tvaru.

2.1 Příklad

Dokažte, že rovnice

$$x^5 + 3x^4y - 5x^3y^2 - 15x^2y^3 + 4xy^4 + 12y^5 = 33 \quad (1)$$

nemá řešení v \mathbb{Z}^2 .

Řešení: Pokusme se rozložit levou stranu na součin. Není to vůbec snadné, ale po řadě pokusů pronikneme do uvažování těch, kteří daný příklad vymýšleli. Člen x^5 by mohl vzniknout po vynásobení pěti závorek tvaru $(x + \text{či} - \text{několik } y)$. Nakonec dojdeme k tomu, že jde o součin $(x - 2y)(x - y)(x + y)(x + 2y)(x + 3y)$. Lze ověřit, že vskutku platí

$$(x - 2y)(x - y)(x + y)(x + 2y)(x + 3y) = x^5 + 3x^4y - 5x^3y^2 - 15x^2y^3 + 4xy^4 + 12y^5.$$

To je podstatný pokrok.

Vraťme se k rovnici (1) a představme si, že existují jakási celá čísla x, y , pro něž (1) platí. To by znamenalo, že celé číslo 33 je možné rozložit v součin pěti celých čísel, která jsou navzájem různá (neboť výrazy $x - 2y, x - y, x + y, x + 2y, x + 3y$ zjevně navzájem různé jsou). Ale celé číslo 33 lze rozložit pouze v součin dvou přirozených čísel jako $33 = 3 \cdot 11$ (na pořadí činitelů nehledíme) a tedy jako v součin nanejvýš čtyř navzájem různých celých čísel. Využijeme totiž navíc již jen „hrátky se znaménky“: $33 = -1 \cdot 1 \cdot 3 \cdot (-11)$ nebo obdobně. Získáváme tedy závěr, že číslo 33 lze zapsat nanejvýš jako součin čtyř navzájem různých celých čísel, nikoli však pěti. Z toho plyne, že diofantovská rovnice (1) nemá řešení.

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

2.2 Příklad

Řešte diofantovskou rovnici

$$x^2 = y^2 + 2y + 13.$$

Řešení: Pokusme se postupnými úpravami uvést levou stranu rovnice do součinnového tvaru. Je $x^2 = (y + 1)^2 + 12$, resp. $x^2 - (y + 1)^2 = 12$, takže zadanou rovnici upravíme do tvaru

$$(x - y - 1)(x + y + 1) = 12.$$

Povšimněme si teď, že každá ze závorek je nutně sudé číslo. Vidíme tedy, že jedna ze závorek je rovna buď číslu 2 nebo -2 a druhá buďto číslu 6 nebo -6 . Další postup je již zřejmý a přenecháme jej čtenáři. Vyjde $P = \{[4, 1], [-4, 1], [4, -3], [-4, -3]\}$.

3 Použitá literatura

GALPERIN, G. A., TOLPYGO, A. K.: Moskovskije matematičeskije olympiady, Prosveščeniye, Moskva, 1986.

4 Kontakt na autora

Doc. RNDr. Jaroslav Hora, CSc.

katedra matematiky, fyziky a technické výchovy FPE ZČU, Klatovská 51, Plzeň
horajar@kmt.zcu.cz

ROVNICE A NEROVNICE S PARAMETREM I

Jaroslav HORA

1 Úvod

Příklady na rovnice a nerovnice s parametrem jsou dosti časté v různých matematických soutěžích. Je také důležité znát metodu početního i grafického řešení.

2 Grafické řešení nerovností

Uvedeno jen zadání, grafické řešení není obtížné, ale zabralo by dosti místa.

2.1 Příklady 1: Vyřešte graficky následující nerovnosti:

a) $y - 2x \geq 1$ b) $x + |y| \leq 1$ c) $x^2 \geq y^2$ d) $x \cdot y \leq -2$ atd.

2.2. Příklad 2: Početně řešte rovnici $(a + 1)x^2 - (a - 1)x - 2a = 0$ s neznámou $x \in \mathbb{R}$ a parametrem a .

2.3. Příklad 3: Řešte nerovnici $\sqrt{2x + a} \geq x$ s neznámou x a parametrem a .

Řešení: 1. Pokud je $x < 0$, jsou řešeními všechny uspořádané dvojice $[x, a]$, pro něž $x \geq -a/2$.

2. Pro $x \geq 0$ dostáváme umocněním ekvivalentní nerovnici $x^2 - 2x - a \leq 0$. Řešení závisejí na hodnotě diskriminantu $D = 1 + a$.

a) Pro $a < -1$ řešení neexistuje.

b) Pro $a \geq -1$ vyhovují hodnoty x , pro něž $1 - \sqrt{a+1} \leq x \leq 1 + \sqrt{a+1}$, které ještě splňují podmínky $x \geq 0$ a $x \geq -a/2$.

Je tedy třeba řešit soustavu nerovnic

$$1 - \sqrt{a+1} \leq x \leq 1 + \sqrt{a+1},$$

$$x \geq 0,$$

$$x \geq -a/2,$$

$$a \geq -1.$$

Vidíme, že číslo x musí být větší nebo rovné každému z čísel 0 , $-a/2$, a $1 - \sqrt{a+1}$. Teď je třeba posoudit, jak jsou tato čísla rozmístěna na ose x v závislosti na hodnotách parametru a . Tuto diskusi již přenecháme čtenáři – povede na rozlišení případů α) $a > 0$ a β) $a \in \langle -1, 0 \rangle$ se závěrem:



INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Pro $a < -1$ řešení neexistuje.

Pro $a \in \langle -1, 0 \rangle$ je $P = \langle 1 - \sqrt{a+1}, 1 + \sqrt{a+1} \rangle$.

Pro $a > 0$ je $P = \langle -a/2, 1 + \sqrt{a+1} \rangle$.

3 Použitá literatura

BAŠMAKOV, M. I.: Uravnenija i neravenstva, druhé přepracované vydání, Nauka, Moskva, 1976.

4 Kontakt na autora

Doc. RNDr. Jaroslav Hora, CSc.

katedra matematiky, fyziky a technické výchovy FPE ZČU, Klatovská 51, Plzeň.

horajar@kmt.zcu.cz

Středisko služeb školám, Plzeň, Částkova 78
Podpora talentovaných žáků v Plzeňském kraji
CZ.1.07/1.2.03/02.0001

Tento projekt je v roce 2013 financován z rozpočtu Plzeňského kraje

ROVNICE A NEROVNICE S PARAMETREM II

Jaroslav HORA

1 Úvod

Příklady na rovnice a nerovnice s parametrem jsou dosti časté v různých matematických soutěžích.

2 Elementární úvod do pokročilejší teorie

Začneme příkladem spíše „maturitního“ charakteru, v němž je vhodné využít znalost Viètových vzorců.

2.1 Příklad 1 (viz [BU]): Určete všechny hodnoty parametru $p \in \mathbb{R}$, pro něž má rovnice

$$x^2 + 2(p - 4)x + p^2 + 6p = 0 \quad (1)$$

- alespoň jeden reálný kořen,
- dva reálné kořeny, které jsou oba kladné,
- dva reálné kořeny, které jsou oba záporné,
- dva reálné kořeny, z nichž jeden je kladný a jeden záporný.

Postupně ukážeme, že

a) daná rovnice má alespoň jeden reálný kořen pro $p \leq \frac{8}{7}$,

b) dva kladné reálné kořeny má rovnice (1) pro $p \in (-\infty, -6) \cup \left(0, \frac{8}{7}\right)$,

c) rovnice (1) nemá dva záporné reálné kořeny pro žádné $p \in \mathbb{R}$,

d) rovnice (1) má jeden kladný a jeden záporný kořen pro všechna $p \in (-6, 0)$.

Situace ad a) nastává zřejmě právě tehdy, když $D \geq 0$. Je $D = 4(p - 4)^2 - 4(p^2 + 6p) = 4p^2 - 32p + 64 - 4p^2 - 24p = -56p + 64 = 8(8 - 7p)$, odkud $8 - 7p \geq 0$, $p \leq 8/7$.

b) Dva reálné kořeny (rozumí se různé) existují pro $D > 0$, tedy $p < 8/7$. Dále je ovšem třeba zajistit, aby oba tyto kořeny x_1, x_2 byly kladné, tj. $x_1 > 0, x_2 > 0$. Tyto poslední podmínky

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

jsou ale ekvivalentní s x_1 . $x_2 > 0 \wedge x_1 + x_2 > 0$, což je zase podle Viětových vzorců ekvivalentní s podmínkami $-2(p-4) > 0$, $p^2 + 6p > 0$. Je tedy $p < 4 \wedge p(p+6) > 0$ a ovšem $p < 8/7$, tj. $p \in (-\infty, -6) \cap (0, 8/7)$.

Rozbor ad c), d) přenecháme čtenáři.

2.2. Příklad 2: V množině reálných čísel řešte rovnici

$$\sqrt{a - \sqrt{a+x}} = x, \text{ kde } a \text{ je reálný parametr. (viz [GA], str. 23)}$$

Řešení: Přímá snaha řešit danou rovnici dvojným umocněním vede k rovnici čtvrtého stupně v x s parametrem a , což není schůdná cesta. Pomoci může substituce $y = \sqrt{a+x}$, načež $x = \sqrt{a-y}$. Umocněním obou vyjádření na druhou máme

$$y^2 = a+x, x^2 = a-y \text{ a odečtením } y^2 - x^2 = x+y, (y+x)(y-x) = y+x, \text{ načež}$$

$$(y+x)(y-x-1) = 0.$$

Získali jsme dva případy I. $y = -x$, II. $y = x+1$.

I. Dosazením do vyjádření získaných po substituci máme jednak $\sqrt{a+x} = -x$, ale též $\sqrt{a+x} = x$, odkud $x = 0$ a též $a = 0$. Po provedení zkoušky vidíme, že vskutku pro $a = 0$ má daná rovnice vskutku řešení $x = 0$.

II. Po dosazení $y = x+1$ do obou vyjádření dostáváme $x+1 = \sqrt{a+x}$, resp. $x = \sqrt{a-x-1}$. Po důsledkové úpravě (umocnění na druhou) dospějeme v obou případech k jediné kvadratické rovnici s neznámou x a parametrem a

$$x^2 + x - a + 1 = 0.$$

Tato rovnice má diskriminant $D = 4a - 3$ a kořeny $x_1 = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{4a-3}$ a $x_2 = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{4a-3}$. Z původní rovnice okamžitě plyne, že $x \geq 0$, proto kořen x_2 nevyhovuje



INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

původní rovnici a musíme ještě nalézt ty hodnoty parametru, pro něž je $x_1 \geq 0$. To nastává pro $a \geq 1$.

Zkouškou lze ověřit, že pro $a \geq 1$ má původní rovnice řešení $x = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{4a-3}$.

3 Použitá literatura

BUŠEK, I.: Řešené maturitní úlohy z matematiky, třetí přepracované vydání, Prometheus, Praha 2002.

GALPERIN, G. A., TOLPYGO, A. K.: Moskovskije matematičeskije olympiady, Prosveščeniye, Moskva, 1986.

4 Kontakt na autora

Doc. RNDr. Jaroslav Hora, CSc.

katedra matematiky, fyziky a technické výchovy FPE ZČU, Klatovská 51, Plzeň.

horajar@kmt.zcu.cz

Středisko služeb školám, Plzeň, Částkova 78
Podpora talentovaných žáků v Plzeňském kraji
CZ.1.07/1.2.03/02.0001

Tento projekt je v roce 2013 financován z rozpočtu Plzeňského kraje

SOUSTAVY ALGEBRAICKÝCH ROVNIC II

Jaroslav HORA

1 Úvod

Po probrání základních technik řešení soustav algebraických rovnic můžeme přistoupit k náročnějším příkladům, které mohou také obsahovat parametry. Na ukázkou uvedeme dva příklady.

2 Příklad

V \mathbb{R}^2 řešte soustavu

$$x^3 - y^3 = 2b$$

$$x^2 y - x y^3 = b$$

s neznámými x, y a parametrem $b \in \mathbb{R}$.

Řešení:

1. Vyzkoušíme řešení soustavy pro hodnotu $b = 0$. Máme pak

$$(x - y)(x^2 + xy + y^2) = 0$$

$$(x - y) \cdot xy = 0.$$

Z první rovnice plyne $y = x$ a další postup je již snadný.

2. Nechť nyní $b \neq 0$. Dostáváme soustavu

$$(x - y)(x^2 + xy + y^2) = 2b \neq 0.$$

$$(x - y) \cdot xy = b.$$

Nyní je ze druhé rovnice patrné, že $x \neq y$, $x \neq 0$, $y \neq 0$. Za těchto podmínek ale můžeme vydělit první rovnici druhou a po malé úpravě (odstranění zlomku, převedení členu z pravé strany vlevo) dostaneme

$$x^2 - xy + y^2 = 0.$$

Je ale zřejmé, že pro všechna nenulová $x, y \in \mathbb{R}$ platí $x^2 - xy + y^2 > 0$, tj. pro hodnotu parametru $b \neq 0$ nemá soustava řešení.

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

3 Příklad:

V \mathbb{R}^3 řešte soustavu

$$x + y + z = a$$

$$x^2 + y^2 + z^2 = a^2$$

$$x^3 + y^3 + z^3 = a^3$$

s neznámými x, y, z a parametrem $a \in \mathbb{R}$.

Řešení: Umocníme první rovnice na třetí a odečteme od ní třetí rovnici. Máme

$$3x^2y + 3x^2z + 3xy^2 + 3xz^2 + 3yz^2 + 3y^2z = 0,$$

$$\text{což lze upravit na } 3(x + y)(x + z)(y + z) = 0.$$

Kdyby platilo $x + y = 0$, plyne z první rovnice původní soustavy ihned, že $z = a$, tj. do oboru pravdivosti P dané soustavy patří uspořádaná trojice $[0, 0, a]$. Zcela analogicky obdržíme další dvě řešení.

Je tedy $P = \{[0, 0, a], [0, a, 0], [a, 0, 0]\}$ pro $a \neq 0$. Pokud je $a = 0$, je $P = \{[0, 0, 0]\}$.

4 Použitá literatura

GALPERIN, G. A., TOLPYGO, A. K.: Moskovskije matematičeskije olympiady, Prosveščeniye, Moskva, 1986.

5 Kontakt na autora

Doc. RNDr. Jaroslav Hora, CSc.

katedra matematiky, fyziky a technické výchovy FPE ZČU, Klatovská 51, Plzeň.

horajar@kmt.zcu.cz

SOUSTAVY LINEÁRNÍCH ROVNIC

Jaroslav HORA

1 Úvod

Se soustavami lineárních rovnic se v jednoduché formě seznamují již žáci základní školy. Na střední škole se studenti zabývají i poněkud náročnějšími úlohami a získají i jiný pohled na danou problematiku (analytická geometrie). V prvních semestrech vysokoškolského studia se pak studenti obeznámí s pojmy jako matice a její hodnota, Gaussova eliminační metoda, Frobeniova věta.

2 Elementární úvod do pokročilejší teorie

Pro účastníky matematického kempu byl na jednodušších soustavách obvykle tří lineárních rovnic o třech neznámých předveden úvod do pokročilejší teorie. Byly motivovány pojmy jako matice soustavy, rozšířená matice soustavy, což ostatně vede k efektivnějšímu zápisu. Dále elementární řádkové úpravy, Gaussova eliminační metoda. V předváděných příkladech po jejím provedení jsme schopni určit tzv. hodnota matice soustavy, resp. hodnota rozšířené matice soustavy. Diskuse řešitelnosti původní soustavy lineárních rovnic je nyní přehledná (Frobeniova věta). Je třeba nacvičit zápis řešení v tom případě, kdy má soustava nekonečně mnoho řešení (užití parametrů).

2.1 Některé úlohy, pro něž není obecná teorie příliš efektivní

Existují ale úlohy, pro něž je stále dobré mít nějaký dobrý nápad, kterým si můžeme výrazně ušetřit práci. Zde je jedna z nich (viz literatura, str.28):

Řešte soustavu rovnic $x_1 + x_2 + x_3 = 6$,

$$x_2 + x_3 + x_4 = 9,$$

$$x_3 + x_4 + x_5 = 3,$$

$$x_4 + x_5 + x_6 = -3,$$

$$x_5 + x_6 + x_7 = -9,$$

$$x_6 + x_7 + x_8 = -6,$$

$$x_7 + x_8 + x_1 = -2,$$

$$x_8 + x_1 + x_2 = 2.$$

Pracovat se soustavou osmi lineárních rovnic o osmi neznámých podle „velké“ teorie, která sice neselže, ale je pracná, by stálo dost času. Je dobré sečíst všechny rovnice a tím se získá trojnásobek součtu všech neznámých. Sečteme –li první, čtvrtou a sedmou rovnici,



INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

nahlédneme snadno, že $x_1 = 1$. Obdobně lehko najdeme hodnoty dalších neznámých: $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, $x_3 = 3$, $x_4 = 4$, $x_5 = -4$, $x_6 = -3$, $x_7 = -2$, $x_8 = -1$.

3 Závěr

Obdobné úlohy se mohou objevit v různých matematických soutěžích..

4 Použitá literatura

GALPERIN, G. A., TOLPYGO, A. K.: Moskovskije matematičeskije olympiady, Prosveščeniye, Moskva, 1986.

5 Kontakt na autora

Doc. RNDr. Jaroslav Hora, CSc.

katedra matematiky, fyziky a technické výchovy FPE ZČU, Klatovská 51, Plzeň.
horajar@kmt.zcu.cz

Středisko služeb školám, Plzeň, Částkova 78
Podpora talentovaných žáků v Plzeňském kraji
CZ.1.07/1.2.03/02.0001

Tento projekt je v roce 2013 financován z rozpočtu Plzeňského kraje

DIRICHLETŮV PRINCIP V ÚLOHÁCH

Martina KAŠPAROVÁ

1 Úvod

Dirichletův princip je jednoduché tvrzení,¹ které při řešení úloh často používáme nevědomě. Jeho existenční charakter ho řadí do kategorie velmi důležitých matematických vět. Je vhodné ukázat jeho použití na úlohách matematické olympiády, které vyžadují důkaz existence objektu jistých vlastností.

2 Úlohy

Příklad 1: V krychli o hraně velikosti 1 je dáno 2 050 bodů. Dokažte, že mezi nimi existuje pět takových, které leží uvnitř koule o poloměru $\frac{1}{9}$. (26. MO, A-III-1, 1979, s. 127)

V úloze je zřejmé, že rozmístovanými objekty bude 2 050 bodů. Přihrádkami ve tvaru koule o poloměru $\frac{1}{9}$ nelze beze zbytku vyplnit krychli o hraně jedna. Nahradíme proto koule jím vepsanými krychlemi. Poloměr koule $\frac{1}{9}$ představuje ve vepsané krychli polovinu tělesové úhlopříčky. Odtud je $\frac{2\sqrt{3}}{27}$ délka hrany vepsané krychle. Krychle o takové hraně nelze beze zbytku „vyrovnat“ k hraně velikosti 1. Hledejme proto takovou hranu krychle, aby byla menší než $\frac{2\sqrt{3}}{27}$ a zároveň, aby se její celočíselný násobek rovnal 1. Protože $\frac{2\sqrt{3}}{27} \doteq 0,128$, zvolme $\frac{1}{8}$. Krychli o hraně velikosti 1 lze vyplnit 512 krychlemi o hraně velikosti $\frac{1}{8}$. Rozmístíme-li 2 050 bodů do 512 krychlí o hraně $\frac{1}{8}$, musí podle Dirichletova principu existovat aspoň jedna krychle, v níž je aspoň pět bodů, a tedy i koule o poloměru $\frac{1}{9}$ s pěti body uvnitř.

Příklad 2: Ve třídě je 25 žáků. Ví se, že v libovolné skupině tří z nich jsou dva přátelé. Dokažte, že existuje žák, u něhož je aspoň dvanáct přátel. (8. turnir imeni Lomonosova, 17. úloha, 1985.)

Předpokládejme naopak, že neexistuje žák s aspoň 12 přáteli, každý žák má tedy nejvýše 11 přátel. Označme jednoho z žáků A, pak k němu musí existovat žák B, který není jeho přítel. (Pokud takový žák není, pak A má za kamaráda všechny spolužáky ze třídy, tj. má více než 11 přátel.) Každý z žáků A, B má dle předpokladu nejvýše 11 přátel, to je dohromady 22 žáků. Ve třídě je ovšem 23 žáků. Proto buď A, nebo B má aspoň 12 přátel.

¹ Rozmístíme-li $m \cdot n + 1$ předmětů do n přihrádek, pak existuje přihrádka, v níž je aspoň $m + 1$ předmětů.

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Příklad 3: V rovině je dáno 17 bodů, z nichž žádné tři neleží na jedné přímce. Každé dva body jsou spojené úsečkou, která je obarvená zelenou, modrou či červenou barvou. Dokažte, že lze najít tři body tak, že všechny tři úsečky jimi určené mají stejnou barvu, tj. existuje jednobarevný trojúhelník. (Hecht, Sklenáriková 1992, s. 109)

V trojúhelníku vedou z jednoho vrcholu dvě úsečky, zkoumejme proto obarvení úseček vedených z jednoho bodu (označme ho A) do zbývajících šestnácti bodů. Protože obarvujeme šestnáct úseček třemi barvami, existuje barva (např. zelená), kterou je obarveno aspoň šest úseček. Označme krajní bod některé ze zelených úseček jako B, $B \neq A$. Spojíme nyní B s ostatními pěti krajními body zelených úseček. Kdyby některá z těchto spojníc byla zelená, existoval by jednobarevný trojúhelník s vrcholy A, B. Pokud spojnice obarvujeme jen modrou a červenou barvou, musí být aspoň tři úsečky z pěti obarveny stejnou barvou, např. modrou. Pokud je ve skupině tří krajních bodů modrých úseček některý spojen s druhým modrou spojnící, existuje jednobarevný trojúhelník. Pokud tomu tak není, musí být všechny tři body navzájem spojeny úsečkou červené barvy, v každém případě existuje jednobarevný trojúhelník.

Příklad 4: Na šachovnici 8×8 je označeno 17 polí. Dokažte, že z nich lze vždy dvě vybrat tak, že kůň potřebuje aspoň tři skoky pro přesun z jednoho z nich na druhé. (20. turnir gorodov, 3. úloha, 1998/1999)

Udělejme si nejprve představu o tom, jaká pole může kůň zaujmout třetím skokem. Kůň se pohybuje do písmene „L“ z nějakého pole uprostřed šachovnice směrem vzhůru, dolů, doprava i doleva, takže vyznačíme-li pole, kam kůň doskočí jedním skokem, získáme středově souměrný obrazec, jehož středem je výchozí pole. Středově souměrný obrazec zůstane zachován i při dalších skocích. Při jejich znázorňování se proto můžeme omezit na případ, kdy kůň vychází z levého dolního pole, které označíme 0.

	3		3				
3		3		3			
2	3	2	3		3		
3	2	3	2	3		3	
2	1		3	2	3		
3		1	2	3		3	
0	3	2	3	2	3		

Pokusme se najít obrazec, v němž bude platit, že z každého pole se na zbývajících dostane kůň aspoň třemi skoky. Z obrázku je patrné, že z pole 0 (zavedme pro snazší vyjadřování soustavu souřadnic s počátkem $0 = [0, 0]$) se na pole $[4, 4]$ i na pole $[5, 4]$ dostane kůň třemi nebo více tahy. Z pole $[4, 4]$ se na pole $[5, 4]$ přemístí kůň také po třech skocích, neboť

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

z výchozího bodu se na sousední pole dostane kůň třemi skoky, jak je patrné z polí $[0, 0]$ a $[1, 0]$. Protože jsou skoky koně souměrné podle výchozího pole, lze se naopak třemi či více skoky přemístit z polí $[4, 4]$, $[5, 4]$ do výchozího pole $[0, 0]$ a z pole $[5, 4]$ na $[4, 4]$. Obrázec tvořený body $[0, 0]$, $[4, 4]$ a $[5, 4]$ má tu vlastnost, že z každého jeho pole se na jiné pole dostane kůň aspoň třemi skoky.

Existenci aspoň dvou polí ze 17 ve vzdálenosti aspoň tří tahů koněm zajistí Dirichletův princip. Pro jeho použití potřebujeme 17 (náhodně) označených polí rozdělit do dostatečně malého počtu přihrádek – obrazců, tvořených polí ve vzdálenosti aspoň tří koňských skoků. Dvě ze 17 vyznačených polí budou obsaženy v obrazci, když bude počet obrazců menší než 17. Pro šachovnici 8×8 je třeba najít obrazec, který sestává z aspoň $64/16 = 4$ polí, aby bylo jisté, že v něm budou dvě ze 17 vyznačených polí. Navíc je třeba, aby šestnácti obrazci tvořenými čtyřmi poli bylo možno pokrýt celou šachovnici.

K nalezenému obrazci ze tří polí přidejme pole $[1, 0]$. Budeme-li ho považovat za výchozí bod, je z obrázku zřejmé, že se z něj na pole $[0, 0]$ a $[4, 4]$ dostaneme právě třemi koňskými skoky a na pole $[5, 4]$ více než třemi tahy. Šestnácti obrazci o čtyřech polích, které mají stejný tvar jako šedě vyznačený obrazec na šachovnici znázorněné výše, lze beze zbytku pokrýt celou šachovnici. Dvě ze 17 vyznačených polí jsou v jednom z obrazců, o němž víme, že z každého jeho pole se lze do jiného pole dostat aspoň třemi koňskými skoky. Tím je důkaz proveden.

Příklad 5: Je dáno 51 různých dvouciferných čísel (jednociferná čísla považujeme za dvouciferná s první cifrou 0). Dokažte, že je možno z nich vybrat šest takových čísel, že mají navzájem odlišné cifry na místě desítek i jednotek. (Alfutova, Ustinov 2002, s. 15)

Uspořádejme čísla vzestupně a rozdělme je do skupin podle cifry na místě desítek. Takových skupin je nejvýše deset a nejméně šest (51 čísel nelze rozmístit do pěti a méně skupin po deseti číslech). Rozmístíme-li 51 čísel do 10 (nebo méně) skupin se stejnou cifrou na místě desítek, existuje zřejmě skupina, v níž bude aspoň šest čísel, označme ji A_6 . Ukažme dále, že existují další skupiny různé od A_6 a různé od sebe navzájem s aspoň pěti, čtyřmi, třemi, dvěma a jedním prvkem. Označme je postupně A_5, \dots, A_1 . Ve skupině A_6 je aspoň 6 čísel, ale nejvýše 10 čísel. (Ve skupině se stejnou cifrou na místě desítek může být maximálně deset čísel s různou cifrou na místě jednotek.) Na ostatní skupiny zbývá minimálně $51 - 10 = 41$ čísel. Rozmístíme těchto 41 čísel do 9 (nebo méně skupin), pak existuje skupina A_5 s aspoň pěti, ale nejvýše deseti prvky. Zbývá minimálně 31 dvouciferných čísel na dalších osm nebo méně skupin. Opět podle Dirichletova principu musí existovat skupina, v níž jsou aspoň $\lceil 31/8 \rceil + 1 = 3 + 1 = 4$ prvky, nechť je to A_4 . Podobně se zdůvodní existence skupin A_3, A_2, A_1 . Protože existují skupiny A_1, \dots, A_6 lze vždy vybrat šest čísel požadovaných vlastností. (První číslo se vybere ze skupiny A_1 , druhé ze skupiny A_2 tak, aby se na místě jednotek lišilo od čísla ze skupiny A_1 , třetí číslo se vybere ze skupiny A_3 tak, aby cifra na místě jednotek byla jiná než u čísel ze skupin A_1, A_2 . Zřejmě to lze vždy provést, protože v každé další skupině je vždy o jedno číslo více.)



INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

3 Závěr

Tvrzení, jejichž důkaz se v uvedených úlohách požadoval, platila z toho důvodu, že jsme měli k dispozici dostatečně velké množství objektů. Právě na takový typ úloh lze Dirichletův princip s výhodou použít.

4 Použitá literatura

XXVI. ročník matematické olympiády. Praha: SPN, 1979. 198 s.

8. Turnir imeni Lomonosova. 17. úloha, 1985.

Dostupné na internetu: <http://problems.ru/view_problem_details_new.php?id=32057>

20. Turnir gorodov. 3. úloha, 1998/1999.

Dostupné na internetu: <http://problems.ru/view_problem_details_new.php?id=98413> a také zde <<http://www.turgor.ru/problems/20/index.php>>

ALFUTOVA, N.B., USTINOV A. V. Algebra i teorija čísel. Sbornik zadač dlja matěmatičeskich škol. 1. vyd. Moskva: MCNMO, 2002. 264 s. ISBN 5-94057-038-0.

Dostupné na internetu: <http://problems.ru/view_problem_details_new.php?id=60359>

HECHT, T., SKLENÁRIKOVÁ, Z. Metódy riešenia matematických úloh. 1. vyd. Bratislava: Slovenské pedagogické nakladateľstvo, 1992. 241 s. ISBN 80-08-00340-5.

5 Kontakt na autora

Mgr. Martina Kašparová, Ph.D.

KMT-M FPE ZČU

Klatovská 51, Plzeň

mernesto@kmt.zcu.cz

Středisko služeb školám, Plzeň, Částkova 78
Podpora talentovaných žáků v Plzeňském kraji
CZ.1.07/1.2.03/02.0001

Tento projekt je v roce 2013 financován z rozpočtu Plzeňského kraje

SOUSTAVY ALGEBRAICKÝCH ROVNIC I

Martina KAŠPAROVÁ

1 Úvod

Občas se mezi úlohami matematické olympiády objeví příklady vyžadující řešení soustav rovnic

$$f_1(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0$$

$$f_2(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0$$

$$\dots\dots\dots$$

$$f_m(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0$$

kde f_1, f_2, \dots, f_m jsou polynomy n neurčitých stupně vyššího než jedna, nebo soustav, které lze na tento tvar převést.

2 Úlohy

Soustavy zadávané v MO vyřeší obvykle poměrně rychle programy jako Mathematica či Maple, existuje tedy obecně fungující algoritmus (Buchbergerův algoritmus) pro jejich zvládnutí. I kdyby ho však student znal, nemá při řešení soutěžních úloh vyšších kol dostatek času pro jeho „manuální použití“, tj. výpočet bez kalkulatoru. Od studenta se očekává nějaký postup využívající vhodné zadání soustavy. Následující text na příkladech připomíná některé z použitelných „fint“.

2.1 Soustava řešená užitím vhodné substituce

Příklad 1: V oboru reálných čísel řešte soustavu (Hecht, Sklenáriková 1992, s. 18):

$$x(x + 1)(3x + 5y) = 144$$

$$x^2 + 4x + 5y = 24$$

Dosazení za $5y$ z druhé rovnice do první vede k vyloučení jedné neznámé, ale vzniklou rovnicí $x^4 + 2x^3 - 23x^2 - 24x + 144 = 0$ je náročně vyřešit i při omezení se na obor celých čísel. V průběhu dosazení si však lze povšimnout výrazů $5y$ a $x^2 + x$, které jsou na levých stranách obou rovnic. Volbou nových neznámých, např. s a t , za výrazy $x^2 + x$ a $3x + 5y$ získáme novou soustavu: $st = 144$, $s + t = 24$. Užitím Viètových vztahů sestavíme kvadratickou rovnici a najdeme její kořeny ($s = t = 12$), případně řešení uhodneme z předchozí soustavy v neznámých s a t . Zbývá vyřešit jednoduchou soustavu: $x^2 + x = 12$, $3x + 5y = 12$. Vhodnou substitucí jsme místo jedné rovnice čtvrtého stupně řešili dvě rovnice druhého stupně, které v vedly ke dvěma reálným řešením: $[3, \frac{3}{5}]$, $[-4, \frac{24}{5}]$.

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

2.2 Soustava řešená úpravou na součin a počet řešení

Příklad 2: V oboru reálných čísel řešte soustavu (16. MO, C-I-1, 1968, s. 34):

$$\begin{aligned}x(x + y) + z(x - y) &= 6 \\y(y + z) + x(y - z) &= -2 \\z(z + x) + y(z - x) &= 3\end{aligned}$$

Odhlédneme-li od pravých stran rovnic, vznikne daná soustava rovnic tzv. cyklickou záměnou neznámých x, y, z . V takové soustavě lze rovnice výhodně sečíst a případně upravit na součin. Např. součet první a druhé rovnice vede k rovnici $|x + y| = 2$. Rovněž součet první rovnice se třetí a druhé se třetí vedou k lineárním rovnicím s neznámými v absolutní hodnotě. Uvážíme-li všechny možnosti, které mohou nastat, vyjde množina osmi trojic, které řeší úlohu.

V tomto a podobných příkladech se řešitel může trápit otázkou, zda našel všechna řešení dané soustavy. Odpověď na takovou otázku poskytuje Bézoutova věta, kterou lze poněkud volněji formulovat následovně. Jestliže má soustava n polynomiálních rovnic o n neznámých konečný počet řešení, pak je nejvýše roven součinu stupňů vedoucích členů polynomů příslušných soustavě. Platnost věty lze ukázat např. na společných bodech dvou kuželoseček nebo společných bodech rovinné kubické křivky a kuželosečky. V předchozí soustavě odpovídá součin 2.2.2 stupňů vedoucích členů x^2, y^2, z^2 počtu řešení soustavy.

2.3 Soustavy užívající symetrii polynomů (funkcí)

Příklad 3: V oboru reálných čísel řešte soustavu rovnic (52. MO, A-III-1, 2004, s. 68, 90–91):

$$\begin{aligned}x^2 - xy + y^2 &= 7 \\x^2y + xy^2 &= -2\end{aligned}$$

Polynomy na levých stranách rovnic se nezmění, zapíšeme-li v nich místo x neznámou y a zároveň místo y neznámou x . Jde o tzv. symetrické polynomy, které se nezmění při libovolné permutaci (změně pořadí) proměnných. Pokud je nějaká dvojice $[x_0, y_0]$ řešením soustavy, k níž příslušné polynomy (funkce) jsou symetrické polynomy (funkce), pak je jejím řešením i dvojice $[y_0, x_0]$.

Symetrické polynomy $x^2 - xy + y^2, x^2y + xy^2$ lze vyjádřit jako funkce polynomů (tzv. elementárních symetrických polynomů) $x + y, xy$. Označme tyto elementární symetrické polynomy jako nové neznámé s a t . Daná soustava má po substituci tvar

$$\begin{aligned}st &= -2 \\s^2 - 3t &= 7\end{aligned}$$

a vede na normovanou kubickou rovnici s celočíselnými koeficienty, jejíž kořeny 1, 2, -3 (nebo aspoň jeden z nich) lze uhodnout. Ze známých hodnot s a t , tj. součtu a součinu

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

neznámých x , y , sestavíme pomocí Viětových vztahů kvadratickou rovnici. Uspořádané dvojice sestavené z jejích kořenů představují hledaná řešení dané soustavy.

Příklad 4: Najděte všechna reálná řešení soustavy rovnic (26. MO, A-III-4, 1979, s. 132):

$$\begin{aligned}x + y + z &= 3 \\ \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} &= \frac{5}{12} \\ x^3 + y^3 + z^3 &= 45\end{aligned}$$

Funkce vystupující na levých stranách soustavy jsou symetrické. Je proto lákavé postupovat cestou uhodnutí aspoň jedné trojice, která by soustavu řešila. V takovém případě bychom totiž permutováním všech jejích členů dostali všechna řešení dané soustavy. (Pokud v druhé rovnici odstraníme zlomky, je odpovídající polynom druhého stupně, a tedy maximální počet řešení je dán součinem stupňů $1 \cdot 2 \cdot 3 = 6$, což je zároveň počet permutací, které lze provést na prvky uhodnuté trojice.)

Pokud trojici neuhodneme, můžeme použít metodu naznačenou v předchozím příkladě. Zvolíme nové neznámé $s = x + y$, $t = xy$, v závislosti na nich můžeme danou soustavu zapsat ve tvaru:

$$\begin{aligned}s + z &= 3 \\ \frac{s}{t} + \frac{1}{z} &= \frac{5}{12} \\ s(s^2 - 3t) + z^3 &= 45\end{aligned}$$

Eliminací z a t (dosazením za z vyjádřené z první rovnice a za t z druhé rovnice do třetí) získáme z této soustavy rovnici třetího stupně $s^3 - 6s^2 - s + 6 = 0$, kterou lze jednoduše upravit na součinnový tvar. Další postup je zřejmý.

Lze postupovat též pomocí elementárních symetrických polynomů ve všech třech proměnných x , y , z , které na základě Viětových vztahů pro kubický polynom umožní přímé sestavení kubické rovnice.² Označíme-li $s = x + y + z$, $t = xy + xz + yz$ a $u = xyz$, bude mít daná soustava tvar:³

$$\begin{aligned}s &= 3 \\ t &= \frac{5}{12}u \\ s^3 - 3st + 3u &= 45\end{aligned}$$

Odtud je $s = 3$, $t = -10$, $u = -24$, x , y , z jsou proto kořeny kubické rovnice $x^3 - 3x^2 - 10x + 24 = 0$.

Příklad 5: Najděte všechna reálná řešení soustavy rovnic (Ernestová, 1999, s. 65):

$$x + 2y - z = 2$$

² Označme x , y , z nulové body polynomu třetího stupně v proměnné w , pak lze psát $(w - x)(w - y)(w - z) = w^3 - (x + y + z)w^2 + (xy + xz + yz)w - xyz$, tj. elementární symetrické polynomy nulových bodů polynomu jsou koeficienty tohoto polynomu.

³ Technicky náročnější je vyjádření polynomu $x^3 + y^3 + z^3$ pomocí s , t a u :
 $s^3 = (x + y + z)^3 = x^3 + y^3 + z^3 + 3xy^2 + 3x^2y + 3xz^2 + 3x^2z + 3yz^2 + 3y^2z + 6xyz = x^3 + y^3 + z^3 + 3xy(s - z) + 3xz(s - y) + 3yz(s - x) + 6u = x^3 + y^3 + z^3 + 3st - 3u$

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

$$\begin{aligned}x^2 + 4y^2 + z^2 - 2xyz &= 6 \\x^3 + 8y^3 - z^3 &= 8\end{aligned}$$

Polynomy příslušné soustavě nejsou symetrické, ale pro nové proměnné $\bar{x}=x$, $\bar{y}=2y$, $\bar{z}=-z$ už symetrické jsou. Některým z postupů ukázaných v předchozím případě bychom zjistili, že daná soustava nemá žádné řešení.

3 Závěr

Na úlohách jsme připomenuli některé základní i méně obvyklé postupy použitelné při řešení soustav převoditelných na soustavy polynomiálních rovnic.

4 Použitá literatura

ERNESTOVÁ, M. Algoritmické metody pro řešení soustav polynomiálních rovnic. Diplomová práce. Plzeň, 1999. 74 s.

HECHT, T., SKLENÁRIKOVÁ, Z. Metódy riešenia matematických úloh. 1. vyd. Bratislava: Slovenské pedagogické nakladateľstvo, 1992. 241 s. ISBN 80-08-00340-5.

XVI. ročník matematické olympiády. Praha: SPN, 1968. 149 s.

52. ročník matematické olympiády. Praha: SPN, 2004. 186 s. ISBN 80-7015-960-X.

XXVI. ročník matematické olympiády. Praha: SPN, 1979. 198 s.

5 Kontakt na autora

Mgr. Martina Kašparová, Ph.D.

KMT-M FPE ZČU

Klatovská 51, Plzeň

mernesto@kmt.zcu.cz

ÚLOHY MO VYUŽÍVAJÍCÍ CIFERNÝ ZÁPIS ČÍSEL

Martina KAŠPAROVÁ

1 Úvod

V kategorii B a C matematické olympiády se často vyskytují příklady požadující nalezení čísel, jejichž cifry musí splňovat zadané podmínky. Takové problémy vedou k důkazovým či určovacím úlohám na dělitelnost přirozených čísel, ke kombinatorickým problémům, k řešení diofantovských rovnic apod.

2 Úlohy

Příklad 1: Ve které číselné soustavě má číslo 2015 zápis $abab$?

Úlohu můžeme stručně zapsat vztahem $(2015)_{10} = (abab)_z$, kde z je kladné celé číslo větší než 1 a a, b jsou kladná celá čísla menší než z nebo $b = 0$. Zapišme neznámé číslo $abab$ rozvinutým zápisem v soustavě o základu z :

$$2015 = az^3 + bz^2 + az + b$$

Obě strany rovnice lze upravit na součin:⁴

$$5.13.31 = (az + b)(z^2 + 1) \quad (*)$$

Podle základní věty aritmetiky je každý rozklad přirozeného čísla na součin prvočísel určen jednoznačně až na pořadí činitelů. Proto i výraz na pravé straně musí být pro jistá a, b, z rozložitelný na tři činitele, pokud má daná úloha řešení. Postačí uvažovat dva případy. (1) Výraz $az + b$ je dále nerozložitelný, je tedy roven 5, nebo 13, nebo 31. (2) Výraz $z^2 + 1$ není součinem dvou činitelů, v tom případě musí být roven některému z prvočísel na levé straně (*). Prozkoumáním všech možností zjistíme, že k řešení s přihlédnutím k podmínkám na a, b a z vede pouze případ $az + b = 31, z^2 + 1 = 65, z$ něhož vyplyne $(2015)_{10} = (3737)_8$.

Příklad 2: Ciferný součet kladného trojčiferného prvočísla p_1 je dvojčiferné prvočíslu p_2 . Ciferný součet prvočísla p_2 je jednociferné prvočíslu $p_3 > 2$. Najděte všechny takové trojice prvočísel p_1, p_2, p_3 . (21. MO, Z-P-1, 1973, s. 56)

Uvažujme $p_1 = 100.a + 10.b + c, p_2 = 10.x + y, a, b, c, x, y \in \{0, 1, 2, \dots, 9\}, a, x \neq 0$. Cifry a, b, c jsou maximálně rovny 9, proto je jejich ciferný součet, tj. číslo p_2 , maximálně roven 27. Hledáme tedy dvouciferná prvočísla p_2 , jejichž ciferný součet je rovněž prvočíslu, a to prvočíslu $p_3 > 2$. Všechna prvočísla p_2 s cifrou $x = 1$ na místě desítek mají sudý ciferný

⁴ Při rozkladu činitele 403 čísla $2015 = 5.403$ můžeme s výhodou použít tvrzení, podle něhož musí být nejmenší prvočíslu p , které dělí číslo n , menší nebo rovno \sqrt{n} .

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

součet, proto $x = 2$ a p_2 může být jedine 23. Zbývá najít cifry a, b, c tak, aby $a + b + c = 23$. Dvouciferné prvočíslo $p_2 = 23$ lze získat s ohledem na maximální možný ciferný součet trojčiferného čísla jako součet „poměrně vysokých“ cifer. Zjistíme, že $23 = 9 + 9 + 5 = 9 + 8 + 7 = 8 + 8 + 7 = 9 + 7 + 7$. Různým uspořádáním cifer v číslech lze získat 15 trojčiferných čísel se součtem 23, z nichž pouze 599, 887, 977, 797 jsou prvočísla.

Příklad 3: K přirozenému číslu m zapsanému stejnými číslicemi jsme přičetli čtyřmístné přirozené číslo n . Získali jsme čtyřmístné číslo s opačným pořadím číslic, než má číslo n . Určete všechny takové dvojice m a n . (52. MO, C-I-5, 2004, s. 29, 34–36)

Uvažujme n ve tvaru $(abcd)_{10}$. Protože součet $m + n = (dcba)_{10}$ je čtyřciferný, je také m nejvýše čtyřciferné číslo. Předpokládejme $m = (xxxx)_{10}$ a zapišme vztah $(m + n) - m = n$ v rozvinutém tvaru:

$$(d \cdot 10^3 + c \cdot 10^2 + b \cdot 10 + a) - (a \cdot 10^3 + b \cdot 10^2 + c \cdot 10 + d) = x \cdot 10^3 + x \cdot 10^2 + x \cdot 10 + x \quad (\bullet)$$

Po úpravě levé strany na součet $999(d - a) + 90(c - b)$ je zřejmé, že i pravá strana musí být násobkem 9. Vzhledem k tomu, že $9 \nmid 1111$, musí být $x = 9$, a tedy $m = 9999$. Takové m však úlohu neřeší, neboť jeho přičtením ke čtyřcifernému číslu se získá pěticefurné číslo.

Uvažujme m trojčiferné, pak lze rovnost odpovídající (\bullet) upravit na tvar:

$$37x = 3[111(d - a) + 10(c - b)]$$

Odtud je $x \in \{3, 6, 9\}$. K řešení vede pouze případ $x = 9$, pro nějž je $b = c$ a $d = a + 1$. Úlohu v tomto případě řeší 80 dvojic $[m, n]$ ve tvaru $[999, 1bb2]$, $[999, 2bb3]$, $[999, 3bb4]$, $[999, 4bb5]$, $[999, 5bb6]$, $[999, 6bb7]$, $[999, 7bb8]$, $[999, 8bb9]$, $b \in \{0, 1, \dots, 9\}$.

Je-li m dvojčíslé, resp. jednočíslé, tj. $m = (xx)_{10}$, resp. $m = x$, musí být opět $x = 9$ a rovnost (\bullet) zapsanou pro $m = 99$, resp. $m = 9$ lze upravit na tvar $10(b - c) + 11 = 111(d - a)$, resp. $10(b - c) + 1 = 111(d - a)$. Ani jeden z těchto případů nevede k řešení.

Příklad 4: Najděte všechna přirozená čísla n , pro něž se ciferný součet čísla 2^n rovná číslu 5. (21. MO, B-I-1, 1979, s. 83)

Zapišme prvních deset mocnin čísla 2: $\{2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, 512, 1024\}$. Všimněme si, že na místě jednotek se opakují cifry 2, 4, 8, 6 a že ty mocniny čísla 2, které končí 8 nebo 6 určitě nevedou k řešení, neboť přesahují požadovaný ciferný součet. V případě (a) budeme uvažovat mocniny dvou končící 4. Na ostatních místech takového čísla mohou být nuly a na prvním musí být 1, aby byl ciferný součet 5. Taková čísla můžeme zapsat ve tvaru $4 + 1 \cdot 10^k$, $k \geq 1$, $k \in \mathbb{N}$. Hledáme tedy n tak, aby platilo $4 + 1 \cdot 10^k = 2^n$. Pro $k \geq 3$ je jistě $n > 9$ a předchozí vztah lze upravit na tvar $1 + 2^{k-2} \cdot 5^k = 2^{n-2}$. Rovnost v tomto vztahu nenastane pro žádné $k \geq 3$ (liché číslo se nemůže rovnat sudému). Pro $k = 1$, resp. $k = 2$ je zkoumaným číslem 14, resp. 104, které nenajdeme v uvedeném výčtu mocnin 2, a tedy nejsou řešením.

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

(b) Uvažujme nyní čísla končící 2. Do daného ciferného součtu 5 zbývá $3 = 1 + 2 = 2 + 1 = 1 + 1 + 1$. Uvažujme proto čtyři případy: (A) $2^n = 1*2*2$, (B) $2^n = 2*1*2$, (C) $2^n = 1*1*1*2$, a (D) $2^n = 3*2$, kde znak * zastupuje aspoň jednu 0 nebo nic. Číslo typu (A) není dělitelné 4, a proto nemůže být mocninou 2. Ze stejného důvodu není mocninou dvou ani číslo tvaru (B), pokud má na místě desítek 0. Pokud na místě desítek má 1, jde o číslo tvaru $2*12$ a zvažujeme dělitelnost 8.⁵ Žádné číslo typu $2*12$ není dělitelné 8. Poslední trojčíslí v případě (C) může mít tvar 002, 012, 102 nebo 112. První tři tvary vedou k číslům, která nejsou dělitelná 8. Čísla typu $1*112$, kde na místě * jsou aspoň dvě nuly, tj. čísla $112 + 1.10^k$, kde $k \geq 5$, lze upravit na tvar $2^4(7 + 2^{k-4}.5^k)$. Je-li $k \geq 5$, je $n > 10$ a ve vztahu $2^4(7 + 2^{k-4}.5^k) = 2^n$ lze krátit 16. Pak je zřejmé, že takové k neexistuje. (Na levé straně je liché číslo, na pravé sudé.) Ani čísla 1 112, 10 112, tj. čísla $112 + 1.10^k$, $k \in \{3, 4\}$, nejsou mocninami dvou. Aby byla čísla typu (D) mocninou dvou, muselo by existovat $k \geq 1$ a n tak, že $3.10^k + 2 = 2^n$, resp. $3.2^{k-1}.5^k + 1 = 2^{n-1}$ po zkrácení. Pro $k > 1$ je na levé straně liché a na pravé sudé číslo, a tedy žádné n nevyhovuje. Zkusme $k = 1$, pak je $3.5 + 1 = 2^{n-1}$, odkud $n = 5$ je jediné přirozené číslo, pro které je ciferný součet čísla 2^n roven 5.

3 Závěr

V úlohách byly prezentovány postupy potřebné při řešení „ciferných úloh“, rozvinutý zápis čísel v různých číselných soustavách, metoda rozdělení úlohy na dílčí úlohy a využití dělitelnosti.

4 Použitá literatura

XXI. ročník matematické olympiády. Praha: SPN, 1973, 184 s.

52. ročník matematické olympiády. Praha: SPN, 2004. 186 s. ISBN 80-7015-960-X.

5 Kontakt na autora

Mgr. Martina Kašparová, Ph.D.

KMT-M FPE ZČU

Klatovská 51, Plzeň

mernesto@kmt.zcu.cz

⁵ Přirozené číslo je dělitelné osmi právě tehdy, když je dělitelný osmi součet jednotek, dvojnásobku počtu desítek a čtyřnásobku počtu stovek. $(8|n \Leftrightarrow 8|c_0 + 2c_1 + 4c_2, n = c_0 + 10c_1 + 100c_2 + \dots + 10^k c_k, c_0, c_1, \dots, c_k \in \{0, 1, 2, \dots, 9\}, c_k \neq 0)$

ÚLOHY O TURNAJÍCH

Martina KAŠPAROVÁ

1 Úvod

Mezi úlohy, v nichž je třeba provést více různých úvah, patří úlohy o turnajích. V příspěvku jsou vybrané problémy vyřešeny metodami, které čtenářovi pomohou při řešení obdobných úloh.

2 Úlohy

Příklad 1: Ve volejbalovém zápase hrají družstva každý s každým po jednom zápasu. Za vítězství se získá 1 bod, za prohru 0 bodů. Je známo, že v jednom okamžiku zápasu mají všechna družstva navzájem různý počet bodů. Kolik bodů získala na konci zápasu předposlední skupina a jak dopadl její zápas s vítězem. (Alfutova, Ustinov 2002, s. 16)

Předpokládejme, že hraje celkem n družstev. Hrají-li každý s každým, odehraje se celkem $(n^2 - n)/2 = \binom{n}{2}$ zápasů. V souboji dvou družstev je vždy jeden vítěz a jeden poražený, proto se v každém zápase rozdá 1 bod. Celkem se udělí stejný počet bodů jako je zápasů, tj. $(n^2 - n)/2$. Aby měla družstva různý součet bodů, musí se počty jejich bodů lišit aspoň o bod. Uvažujme případ s nejnižším možným celkovým součtem bodů. To je případ, kdy poslední družstvo nemá žádný bod a každé další družstvo má právě o bod více než předchozí:

$$\{0, 1, 2, 3, \dots, n - 1\}$$

Součet $0 + 1 + \dots + (n - 1)$ je roven $(n^2 - n)/2$, tedy počtu bodů, které se udělí za celý turnaj. Okamžik, kdy mají všechna družstva navzájem různý počet bodů, nastane na konci turnaje. Předposlední skupina získala 1 bod a s vítězem prohrála. (Pokud by vyhrála, nemohl by mít vítěz $n - 1$ bodů, což je zároveň počet zápasů, které první družstvo hrálo.)

Příklad 2: Šachového turnaje se zúčastnili zástupci dvou tříd. Účastníků z jedné třídy bylo 10krát více než účastníků z druhé třídy. Každý ze soutěžících hrál s libovolným jiným pouze jednou. Při uzavírání výsledků turnaje se zjistilo, že soutěžící ze třídy s větším počtem účastníků získali společně 4,5krát více bodů než všichni soutěžící z druhé třídy. Kolik bodů získali soutěžící z třídy s menším počtem soutěžících, když se za vítězství uděluje 1 bod, za remízu půl bodu a za prohru 0 bodů? (12. běloruskaja republikanskaja matěmaticeskaja olimpiada, úloha 10.3, 1962)

Označme třídu s menším počtem účastníků A a s větším počtem účastníků B. Znázorněme možné výsledky některých zápasů mezi šachisty v tabulce.

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

		účastníci z A				účastníci z B							
účastníci z A	×	0	½	1	1	0	1	½					
	1	×	0	½									
	½	1	×	1	0								
	0	½	0	×			½						
účastníci z B	0		1		×								
	1					×							
	0			½			×						
	½							×					
									×				
										×			
											×		
												×	

Pokud z třídy A hraje x žáků, pak je celkem $11x$ účastníků z obou tříd. Hrají-li každý s každým, bude se celkem konat $\frac{1}{2}(11^2x^2 - 11x)$ duelů, v nichž se celkem rozdává stejný počet bodů. (V každém zápase se udělí 1 bod. Pokud existuje vítěz, získá ho vítěz, v případě remízy se bod dělí na poloviny.) Poměr počtu bodů získaných žáky z A ku počtu bodů získaných žáky z B je dle zadání 1:4,5. Rozdělme proto celkový počet bodů $\frac{1}{2}(11^2x^2 - 11x)$ v poměru 2:9. Pak $11x^2 - x$ je počet bodů získaných účastníky z A a $\frac{9}{2}(11x^2 - x)$ počet bodů získaných šachisty z třídy B. Zkusme zjistit počet bodů získaných žáky z třídy A jinak. Šachisté z A hrají jednak mezi sebou a jednak každý z nich s každým účastníkem z B. Počet bodů, které získají v zápasech sehraných mezi sebou, je roven počtu těchto zápasů, tj. $\frac{1}{2}(x^2 - x)$. V zápasech s šachisty z třídy B mohou získat maximálně $x \cdot 10x$ bodů, a to v případě, že by všichni z A ve všech zápasech s žáky z B vyhráli. Celkový počet bodů získaných soutěžícími z A je nejvýše $\frac{1}{2}(x^2 - x) + 10x^2$, proto můžeme vypočtený počet bodů omezit takto:

$$11x^2 - x \leq \frac{1}{2}(x^2 - x) + 10x^2$$

Nerovnici lze upravit na tvar $x \leq 1$, takže řešením je $x = 1$. Šachového turnaje se zúčastnil jeden žák ze třídy A a získal celkem $11x^2 - x = 10$ bodů.

Příklad 3: Hokejový turnaj se hraje systémem „každý s každým“. V průběhu turnaje se každá dvojice družstev střetne právě jednou. Turnaj se odehrává po jednotlivých kolech. V každém kole sehraje každé družstvo jeden zápas. Za remízu dostane každý ze soupeřů po jednom bodu. Pokud zápas neskončí remízou, dostane vítěz dva body, poražený nezíská žádný bod. O pořadí v tabulce rozhoduje především počet bodů, při rovnosti bodů pak skóre. Po odehrání

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

několika kol neměla žádná dvojice družstev stejný počet bodů. Dokažte, že v tom případě už poslední v tabulce ztratil naději na celkové vítězství. Řešte úlohu pro turnaj deseti družstev. (57. MO, B-II-4)

Celkem se zřejmě odehraje $\frac{1}{2}(10^2 - 10) = 45$ zápasů, ve kterých se dohromady udělí 90 bodů. V každém kole se koná $10/2 = 5$ zápasů, v nichž se rozdělí 10 bodů. Po odehrání n -tého kola, $n \leq 9$, mají družstva různý počet bodů, tj. při vzestupném uspořádání družstev podle počtu bodů se bodové zisky po sobě jdoucích družstev musí lišit aspoň o jeden bod. Předpokládejme, že počty bodů od nejhoršího družstva k nejlepšímu představují posloupnost $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$. Součet bodů je při takovém rozložení roven 45. Takový součet nelze získat po žádném dokončeném kole. (Na konci každého kola je celkový počet bodů násobek 10.) Rozdílný počet bodů mají proto družstva nejdříve po pátém kole turnaje. V tom okamžiku zbývají do konce turnaje maximálně čtyři kola. I kdyby v každém z nich poslední družstvo vyhrálo, může do konce turnaje získat už jen 8 bodů, a tedy méně, než nutně musí mít po prvních pěti kolech první družstvo.

V tabulce je uveden příklad možných výsledky jednotlivých zápasů po šestém kole. Výsledky jsou uspořádány od nejlepšího družstva k nejhoršímu.

Výsledky zápasů po šestém kole

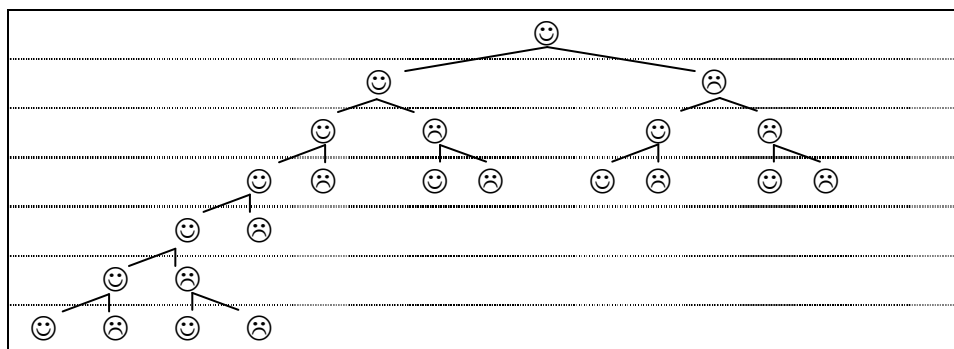
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Σ
1	×	2	2	2			2		2	2	12
2	0	×			2	2	2	2		2	10
3	0		×	2	1		2	2	2		9
4	0		0	×	2	2		2		2	8
5		0	1	0	×	2	2		2		7
6		0		0	0	×		1	2	2	5
7	0	0	0		0		×	2		2	4
8		0	0	0		1	0	×	2		3
9	0		0		0	0		0	×	2	2
10	0	0		0		0	0		0	×	0

Příklad 4: Školní šampionát ve stolním tenise probíhal systémem „prohrávající vypadává“. Vítěz vyhrál šestkrát. Kolik účastníků turnaje vyhrálo vícekrát, než prohrálo. (V každém kole se pro každého soutěžícího našel protivník do dvojice.) (Okružnaja olympiada, úloha 06.4.8.3, 2009)

Do šestého kola, v němž se rozhodlo o celkovém vítězi, vstoupili již jen dva tenisté. V pátém kole se utkali čtyři účastníci a v každém předchozím vždy dvojnásobek počtu

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

soutěžících z následujícího kola. V prvním kole, tj. na začátku turnaje bylo 64 soutěžících. Ti, kteří prohráli v prvním kole, Okrát vyhráli a 1krát prohráli. Do dalšího kola zbylo 32 účastníků. Všichni zatím 1krát vyhráli a Okrát prohráli. Polovina z nich ve druhém kole prohrála, tj. její účastníci 1krát vyhráli a 1krát prohráli. Zbýlých 16 postoupilo dál. Každý z nich musel aspoň 2krát vyhrát. Protože prohrát lze jen jedenkrát, těchto 16 stolních tenistů vyhrálo více her, než prohrálo.



3 Závěr

Na předchozích úlohách si čtenář mohl uvědomit zásadní vztahy mezi počty účastníků turnaje a počty jednotlivých zápasů v soutěžích se systémem „každý s každým“ i v systému „prohrávající vypadává“.

4 Použitá literatura

- ALFUTOVA, N. B., USTINOV A. B. Algebra i teorii čísel. Sbornik zadač dlja matematiceskich škol. 1. vyd. Moskva: MCNMO, 2002. 264 s. ISBN 5-94057-038-0.
Dostupné na internetu: <http://problems.ru/view_problem_details_new.php?id=60364>
12. běloruskaja respublikanskaja matematiceskaja olimpiada. Úloha 10.3, 1962.
Dostupné na internetu: <http://problems.ru/view_problem_details_new.php?id=109150>
57. ročník matematické olympiády. Úlohy krajského kola kategorie B.
Dostupné na internetu: <<http://cgi.math.muni.cz/~rvmo/ABC/57/B57ii.pdf>>
- Okružnaja olimpiada (Moskva). Úloha 06.4.8.3, 2009.
Dostupné na internetu: <http://problems.ru/view_problem_details_new.php?id=115464>

5 Kontakt na autora

Mgr. Martina Kašparová, Ph.D.
KMT-M FPE ZČU
Klatovská 51, Plzeň
mernesto@kmt.zcu.cz

Středisko služeb školám, Plzeň, Částkova 78
Podpora talentovaných žáků v Plzeňském kraji
CZ.1.07/1.2.03/02.0001

Tento projekt je v roce 2013 financován z rozpočtu Plzeňského kraje



INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

PODPORA TALENTOVANÝCH ŽÁKŮ V PLZEŇSKÉM KRAJI
MATEMATICKÝ KEMP
FUNKCIONÁLNÍ A DIOFANTICKÉ ROVNICE, NETRADIČNÍ NEROVNOSTI
Josef KRÍŠŤAN

Úvod

Text je rozdělen do tří částí. V první se zabýváme základními metodami řešení funkcionálních rovnic, ve druhé části se věnujeme jednoduchým diofantickým rovnicím a v poslední, třetí části, netradičním nerovnicím a nerovnostem. Všechna témata jsou dobře známa jak z hodin matematiky (snad kromě funkcionálních rovnic), tak z matematických soutěží jako je například matematická olympiáda. Přejeme hodně radosti z nalezených řešení příkladů.

1 Funkcionální rovnice

V této části se budeme zabývat funkcionálními rovnicemi. Řešení funkcionálních rovnic je velice náročná disciplína. Každá funkcionální rovnice je totiž originál a její řešení vyžaduje slušnou dávku invence. Uveďme několik základních metod.

- Metoda substituční. Tato metoda je založena na dosazování konkrétních hodnot za proměnné, které se ve funkcionální rovnici vyskytují. Např. pokud se v rovnici vyskytne výraz $f(x + y)$ a známe hodnotu $f(0)$, můžeme zkusit dosadit $y = -x$.
- Metoda matematické indukce. Metoda je založena na pokusu najít hodnotu $f(1)$, a pak $f(n)$ pro každé přirozené n . Následně se snažíme určit hodnoty $f(\frac{1}{n})$ a $f(r)$ pro racionální číslo r . Metoda se používá nejčastěji v případech, kdy je rovnice definovaná na množině racionálních čísel \mathbb{Q} . Pokud chceme řešení na množině \mathbb{Q} rozšířit na množinu reálných čísel \mathbb{R} , je potřeba o funkci f znát další vlastnost, např. že je spojitá, nebo rostoucí a podobně.
- Další metoda spočívá ve vyšetření, zda je funkce prostá (injekce) nebo jde o zobrazení na (surjektivní).
- Další nápovědou může být nalezení pevných nebo nulových bodů funkce. S touto metodou se můžeme setkat u velmi těžkých problémů.

ČZ.1.0/1.2.0/02.0/01

Tento projekt je v roce 2013 financován z rozpočtu Plzeňského kraje

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

- Využití Cachyovy rovnice a rovnic podobného typu.
- Vyšetření monotonie a spojitosti funkce. Podmínka spojitosti je dána většinou jako dodatečná podmínka a spolu s monotonií nabízí, pokud to vůbec jde, redukovat rovnici na Cauchyovu rovnici.
- Další metoda využívá předpokladu, že funkce je v nějakém bodě větší nebo menší než hodnota funkce o které se snažíme dokázat, že je řešení. Tato metoda se často používá jako pokračování metody matematické indukce nebo v případech, kdy jsou hodnoty omezené z obou stran.
- Vytvoření rekurentních vztahů je použitelné v případech, kdy jsou hodnoty omezené a nebo kdy jsme schopni najít vztah mezi hodnotami n , $f(n)$ a $f(f(n))$.
- Další metoda spočívá v analýze množiny hodnot, kdy je funkce rovna předem odhadnutému řešení. Cílem je pak dokázat, že popisovaná množina je rovna definičnímu oboru funkce.
- Substituce funkce je metoda často vedoucí ke zjednodušení zadané rovnice.
- Metoda rozložení funkce na součet lichých a sudých čísel se opírá o poznatek, že každou funkci lze reprezentovat jako součet jedné sudé a jedné liché funkce.

Nezapomeňte vždy ověřit zkouškou, že nalezené řešení splňuje zadanou rovnici pro všechny přípustné hodnoty.

Následující příklad demonstruje důležitost zkoušky.

Příklad 1. Najděte všechny funkce $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$, že pro každé $x, y \in \mathbb{R}$ platí

$$f(x + y) - f(x) = x\sqrt{f(y)} + y(x + y).$$

Řešení. Dosadíme $x = 0$, pak pro každé $y \in \mathbb{R}$ platí $f(y) - f(0) = y^2$, neboli $f(y) = y^2 + f(0)$. Pokusíme se určit neznámou hodnotu $f(0)$. Dosazením do původní rovnice $y = 0$ získáme $f(x) - f(x) = x\sqrt{f(0)}$ pro každé $x \in \mathbb{R}$, což je možné splnit jen pokud $f(0) = 0$. Funkce $f(y) = y^2$ je tedy horký kandidát na jediné řešení zadané rovnice.

Provedeme zkoušku. Levá strana je rovna $L = (x + y)^2 - x^2 = y^2 + 2xy$, pravá $P = x\sqrt{y^2} + xy + y^2 = x|y| + xy + y^2$. Pokud by mělo platit $L = P$ pro každé $x, y \in \mathbb{R}$,

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

muselo by být $y = |y|$ pro každé $y \in \mathbb{R}$. Jak vidíme, není to splněno např. pro $y = -1$. Docházíme k závěru, že zadaná funkcionální rovnice nemá řešení.

Všimněme si, že pokud bychom změnili definiční obor funkce z \mathbb{R} na \mathbb{R}_0^+ , rovnice by měla jediné řešení $f(x) = x^2$ pro každé $x \in \mathbb{R}$.

Následující úloha nám ukáže, jak důležité je využít poznatků o vlastnostech funkce.

Příklad 2. Pro dané $n \in \mathbb{N}$ a funkci $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ platí: $f(0) = 0$, $f(1) = 1$, $f^{(n)}(x) = x$ pro každé $x \in [0, 1]$. Dokažte, že $f(x) = x$ pro každé $x \in [0, 1]$.

Řešení. Nejprve ukážeme, že funkce f je na intervalu $[0, 1]$ prostá. Předpokládejme, že $f(x) = f(y)$ pro libovolná $x, y \in [0, 1]$. Pak bude jistě také $f^{(2)}(x) = f(f(x)) = f(f(y)) = f^{(2)}(y)$, a po n -tém složení dostaneme rovnost $f^{(n)}(x) = f^{(n)}(y)$. Podle zadání to znamená (na intervalu $[0, 1]$) $x = y$. Tím jsme dokázali, že funkce je prostá na intervalu $[0, 1]$.

Dále ukážeme, že funkce f je ryze rostoucí na intervalu $[0, 1]$. Důkaz provedeme sporem. Předpokládejme, že pro $x < y$ platí $f(x) \geq f(y)$. Ze spojitosti funkce f plyne existence $c \in [0, x]$ pro které platí $f(c) = f(y)$. Zkuste si nakreslit obrázek a existence čísla c bude ihned zřejmá. Z prostoty funkce f na intervalu $[0, 1]$ pak plyne $c = y$. Ale z volby c plyne $c \leq x$, tj. $y \leq x$. To je však spor s předpokladem $x < y$.

Aplikujeme nyní metodu, kdy budeme předpokládat, že existuje bod, jehož funkční hodnota je menší, resp. větší, než funkční hodnota funkce, pro kterou chceme dokázat, že je řešení. V našem případě jde o funkci $g(x) = x$. Buď pro nějaké $x_0 \in [0, 1]$ $g(x_0) = x_0 < f(x_0)$. Protože je funkce f ryze rostoucí, platí také $f(x_0) < f(f(x_0)) \equiv f^{(2)}(x_0)$, a tak dále až $f^{(n-1)}(x_0) < f^{(n)}(x_0) = x_0$. Posloupnost těchto nerovností dává dohromady $x_0 < f^{(n)}(x_0) = x_0$, což nemůže nikdy nastat. Ke sporu dospějeme i v případě, kdy připustíme existenci čísla x_0 takového, že $g(x_0) = x_0 > f(x_0)$. Protože volba x_0 byla libovolná, platí $f(x) = x$ pro každé $x \in [0, 1]$, a to jsme chtěli dokázat.

Další úloha povede na řešení rekurentní rovnice.

Příklad 3. Najděte všechny funkce $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ splňující rovnici $f(f(x)) + af(x) = b(a + b)x$, kde a, b jsou přirozená čísla parametry.

Řešení. Pro libovolné $x_0 \in \mathbb{R}^+$ definujme posloupnost x_0, x_1, \dots , kde $x_n = f(x_{n-1})$ pro každé přirozené číslo n . Funkcionální rovnici jde tak přepsat do tvaru

$$x_{n+2} = ax_{n+1} + b(a + b)x_n.$$

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Hledejme řešení ve tvaru $x_n = \lambda^n$ pro nenulové λ . Tento tvar dosadíme do předchozí rovnice a po vykrácení λ^{n-2} dojdeme k charakteristické rovnici

$$\lambda^2 = a\lambda + b(a + b)$$

s kořeny $\lambda_1 = -a - b$, $\lambda_2 = b$. Hledané x_n hledáme jako lineární kombinaci $\lambda_1^n = (-a - b)^n$ a $\lambda_2^n = b^n$, neboli

$$x_n = \alpha_1(-a - b)^n + \alpha_2 b^n,$$

kde α_1 a α_2 jsou reálná čísla, která se obvykle určí z počátečních podmínek, např. z hodnot x_0, x_1 . Aby bylo $x_n > 0$ pro každé n , musí být $\alpha_1 = 0$. Totiž, jak snadno vidíme, pokud $\alpha_1 > 0$, pak stačí najít lichá n pro která $x_n < 0$, tj.

$$\alpha_2 b^n < -\alpha_1(-a - b)^n = \alpha_1(a + b)^n.$$

Pokud $\alpha_2 < 0$, je tato nerovnost splněna automaticky (předpokládáme totiž $\alpha_1 > 0$ a a, b jsou přirozená). Pokud $\alpha_2 > 0$, stačí, aby

$$\frac{\log(\alpha_2/\alpha_1)}{\log(1 + a/b)} = r_0 < n.$$

V tomto případě bude pro lichá $n > r_0$ vždy $x_n < 0$. Tím jsme zdůvodnili, proč musí být $\alpha_1 = 0$. Z počátečních podmínek pak plyne $x_0 = \alpha_2$, $f(x_0) = x_1 = \alpha_2 b = bx_0$. A protože bylo x_0 zcela libovolné, je $f(x) = bx$ pro libovolné číslo x . Zkouškou snadno ověříme, že je to jediné řešení.

Příklad 4. Najděte všechna řešení $f(x) : \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Q}$ splňující pro každé $x, y \in \mathbb{Q}$ rovnici $f(x + y) = f(x) + f(y)$.

Řešení. Uvedeme klasické řešení, které je kombinací Cauchyovy a indukční metody. Nejprve najdeme funkční hodnotu $f(0)$. Dosadíme do zadání $x = y = 0$: $f(0) = 2f(0)$, tj. $f(0) = 0$.

Dále ukážeme matematickou indukci, že $f(kx) = kf(x)$ pro libovolné kladné celé k a libovolné $x \in \mathbb{Q}$. Pro $k = 1$ je to zřejmé. Předpokládejme, že platí $f(kx) = kf(x)$. Volme $y = kx$, pak

$$f((k + 1)x) = f(x + kx) = f(x) + f(kx) = f(x) + kf(x) = (k + 1)f(x).$$

Tvrzení platí i pro $k + 1$. Důkaz indukci je hotov.

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Dále dokážeme, že $f(kx) = kf(x)$ pro každé k celé a $x \in \mathbb{Q}$. Platí

$$0 = f(0) = f(x - x) = f(x) + f(-x),$$

neboli $f(-x) = -f(x)$ pro libovolné $x \in \mathbb{Q}$. Potom pro k přirozené platí

$$f(-kx) = -f(kx) = -kf(x).$$

Tedy $f(kx) = kf(x)$ pro libovolné k celé a $x \in \mathbb{Q}$. Speciálně $f(k) = kf(1)$ pro každé k celé.

Nakonec dokážeme, že $f(x) = xf(1)$ pro libovolné $x \in \mathbb{Q}$. Pro k celé platí

$$f(1) = f\left(k\frac{1}{k}\right) = kf\left(\frac{1}{k}\right),$$

tedy $f\left(\frac{1}{k}\right) = \frac{f(1)}{k}$. A pro celé m a přirozené n platí rovnost

$$f\left(\frac{m}{n}\right) = mf\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{m}{n}f(1).$$

Dokázali jsem, že $f(x) = cx$ pro libovolné $x \in \mathbb{Q}$. Označili jsme $c = f(1) \in \mathbb{Q}$ jako libovolnou konstantu. Zkouškou se snadno přesvědčíme, že jde skutečně o řešení.

2 Diofantické rovnice

Diofantickou rovnicí zpravidla označujeme rovnici, kterou řešíme na oboru celých nebo přirozených čísel a neznámých je více než počet rovnic.

Příklad 5. *Nejděte všechna řešení $x, y \in \mathbb{Z}$ rovnice*

$$7x^2 + 5y + 15 = 0.$$

Řešení. Rada první zní: pokud se v rovnici vyskytují prvočísla, zkoumejme zbytky po dělení nějakým vhodným prvočíslem. V našem případě zkoumejme dělitelnost číslem 5. Levá strana modulo 5 dává

$$L = 7x^2 + 5y + 15 \equiv 2x^2 + 4 \pmod{5}.$$

Kvadrát přirozeného čísla dává pouze zbytky 0, 1, 4 po dělení číslem 5. Výraz $2x^2 + 4$ může dávat tím pádem jen zbytky 1, 4 po dělení 5, nikdy však zbytek 0 jako pravá strana rovnice. Tím jsme dokázali, že rovnice nemá v oboru celých čísel řešení.

Příklad 6. *Pro dané prvočíslo p řešte v oboru celých čísel rovnici*

$$p + 400 = a^2.$$

Řešení. Rada druhá zní: pokud se na obou stranách rovnice vyskytují výrazy, které jde rozložit v součin, neváhejte ani minutu. Rovnici upravíme do tvaru

$$p = a^2 - 400 = (a + 20)(a - 20).$$

Tj. prvočíslo na levé straně jsme rozložili na součin dvou čísel na pravé straně. To je možné jen v případě, kdy platí současně $a - 20 = 1, a + 20 = p$ a nebo $a - 20 = -1, a + 20 = -p$. V první případ vede k řešení $p = 41, a = 21$, druhý případ vede k $p = -39$, což není prvočíslo. Úloha má jediné řešení, a to $a = 21$ pro $p = 41$.

Následující úloha nás zavede k metodě, kterou lze nazvat metoda po sobě jdoucích mocnin. Platí totiž tvrzení, které říká, že neexistují celá čísla a, b a přirozené n , aby platilo

$$a^n < b^n < (a + 1)^n.$$

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Pro $n = 2$ to znamená, že mezi dvěma po sobě jdoucími kvadráty nemůže být kvadrát přirozeného čísla.

Příklad 7. V oboru celých čísel řešte rovnici

$$x^2 = y(y + 2).$$

Řešení. Protože $x \geq 0$, musí být $y(y + 2) \geq 0$, tj. v úvahu připadá $y \leq -2$ a nebo $y \geq 0$. Pokud $y = -2$ nebo $y = 0$, musí být $x = 0$. Pokud $y > 0$, platí nerovnosti

$$y^2 < y(y + 2) = y^2 + 2y < (y + 1)^2$$

a podle naší věty nemůže být x celé. Musí totiž splňovat $y^2 < x^2 < (y + 1)^2$.

Pokud $y < -2$, platí nerovnosti

$$(y + 2)^2 < y(y + 2) = y^2 + 2y < (y + 1)^2$$

a číslo x opět nemůže být celé. Tím jsme ukázali, že rovnice má pouze dvě řešení: $(x, y) = \{(0, 0), (0, -2)\}$.

Následující úloha je poměrně obtížná a zavede nás k rozkladu přirozeného čísla na prvočinitele, což je základní princip v teorii čísel. Uměli byste dokázat existenci nebo jednoznačnost takového rozkladu?

Příklad 8. Pro přirozené číslo n označme $d(n)$ počet kladných dělitelů čísla n . Najděte všechna n , pro která platí $4n = d^3(n)$.

Řešení. Pišme číslo n , které splňuje zadanou rovnici, v prvočíselném rozkladu jako

$$n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_k^{\alpha_k},$$

kde $k \geq 1$ a $2 \leq p_1 < p_2 < \cdots < p_k$ jsou navzájem různá prvočísla. Exponenty α_i , $i = 1, 2, \dots, k$, jsou nezáporná přirozená čísla. Tento zápis čísla n je výhodný pro výpočet počtu dělitelů $d(n)$. Dělitelem n je každé číslo ve tvaru

$$p_1^{\beta_1} p_2^{\beta_2} \cdots p_k^{\beta_k}, \quad 0 \leq \beta_i \leq \alpha_i, i = 1, 2, \dots, k.$$

Nyní je snadné určit $d(n) = (\alpha_1 + 1)(\alpha_2 + 1) \cdots (\alpha_k + 1)$. Řešíme proto rovnici

$$4n = 2^2 p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_k^{\alpha_k} = d^3(n) = (\alpha_1 + 1)^3 (\alpha_2 + 1)^3 \cdots (\alpha_k + 1)^3. \quad (1)$$

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Jelikož levá strana rovnice (1) je třetí mocninou, musí být nutně nejmenší prvočíslo rovno 2, tj. $p_1 = 2$, a exponenty α_i tvaru

$$\alpha_1 = 3\beta_1 + 1, \alpha_2 = 3\beta_2, \dots, \alpha_k = 3\beta_k, \quad \beta_i \geq 0, i = 1, 2, \dots, k.$$

Rovnice získala nový tvar,

$$2^{\beta_1+1} p_2^{\beta_2} \dots p_k^{\beta_k} = (3\beta_1 + 2)(3\beta_2 + 1) \dots (3\beta_k + 1). \quad (2)$$

Pravá strana (2) delitelná 3, proto $p_2 \geq 5$. Podle Bernoulliho nerovnosti můžeme hrubě, ale dostatečně, odhadnout: pro $i \geq 2$ je

$$p_i^{\beta_i} \geq 5^{\beta_i} = (4 + 1)^{\beta_i} \geq 1 + 4\beta_i \geq 1 + 3\beta_i, \quad (3)$$

Rovnosti v posloupnosti nerovnic nastanou jen v případě $\beta_i = 0$. Rovnici (2) přepíšeme do jiného tvaru, abychom mohli využít předchozí odhad (3),

$$\frac{3\beta_1 + 2}{2^{\beta_1+1}} = \frac{p_2^{\beta_2}}{3\beta_2 + 1} \dots \frac{p_k^{\beta_k}}{3\beta_k + 1} \geq 1, \quad (4)$$

tj.

$$3\beta_1 + 2 \geq 2^{\beta_1+1}. \quad (5)$$

V nerovnici (5) roste exponenciála na pravé straně rychleji než lineární člen na levé straně. Již pro $\beta_1 \geq 3$ platí vždy opačná nerovnost, takže zbývají vyšetřit pouze 3 případy.

Pro $\beta_1 = 0$ dostáváme z rovnice (4)

$$1 = \frac{p_2^{\beta_2}}{3\beta_2 + 1} \dots \frac{p_k^{\beta_k}}{3\beta_k + 1} \geq 1,$$

a rovnost nastane, jak víme, pouze pro $\beta_i = 0$ pro $i \geq 2$. V tomto případě získáváme první řešení $n = 2$.

Případ $\beta_1 = 2$ je totožný s předchozím případem. Další řešení je $n = 2^7$.

Poslední případ, $\beta_1 = 1$, je náročnější. Z rovnice (4) dostaneme

$$\frac{5}{4} = \frac{p_2^{\beta_2}}{3\beta_2 + 1} \dots \frac{p_k^{\beta_k}}{3\beta_k + 1},$$

odkud je vidět, že $p_2 = 5$. Pro $i \geq 3$ je tedy $p_i > 5$ a díky Bernoulliho nerovnosti platí, za předpokladu $\beta_i \geq 1$, odhad

$$\begin{aligned} \frac{p_i^{\beta_i}}{3\beta_i + 1} &> \frac{5^{\beta_i}}{3\beta_i + 1} \geq \frac{4\beta_i + 1}{3\beta_i + 1} \\ &= 1 + \frac{\beta_i}{3\beta_i + 1} \geq 1 + \frac{1}{4} = \frac{5}{4}. \end{aligned} \quad (6)$$

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Poslední nerovnost $\frac{\beta_i}{3\beta_i+1} \geq \frac{1}{4}$ je pro $i \geq 3$ ekvivalentní podmínce $\beta_i \geq 1$. Z tohoto rozboru vyplývá (za předpokladu $\beta_i \geq 1$)

$$\frac{5}{4} = \frac{p_2^{\beta_2}}{3\beta_2+1} \cdots \frac{p_k^{\beta_k}}{3\beta_k+1} \geq \frac{5}{4} \frac{p_3^{\beta_3}}{3\beta_3+1} \cdots \frac{p_k^{\beta_k}}{3\beta_k+1} > \frac{5}{4} \left(\frac{5}{4}\right)^{k-2} \quad (7)$$

Tato nerovnost nemůže platit pokud $k > 3$. Je tedy $k = 2$ a rovnost v (7) platí pouze pokud $\beta_2 = 1$. Pro $\beta_2 > 1$ platí ostrá nerovnost. Celkem jsme zjistili, že $p_1 = 2$, $p_2 = 5$, $\alpha_1 = 3\beta_1 + 1 = 4$, $\alpha_2 = 3\beta_2 = 3$ a další řešení je $n = 2^4 5^3$.

Zadání splňují tři přirozená čísla: $n \in \{2, 2^7, 2^4 5^3\}$.

Kapitolu o diofantických rovnicích ukončíme metodou, která je známá pod názvem metoda nekonečného klesání či sestupu. Metoda je založená na principu, že neexistuje nekonečná klesající posloupnost přirozených čísel.

Příklad 9. *Dokažte, že neexistuje žádná čtveřice x, y, z, u přirozených čísel splňující rovnost $x^2 + y^2 = 3(z^2 + u^2)$.*

Řešení. Na této úloze budeme demonstrovat tzv. metodu extrému, konkrétně metodu nekonečného klesání.

Pro spor předpokládejme, že taková čtveřice existuje. Mezi všemi takovými čtveřicemi vybereme tu s nejmenší hodnotou $x^2 + y^2$ (pokud je jich více, vezmeme libovolnou z nich) a označme ji (a, b, c, d) . Z rovnosti $a^2 + b^2 = 3(c^2 + d^2)$ plyne $3|a^2 + b^2$, a to je možné jen v případě $3|a$ a současně $3|b$ (podle malé Fermatovy věty: je-li číslo x nesoudělné s 3, pak dává x^2 zbytek 1 po dělení 3. V řeči kongruencí: $x^2 \equiv 1 \pmod{3}$ pokud $\text{nsd}(x, 3) = 1$).

Existují proto a_0, b_0 , že $a = 3a_0, b = 3b_0$. Dosazením do původní rovnice:

$$c^2 + d^2 = 3(a_0^2 + b_0^2).$$

Našli jsme tedy další čtveřici, která splňuje zadanou rovnici. Je jí čtveřice (c, d, a_0, b_0) , přičemž

$$a^2 + b^2 = 3(c^2 + d^2) > c^2 + d^2.$$

Jak je vidět z předchozí nerovnosti, nově nalezená čtveřice (c, d, a_0, b_0) má menší součet kvadrátů prvních dvou složek než námi zvolená čtveřice (a, b, c, d) . To je ale ve sporu s předpokladem, že čtveřice (a, b, c, d) měla takový součet nejmenší. A to je hledaný spor. Proto žádná čtveřice, která splňuje rovnost ze zadání, neexistuje.

3 Netradiční nerovnice a nerovnosti

Následující kapitola bude věnována netradičním nerovnicím a nerovnostem.

Příklad 10. *Dokažte, že mezi libovolnými 101 reálnými čísly existují dvě čísla u a v , pro něž platí*

$$100|u - v| \cdot |1 - uv| \leq (1 + u^2)(1 + v^2).$$

Řešení. Nejprve uvedeme autorské řešení. Ekvivalentními úpravami zadané nerovnosti (s využitím toho, že výraz $1 + x^2$ je kladný pro každé reálné x) dostaneme

$$\begin{aligned} 100|(u - v)(1 - uv)| &\leq (1 + u^2)(1 + v^2), \\ 100|u - v - u^2v + uv^2| &\leq (1 + u^2)(1 + v^2), \\ 100|u(1 + v^2) - v(1 + u^2)| &\leq (1 + u^2)(1 + v^2), \\ \left| \frac{u}{1 + u^2} - \frac{v}{1 + v^2} \right| &\leq \frac{1}{100}. \end{aligned} \quad (8)$$

Uvažujme funkci

$$f(x) = \frac{x}{1 + x^2}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Její hodnoty leží v intervalu $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$, což lze nahlédnout z nerovnosti, která platí pro libovolné reálné číslo x ,

$$|x| = \sqrt{1 \cdot x^2} \leq \frac{1 + x^2}{2} \quad \text{neboli} \quad \frac{|x|}{1 + x^2} \leq \frac{1}{2}.$$

Rozdělme interval $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ o délce 1 na sto intervalů o délce $\frac{1}{100}$. Podle Dirichletova principu mezi libovolnými 101 reálnými čísly najdeme dvě čísla u a v taková, že funkční hodnoty $f(u)$ a $f(v)$ leží v témže intervalu. Pro tuto dvojici zřejmě platí $|f(u) - f(v)| \leq \frac{1}{100}$, což je právě nerovnost (8), která je ekvivalentní se zadanou nerovností.

Druhé řešení využívá goniometrickou substituci a po vhodné úpravě zadané nerovnosti využijeme opět Dirichletův princip. Volba goniometrické substituce rozhoduje o algebraické náročnosti prováděných úprav a není vždy jisté, že se nám situace zjednoduší. Jak si ale vybrat tu správnou substituci? V zadané nerovnosti se vyskytují výrazy typu $1 + u^2$, $1 - uv$ a $u - v$. Podobné výrazy se vyskytují v goniometrickém vzorci

$$\tan(x - y) = \frac{\tan x - \tan y}{1 + \tan x \tan y} \quad (9)$$

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

a nabízí se proto možnost vyzkoušet substituci pomocí funkce tangens. Ta je na intervalu $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ prostá, a tak pro každé reálné číslo u (resp. v) existuje právě jedno reálné číslo x (resp. y) z intervalu $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ takové, že $u = \tan x$ (resp. $v = \tan y$). Touto substitucí ztotožníme libovolné reálné číslo s právě jedním reálným číslem z intervalu $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ a naopak.

Zadaná nerovnost je potom ekvivalentní nerovnosti

$$100|\tan x - \tan y||1 - \tan x \tan y| \leq (1 + \tan^2 x)(1 + \tan^2 y). \quad (10)$$

Pravou stranu upravíme jednoduše takto

$$(1 + \tan^2 x)(1 + \tan^2 y) = \left(1 + \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}\right) \left(1 + \frac{\sin^2 y}{\cos^2 y}\right) = \frac{1}{\cos^2 x \cos^2 y}, \quad (11)$$

kde jsme využili goniometrickou jedničku $\cos^2 t + \sin^2 t = 1$. Výraz na levé straně upravíme

$$\begin{aligned} & |\tan x - \tan y||1 - \tan x \tan y| = \\ & = \left| \frac{(\sin x \cos y - \cos x \sin y)(\cos x \cos y - \sin x \sin y)}{\cos^2 x \cos^2 y} \right| = \\ & = \frac{1}{\cos^2 x \cos^2 y} |\sin x \cos x (\cos^2 y + \sin^2 y) - \sin y \cos y (\cos^2 x + \sin^2 x)| = \\ & = \frac{1}{\cos^2 x \cos^2 y} \left| \frac{1}{2} (\sin 2x - \sin 2y) \right|, \end{aligned} \quad (12)$$

kde jsme využili vztah $\sin 2t = 2 \sin t \cos t$. Nerovnost (10) je podle vztahů (11) a (12) ekvivalentní nerovnosti

$$\frac{100}{2} \frac{|\sin 2x - \sin 2y|}{\cos^2 x \cos^2 y} \leq \frac{1}{\cos^2 x \cos^2 y}$$

neboli

$$|\sin 2x - \sin 2y| \leq \frac{2}{100}. \quad (13)$$

Řešení dokončíme podobně jako v prvním případě. Uvažujme funkci $f(x) = \sin 2x$, kde $x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, tj. $2x \in (-\pi, \pi)$. Na tomto intervalu nabývá funkce $f(x)$ hodnoty v intervalu $(-1, 1)$. Tento interval o délce 2 rozdělíme rovnoměrně na sto intervalů o délce $\frac{2}{100}$. Podle Dirichletova principu mezi 101 libovolnými reálnými čísly z intervalu $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ najdeme dvě čísla x a y taková, že funkční hodnoty $f(x)$ a $f(y)$ leží v témže intervalu. Pro

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

tuto dvojici platí $|f(x) - f(y)| \leq \frac{2}{100}$, což je právě nerovnost (13), která je ekvivalentní původní nerovnosti. Tím je úloha vyřešená.

Příklad 11. *V šachovém turnaji, kde bylo 10krát více chlapců než dívek, získali chlapci jen 4,5krát více bodů než dívky. V turnaji hrál každý s každým právě jednou, přičemž ve vzájemném souboji si odnesl vítěz jeden bod, při remíze si odnesl každý půl bodu a poražený nezískal nic. Úkolem je určit, kolik bodů získaly dívky dohromady a kdo vyhrál turnaj - chlapec nebo dívka?*

Řešení. Označme n počet dívek, pak počet chlapců je $10n$. Označme dále b počet bodů, které získaly dívky v partiích $d - h$ (dívka-chlapec). Chlapci v těchto soubojích získali

$$10n \cdot n - b \geq 0 \quad (14)$$

bodů. K tomuto číslu jsme dospěli tak, že počet partií typu $d - h$ je právě $10n \cdot n$ (každý z $10n$ chlapců hrál s jednou z n dívek). Z každé partie si soupeři odnášejí dohromady 1 bod, takže dohromady si dívky a chlapci odnesli z těchto partií právě $10n \cdot n$ bodů. A pokud jich z toho dívky získaly b , chlapci jich mají $10n^2 - b$.

Počet partií $d - d$ (dívka-dívka) je $\frac{1}{2}n(n - 1)$ a to je také počet bodů, který dívky získaly ve vzájemných partiích. Počet partií $h - h$ (chlapec-chlapec) je $\frac{1}{2}10n(10n - 1)$ a to je také počet bodů, který získali chlapci ve vzájemných turnajích.

Nyní můžeme matematicky vyjádřit vztah ze zadání, že chlapci získali 4,5krát více bodů než dívky.

$$\frac{1}{2}10n(10n - 1) + 10n^2 - b = \frac{9}{2} \left[\frac{1}{2}n(n - 1) + b \right].$$

Po jednoduché úpravě

$$22b = 231n^2 - 11n \quad \Rightarrow \quad b = \frac{1}{2}(21n^2 - n).$$

Nalezený vztah mezi b a n využijeme v nerovnosti (14). Řešíme nerovnost

$$\frac{1}{2}(21n^2 - n) \leq 10n^2,$$

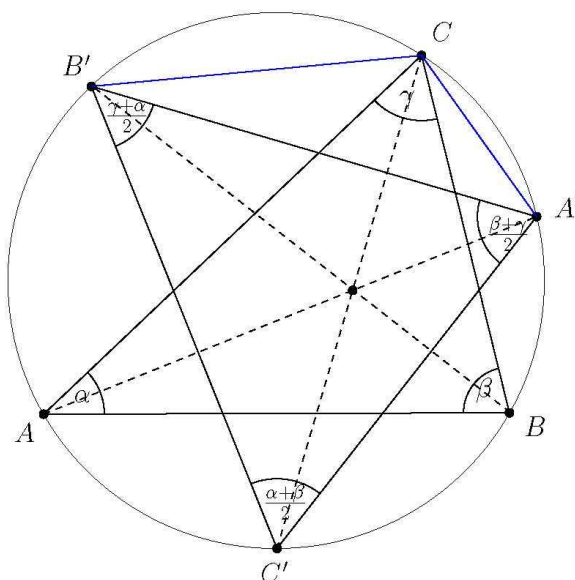
tj. $n^2 \leq n$. Ta je splněna v oboru přirozených čísel jen pro $n = 1$. Pak $b = 10$.

Co tyto výsledky znamenají? To znamená, že v turnaji byla jediná dívka a 10 chlapců a dívka získala ve všech 10 partiích $d - h$ dohromady 10 bodů. To znamená, že všechny

partie vyhrála a vyhrála tak spravedlivě celý turnaj. Tím je úloha vyřešena a vítězné dívce patří náš obdiv.

Příklad 12. *Bud' k kružnice opsaná trojúhelníku ABC a A', B' a C' průsečíky os vnitřních úhlů při vrcholech A, B a C . Dokažte, že obsah trojúhelníku $A'B'C'$ je větší nebo roven obsahu trojúhelníku ABC .*

Řešení.



Obrázek 1: Náčrt k příkladu 12.

Pokusme se najít prvek, který mají trojúhelníky ABC a $A'B'C'$ společný. Je jím právě opsaná kružnice k . Ta nám pomůže vyjádřit obsah příslušných trojúhelníků. Označme úhly v trojúhelníku ABC obvyklým způsobem α, β a γ . Potom z vlastnosti obvodových úhlů platí, viz obrázek 1,

$$|\angle CC'B'| = |\angle CAB'| = \frac{\alpha}{2}, \quad |\angle A'C'C| = |\angle A'BC| = \frac{\beta}{2},$$

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

tedy

$$|\angle A'C'B'| = |\angle A'C'C| + |\angle CC'B'| = \frac{\alpha + \beta}{2}.$$

Podobně spočítáme zbývající dva úhly v trojúhelníku $A'B'C'$,

$$|\angle C'A'B'| = \frac{\alpha + \gamma}{2}, \quad |\angle A'B'C'| = \frac{\beta + \gamma}{2}.$$

Nyní snadno vyjádříme obsahy obou trojúhelníků. Využijeme přitom sinovou větu, jejíž jeden z možných tvarů (pro trojúhelník ABC) je

$$2R = \frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma},$$

kde R značí poloměr kružnice opsané trojúhelníku ABC . Proto

$$S_{ABC} = \frac{1}{2}ab \sin \gamma = 2R^2 \sin \alpha \sin \beta \sin \gamma,$$

$$S_{A'B'C'} = 2R^2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\beta + \gamma}{2} \sin \frac{\gamma + \alpha}{2}.$$

Dokazujeme nakonec goniometrickou nerovnost pro libovolné úhly α, β a γ v trojúhelníku:

$$\sin \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\beta + \gamma}{2} \sin \frac{\gamma + \alpha}{2} \geq \sin \alpha \sin \beta \sin \gamma.$$

Při důkazu takové nerovnosti nám pomůže znalost průběhu funkce sinus na intervalu $(0, \pi)$. Na tomto intervalu je funkce sinus konkávní. To znamená, že pro libovolná čísla $x, y \in (0, \pi)$ platí nerovnost

$$\sin \frac{x + y}{2} \geq \frac{\sin x + \sin y}{2}.$$

Položíme-li např. $x = \alpha$ a $y = \beta$, platí

$$\sin \frac{\alpha + \beta}{2} \geq \frac{\sin \alpha + \sin \beta}{2} \geq \sqrt{\sin \alpha \sin \beta},$$

kde druhá nerovnost je důsledkem A-G nerovnosti pro kladná čísla $x = \alpha$ a $y = \beta$ (funkce sinus nabývá na intervalu $(0, \pi)$ jen kladných hodnot). Podobně

$$\sin \frac{\beta + \gamma}{2} \geq \frac{\sin \beta + \sin \gamma}{2} \geq \sqrt{\sin \beta \sin \gamma},$$

$$\sin \frac{\gamma + \alpha}{2} \geq \frac{\sin \gamma + \sin \alpha}{2} \geq \sqrt{\sin \gamma \sin \alpha}.$$

Vynásobením posledních třech nerovností získáme dokazovanou nerovnost. Rovnost nastane jen tehdy, pokud $\alpha = \beta = \gamma = \pi/3$ (trojúhelník ABC je v tomto případě rovnos-
tranný).



INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Závěr a poděkování.

Na přednášce jsem se zabývali funkcionálními a diofantickými rovnicemi a netradičním nerovnicím a nerovnostem. Největší přínos vidím hlavně v aktivním zapojení studentů do přednášky.

Tímto bych chtěl poděkovat všem lidem, kteří se podíleli na přípravě Matematického Kempu. Zvláště bych chtěl poděkovat PaedDr. Naděždě Kubešové za pozvání a v neposlední řadě studentům za skvělou atmosféru při přednáškách.

Literatura.

- Dušan Djurkić a kol., The IMO Compendium. A Collection of Problems Suggested for the International Mathematical Olympiads: 1959-2004, Springer 2006, ISBN 0-387-24299-6.
- Marko Radovanović, Complex Numbers in Geometry, The Author(s) and the IMO Compendium Group 2007, www.imomath.com.
- Functional Equations: Problems with Solutions, www.imomath.com.

Kontakt na autora.

Josef Křišťan
email: kristan1@email.cz
tel.: +420777944564

CZ.1.07/1.2/03/02/0001

Tento projekt je v roce 2013 financován z rozpočtu Plzeňského kraje

CELÁ ČÁST REÁLNÉHO ČÍSLA, ABSOLUTNÍ HODNOTA REÁLNÉHO ČÍSLA

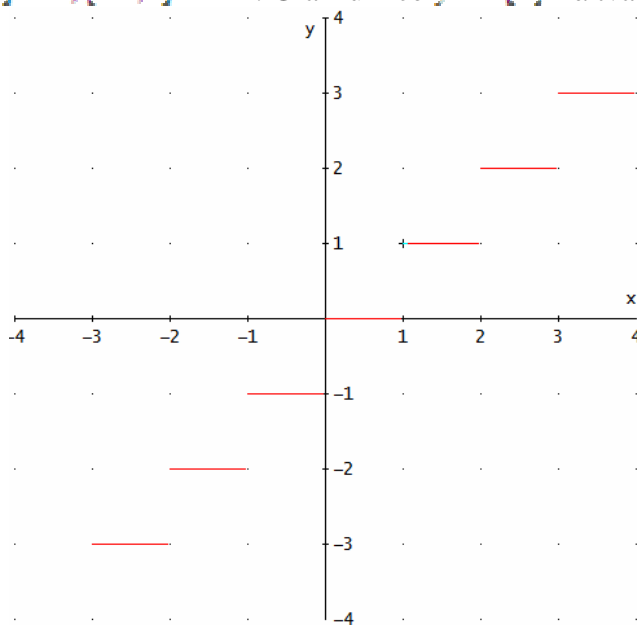
Josef KUBEŠ

1 Úvod

Celá část reálného čísla je partie, která se v klasických hodinách matematiky neprobírá. Ovšem je to vděčné téma ke tvorbě netradičních úloh, ve kterých je nutná individuální strategie. Nelze se naučit univerzální postup, je nutné si předem dobře zvážit postup řešení.

2 Definice celé části reálného čísla a její graf

Výraz $[a]$ znamená celou část z reálného čísla a . Je rovna nejbližšímu nižšímu celému číslu. Tedy $[1] = 1$, $[3,5] = 3$, $[-6,2] = -7$. Graf funkce $y = [x]$ má tvar:



2.1 V oboru reálných čísel řešte soustavu rovnic

$$10x[y] = 1492$$

$$10y[x] = 1776$$

Řešení každé úlohy s celou částí neznámé je vždy originální a není na ně univerzální pravidlo. Zadaná soustava se převede na soustavu dvou nerovnic

$$[x][y] \leq 149$$

$$([y] + 1)[x] \geq 178.$$

Odtud stanovíme podmínky pro obě proměnné a dosadíme všechny možné případy. Soustava má čtyři řešení.

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

2.2 Určete všechna reálná čísla, která vyhovují rovnici $4x - 2[x] = 5$.

2.3 V oboru reálných čísel řešte rovnici

$$[3x - 5] = 5x - 8$$

Ve všech úlohách využijeme definici celé části, tedy $[x] = x + k$, kde $0 \leq k < 1$.

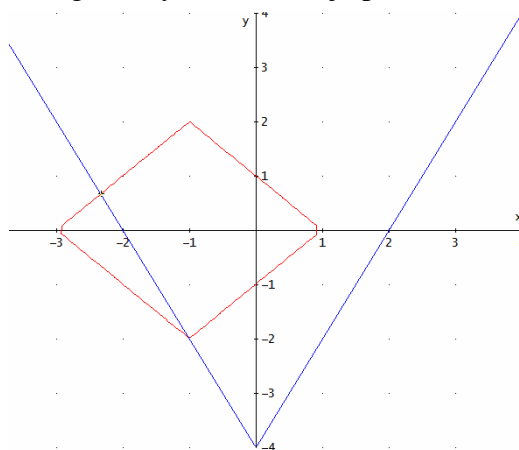
2.4 Určete všechny dvojice reálných čísel, které vyhovují soustavě rovnic

$$|x + 1| + |y| = 2$$

$$y + 4 = |2x|$$

Klíč k řešení je v diskuzi jednotlivých absolutních hodnot. Stanovíme podmínky pro jednotlivé proměnné tak, abychom mohli jednoznačně určit jejich znaménko a pro každý případ řešit zvlášť soustavu dvou rovnic o dvou neznámých.

Pro kontrolu lze úlohu řešit graficky. Z obrázku je patrné řešení: $K = \{[-1, -2], [\frac{-7}{3}, \frac{-2}{3}]\}$



3 Závěr

Uvedené úlohy z velké části přesahují rozsah základního středoškolského učiva matematiky. Pro řešení příkladů matematické olympiády jsou však základní a navazuje se na ně ve vyšších kolech. Řešitele zdokonaluje ve strategii a důslednosti řešení.

4 Použitá literatura

ŠVRČEK, J., CALÁBEK, P. Sbíрка netradičních matematických úloh. 1. vyd. Praha: Prométheus, spol. s r. o., 2007. 186 s. ISBN 978-80-7196-341-7

5 Kontakt na autora

PaedDr. Josef Kubeš

Gymnázium, Plzeň, Mikulášské nám. 23

Josef.Kubes@mikulasske.cz

Středisko služeb školám, Plzeň, Částkova 78
Podpora talentovaných žáků v Plzeňském kraji
CZ.1.07/1.2.03/02.0001

Tento projekt je v roce 2013 financován z rozpočtu Plzeňského kraje

DŮKAZOVÉ TECHNIKY – NEROVNOSTI

Josef KUBEŠ

1 Úvod

Znalost důkazových technik patří k základnímu vybavení každého řešitele matematické olympiády. Ověřování platnosti zadaných nerovnic vždy vyžaduje originální přístup, určitý nadhled a zkušenost.

2 Nerovnosti a jejich ověřování

Základním stavebním kamenem je nerovnost vyplývající z druhé mocniny dvojčlenu $(x - 1)^2$. Pro libovolné reálné číslo platí, že $(x - 1)^2 \geq 0$. Odtud plyne $x + \frac{1}{x} \geq 2$.

Další důležitá nerovnost je vztah mezi geometrickým a aritmetickým průměrem. Pro libovolnou n-tici reálných kladných čísel x_1, x_2, \dots, x_n platí: $\sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_n} \leq \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}$.

Poslední nerovností, se kterou se budeme zabývat je Cauchyova nerovnost. Pro libovolné dvě n-tice reálných čísel x_1, x_2, \dots, x_n a y_1, y_2, \dots, y_n platí $(x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots + x_n y_n)^2 \leq (x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2)(y_1^2 + y_2^2 + \dots + y_n^2)$.

2.1 Dokažte, že pro každý ostrý úhel α platí

$$\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{ctg} \alpha \geq 2$$

Použijeme vztah mezi funkcemi tangens a kotangens a upravíme na druhou mocninu dvojčlenu.

2.2 Dokažte, že pro libovolnou trojici kladných čísel a, b, c platí

$$(a + b)(b + c)(c + a) \geq 8abc$$

Roznásobíme a použijeme nerovnost mezi aritmetickým a geometrickým průměrem.

2.3 Dokažte, že pro libovolnou trojici kladných čísel a, b, c platí

$$\left(1 + \frac{a}{b+c}\right) \left(1 + \frac{b}{c+a}\right) \left(1 + \frac{c}{a+b}\right) \geq \frac{27}{8}$$

Upravíme a použijeme nerovnost mezi aritmetickým a geometrickým průměrem pro členy $a+b$, $b+c$, $c+a$.

2.4 Dokažte, že pro libovolné přirozené číslo $n > 1$ platí:

$$n! < \left(\frac{n+1}{2}\right)^n$$

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Využijeme rovnost: Pro libovolné přirozené číslo n větší než jedna platí: $1 + 2 + 3 + 4 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$. Dále je potřeba použít vztah mezi aritmetickým a geometrickým průměrem.

2.5 Dokažte, že pro všechna $x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbb{R}^+$ platí:

$$\left(\sum_{i=1}^n x_i \right)^2 \leq n \sum_{i=1}^n x_i^2$$

Dosadíme do Cauchyovy nerovnosti za y_1, y_2, \dots, y_n číslo 1.

2.6 Dokažte, že pro každé reálné číslo a platí:

$$3(1 + a^2 + a^4) \geq (1 + a + a^2)^2$$

2.7 Necht' $x, y, z \in \mathbb{R}_0^+$. Dokažte, že platí:

$$\sqrt{xy + yz + zx} \leq \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

Obě nerovnosti dokážeme aplikací Cauchyovy nerovnosti.

2.8 Dokažte, že pro libovolnou trojici reálných čísel a, b, c platí:

$$(a + b - c)^2 + (b + c - a)^2 + (c + a - b)^2 \geq ab + bc + ca$$

Upravíme levou stranu a opět šikovně použijeme Cauchyovu nerovnost.

2.9 Dokažte, že pro libovolnou trojici kladných reálných čísel a, b, c platí:

$$\frac{1}{b(a+b)} + \frac{1}{c(b+c)} + \frac{1}{a(c+a)} \geq \frac{9}{2(a^2 + b^2 + c^2)}$$

Důkaz nerovnosti je poměrně náročný. Výchozí nerovností je tentokrát vztah mezi harmonickým a aritmetickým průměrem. V dalším řešení pochopitelně budeme potřebovat Cauchyovu nerovnost.

3 Závěr

Uvedené úlohy z velké části přesahují rozsah základního středoškolského učiva matematiky. Pro řešení příkladů matematické olympiády jsou však základní a navazuje se na ně ve vyšších kolech. Řešitele zdokonaluje ve strategii a důslednosti řešení. Důkazové úlohy uvedeného typu také vyžadují precizní znalost v upravování algebraických výrazů.



INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

4 Použitá literatura

ŠVRČEK, J., CALÁBEK, P. Sbíрка netradičních matematických úloh. 1. vyd. Praha: Prométheus, spol. s r. o., 2007. 186 s. ISBN 978-80-7196-341-7

KUFNER, A. Nerovnosti a odhady. 1. vyd. Praha: Mladá fronta 1975. 120 s. 508/21/82.6

5 Kontakt na autora

PaedDr. Josef Kubeš

Gymnázium, Plzeň, Mikulášské nám. 23

Josef.Kubes@mikulasske.cz

Středisko služeb školám, Plzeň, Částkova 78
Podpora talentovaných žáků v Plzeňském kraji
CZ.1.07/1.2.03/02.0001

Tento projekt je v roce 2013 financován z rozpočtu Plzeňského kraje

KRUHOVÁ INVERZE, APOLLONIOVY ÚLOHY

Josef KUBEŠ

1 Úvod

Tato oblast je nad rámec základních osnov matematiky na střední škole. Přesto kruhová inverze je velmi zajímavé zobrazení, se kterým by se matematicky nadaní žáci měli seznámit. S Apolloniiovými úlohami se ovšem žáci seznamují již od základní školy, aniž by bylo řečeno, do jaké skupiny vlastně patří. Například konstrukce kružnice opsané trojúhelníku.

2 Definice kruhové inverze

Je dán bod S a nenulové číslo κ . Kruhová inverze je zobrazení tzv. Möbiovy roviny na Möbiovu rovinu, které každému bodu $X \neq S$ přiřadí bod X' , pro který $|SX| \cdot |SX'| = |\kappa|$ a který pro $\kappa > 0$ leží na polopřímce SX a pro $\kappa < 0$ leží na opačné polopřímce k polopřímce SX ; bodu $X = S$ přiřazuje nevlastní bod; nevlastnímu bodu přiřazuje bod S .

V kruhové inverzi se středem S platí:

- obrazem přímky procházející středem S je totožná přímka;
- obrazem přímky neprocházející středem S je kružnice procházející středem S ;
- obrazem kružnice procházející středem S je přímka neprocházející středem S ;
- obrazem kružnice neprocházející středem S je kružnice.

3 Apolloniiové úlohy

Apolloniiova úloha má své jméno podle řeckého geometra Apollonia z Pergy (262 – 200 př. n. l.), který se touto úlohou zabýval a řešil ji v díle "O dotycích". Apollonios formuloval úlohu nejprve pro tři zadané kružnice, později byly tyto kružnice postupně nahrazeny bodem (kružnice o nulovém poloměru) a přímkou (kružnice o nekonečně velkém poloměru). Originální znění se nezachovalo. Je však známa reprodukce úlohy v díle "Mathématikai synagogai" (důležitý pramen historie matematiky obsahující výňatky ze ztracených matematických spisů) řeckého matematika Pappose Alexandrijského (3. stol. n. l.). Pappos uvádí úlohu v následujícím znění:

"Nechť jsou dány tři předměty, z nichž každý může být bodem, přímkou nebo kruhem; má se narysovat kruh, který prochází každým z daných bodů (jsou-li dány jen body) a dotýká se daných přímek či kruhů."

Z výše uvedeného zadání je možno vypočítat počet možných variant úlohy. Hledáme vždy skupiny tří objektů ze třech druhů (Bodů, přímek, kružnic), přičemž pořadí daných objektů není podstatné. Tvoříme kombinace s opakováním třetí třídy z podmínek $K'(k,n) = K'(3,3) = 10$. Je tedy **10 různých případů** (nových devět jsou zvláštní případy úlohy obecné), přičemž obecná úloha má **nejvýše 8 řešení**.

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Existuje tedy devět speciálních případů obecné úlohy kkk, jsou to úlohy BBB, BBp, BBk, Bpp, Bpk, Bkk, ppp, ppk, pkk.

3.1 Řešte úlohu Bpk

Střed řídící kružnice kruhové inverze volíme v bodě B. Tím přímkou i kružnici převedeme na dvě kružnice a hledáme jejich společné tečny. Zpětným převodem získáme hledané kružnice.

3.2 Řešte úlohu Bkk

Střed řídící kružnice kruhové inverze opět volíme v bodě B. Tím obě kružnice převedeme na kružnice a hledáme jejich společné tečny. Zpětným převodem získáme hledané kružnice.

3 Závěr

Uvedené téma sleduje splnění dvou cílů. Nejprve rozšířit obzor o další zobrazení a jeho použití na úlohách. Druhý z cílů je propojení matematických poznatků s historickou dobou, ve které se jimi vědci zabývali. Je evidentní, že rozvoj starověké geometrie a formulované úlohy jsou natolik obtížné, že jejich řešení v dnešní době je dáno pouze určitě nadané skupině studentů.

4 Použitá literatura

Patáková, E. Apolloniovy úlohy. Diplomová práce. Dostupná na internetu
<<http://geometrie.kma.zcu.cz/work/AU/apoll/apoll.html>>

5 Kontakt na autora

PaedDr. Josef Kubeš
Gymnázium, Plzeň, Mikulášské nám. 23
Josef.Kubes@mikulasske.cz

PLANIMETRIE

Josef KUBEŠ

1 Úvod

Planimetrie, tedy rovinná geometrie, je velmi stará disciplína, která svou náročností potrápí řadu studentů. Vyžaduje představivost a určitou schopnost si zadanou situaci dobře načrtnout. Každá úloha je vlastně originální, a proto její řešení vyžaduje značnou míru kreativity. Znalost planimetrie je využitelná v běžném životě i v profesní kariéře u řady oborů. Obvykle si školské postupy nepamatujeme, zůstávají v našem podvědomí a přiřazujeme si je k dalším životním zkušenostem.

2 Důkazové úlohy v planimetrii

Důkazové úlohy jsou velkým balíkem úloh. Pomáhají k ujasnění vzájemných vztahů a geometrických pouček. Aplikujeme kromě geometrických znalostí také poznatky matematické logiky. Pro snazší vyjadřování využijeme poznatky z teorie množin.

2.1 Je dána kružnice $k(S, r)$ a její průměry AB a CD , které jsou navzájem kolmé. Sestrojte tětívu KN kružnice k , která je rovnoběžná s AC tak, aby protínala úsečky SA , SC po řadě ve vnitřních bodech L , M , pro něž platí $|KL| = |LM| = |MN|$.

Vedeme přímkou AC . Za bod A i C na přímkou AC nanese úsečky stejné délky jakou má úsečka AC . Nové krajní body spojíme se středem kružnice. Kde protnou tyto spojnice kružnici, získáme body K a N .

2.2 Nechť S značí střed kružnice vepsané danému ostroúhlému trojúhelníku ABC . Označme dále A' , B' , C' obrazy bodu S v osových souměrnostech po řadě podle přímk BC , AC , AB . Dokažte, že trojúhelníky ABC , $A'B'C'$ jsou podobné, právě když ABC je rovnostranný trojúhelník.

Využijeme trojúhelník sestrojený ze středních příček trojúhelníku ABC . Jedná se o důkaz ekvivalence, tento fakt si musíme dobře uvědomit.

2.3 Na kružnici k jsou dány dva různé body X a Y tak, že přímk XY neprochází středem kružnice k . Úsečka XY je průměrem kružnice l . Na větším oblouku XY kružnice k leží bod P a na kružnici l bod Q tak, že čtyřúhelník $PXQY$ je konvexní a přitom $PX \parallel QY$. Dokažte, že velikost úhlu PYQ nezávisí na poloze bodu P (za podmínky existence bodu Q).

Ukážeme, že úhly PXQ a XQY jsou vždy pravé a úhel XPY nezáleží na poloze bodu P (obvodový úhel).

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

2.4 Označme K, L, M, N středy stran AB, BC, CD a DA konvexního čtyřúhelníku $ABCD$. Dokažte, že z úseček KL, KM a KN lze sestrojít trojúhelník a vyjádřete jeho obsah pomocí obsahu čtyřúhelníku $ABCD$.

Úloha není složitá, stačí použít podobnost trojúhelníků a vlastnosti střední příčky. Při řešení použijeme úhlopříčky čtyřúhelníku.

3 Závěr

Planimetrické úlohy včetně důkazových jsou vděčným tématem matematických soutěží a obvykle patří k těm, které oddělují úspěšné řešitele od neúspěšných. Uvedené příklady reprezentují vždy velkou skupinu úloh, proto každá je řešena jiným způsobem.

4 Použitá literatura

ŠVRČEK, J., CALÁBEK, P. Sbíрка netradičních matematických úloh. 1. vyd. Praha: Prométheus, spol. s r. o., 2007. 186 s. ISBN 978-80-7196-341-7

5 Kontakt na autora

PaedDr. Josef Kubeš

Gymnázium, Plzeň, Mikulášské nám. 23

Josef.Kubes@mikulasske.cz

EXKURZE DO ČESKÉHO HYDROMETEOROLOGICKÉHO ÚSTAVU V PRAZE-KOMOŘANECH

Naděžda KUBEŠOVÁ

1 Úvod

Počasí jsou neustálé proměny vzduchu kolem nás. Počasí hraje v našem životě velmi důležitou roli. Působí na krajinu všude kolem nás. Sníh vyživuje ledovce, vítr zaobluje skály a z písku dokáže vytvořit obrovské duny. Nejdůležitější úlohu při tvorbě počasí mají Slunce, vzduch a voda. Díky Slunci máme na Zemi teplo a světlo, vzduch zase obaluje naši planetu jako ochranná slupka. Voda zase způsobuje, že mohou vzniknout oblaka, která vidíme téměř denně na obloze, a taky to, že na nás prší a sněží. Protože lidé věděli, že počasí tak hodně ovlivňuje jejich životy a není před ním úniku, chtěli vždy vědět, jak bude aspoň v nejbližších hodinách. Tak se začalo předpovídat počasí. Nejdříve pomocí lidové meteorologie, která byla blízka astrologii, a postupně vědeckými metodami.

2 Český hydrometeorologický ústav v Praze

Současné úkoly ústavu

Základním účelem příspěvkové organizace ČHMÚ je vykonávat funkci ústředního státního ústavu České republiky pro obory čistota ovzduší, hydrologie, jakost vody, klimatologie a meteorologie, jako objektivní odborné služby poskytované přednostně pro státní správu.

Předmětem činnosti ČHMÚ v uvedených oborech je:

- racionálně, věcně a ekonomicky integrovat výkon státní služby;
- zřizovat a provozovat měřicí stanice a sítě s využíváním telekomunikačních sítí (státní pozorovací sítě pro sledování kvalitativního a kvantitativního stavu atmosféry a hydrosféry a příčin vedoucích k jejich znečišťování nebo poškozování);
- odborně zpracovávat výsledky pozorování, měření a monitorování;
- vytvářet a spravovat databáze;
- poskytovat předpovědi a výstrahy;
- provádět a koordinovat vědeckou a výzkumnou činnost

Po celou exkurzi nás provázela RNDr. Milada Šandová.

Hlavním cílem numerické předpovědi počasí je co nejrychleji zpracovat naměřené údaje z meteorologických přístrojů (pozemních meteorologických stanic, balonových měření,

Středisko služeb školám, Plzeň, Částkova 78
Podpora talentovaných žáků v Plzeňském kraji
CZ.1.07/1.2.03/02.0001

Tento projekt je v roce 2013 financován z rozpočtu Plzeňského kraje

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

meteorologických družic, radarů a dalších speciálních zařízení) a pomocí počítačové simulace vývoje atmosféry vypočítat její pravděpodobný budoucí stav.

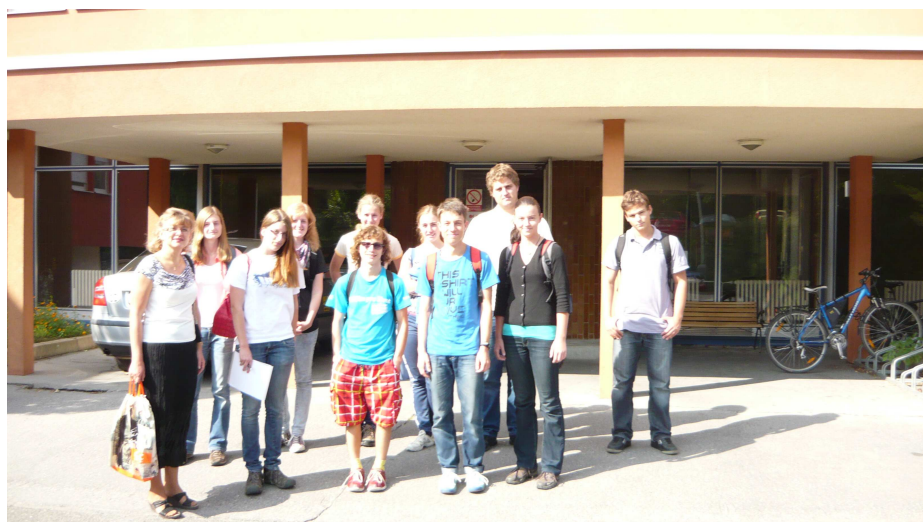
Numerický předpovědní model je řešen na počítačích. Algoritmy jsou naprogramovány především s ohledem na maximální rychlost výsledného programu. Používají se pokročilé numerické metody při konstrukci základních numerických schémat, rychlé numerické algoritmy a efektivní programovací postupy umožňující vysokou paralelizaci dat i algoritmů. Numerické modely se ve svých produkčních verzích řeší zpravidla na vysoce výkonných, často specializovaných počítačích, tzv. superpočítačích, schopných provádět velké množství výpočtů nad velkými objemy dat.



Středisko služeb školám, Plzeň, Částkova 78
Podpora talentovaných žáků v Plzeňském kraji
CZ.1.07/1.2.03/02.0001

Tento projekt je v roce 2013 financován z rozpočtu Plzeňského kraje

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ



Středisko služeb školám, Plzeň, Částkova 78
Podpora talentovaných žáků v Plzeňském kraji
CZ.1.07/1.2.03/02.0001

Tento projekt je v roce 2013 financován z rozpočtu Plzeňského kraje

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ



3 Závěr

Exkurze byla vedena poutavou formou. Vzhledem k tomu, že účastníci byli studenti se zájmem o matematiku a fyziku, budou se možná někteří ve své budoucí profesi numerickými výpočty zabývat.

4 Použitá literatura

<http://portal.chmi.cz>

5 Kontakt na autora

PaedDr. Naděžda Kubešová
Gymnázium L. Pika Plzeň, Opavská 21, 312 00 Plzeň
kubesova@gop.pilsedu.cz

Středisko služeb školám, Plzeň, Částkova 78
Podpora talentovaných žáků v Plzeňském kraji
CZ.1.07/1.2.03/02.0001

Tento projekt je v roce 2013 financován z rozpočtu Plzeňského kraje

Příklady z Matematických olympiád na rovnosti, nerovnosti a posloupnosti

Petr TOMICZEK

1 Úvod

Tento příspěvek je věnován příkladům z matematických olympiád celého světa, ve kterých se řešily příklady s rovnostmi, nerovnostmi a posloupnostmi. Rovnosti jsou řešeny v oborech celých a racionálních čísel. Jednotlivé podkapitoly v nerovnostech se postupně věnují příkladům s absolutní hodnotou a průměrům (aritmetický, geometrický, harmonický). K řešení příkladů na posloupnosti je nutná znalost pojmu limita posloupnosti.

2 Rovnosti

Příklad 2.1: (Rumunsko 1981)

Pro $x, y \in \mathbb{Z}$ řešte rovnici $x^6 + 3x^3 + 1 = y^4$.

Řešení: Substitucí $z = x^3$ přejdeme ke kvadratické rovnici $z^2 + 3z + 1 - y^4 = 0$, pro jejíž diskriminant musí platit $D = 5 + 4y^4 = n^2$, $n \in \mathbb{N}$, abychom dostali řešení v celých číslech. Položíme $m = 2y^2$, pak $n^2 = m^2 + 5$ a $n \geq m + 1$, tedy $m^2 + 5 \geq (m + 1)^2 = m^2 + 2m + 1$. Odtud plyne $2 \geq m = 2y^2$, tudíž $1 \geq |y|$. Pro $y = 0$ řešení neexistuje, pro $y = \pm 1$ je $x = 0$.

Příklad 2.2: (Jugoslávie 1974)

Pro $x, y \in \mathbb{Z}$ řešte rovnici $x^2 + xy + y^2 = x^2y^2$.

Řešení: Díky symetrii příkladu můžeme bez újmy na obecnosti předpokládat, že $y = ax$, $|a| \geq 1$. Potom $x^2(1 + a + a^2) = a^2x^4$ a $x^2 = \frac{1+a+a^2}{a^2} \leq 3$, tedy pro $x = -1$, je $y = 1$, pro $x = 0$, je $y = 0$, pro $x = 1$, je $y = -1$.

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Příklad 2.3: (New York 1977)

Pro $x, y \in \mathbb{Z}$ řešte rovnici $2^x + 1 = y^2$.

Řešení: Z nerovnosti $0 < 2^x = y^2 - 1$ vyplývá pro $x, y \in \mathbb{Z}$, že $2^x = y^2 - 1 \geq 3$ a $x > 1$. Tedy $2^x + 1$ je liché číslo i y je liché. Pak $y = 2k + 1, k \in \mathbb{Z}$ a $2^x + 1 = (2k + 1)^2$, odtud $2^{x-2} = (k + 1)k$. Tato rovnost nastane pouze pro $k = 1$, neboli $x = 3, y = 3$.

Příklad 2.4: (NDR 1973)

Pro $x \in \mathbb{Z}$ řešte rovnici $x(x + 1)(x + 7)(x + 8) = y^2$.

Řešení: Substitucí $z = x + 4$ přejdeme k $(z^2 - 16)(z^2 - 9) = y^2$. Pro $z = 0$ je $y = \pm 12$, pro $z = \pm 3, z = \pm 4$ je $y = 0$, pro $z = \pm 5$, je $y = \pm 12$. Pro $z = \pm 1, \pm 2$ řešení v celých číslech neexistuje. Zbývá uvažovat $|z| \geq 6$. Pak $z^4 - 25z^2 + 144 = y^2 = (z^2 - 12)^2 - z^2$. Tedy $(z^2 - 12)^2 \geq y^2$ a $y^2 > (z^2 - 13)^2 = z^4 - 25z^2 + 144 - (z^2 - 25)$, neboť $(z^2 - 25) > 0$ pro $|z| \geq 6$. Další řešení tudíž neexistují.

Příklad 2.5: (NDR 1974)

Pro $x, y \in \mathbb{Z}$ řešte rovnici $(x + 2)^4 - x^4 = y^3$.

Řešení: Výpočtem dostaneme $8(x^3 + 2(x + 1)^2 + x^2) = y^3$, tudíž y je sudé $y = 2k, k \in \mathbb{Z}$ a $x^3 + 2(x + 1)^2 + x^2 = k^3$. Odtud vyplývá, že $k \geq x + 1$. Pro $k = x + 1$ platí $x^3 + 2(x + 1)^2 + x^2 = x^3 + 3x^2 + 3x + 1$, tedy $x = -1, y = 0$. Pro $k \geq x + 2$ musí platit $x^3 + 2(x + 1)^2 + x^2 \geq x^3 + 6x^2 + 12x + 8$, neboli $0 \geq 3x^2 + 8x + 6$, což nikdy nenastane.

Příklad 2.6: (NDR 1970)

Dokažte, že pro lichá čísla $a, b, c \in \mathbb{Z}$ rovnice $ax^2 + bx + c = 0$ nemá řešení v \mathbb{Q} .

Řešení: Aby kořeny kvadratické rovnice byly racionální čísla, tak pro její diskriminant musí platit $D = b^2 - 4ac = n^2, n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Z lichosti čísel a, b, c a rovnosti $b^2 - 4ac = n^2$ plyne, že n je liché číslo. Položíme $a = 2a_1 + 1, b = 2b_1 + 1, c = 2c_1 + 1, n = 2n_1 + 1$, potom $4b_1^2 + 4b_1 + 1 - 4(4a_1c_1 + 2a_1 + 2c_1 + 1) = 4n_1^2 + 4n_1 + 1$ a $b_1^2 + b_1 - (4a_1c_1 + 2a_1 + 2c_1 + 1) = n_1^2 + n_1$. Jelikož $b_1^2 + b_1$ i $n_1^2 + n_1$ jsou sudá čísla, tak číslo na levé straně poslední rovnosti je liché a vpravo sudé, což je spor s předpokladem, že kořeny rovnice jsou racionální čísla.

Příklad 2.7: (Anglie 1970)

Pro $x, y \in \mathbb{Q}$ řešte rovnici $\sqrt{2\sqrt{3} - 3} = \sqrt{x\sqrt{3}} - \sqrt{y\sqrt{3}}$.

Řešení: Po umocnění dostaneme $2\sqrt{3} - 3 = x\sqrt{3} - 2\sqrt{xy\sqrt{3}} + y\sqrt{3}$, vydělíme $\sqrt{3}$, pak

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

$2 - \sqrt{3} = x - 2\sqrt{xy} + y$ a $2 - x - y = \sqrt{3} - 2\sqrt{xy}$. Opět umocníme, potom $(2 - x - y)^2 = 3 - 4\sqrt{xy} + 4xy$. Odtud plyne, že $\sqrt{xy} \in \mathbb{Q}$. V první rovnosti $2\sqrt{3} - 3 = x\sqrt{3} - 2\sqrt{xy} + y\sqrt{3}$ vytkneme $\sqrt{3}$, pak $\sqrt{3}(2 - x - y) = 3 - 2\sqrt{xy}$. Nutně tedy $2 - x - y = 0$ a $3 - 2\sqrt{xy} = 0$. Odtud již dostaneme řešení $x = \frac{3}{2}, y = \frac{1}{2}$.

V dalších příkladech použijeme následující jednoduché tvrzení

Věta 2.1: (modulo 4)

Nechť $x \in \mathbb{Z}$, pak při dělení x^2 číslem 4 jsou zbytky pouze 0, když x je sudé, a 1, když x je liché. Píšeme $x^2 \pmod{4} \equiv 0$ (x sudé), $x^2 \pmod{4} \equiv 1$ (x liché).

Příklad 2.8: (ČSSR 1976)

Pro $x, y, z \in \mathbb{Z}$ řešte rovnici $x^2 + y^2 = 3z^2$.

Řešení: Triviální řešení $x = 0, y = 0, z = 0$ je zřejmé. Bez újmy na obecnosti můžeme tedy předpokládat, že x, y, z jsou nesoudělná čísla a alespoň jedno je nenulové. Podle předchozího tvrzení 2.1 platí $(x^2 + y^2) \pmod{4} \equiv 0$ nebo 1 nebo 2 a $3z^2 \pmod{4} \equiv 0$ nebo 3. Tudíž $(x^2 + y^2) \pmod{4} \equiv 0$ a $3z^2 \pmod{4} \equiv 0$, což nastane pouze v případě, že všechna čísla x, y, z jsou sudá. Dostali jsme spor s předpokladem nesoudělnosti. Úloha tedy nemá netriviální řešení.

Příklad 2.9: (USA 1976)

Pro $x, y, z \in \mathbb{Z}$ řešte rovnici $x^2 + y^2 + z^2 = x^2y^2$.

Řešení: Opět úloha má triviální řešení $x = 0, y = 0, z = 0$. Podle tvrzení 2.1 buď a) $x^2y^2 \pmod{4} \equiv 1$ nebo b) $x^2y^2 \pmod{4} \equiv 0$.

ad a) Tedy x, y jsou liché, pak i z je liché a $x^2 + y^2 + z^2 \pmod{4} \equiv 3 \neq x^2y^2 \pmod{4} \equiv 1$. Tedy možnost a) nenastane.

ad b) Nechť x je sudé, y je liché, pak z je též liché a $x^2 + y^2 + z^2 \pmod{4} \equiv 2 \neq x^2y^2 \pmod{4} \equiv 0$. (Analogicky y je sudé, x je liché.) Zbývá možnost x je sudé, y je sudé, pak i z je sudé. Potom $x = 2x_1, y = 2y_1, z = 2z_1$ a $x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 = 4x_1^2y_1^2$. Odtud $x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 \pmod{4} \equiv 4x_1^2y_1^2 \pmod{4} \equiv 0$, což nastane pouze v případě, že x_1, y_1, z_1 jsou sudá čísla atd. Čísla x, y, z jsou tedy dělitelná libovolnou mocninou čísla 2, tato situace nastane pouze pro $x = 0, y = 0, z = 0$.

Příklad 2.10: (USA 1979)

V celých číslech řešte rovnici $x_1^4 + x_2^4 + \dots + x_{14}^4 = 1599$.

Řešení: Platí $x^4 \pmod{16} \equiv 0$ nebo $x^4 \pmod{16} \equiv 1$. Tedy $(x_1^4 + x_2^4 + \dots + x_{14}^4) \pmod{16} \leq 14$ a $1599 \pmod{16} \equiv 15$. Proto úloha nemá řešení.

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

3 Nerovnosti

3.1 Absolutní hodnota

Definice 3.1: Zobrazení $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_0^+ = \{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\}$ definované předpisem $f(x) = \max\{x, -x\}$ nazveme **absolutní hodnotou**. Absolutní hodnotu čísla x značíme $|x|$.

Absolutní hodnotu čísla x můžeme definovat i následujícím způsobem.

Cvičení 3.1: Dokažte: $|x| = \begin{cases} x & x \geq 0 \\ -x & x \leq 0. \end{cases}$
 $[x \geq 0 \Rightarrow \max\{x, -x\} = x, \quad x \leq 0 \Rightarrow \max\{x, -x\} = -x.]$

Věta 3.2: (vlastnosti absolutní hodnoty)

Nechť $a, b \in \mathbb{R}$, pak

$$\text{i) } |a| \geq 0, \quad |a \cdot b| = |a| \cdot |b|, \quad \left| \frac{a}{b} \right| = \frac{|a|}{|b|} \quad b \neq 0,$$

$$\sqrt{a^2} = |a|, \quad a \leq |a|,$$

$$\text{iii) } |a + b| \leq |a| + |b| \quad \text{trojúhelníková nerovnost,} \quad (\text{N1})$$

$$\text{iv) } ||a| - |b|| \leq |a - b|, \quad (\text{N2})$$

číslo $|a - b|$ nazýváme **vzdálenost bodů a, b**.

Příklad 3.1: (USA 1982)

Dokažte, že pro reálná čísla a_1, a_2, \dots, a_n a $1 \geq b_1 \geq b_2 \geq \dots \geq b_n \geq 0$ existuje $k \in \{1, 2, \dots, n\}$ takové, že platí

$$\left| \sum_{i=1}^n b_i a_i \right| \leq \left| \sum_{i=1}^k a_i \right|.$$

Řešení: $S = \left| \sum_{i=1}^n b_i a_i \right| = \left| b_1 a_1 + \sum_{i=2}^n b_i (a_i + \dots + a_1) - \sum_{i=2}^n b_i (a_{i-1} + \dots + a_1) \right| = \left| \sum_{i=1}^n b_i (a_i + \dots + a_1) - \sum_{i=1}^{n-1} b_{i+1} (a_i + \dots + a_1) \right| = \left| \sum_{i=1}^n (b_i - b_{i+1}) (a_i + \dots + a_1) \right|$, kde $b_{n+1} = 0$. Nyní položíme $A_i = |a_i + \dots + a_1|$ a $A_k = \max_i A_i$, potom $S \stackrel{(N2)}{\leq} \sum_{i=1}^n |(b_i - b_{i+1})| |a_i + \dots + a_1| \leq A_k = \left| \sum_{i=1}^k a_i \right|$.

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Příklad 3.2: (Jugoslávie 1972)

Máme reálné číslo M a matice reálných čísel $(a_{ij})_{i,j=1}^n$ splňuje nerovnost

$$\sum_{i=1}^n |a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n| \leq M$$

pro libovolné $x_i \in \{-1, 1\}$. Dokažte, že pak platí

$$|a_{11}| + |a_{22}| + \dots + |a_{nn}| \leq M.$$

Řešení: Každé z čísel x_i nabývá dvou hodnot, proto také

$$\sum_{\{x_1, \dots, x_n\}} \sum_{i=1}^n |a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n| \leq 2^n M$$

a

$$\sum_{i=1}^n \sum_{\{x_1, \dots, x_n\}} |a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n| \leq 2^n M.$$

Označíme

$$S_i = \sum_{\{x_1, \dots, x_n\}} |a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n|.$$

Pro S_i platí

$$\begin{aligned} S_i &= \sum_{\{x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n\}} |a_{i1}x_1 + \dots + a_{i(i-1)}x_{i-1} + a_{ii} + a_{i(i+1)}x_{i+1} + \dots + a_{in}x_n| \\ &+ \sum_{\{x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n\}} |a_{i1}x_1 + \dots + a_{i(i-1)}x_{i-1} - a_{ii} + a_{i(i+1)}x_{i+1} + \dots + a_{in}x_n| \\ &\stackrel{(M1)}{\geq} \sum_{\{x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n\}} 2|a_{ii}| = 2^n |a_{ii}|. \end{aligned}$$

Odtud již plyne $2^n \sum_{i=1}^n |a_{ii}| \leq \sum_{i=1}^n S_i \leq 2^n M$, což jsme měli dokázat.

Příklad 3.3: (Bulharsko 1982)

Dokažte, že pro čísla $a_1, a_2, \dots, a_n \in [0, 2]$, $n \geq 2$ platí nerovnost

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n |a_i - a_j| \leq n^2.$$

Pro jaké hodnoty nastane rovnost?

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Řešení: Zřejmě platí $|a_i - a_j| = |a_j - a_i|$ a můžeme předpokládat, že $a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_n$, pak

$$S = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n |a_i - a_j| = 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} |a_j - a_i| \stackrel{a_j \geq a_i}{=} 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} (a_j - a_i) =$$

$$2 \left(\sum_{j=2}^n (j-1) a_j - \sum_{i=1}^{n-1} (n-i) a_i \right) = \sum_{i=1}^n (2i - n - 1) a_i.$$

Součet S bude maximální, pokud $a_i = 2$ pro i takové, že $2i - n - 1 > 0$ a $a_i = 0$ pro i splňující $2i - n - 1 < 0$.

$$\text{Pro liché } n = 2k + 1 \text{ je pak } S = 2 \sum_{i=k+2}^n (2i - 2k - 2) 2 = 4k(k+1) < n^2.$$

$$\text{Pro sudé } n = 2k \text{ je } S = 2 \sum_{i=k+1}^n (2i - 2k - 1) 2 = 4(k)^2 = n^2.$$

Tedy pro n sudé a $a_1 = \dots = a_{\frac{n}{2}} = 0$, $a_{\frac{n}{2}+1} = \dots = a_n = 2$ nastane rovnost.

3 Průměry

Vzdálenost dvou čísel a, b na reálné ose se rovná $|a - b| = \sqrt{(a - b)^2}$. Zřejmě $(a - b)^2 \geq 0$, což je ekvivalentní se základní nerovností

$$2ab \leq a^2 + b^2, \quad \text{popřípadě} \quad ab \leq \frac{a^2 + b^2}{2}, \quad (\text{N3})$$

která se objevuje v mnoha úlohách; například:

Cvičení 3.2: Pro $a, b, c \in \mathbb{R}$ dokažte nerovnosti: $a + b \leq \sqrt{2(a^2 + b^2)}$ a $ab + bc + ac \leq \frac{a^2 + b^2 + c^2}{2}$.

V 15. ročníku MO kategorie B se objevila úloha

Příklad 3.4:

Je dán kvádr o rozměrech a, b, c , který není krychlí. Dokažte, že součet objemů krychlí o hranách a, b, c je větší než trojnásobek objemu daného kvádru.

Řešení: V podstatě máme dokázat platnost nerovnosti $3abc \leq a^3 + b^3 + c^3$.

Platnost této nerovnosti plyne z následující věty.

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Věta 3.3: (o průměrech)

Nechť $a_i > 0$, $i = 1, 2, \dots, n$, pak platí

$$\frac{n}{\frac{1}{a_1} + \dots + \frac{1}{a_n}} \leq \sqrt[n]{a_1 \cdot \dots \cdot a_n} \leq \frac{a_1 + \dots + a_n}{n} \leq \sqrt{\frac{a_1^2 + \dots + a_n^2}{n}}. \quad (N4)$$

Definice 3.2: Nechť $a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{R}$, aritmetický průměr se nazývá číslo

$$\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n}.$$

Nechť $a_i \geq 0$, $i = 1, 2, \dots, n$, geometrický průměr se nazývá číslo

$$\sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_n}.$$

Nechť $a_i > 0$, $i = 1, 2, \dots, n$, harmonický průměr se nazývá číslo

$$\frac{n}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n}}.$$

Nechť $a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{R}$, kvadratický průměr se nazývá číslo

$$\sqrt{\frac{a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2}{n}}.$$

Důkaz věty 3.2: Nejdříve dokážeme vztah mezi geometrickým a aritmetickým průměrem

$$\sqrt[n]{a_1 \cdot \dots \cdot a_n} \leq \frac{a_1 + \dots + a_n}{n}. \quad (GA)$$

Upravíme (GA) do tvaru $n \leq \frac{a_1 + \dots + a_n}{\sqrt[n]{a_1 \cdot \dots \cdot a_n}}$, a položíme $x_i = \frac{a_i}{\sqrt[n]{a_1 \cdot \dots \cdot a_n}}$, $i = 1, \dots, n$.

Potom $x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_n = 1$ a pomocí matematické indukce budeme dokazovat, že $n \leq x_1 + x_2 + \dots + x_n$. Pro $n = 1$ tvrzení zřejmě platí. Z využitím indukčního předpokladu $n \leq x_1 + x_2 + \dots + x_n$ chceme dokázat, že $n + 1 \leq x_1 + x_2 + \dots + x_n + x_{n+1}$, pokud $x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_n \cdot x_{n+1} = 1$. Bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že $x_1 \geq 1$ a $x_2 \leq 1$, potom $(x_1 - 1)(x_2 - 1) \leq 1$, tedy $1 + x_1 x_2 \leq x_1 + x_2$ a také

$$1 + x_1 x_2 + x_3 + \dots + x_n + x_{n+1} \leq x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_n + x_{n+1}.$$

Pro n čísel $x_1 x_2, x_3, \dots, x_{n+1}$ platí $x_1 x_2 \cdot x_3 \cdot \dots \cdot x_{n+1} = 1$ a podle indukčního předpokladu $n \leq x_1 x_2 + x_3 + \dots + x_n + x_{n+1}$. Odtud již dostaneme

$$1 + n \leq 1 + x_1 x_2 + x_3 + \dots + x_n + x_{n+1} \leq x_1 + x_2 + \dots + x_n + x_{n+1},$$

což jsme měli dokázat.

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Pokud položíme $a_i = \frac{1}{b_i}$, $i = 1, \dots, n$ v nerovnosti (GA), pak dostaneme $\sqrt[n]{\frac{1}{b_1} \cdot \dots \cdot \frac{1}{b_n}} \leq \frac{\frac{1}{b_1} + \dots + \frac{1}{b_n}}{n}$. Odtud již snadno plyne nerovnost mezi harmonickým a geometrickým průměrem

$$\frac{1}{\frac{1}{b_1} + \dots + \frac{1}{b_n}} \leq \sqrt[n]{b_1 \cdot \dots \cdot b_n}. \quad (\text{HG})$$

Nerovnost mezi aritmetickým a kvadratickým průměrem dokážeme také pomocí matematické indukce. Chceme tedy dokázat

$$\frac{a_1 + \dots + a_n}{n} \leq \sqrt{\frac{a_1^2 + \dots + a_n^2}{n}}, \quad (\text{AK})$$

což pro $n = 1$ zřejmě platí.

Za indukčního předpokladu $(a_1 + \dots + a_n)^2 \leq n(a_1^2 + \dots + a_n^2)$, dokážeme platnost $(a_1 + \dots + a_n + a_{n+1})^2 \leq (n+1)(a_1^2 + \dots + a_n^2 + a_{n+1}^2)$.

Platí

$$(a_1 + \dots + a_n + a_{n+1})^2 = (a_1 + \dots + a_n)^2 + 2(a_1 + \dots + a_n)a_{n+1} + (a_{n+1})^2 \stackrel{(N3)}{\leq} n(a_1^2 + \dots + a_n^2) + a_1^2 + a_{n+1}^2 + \dots + a_n^2 + a_{n+1}^2 + a_{n+1}^2 = (n+1)(a_1^2 + \dots + a_n^2 + a_{n+1}^2),$$

což jsme měli dokázat.

Poznamenejme, že rovnost v (N4) nastane pouze pro $a_1 = a_2 = \dots = a_n$.

S nerovnostmi z předchozí věty se často setkáme v úlohách z matematických olympiád.

Příklad 3.5: (2.ročník MO kat. A)

Dokažte, že pro $a_i > 0$, $i = 1, 2, \dots, n$, platí nerovnost

$$(a_1 + a_2 + \dots + a_n) \left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n} \right) \geq n^2.$$

Řešení: Jednoduchou úpravou dostaneme

$$\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} \geq \frac{n}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n}}, \quad (\text{HA})$$

což je nerovnost mezi harmonickým a aritmetickým průměrem, viz (N4).

Řešení však můžeme dostat i jiným postupem s využitím základní nerovnosti (N3).

$$(a_1 + a_2 + \dots + a_n) \left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n} \right) = \sum_{i=1}^n a_i \cdot \frac{1}{a_i} + \sum_{\substack{i \neq j \\ i, j=1 \\ i, j=1}}^n a_i \cdot \frac{1}{a_j} =$$

$$n + \sum_{1 \leq i < j \leq n} \underbrace{\frac{a_i}{a_j} + \frac{a_j}{a_i}}_{\geq 2} = n + \binom{n}{2} \cdot 2 = n^2.$$

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Příklad 3.6:

Dokažte, že pro trojici kladných čísel a, b, c , platí nerovnost

$$(a + b)(a + c)(b + c) \geq 8abc.$$

Kdy nastane rovnost?

Řešení: Podle (GA) nerovnosti je $a + b \geq 2\sqrt{ab}$, tudíž $(a + b)(a + c)(b + c) \geq 2\sqrt{ab} 2\sqrt{ac} 2\sqrt{bc} = 8abc$, což jsem měli dokázat. Rovnost nastane pouze v případě, kdy $a = b = c$.

Příklad 3.7: (17.ročník MO kat. A)

Dokažte, že pro trojici nezáporných čísel a, b, c , platí nerovnost

$$a(a - \sqrt{bc}) + b(b - \sqrt{ac}) + c(c - \sqrt{ab}) \geq 0.$$

Řešení: Podle (GA) nerovnosti je $\sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2}$, tudíž $a(a - \sqrt{bc}) + b(b - \sqrt{ac}) + c(c - \sqrt{ab}) \geq a(a - \frac{b+c}{2}) + b(b - \frac{a+c}{2}) + c(c - \frac{a+b}{2}) = \frac{1}{2}((a-b)^2 + (b-c)^2 + (a-c)^2) \geq 0$.

Příklad 3.8:

Dokažte, že pro libovolné přirozené číslo n , platí nerovnost

$$n! \leq \left(\frac{n+1}{2}\right)^n.$$

Řešení: Platí $1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$, pak $\left(\frac{n+1}{2}\right)^n = \frac{(1+2+\dots+n)^n}{n^n} \stackrel{(GA)}{\geq} n!$.
Poznámka: Lze to dokázat i matematickou indukcí a binomickou větou.

Příklad 3.9: (22.ročník MO kat. A)

Máme posloupnost (a_n) reálných čísel, která splňuje $a_{n-1} + a_{n+1} \geq 2a_n$, pro $n > 1$. Označíme $A_n = \frac{a_1 + \dots + a_n}{n}$, dokažte že pak platí nerovnost

$$A_{n-1} + A_{n+1} \geq 2A_n.$$

Řešení: Nerovnost $A_{n-1} + A_{n+1} \geq 2A_n$ přepíšeme do tvaru $A_{n+1} - A_n \geq A_n - A_{n-1}$ a dosadíme z definice A_n . Tedy

$$\frac{a_1 + \dots + a_{n+1}}{n+1} - \frac{a_1 + \dots + a_n}{n} \geq \frac{a_1 + \dots + a_n}{n} - \frac{a_1 + \dots + a_{n-1}}{n-1}.$$

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Přechodem na společného jmenovatele dostaneme postupně

$$\frac{n a_{n+1} - a_1 - \dots - a_n}{(n+1)n} \geq \frac{(n-1) a_n - a_1 - \dots - a_{n-1}}{n(n-1)},$$

$$(n-1)[n a_{n+1} - a_1 - \dots - a_n] \geq (n+1)[(n-1) a_n - a_1 - \dots - a_{n-1}],$$

$$(n-1)n(a_{n+1} - a_n) \geq 2(n-1)a_n - 2a_1 - \dots - 2a_{n-1},$$

$$\frac{(n-1)n}{2}(a_{n+1} - a_n) \geq [(n-1)(a_n - a_{n-1}) + (n-2)(a_{n-1} - a_{n-2}) + \dots + (a_2 - a_1)],$$

$$((n-1) + \dots + 1)(a_{n+1} - a_n) \geq [(n-1)(a_n - a_{n-1}) + \dots + (a_2 - a_1)].$$

Z předpokladu $a_{n-1} + a_{n+1} \geq 2a_n$ plyne $a_{n+1} - a_n \geq a_n - a_{n-1}$ i $a_{n+1} - a_n \geq a_{n-1} - a_{n-2}; \dots, a_{n+1} - a_n \geq a_2 - a_1$. Odtud již zřejmě dostaneme platnost dokazované nerovnosti.

Příklad 3.10: (New York 75)

Dokažte, že pro dvě libovolná různá kladná čísla a, b platí nerovnosti

$$\sqrt{ab} < \frac{(a-b)^2}{8\left(\frac{a+b}{2} - \sqrt{ab}\right)} < \frac{a+b}{2}.$$

Řešení: Označíme $A = \frac{a+b}{2}$ a $G = \sqrt{ab}$, pak $\frac{(a-b)^2}{8\left(\frac{a+b}{2} - \sqrt{ab}\right)} = \frac{(a-b)^2}{8(A-G)} = \frac{(a+b)^2 - 4ab}{8(A-G)} = \frac{4A^2 - 4G^2}{8(A-G)} = \frac{A+G}{2}$ a zřejmě $G < \frac{A+G}{2} < A$.

Příklad 3.11: (Jugoslávie 75)

Dokažte, že pro tři libovolná čísla a, b, c větší než 1 platí nerovnost

$$2\left(\frac{\log_b a}{a+b} + \frac{\log_c b}{b+c} + \frac{\log_a c}{c+a}\right) \geq \frac{9}{a+b+c}.$$

Řešení: Platí odhady $2\left(\frac{\log_a a}{a+b} + \frac{\log_c b}{b+c} + \frac{\log_a c}{c+a}\right) \stackrel{(GA)}{\geq} 6\sqrt[3]{\frac{\log_b a \log_c b \log_a c}{(a+b)(b+c)(c+a)}} = \frac{6}{\sqrt[3]{(a+b)(b+c)(c+a)}} \stackrel{(GA)}{\geq} \frac{18}{(a+b)+(b+c)+(c+a)}$.

Příklad 3.12: (Jugoslávie 1976)

Nechť součin třech čísel se rovná jedné a jejich součet je větší než součet jejich převrácených hodnot. Dokažte, že pak právě jedno z těchto čísel je větší než jedna.

Řešení: Platí $abc = 1$ a $a + b + c > \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$. Potom $a + b + c > \frac{bc+ac+ab}{abc} \stackrel{abc=1}{\Rightarrow} a + b + c - (bc + ac + ab) + abc - 1 > 0 \Rightarrow a - 1 + b(1 - a) + bc(a - 1) + c(1 - a) > 0 \Rightarrow (a - 1)(1 - b + bc - c) \Rightarrow (a - 1)(b - 1)(c - 1) > 0$. Odtud již plyne požadované tvrzení.

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

4 Posloupnosti

Příklad 4.1: (Jugoslávie 1976)

Nechť $a_n = \frac{1}{(n+1)\sqrt{n+n\sqrt{n+1}}}$. Sečtěte $a_1 + a_2 + \dots + a_{99}$.

Řešení: Upravíme $a_n = \frac{1}{(n+1)\sqrt{n+n\sqrt{n+1}}} \cdot \frac{(n+1)\sqrt{n-n\sqrt{n+1}}}{(n+1)\sqrt{n-n\sqrt{n+1}}} = \frac{-1}{\sqrt{n+1}} + \frac{1}{\sqrt{n}}$. Potom $a_1 + a_2 + \dots + a_{99} = \frac{-1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{-1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \dots + \frac{-1}{\sqrt{100}} + \frac{1}{\sqrt{99}} = \frac{9}{10}$.

Základním pojmem při vyšetřování chování posloupnosti je následující pojem limity.

Definice 4.1: Řekneme, že posloupnost (a_n) je **konvergentní**, jestliže

$$\exists a \in \mathbb{R} \forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n \in \mathbb{N} : n > n_0 \Rightarrow |a_n - a| < \varepsilon.$$

Říkáme, že a je **limita** posloupnosti (a_n) a píšeme

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a.$$

Jestliže posloupnost (a_n) není konvergentní, pak říkáme, že je **divergentní**. Speciálně, jestliže

$$\forall K \in \mathbb{R} \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n \in \mathbb{N} : n > n_0 \Rightarrow a_n > K \quad (a_n < K),$$

pak řekneme, že posloupnost (a_n) **diverguje k $+\infty$ ($-\infty$)**.

Příklad 4.2: (USA 1974)

Vypočítejte

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot \dots \cdot 2n}.$$

Řešení: Platí $a_n^2 = \frac{1^2 \cdot 3^2 \cdot \dots \cdot (2n-1)^2}{2^2 \cdot 4^2 \cdot \dots \cdot (2n)^2} = \frac{1 \cdot 3}{2^2} \cdot \frac{3 \cdot 5}{4^2} \cdot \dots \cdot \frac{(2n-1)(2n+1)}{(2n)^2} \cdot \frac{1}{2n+1} \leq \frac{1}{2n+1}$. Tudíž $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot \dots \cdot 2n} = 0$.

Příklad 4.3: (Finsko 1980)

Máme pevné $n \in \mathbb{N}$, položíme $a_0 = \frac{1}{2}$, $a_k = a_{k-1} + \frac{1}{n}(a_{k-1})^2$, $k = 1, \dots, n$. Dokažte, že platí

$$1 - \frac{1}{n} < a_n < 1.$$

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Řešení: Odhadneme rozdíl $\frac{1}{a_{k-1}} - \frac{1}{a_k} = \frac{a_k - a_{k-1}}{a_{k-1}a_k} = \frac{\frac{1}{n}(a_{k-1})^2}{a_{k-1}(a_{k-1} + \frac{1}{n}(a_{k-1})^2)} = \frac{1}{n+a_{k-1}}$. Po sečtení dostaneme $2 - \frac{1}{a_n} = \frac{1}{a_0} - \frac{1}{a_n} = \frac{1}{n+a_0} + \frac{1}{n+a_1} + \dots + \frac{1}{n+a_n} < n \cdot \frac{1}{n} = 1$. Odtud vyplývá nerovnost $a_n < 1$. Zároveň tak dostáváme $\frac{1}{a_{k-1}} - \frac{1}{a_k} > \frac{1}{n+1}$ a opět po sečtení $2 - \frac{1}{a_n} = \frac{1}{a_0} - \frac{1}{a_n} > \frac{n}{n+1}$, tudíž $1 - \frac{1}{n} < a_n$.

Příklad 4.4: (Anglie 1980)

Nechť $a_{n+1} = 2^n - 3a_n$, $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Pro které hodnoty a_0 je tato posloupnost rostoucí?

Řešení: Upravíme $a_{n+1} = 2^n - 3a_n = 2^n - 3(2^{n-1} - 3a_{n-1}) = 2^n - 3 \cdot 2^{n-1} + 3^2 \cdot 2^{n-2} + \dots + (-3)^n \cdot 2^0 + (-3)^{n+1}a_0 = 2^n \frac{1 - (-\frac{3}{2})^{n+1}}{1 + \frac{3}{2}} + (-3)^{n+1}a_0 = \frac{2^{n+1}}{5} + (-3)^{n+1}(-\frac{1}{5} + a_0)$. Odtud vyplývá, že posloupnost a_n je rostoucí pouze pro $a_0 = \frac{1}{5}$.

Příklad 4.5: (ČSSR 1968)

Dokažte, že $a_n = \frac{(2+\sqrt{3})^n - (2-\sqrt{3})^n}{2\sqrt{3}}$ je celé číslo pro každé $n \in \mathbb{Z}$. Pro které hodnoty n je a_n dělitelné třemi?

Řešení: Položíme $\alpha = \frac{(2+\sqrt{3})^n}{2\sqrt{3}}$, $\beta = \frac{(2-\sqrt{3})^n}{2\sqrt{3}}$, potom pro $n \in \mathbb{Z}$ platí $a_n = \alpha - \beta$, $a_{n+1} = (2+\sqrt{3})\alpha - (2-\sqrt{3})\beta$, $a_{n+2} = (2+\sqrt{3})^2\alpha - (2-\sqrt{3})^2\beta = (7+4\sqrt{3})\alpha - (7-4\sqrt{3})\beta = 4((2+\sqrt{3})\alpha - (2-\sqrt{3})\beta) - (\alpha - \beta) = 4a_{n+1} - a_n$.

Pro zbytky při dělení třemi platí $a_{n+2} \pmod 3 \equiv a_{n+1} \pmod 3 - a_n \pmod 3$. Zároveň platí $a_1 = 1 \pmod 3 \equiv 1$, $a_2 = 4 \pmod 3 \equiv 1$, tedy $a_3 \pmod 3 \equiv a_2 \pmod 3 - a_1 \pmod 3 \equiv 0$. Podobně dostaneme $a_4 \pmod 3 \equiv 2$, $a_5 \pmod 3 \equiv 2$ a $a_6 \pmod 3 \equiv 0$, odtud vyplývá, že a_n je dělitelné třemi pro $n = 3k$, $k \in \mathbb{N}$ a protože $a_0 = 0$ a $-a_{-n} = a_n$, tak a_n je dělitelné třemi obecně pro $n = 3k$, $k \in \mathbb{Z}$.



INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Závěr

Příklady použité v tomto textu se již vyskytly v některé národní či mezinárodní matematické olympiádě. Věřím, že budou dobrou přípravou našim talentovaným matematikům. Některá řešení jsou originální a nejsou přejatá z dostupné literatury. Přeji čtenářům, aby se jim dařilo nacházet ještě jednodušší a elegantnější řešení.

Použitá literatura

Alois Kufner : Nerovnosti a odhady, Škola mladých matematiků(39), Nakladatelství Mladá Fronta, Praha 1975

František Veselý: O nerovnostech a nerovnicích, Škola mladých matematiků(48), Nakladatelství Mladá Fronta, Praha 1982

Konjagin, Tonojan, Šarigin, a jiní: Zaruběžnyje matematiciĥeskie olimpiady, M. Nauka, Hlavní redakce fiz.-mat. literatury, 1987

Kontakt na autora

RNDr. Petr Tomiczek CSc.
Západočeská univerzita v Plzni
tomiczek@kma.zcu.cz

Středisko služeb školám, Plzeň, Částkova 78
Podpora talentovaných žáků v Plzeňském kraji
CZ.1.07/1.2.03/02.0001

Tento projekt je v roce 2013 financován z rozpočtu Plzeňského kraje

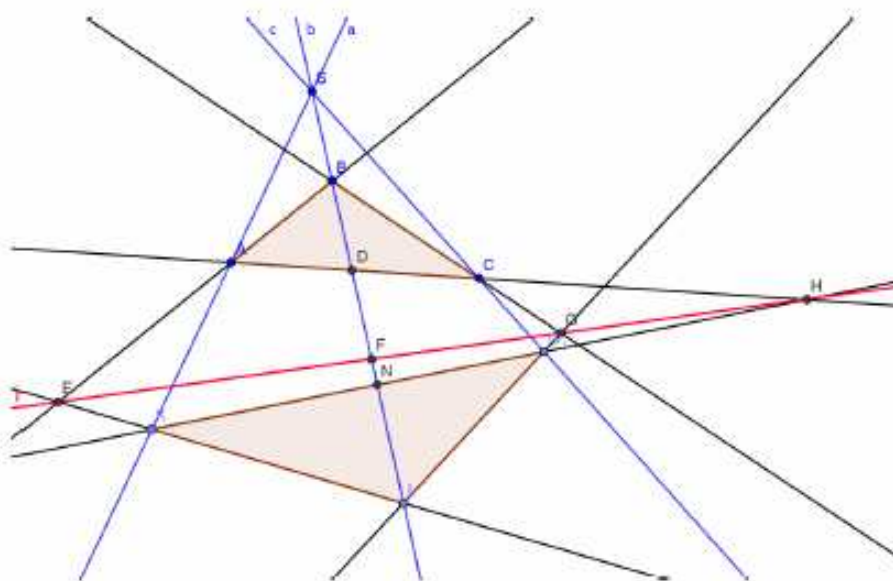
INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Zajímavé dvojice trojúhelníků

Světlana TOMICZKOVÁ

1 Pomocné pojmy

Věta 1 (Desarguesova o trojúhelnících) Jsou-li trojúhelníky $\triangle ABC$ a $\triangle KLM$ umístěny v téže rovině tak, že přímky AK , BL , CM procházejí týmž bodem S , potom se sobě odpovídající strany trojúhelníků (AB, KL , BC, LM , CA, MK) protínají v bodech jedné přímky.

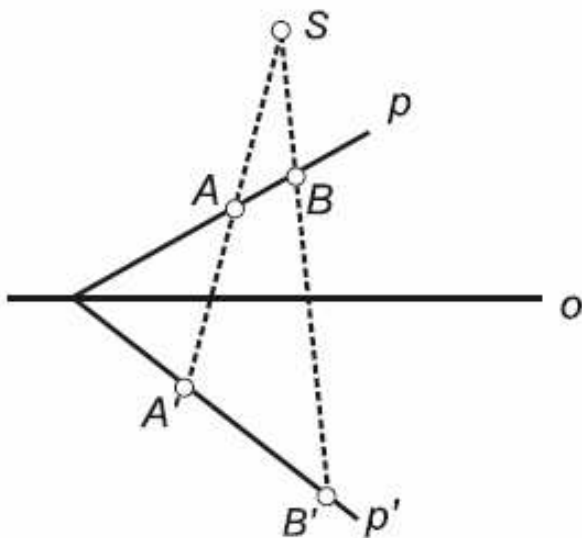


Obrázek 1: Věta Desarguesova

Středisko služeb školám, Plzeň, Částkova 78
Podpora talentovaných žáků v Plzeňském kraji
CZ.1.07/1.2.03/02.0001

Tento projekt je v roce 2013 financován z rozpočtu Plzeňského kraje

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ



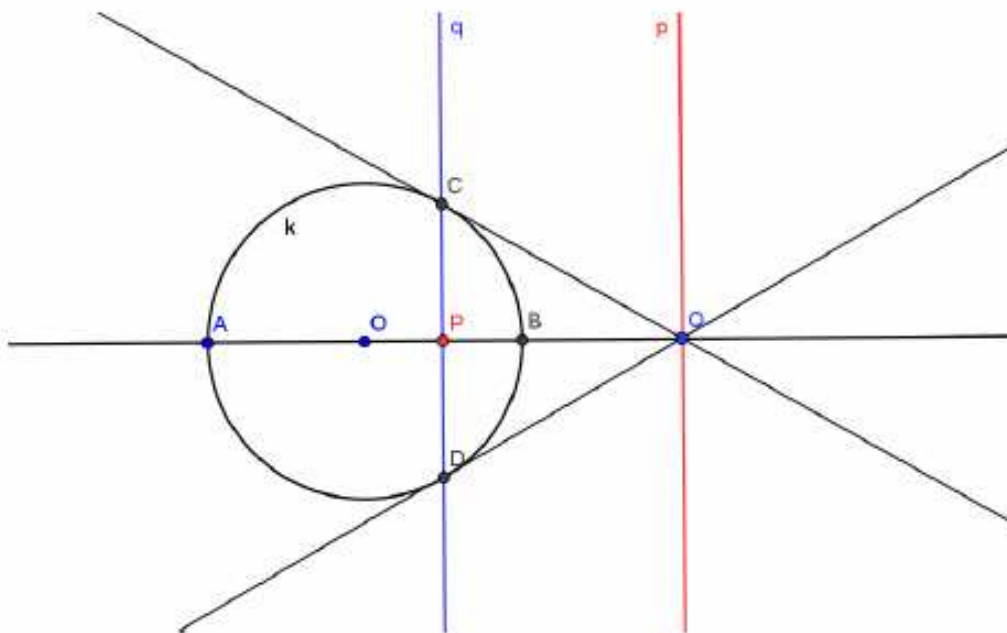
Obrázek 2: Středová kolineace

Středová kolineace.

1. Středová kolineace zachovává incidenci.
2. Přímky, které si odpovídají ve středové kolineaci, se protínají na ose kolineace nebo jsou s ní rovnoběžné.
3. Body, které si odpovídají, leží na přímce procházející středem kolineace.

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Sdružené póly, poláry. V kružnici $k(O, r)$ je AB průměr a bod Q leží na prodlouženém průměru za bod B . Tečny vedené z bodu Q ke kružnici k se kružnice dotýkají v bodech T a T' . Označme P průsečík přímek $q = TT'$ a AB . Body P a Q nazýváme sdruženými póly, přímkou $p \perp AB$ jdoucí bodem Q polárou bodu P a přímkou q polárou bodu Q vzhledem ke kružnici k .



Obrázek 3: Sdružené póly

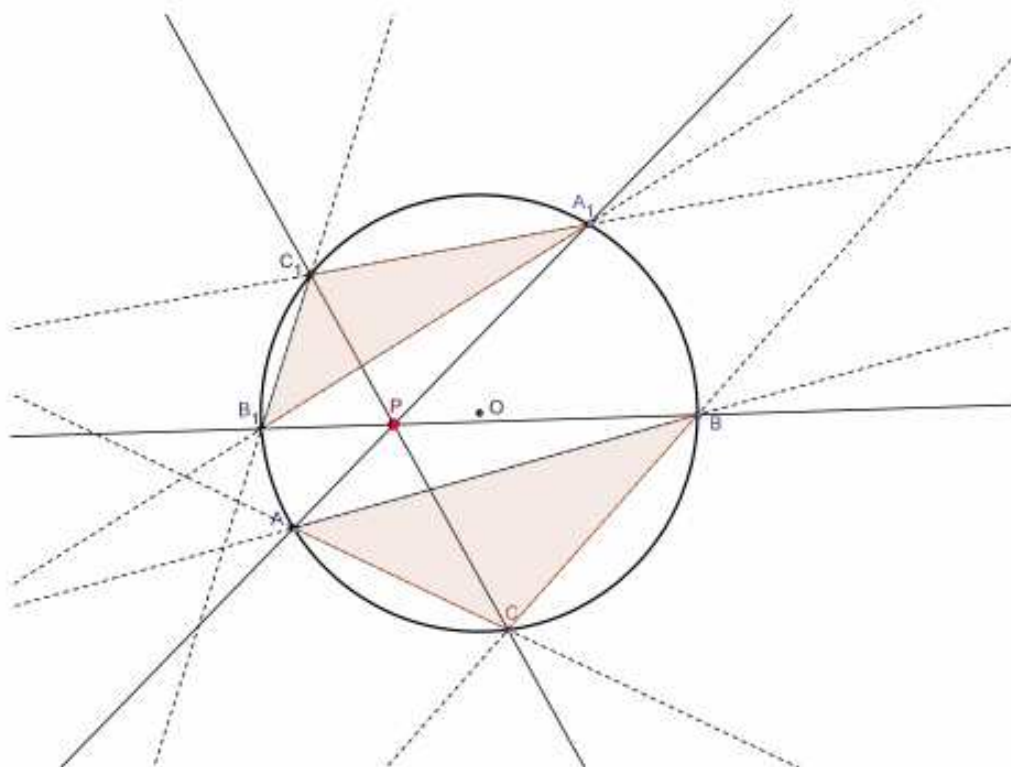
2 Základní pojmy

Vymezení pojmů: Pracujeme v dvojrozměrném prostoru (E_2) . Zvolíme jednotkovou kružnici $k = (O, r = 1)$. Vzniknou tři disjunktní množiny:

- K je množina všech bodů kružnice k ,
- K' je množina všech bodů vnitřní oblasti kružnice k ,
- K'' je množina všech bodů vnější oblasti kružnice k .

Definujeme binární relaci \mathcal{P} :

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ



Obrázek 4: Relace \mathcal{P}

Relace \mathcal{P} . Dvojice navzájem různých trojúhelníků $\triangle ABC$ a $\triangle A_1B_1C_1$ je prvkem relace \mathcal{P} podle pólu P , když o jejich vrcholech platí současně:

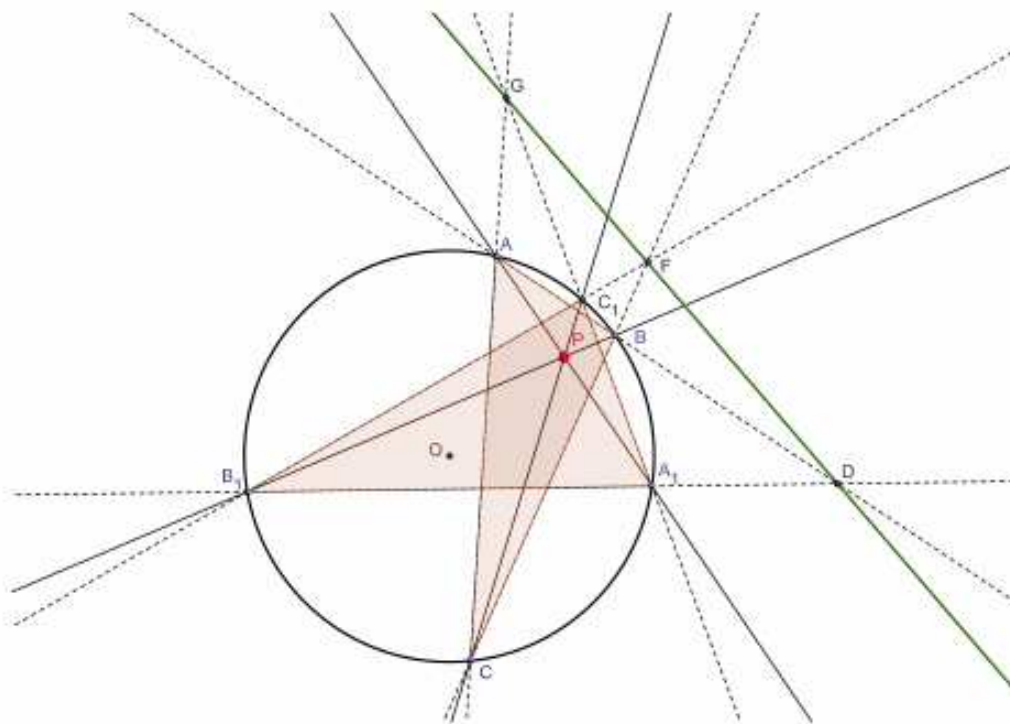
1. $\{A, B, C\} \subset K \wedge \{A_1, B_1, C_1\} \subset K$
2. přímky AA_1, BB_1, CC_1 procházejí týmž bodem $P \in K'$.

Vlastnosti relace \mathcal{P}

1. Relace \mathcal{P} je symetrická
2. Je zobrazením v množině M všech trojúhelníků XYZ , kde $\{X, Y, Z\} \subset K$
3. Toto zobrazení je středová kolineace se středem P .

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Věta 2 Je-li dvojice trojúhelníků $\triangle ABC$ a $\triangle A_1B_1C_1$ v relaci \mathcal{P} podle P , pak bod P je středem kolineace a osou kolineace je polára bodu P vzhledem ke společné kružnici těmto trojúhelníkům opsané.



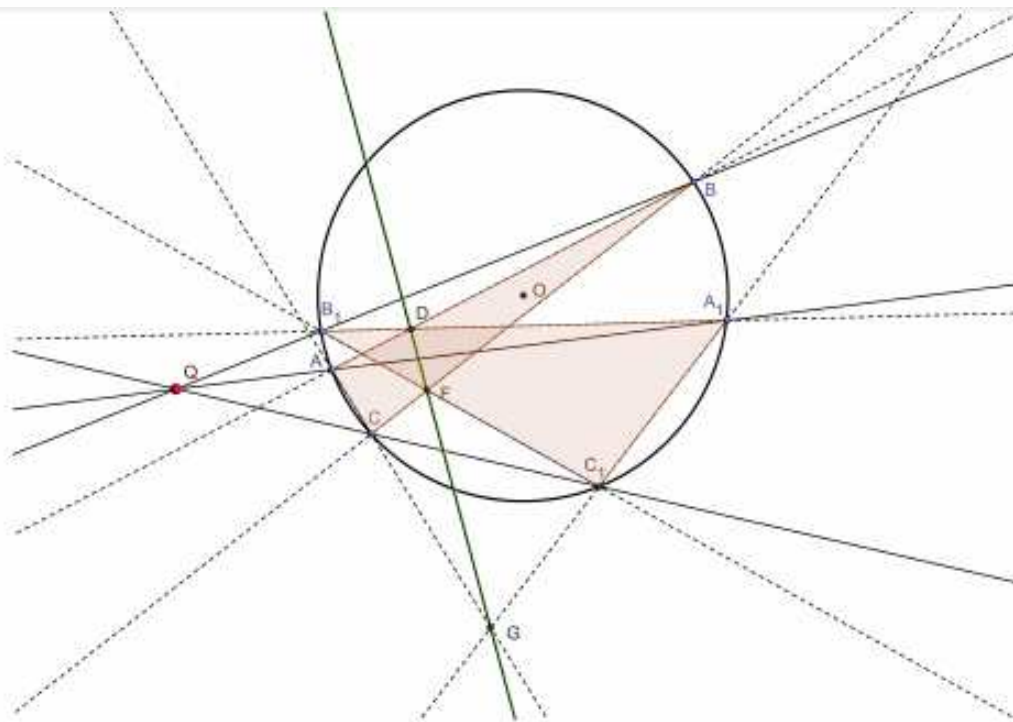
Obrázek 5: Věta 2

Definujeme binární relaci \mathcal{Q} :

Relace \mathcal{Q} . Dvojice navzájem různých trojúhelníků $\triangle ABC$ a $\triangle A_2B_2C_2$ je prvkem relace \mathcal{Q} podle pólu Q , když o jejich vrcholech platí současně:

1. $\{A, B, C\} \subset K \wedge \{A_2, B_2, C_2\} \subset K$, přičemž množiny $\{A, B, C\}$ a $\{A_2, B_2, C_2\}$ mají nejvýše dva společné prvky.
2. přímky AA_2, BB_2, CC_2 procházejí týmž bodem $Q \in K''$.

Věta 3 Je-li dvojice trojúhelníků $\triangle ABC$ a $\triangle A_2B_2C_2$ v relaci \mathcal{Q} podle Q , pak bod Q je středem kolineace a osou kolineace je polára bodu Q vzhledem ke společné kružnici těmto trojúhelníkům opsané.



Obrázek 6: Relace Q

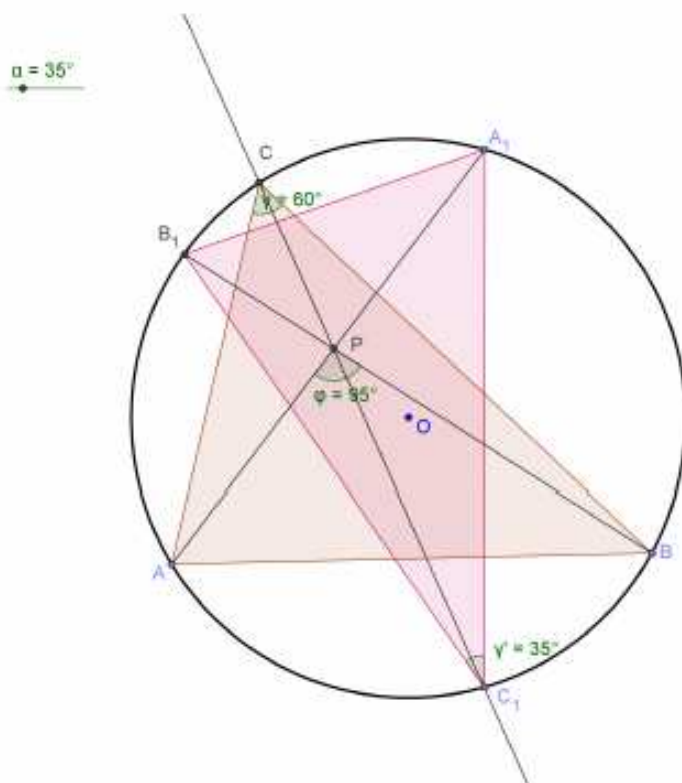
Věta 4 Je-li dán jeden z dvojice trojúhelníků $(\triangle ABC)P(\triangle A_1B_1C_1)$ nebo $(\triangle ABC)Q(\triangle A_2B_2C_2)$, potom druhý trojúhelník je určen právě dvěma navzájem nezávislými prvky, přičemž póly P a Q mají hodnotu dvou takových prvků.

Věta 5 Má-li $\triangle ABC$ vnitřní úhly daných velikostí α, β, γ a množina trojúhelníků, které jsou s ním v relaci P , vnitřní úhel $\angle A_1C_1B_1$ dané velikosti γ' , potom množinou všech pólů P je oblouk kružnice mezi body A a B takový, že obvodový úhel příslušný k tomuto oblouku ($\angle APB = \varphi$) má velikost

1. $\varphi = \gamma + \gamma'$, je-li $\gamma + \gamma' \leq 180^\circ$ a oblouk AB leží v polorovině ABC ,
2. $\varphi = 360^\circ - (\gamma + \gamma')$, je-li $\gamma + \gamma' > 180^\circ$ a oblouk AB leží v polorovině opačné k ABC .

Věta 6 Má-li $\triangle ABC$ vnitřní úhly daných velikostí α, β, γ a množina trojúhelníků, které jsou s ním v relaci Q , vnitřní úhel $\angle A_2C_2B_2$ dané velikosti γ' , potom množinou všech pólů Q je oblouk kružnice mezi body A a B takový, že obvodový úhel příslušný k tomuto oblouku ($\angle AQB = \varepsilon$) má velikost $\varepsilon = |\gamma - \gamma'|$, přičemž oblouk $\angle AQB$ leží

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ



Obrázek 7:

1. v polorovině ABC , když $\gamma - \gamma' \geq 0$,
2. leží v polorovině opačné k ABC když $\gamma - \gamma' < 0$.

Věta 7 Necht' dvojice trojúhelníků $(\triangle ABC)P(\triangle A_1B_1C_1)$ mají vnitřní úhly velikosti po řadě α, β, γ a α', β', γ' , potom kruhové oblouky BPC, APC a APB určující polohu pólu vzhledem k velikostem úhlů $\alpha + \alpha', \beta + \beta', \gamma + \gamma'$, mají vedle vrcholů $\triangle ABC$ právě jeden další společný bod, totiž pól P .

Věta 8 Necht' dvojice trojúhelníků $(\triangle ABC)Q(\triangle A_2B_2C_2)$ mají vnitřní úhly velikosti po řadě α, β, γ a α', β', γ' , potom kruhové oblouky BQC, AQC a AQB určující polohu pólu vzhledem k velikostem úhlů $|\alpha - \alpha'|, |\beta - \beta'|, |\gamma - \gamma'|$, mají vedle vrcholů $\triangle ABC$ právě jeden další společný bod, totiž pól Q .

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Věta 9 *Mějme dvojice trojúhelníků $(\triangle ABC)P(\triangle A_1B_1C_1)$ a $(\triangle ABC)Q(\triangle A_2B_2C_2)$ takové, že ani pól P ani pól Q neleží na některé straně $\triangle ABC$ nebo na jejím prodloužení, potom o vzdálenostech vrcholů uvažovaných trojúhelníků platí:*

$$\frac{AB_1}{CB_1} \cdot \frac{BC_1}{AC_1} \cdot \frac{CA_1}{BA_1} = 1$$

$$\frac{AB_2}{CB_2} \cdot \frac{BC_2}{AC_2} \cdot \frac{CA_2}{BA_2} = 1$$

Závěr

Věty a definice v tomto textu jsou převzaty z textu Arnošta Niederleho: Zajímavé dvojice trojúhelníků. Rozbor, diskuze a důkazy zazněly během společných přednášek a byly námětem pro samostudium této velice zajímavé knížky. Během přednášek byly řešeny příklady, kde bylo možné nově získané poznatky využít.

Použitá literatura

Arnošt Niederle: Zajímavé dvojice trojúhelníků, Škola mladých matematiků (47), Nakladatelství Mladá Fronta, Praha 1980

Kontakt na autora

RNDr. Světlana Tomiczková, Ph.D.
Západočeská univerzita v Plzni
svetlana@kma.zcu.cz



INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

FYZIKÁLNÍ KEMP

ASTRONOMICKÉ A RAKETOVÉ EXPERIMENTY

Marek ČESAL

1 Úvod

Během této části kempu si studenti mohly sami vyzkoušet různé experimenty z části pokusů s astronomickou tematikou. Otestovat si tak mohly odpálení lihové rakety nebo vytvoření vlastní sopky.

2 Popisy pokusů

Jednotlivé pokusy mají jasný chemikální nebo fyzikální základ, ale astronomickými je činí pak spojení se stejnými jevy ve vesmíru. Proto je základem všech těchto pokusů i astronomické porovnání se skutečností.

2.1 Simulace sopky

Nejenom na Zemi, ale i na jiných tělesech sluneční soustavy nalezneme sopečnou činnost, např. na Jupiterovo měsíci IO. Simulace lávy vytékající z jícnu se dá vytvořit pomocí malé lahvičky a modelu sopky z plastelíny (může se použít i sádra a nebo dokonce obyčejná zem). Do lahvičky se nasype jedlá soda. Pak se ve víčku od PET láhve rozmíchá ocet s červeným potravinářským barvivem a nalije se do lahvičky. Při reakci směsi s jedlou sodou se vytvoří červená pěna, která začne vytékat a připomíná tekoucí lávu z jícnu sopky.

2.2 Seeing

Seeing znamená kvalitu teleskopického obrazu hvězdy vlivem nestálosti zemské atmosféry. Laicky se tak také nazývá neklid atmosféry. Na jeho simulaci potřebujeme meotar, přes který položíme karton ve kterém bude jeden malý otvor simulující hvězdu. Ideální případ bez atmosféry je, když v cestě paprsku nic nepřekáží, tzn. obraz na stěně je klidný, nechvěje se. Na předvedení atmosféry použijeme skleničku s vodou, kterou postavíme na otvor. Obraz na zdi se nám mírně rozostří. Pokud ještě pomocí špejle vodu promícháme, dostaneme rozklepaný obraz hvězdy, který simuluje průchod obrazu přes neklidnou atmosféru. V dnešní době se již tento problém odstraňuje pomocí adaptivní optiky a nebo vyvezením dalekohledu nad atmosféru (např. HST).

Středisko služeb školám, Plzeň, Částkova 78
Podpora talentovaných žáků v Plzeňském kraji
CZ.1.07/1.2.03/02.0001

Tento projekt je v roce 2013 financován z rozpočtu Plzeňského kraje

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

2.4 Lihová raketa

V modelu rakety, zavěšeném na provaze se vytváří lihové páry, které se zapálí u víčka, ve kterém je 0,5cm otvor. Zapálené lihové páry pak pohání model rakety kupředu jako u klasické rakety. Při odpalování je potřeba dbát na bezpečnost.

2.4 Mapování povrchu Venuše

Povrch Venuše se díky velmi husté atmosféře planety, neprostupné pro optické pozorování, nemůže stát cílem pozemských dalekohledů. Mapování jejího povrchu proto převzaly sondy, podmínky panující na povrchu planety nejsou vhodné ani pro sondy je zde příliš vysoký tlak a teplota. Přesto se to některým podařilo (Venuša 7) a na několik minut snímkovaly povrch planety. Jako lepší varianta se ukázalo radarové snímkování povrchu a jeho následná počítačová modelace. S moduritu si vytvoříme model povrchu Venuše, který budeme snímkovat. Radarový svazek paprsků nasimulujeme svazkem 300 špejlí. Pokud špejle nasadíme na vytvořený model, objeví se na druhém konci svazku tvar snímaného povrchu.

3 Závěr

Pokusy se dají použít ve školách při výuce astronomie, ale i v astronomických kroužcích pro přiblížení jednotlivých úkazů. Jejich použití při přednášce může daný problém více přiblížit. V dnešní moderní době není problém nalézt na internetu další návody na zajímavé pokusy a stačí pak je jen převést do astronomie spárováním s vhodným astronomickým úkazem.

4 Použitá literatura

MEISER T., Jednoduché experimenty demonstrující jevy a procesy ve vesmíru, bakalářská práce, 2008

MEISER T., Demontrace astrofyzikálních procesů a jevů a jejich použití pro žáky základních škol, diplomová práce, 2010

KERROD, Robin, SPARRROW, Giles. Jak funguje Vesmír. Pavel Příhoda, Universum, 2005. 160 s. ISBN 80-242-1373-7.

MIKULÁŠEK, Zdeněk, MIŠ, Leon, RUMLER, Josef. Návod na použití vesmíru [online]. 2004 [cit. 2008-02-02].

Dostupné na internetu: <<http://navod.hvezdarna.cz/navod/konvekce.htm>>.

5 Kontakt na autora

Marek Česal

ZpČAS

mcesal@volny.cz

POKUSY S ASTRONOMICKOU ZÁPLETKOU

Marek ČESAL

1 Úvod

Astronomické pokusy slouží k jednoduché demonstraci něčeho tak nekonečného jako je vesmír. Pomocí jednoduchých a nenáročných experimentů, lze nasimulovat spoustu úkazů probíhajících ve vesmíru.

Většina pomůcek je snadno dostupná a proto nejsou pokusy ničím omezeny a většinu jich může připravit každý i v domácích podmínkách.

2 Popisy pokusů

Jednotlivé pokusy mají jasný chemikální nebo fyzikální základ, ale astronomickými je činí pak spojení se stejnými jevy ve vesmíru. Proto je základem všech těchto pokusů i astronomické porovnání se skutečností.

2.1 Simulace sopky

Nejenom na Zemi, ale i na jiných tělesech sluneční soustavy nalezneme sopečnou činnost, např. na Jupiterovo měsíci IO. Simulace lávy vytékající z jícnu se dá vytvořit pomocí malé lahvičky a modelu sopky z plastelíny (může se použít i sádra a nebo dokonce obyčejná zem). Do lahvičky se nasype jedlá soda. Pak se ve víčku od PET láhve rozmíchá ocet s červeným potravinářským barvivem a nalije se do lahvičky. Při reakci směsi s jedlou sodou se vytvoří červená pěna, která začne vytékat a připomíná tekoucí lávu z jícnu sopky.

2.2 Seeing

Seeing znamená kvalitu teleskopického obrazu hvězdy vlivem nestálosti zemské atmosféry. Laicky se tak také nazývá neklid atmosféry. Na jeho simulaci potřebujeme meotar, přes který položíme karton ve kterém bude jeden malý otvor simulující hvězdu. Ideální případ bez atmosféry je, když v cestě paprsku nic nepřekáží, tzn. obraz na stěně je klidný, nechvěje se. Na předvedení atmosféry použijeme skleničku s vodou, kterou postavíme na otvor. Obraz na zdi se nám mírně rozostří. Pokud ještě pomocí špejle vodu promícháme, dostaneme rozklepaný obraz hvězdy, který simuluje průchod obrazu přes neklidnou atmosféru. V dnešní době se již tento problém odstraňuje pomocí adaptivní optiky a nebo vyvezením dalekohledu nad atmosféru (např. HST).

2.3 Simulace granulace Slunce

Pokud pozorujeme za dobrých podmínek dalekohledem Slunce, můžeme spatřit jemnou síť tmavších a světlejších skvrnek po celém jeho povrchu – granulaci. Granulace je projevem proudění slunečního plazmatu v konvektivní vrstvě. Jasnější skvrnky představují

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

vrcholky vzestupných proudů, které do fotosféry přinášejí teplejší materiál z podpovrchových vrstev. Poté co se materiál díky intenzivnímu vyzařování ochladí, projeví se nám ve fotosféře jako tmavší skvrnka a klesá zpět pod povrch. Pozor nezaměňovat se slunečními skvrnami. Rozměry těchto útvarů jsou řádově 1000 – 2000 km. Sluneční granulaci si můžeme vyrobit pomocí jedlého oleje a stříbřenky. V kádince nebo konvici rozmícháme olej se stříbřenkou a uvedeme do varu. Na hladině pak pozorujeme vzestupné proudy, které nám simulují sluneční granulaci. Vznikající buňky se jmenují podle H. Bénarda, který je v roce 1900 poprvé pozoroval, podle něj byly později také pojmenovány Bénardovými buňkami.

2.4 Mapování povrchu Venuše

Povrch Venuše se díky velmi husté atmosféře planety, neprostupné pro optické pozorování, nemůže stát cílem pozemských dalekohledů. Mapování jejího povrchu proto převzaly sondy, podmínky panující na povrchu planety nejsou vhodné ani pro sondy je zde příliš vysoký tlak a teplota. Přesto se to některým podařilo (Veněra 7) a na několik minut snímkovaly povrch planety. Jako lepší varianta se ukázalo radarové snímkování povrchu a jeho následná počítačová modelace. S moduritu si vytvoříme model povrchu Venuše, který budeme snímkovat. Radarový svazek paprsků nasimulujeme svazkem 300 špejlí. Pokud špejle nasadíme na vytvořený model, objeví se na druhém konci svazku tvar snímaného povrchu.

3 Závěr

Pokusy se dají použít ve školách při výuce astronomie, ale i v astronomických kroužcích pro přiblížení jednotlivých úkazů. Jejich použití při přednášce může daný problém více přiblížit. V dnešní moderní době není problém nalézt na internetu další návody na zajímavé pokusy a stačí pak je jen převést do astronomie spárováním s vhodným astronomickým úkazem.

4 Použitá literatura

MEISER T., Jednoduché experimenty demonstrující jevy a procesy ve vesmíru, bakalářská práce, 2008

MEISER T., Demonstrace astrofyzikálních procesů a jevů a jejich použití pro žáky základních škol, diplomová práce, 2010

KERROD, Robin, SPARRROW, Giles. Jak funguje Vesmír. Pavel Příhoda, Universum, 2005. 160 s. ISBN 80-242-1373-7.

MIKULÁŠEK, Zdeněk, MIŠ, Leon, RUMLER, Josef. Návod na použití vesmíru [online]. 2004 [cit. 2008-02-02].

Dostupné na internetu: <<http://navod.hvezdarna.cz/navod/konvekce.htm>>.

5 Kontakt na autora

Marek Česal

ZpČAS

mcesal@volny.cz

Středisko služeb školám, Plzeň, Částkova 78
Podpora talentovaných žáků v Plzeňském kraji
CZ.1.07/1.2.03/02.0001

Tento projekt je v roce 2013 financován z rozpočtu Plzeňského kraje

NOČNÍ OBLOHA

Lumír HONZÍK

1 Úvod

Hvězdná noční obloha představuje přírodní a kulturní bohatství, které by se mělo zachovat i pro příští generace. Bohužel v současnosti existuje stále více narůstající problém, který se týká světelného znečištění. To kazí veškerá astronomická pozorování ať okem nebo pomocí dalekohledů. Světelné znečištění znehodnocuje práci astronomů, ale má negativní dopad i mimo astronomii.

2.1 Pozorování hvězdné oblohy

Na denní obloze je zpravidla pozorovatelné pouze Slunce, občas i Měsíc. Ostatní objekty se mohou pozorovat až po určité době po západu Slunce.

Jakmile Slunce zapadne, nastává soumrak. Zpočátku se jedná o soumrak občanský (Slunce je do 6° pod obzorem). Po něm přichází soumrak nautický, který byl důležitý pro orientaci na širém moři (Slunce je od 6° do 12° pod obzorem). Jakmile se dostane Slunce pod obzorem od 12° do 18°, nastává soumrak astronomický, kdy už lze jasnější objekty pozorovat. Pak již přichází astronomická noc (nenastává u nás v období zhruba od června do července), kdy jsou podmínky pro pozorování nejvhodnější.

2.2 Pozorovatelné objekty

Z oblasti blízkého vesmíru je možné pozorovat: Slunce, Měsíc, planety a jejich měsíce, meziplanetární hmotu: asteroidy, komety, drobné prachové částice (meteory, bolidy). Samozřejmě můžeme pozorovat i úkazy jako jsou třeba konjunkce planet.

Z oblasti vzdáleného vesmíru lze sledovat: různé hvězdy, vícenásobné hvězdné systémy (dvojhvězdy - fyzické, barevné, proměnné hvězdy), kulové a otevřené hvězdokupy, galaxie (různé typy), mlhoviny (emisní, reflexní, temné), planetární mlhoviny, pozůstatky po výbuchu supernov a další.

V některých případech je možné na noční obloze pozorovat i halové jevy jako je třeba halo kolem Měsíce, polární záře, zbarvení Měsíce a Slunce a celou řadu dalších jevů.

Z umělých těles lze i pouhým okem pozorovat: Přelety družic různých typů (např. Iridium), přelety Mezinárodní kosmické stanice ISS, přelety letadel a vrtulníků.

2.3 Hvězdná obloha a problém orientace

Souhvězdí – výrazné skupiny hvězd. Výrazné hvězdy mají své názvy a lze je pospojovat spojnicemi. Souhvězdí mají své hranice, mají různou plošnou velikost a různé zastoupení jasných i slabých hvězd a objektů. Do souhvězdí lze pomyslně zobrazit i určitý obrazec (osoba, zvíře, věc apod.), který usnadňuje zapamatování.

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Souhvězdí – současnost - Definitivní podoba a současné hranice souhvězdí pochází z r. 1925 Mezinárodní astronomická unie. Existuje celkem 88 souhvězdí s přesně definovanými názvy, hranicemi a objekty na ploše 41 253 čtverečních stupňů.

Název souhvězdí

latinský název	zkratka	genitiv	překlad
Bootes	Boo	Bootis	Pastýř (česky), Pastier (slov.)

Souhvězdí - dělení

Souhvězdí lze dělit podle různých kritérií. Následující ukázky dělení jsou pouze orientační.

Souhvězdí: - severní a jižní
- cirkumpolární, zapadající (u nás), nevycházející (u nás)
- jarní, letní, podzimní a zimní (u nás viditelná)

Skupiny souhvězdí:

- Severní cirkumpolární souhvězdí (v naší zeměpisné šířce nezapadající)
- Jarní souhvězdí (v naší zeměpisné šířce viditelná severní i jižní)
- Letní souhvězdí (v naší zeměpisné šířce viditelná severní i jižní)
- Podzimní souhvězdí (v naší zeměpisné šířce viditelná severní i jižní)
- Zimní souhvězdí (v naší zeměpisné šířce viditelná severní i jižní)
- Jižní souhvězdí (v naší zeměpisné šířce nevycházející)

Pozn.: viditelnost souhvězdí je závislá:

- na zeměpisných souřadnicích pozorovacího stanoviště
- na období pozorování
- na čase pozorování

Zvířetníková souhvězdí

Zvířetníková čili zodiakální souhvězdí jsou souhvězdí, kterými prochází ekliptika. Tato souhvězdí nějakou svou částí zasahují do zvířetníku což je jakýsi pomyslný pás znamení rozdělený na 12 stejných částí o ekliptikální šířce 30°.

Souhvězdí zvířetníku je proto třeba odlišovat od znamení zvířetníku. Původně se souhvězdí se znameními víceméně kryla (Slunce jimi putovalo ve stejnou dobu), ale vlivem precese se značně vzdálila. Do znamení zvířetníku také z více méně neznámých důvodů nepatří Hadonoš, který ve zvířetníku přesto leží (podle jedné teorie to souvisí s historicky pozdějším oddělením souhvězdí Vah od souhvězdí Stíra). V současné době existuje 12 zvířetníkových znamení, avšak 13 souhvězdí zvířetníku.

Přestože se používá název zvířetníková souhvězdí, neplatí, že souhvězdí, či znamení nesou jen názvy zvířat. Existují i souhvězdí a znamení, která název zvířat nenesou (Střelec, Panna nebo Váhy).

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Výrazné skupiny hvězd

Existují výrazná seskupení hvězd, které nejsou samostatným souhvězdím: např.: Velký vůz, Orionův pás, letní trojúhelník. Těmto skupinám se říká asterizmy.

Souhvězdí – fiktivní obrazec

Souhvězdí je plošný fiktivní obrazec na obloze, který je proměnný v delším čase. Tím, že se hvězdy pohybují, mění se jednat tvar obrazce, ale i jasnosti jednotlivých hvězd.

Zdánlivý pohyb hvězd po obloze

Souhvězdí mají podobný denní pohyb jako Slunce, tedy od východu k západu. Některá vychází a zapadají, jiná jsou nezapadající (cirkumpolární). Z našeho území se hvězdná obloha zdánlivě otáčí okolo severního světového pólu (SSP). Poblíž se nachází jasná hvězda Alfa Polaris (Polárka, Severka). Ta je součástí Malého vozu v souhvězdí Malého medvěda. Výška Polárka je závislá na zeměpisné šířce (pro Plzeň se nachází asi $49,5^\circ$ nad severním obzorem (pro ideální horizont).

Podle výrazných skupin hvězd např. Velký vůz (část souhvězdí Velké medvědice) je možné se na noční hvězdné obloze orientovat. Navíc lze ze znalostí poloh hvězd orientačně určovat úhlovou vzdálenost.

2.4 Skupiny souhvězdí

2.4.1 Cirkumpolární souhvězdí

Cirkumpolární souhvězdí (též souhvězdí obtočnicková) jsou souhvězdí, která na určité zeměpisné šířce nezapadají. Jejich viditelnost závisí na zeměpisné šířce. Pro ČR se jedná přibližně o všechna souhvězdí (či jejich části), která se nachází ve vzdálenosti asi 50° od SSP. Důvodem je, že SSP je zhruba ve výšce 50° nad ideálním horizontem. Samozřejmě reliéf skutečného horizontu (např. v horské oblasti) také ovlivní viditelnost souhvězdí, hvězd a objektů na obloze.

Pokud by se pozorovatel nacházel na severním pólu s ideálním horizontem, pak všechna souhvězdí a jejich hvězdy na severní obloze budou pro něj během dlouhé polární noci cirkumpolární. Naopak pozorovatel na rovníku bude mít všechna souhvězdí a hvězdy vycházející a zapadající. Proto v oblasti rovníku nelze pozorovat žádná cirkumpolární souhvězdí.

Základní orientace

Pro základní orientaci na hvězdné obloze slouží skupina hvězd označovaná jako Velký vůz. Nejedná se o souhvězdí, ale o skupinu výrazných hvězd souhvězdí Velké Medvědice (UMa). Tyto hvězdy jsou dosti jasné na to, aby mohly být spatřeny i za méně příznivých pozorovacích podmínek.

Prodloužené spojnice mezi určitými hvězdami pomáhají při základní orientaci, neboť směřují buď do určitých souhvězdí, či k jiným výrazným hvězdám na obloze.

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Např. 5x prodloužená vzdálenost tzv. zadních kol Velkého vozu dovede pozorovatele k hvězdě α Polaris (Polárce, Severce), což je nejjasnější hvězda Malého vozu. Ten je součástí souhvězdí Malého medvěda (UMi). Polárka se nachází v těsné blízkosti SSP (severního světového pólu) okolo kterého se zdánlivě otáčí celá obloha. Do této oblasti obrazně míří severní konec zemské osy.

Výška Polárky nad ideálním obzorem se mění v závislosti na zeměpisné šířce. V naší republice se hodnota pohybuje kolem 50° (pro Plzeň asi $49,5^\circ$). Pokud se pozorovatel bude přesouvat na sever, bude i výška Polárky nestoupávat. Maxima dosáhne přesně nad severním pólem (90°). Naopak pokud pozorovatel se bude přesouvat k jihu, bude postupně klesat i výška Polárky. V oblasti rovníku bude Polárka těsně nad obzorem.

Velký vůz lze také použít pro přibližné určování úhlových vzdáleností na noční obloze. Při vhodném nácviku lze dosáhnout poměrně přesných výsledků.

Zdánlivým otáčením oblohy je možné pozorovat posun souhvězdí. V ČR se souhvězdí posouvají směrem od východu přes jih k západu.

2.4.2 Jarní souhvězdí

Jarní souhvězdí jsou souhvězdí, která v naší zeměpisné šířce v průběhu roku vycházejí a zapadají. Nejsou proto viditelná během celého roku. Na rozdíl od zimních nebo letních oblohy, je jarní obloha chudší na výrazné hvězdy. Optimální viditelnost jarních souhvězdí, která budou postupně kulminovat nad jižním obzorem, nastává na jaře ve večerních hodinách. Směrem doprava od jarních souhvězdí se nachází souhvězdí zimní, která budou v průběhu jarní noci postupně klesat k západnímu obzoru a zapadat. Směrem doleva nad východním obzorem budou souhvězdí letní, která však budou vycházet až později v noci.

Do oblasti jarních souhvězdí u nás viditelných nezasahuje Mléčná dráha, protože se nachází pod obzorem.

Základní orientace

Pro základní orientaci na jarní hvězdné obloze slouží skupina hvězd označovaná jako Jarní trojúhelník. Podobně jako u Velkého vozu ani v tomto případě se nejedná o souhvězdí, ale o asterismus, tedy skupinku tří výrazných hvězd, z nichž se ale každá nachází v jiném souhvězdí.

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Jarní trojúhelník tvoří:
Hvězda Regulus v souhvězdí Lva
Hvězda Spika v souhvězdí Panny
Hvězda Arktur v souhvězdí Pastýře

Uvedená trojice hvězd je dostatečně výrazná na to, aby mohla být spatřena i za méně příznivých pozorovacích podmínek. Zdánlivým otáčením oblohy je možné na území ČR pozorovat posun jarních souhvězdí od východu, přes jih až k západu.

2.4.3 Letní souhvězdí

Letní souhvězdí jsou souhvězdí, která v naší zeměpisné šířce v průběhu roku vycházejí a zapadají. Nejsou proto viditelná během celého roku. Na rozdíl od jarní nebo podzimní oblohy, je letní obloha bohatší na výrazné hvězdy. Optimální viditelnost letních souhvězdí, která budou postupně kulminovat nad jižním obzorem, nastává v létě ve večerních hodinách. Směrem na západ (doprava při pohledu čelem k jihu) od letních souhvězdí se nachází souhvězdí jarní, která budou v průběhu večera postupně klesat k západnímu obzoru a zapadat. Směrem na východ (doleva při pohledu čelem k jihu) se nachází souhvězdí podzimní, která však budou postupně vycházet, až později v noci.

Do oblasti letních souhvězdí zasahuje výrazně Mléčná dráha, která je v letním období dobře viditelná.

Základní orientace

Pro základní orientaci na letní hvězdné obloze slouží skupina hvězd označovaná jako Letní trojúhelník. Podobně jako u Jarního trojúhelníku ani v tomto případě se nejedná o souhvězdí, ale o asterismus, skupinku tří výrazných hvězd, z nichž se každá nachází v jiném souhvězdí.

Jarní trojúhelník tvoří:
Hvězda Deneb v souhvězdí Labutě
Hvězda Vega v souhvězdí Lyry
Hvězda Altair v souhvězdí Orla

Podobně jako v případě Jarního trojúhelníku, je i u Letního trojúhelníku uvedená trojice hvězd dostatečně výrazná na to, aby mohla být spatřena i za méně příznivých pozorovacích podmínek. Zdánlivým otáčením oblohy je možné na území ČR pozorovat posun letních souhvězdí od východu, přes jih až k západu.

2.4.4 Podzimní souhvězdí

Podzimní souhvězdí jsou souhvězdí, která v naší zeměpisné šířce v průběhu roku vycházejí a zapadají. Nejsou proto viditelná během celého roku. Na rozdíl od letní nebo zimní oblohy, je podzimní obloha chudá na výrazné hvězdy. Optimální viditelnost podzimních souhvězdí, které postupně kulminují nad jižním obzorem, nastává na podzim ve večerních hodinách. Směrem na západ (doprava při pohledu čelem k jihu) od podzimních souhvězdí se nachází letní souhvězdí, která v průběhu večera postupně klesají k západnímu obzoru a zapadají. Směrem na východ (doleva při pohledu čelem k jihu) se nachází souhvězdí zimní, která
v průběhu noci postupně vychází.

Nad oblast podzimních souhvězdí jen částečně zasahuje Mléčná dráha.

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Základní orientace

Pro základní orientaci na podzimní hvězdné obloze slouží skupina hvězd vzdáleně svým tvarem připomínající Velký vůz. Podobně jako u předchozích případů, ani v tomto případě se nejedná o samostatné souhvězdí, ale o asterismus. Sedm výraznějších hvězd podzimního obrazce se nachází ve dvou souhvězdích. Vychází se z tzv. Pegasova čtverce, který tvoří čtyři hvězdy: β Peg, α Peg, γ Peg a hvězda Sirah z Andromedy. Od hvězdy Sirah na ně pak navazují hvězdy tvořící „oj“: δ And, Mirach a Alamak.

Sedm hvězd je dostatečně výrazných i za méně příznivých pozorovacích podmínek. Zdánlivým otáčením oblohy je možné na území ČR pozorovat posun podzimních souhvězdí od východu, přes jih až k západu.

2.4.5 Zimní souhvězdí

Zimní souhvězdí jsou souhvězdí, která v naší zeměpisné šířce v průběhu roku vycházejí a zapadají. Nejsou proto viditelná během celého roku. Na rozdíl od jarní nebo podzimní oblohy, je zimní obloha výrazná jak na jasné hvězdy, tak i souhvězdí. Optimální viditelnost zimních souhvězdí, které postupně kulminují nad jižním obzorem, nastává v zimním období ve večerních hodinách. Směrem na západ (doprava při pohledu čelem k jihu) od zimních souhvězdí se nachází souhvězdí podzimní, která v průběhu večera postupně klesají k západnímu obzoru a zapadají. Směrem na východ (doleva při pohledu čelem k jihu) se nachází souhvězdí jarní, která v průběhu noci postupně vycházejí.

Přes část oblasti zimních souhvězdí prochází Mléčná dráha.

Základní orientace

Pro základní orientaci na zimní hvězdné obloze slouží skupina výrazných hvězd vzdáleně svým tvarem připomínající písmeno G, případně nepravidelný mnohostran. Rovněž v tomto případě se nejedná o samostatné souhvězdí, ale o asterismus. Osm výrazných hvězd podzimního obrazce se nachází celkem v šesti výrazných souhvězdích. Obrazec tvoří hvězdy: α Aur (Capella), α Gem (Castor), β Gem (Pollux), α CMi (Procyon), α CMa (Síríus), β Ori (Rigel), α Tau (Aldebaran) a α Ori (Betelgeuse).

Všech osm hvězd je dostatečně výrazných i za méně příznivých pozorovacích podmínek. Zdánlivým otáčením oblohy je možné na území ČR pozorovat posun zimních souhvězdí od východu, přes jih až k západu.

2.4.6 Jižní nepozorovatelná souhvězdí

Jižní nepozorovatelná souhvězdí jsou souhvězdí, která se v naší zeměpisné šířce v průběhu roku vůbec nedostanou nad obzor. Nejsou proto během celého roku viditelná a proto nelze pozorovat jejich východy, kulminace ani západy. Vzhledem k tomu, že na území ČR není možné tuto oblast oblohy pozorovat, je nutné pro její sledování vycestovat směrem na jih.

Přes část oblasti jižních nepozorovatelných souhvězdí prochází Mléčná dráha.

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Základní orientace

Základní orientace na jižní hvězdné obloze je více problematická, než na obloze severní. Důvodem je to, že v okolí JSP (jižního světového pólu) jsou převážně hvězdy nevýrazné. Pro orientaci na jižní hvězdné obloze slouží skupina výraznějších hvězd souhvězdí Jižního kříže. Svým tvarem vzdáleně připomíná na obloze obrazec menšího kříže. Delší strana kříže směřuje do míst, kde se nachází JSP. Na kratší rameno směřuje i dvojice nejjasnějších hvězd ze souhvězdí Kentaura (Cen). Jedná se o hvězdy α Cen (Toliman) a β Cen (Agena). Dalším vodítkem pro orientaci může být asterismus skládající se z trojice jasných hvězd nacházející se v různých souhvězdích. Ona trojice tvoří mírně zalomenou přímku a jedná se o hvězdy: α PsA (Fomalhaut), α Eri (Achernar) a α Car (Canopus). Uvedené hvězdy jsou dostatečně výrazné i za méně příznivých pozorovacích podmínek.

3 Závěr

Orientace na hvězdné obloze není zcela jednoduchou záležitostí. Jako vhodnou pomůcku, při ní můžeme využít např. otáčivou mapu oblohy, která zajišťuje zjednodušené zobrazení. Je možné využít také některý z mnoha počítačových programů (např. Stellarium), případně různé astronomické aplikace na mobilech, či tabletech. V každém případě orientace na obloze i poznávání vesmíru nás duševně obohacuje a umožňuje i trochu jiný pohled na svět kolem nás.

4 Použitá literatura

Cesty za poznáním Astronomie 1, David H. Levy, Svojtka&Co, ISBN 80-7237-029-4
Vesmír 2 Hvězdy - Galaxie, R. Čeman, E. Pittich, Edice: Rekordy, ISBN 80-8067-075-7
Hvězdy, Joachim Hermann, IKAR Praha, ISBN 80-7202-212-1
<http://www.svetelnezncisteneni.cz/>
<http://www.asu.cas.cz/svetelne-zncisteneni>
<http://kalendar.beda.cz/soumrak.php>
<http://cs.wikipedia.org/wiki/Souhv%C4%9Bzd%C3%AD>
http://cs.wikipedia.org/wiki/Seznam_souhv%C4%9Bzd%C3%AD

5 Kontakt na autora

Lumír Honzík
Hvězdárna a planetárium Plzeň
lumir.honzik@seznam.cz

Středisko služeb školám, Plzeň, Částkova 78
Podpora talentovaných žáků v Plzeňském kraji
CZ.1.07/1.2.03/02.0001

Tento projekt je v roce 2013 financován z rozpočtu Plzeňského kraje

STELLARIUM - PRAKTIKUM

Lumír HONZÍK

1 Úvod

V astronomii se kromě odborné literatury a pozorovací techniky používá řada dalších pomůcek. Pro předpovědi některých úkazů se využívá např. Hvězdářská ročenka. Pro simulaci denní i noční hvězdné oblohy lze použít simulační program Stellarium.

2 Program Stellarium

Počítačový program Stellarium představuje velmi realistické planetárium, ve kterém můžeme nasimulovat jak denní, tak i noční hvězdnou oblohu. Výhodou programu je, že lze simulaci do jisté míry provést jak v reálném čase, dále směrem do minulého času i do času budoucího. Lze volit i zeměpisnou polohu místa kdekoli na zeměkouli. Program není omezen jen obrazovkou, ale lze ho promítat např. dataprojektorem, přes tzv. rybí oko apod. Dnes již existuje několik verzí tohoto programu, který se stále zdokonaluje.

2.1 Popis programu

Program ve všech verzích obsahuje tisíce hvězd z katalogu družice Hipparcos. Kromě hvězd dokáže zobrazit celou řadu objektů nacházejících se ve Sluneční soustavě. Zobrazuje Slunce, Měsíc, planety Sluneční soustavy, jejich větší měsíce, některé komety, planetky a let meteorů. Ze vzdáleného vesmíru dokáže velmi dobře zobrazit Mléčnou dráhu a jednotlivé deep-sky objekty jako jsou otevřené a kulové hvězdokupy, různé typy galaxií a mlhovin. Ty lze podobně jako objekty blízkého vesmíru i přiblížit. Pro různé astronomické, matematické a orientační úlohy a účely dokáže zobrazit světové strany, světový rovník, ekliptiku, výškovou stupnici, síť obzorníkových souřadnic a síť druhých rovníkových souřadnic.

Program je dělán s volitelným realistickým zobrazením krajiny, které lze i získat vlastní tvorbou, nebo z internetu. Lze vypínat i zapínat krajinu, atmosféru, mlhu při obzoru, intenzitu světelného znečištění, intenzitu Mléčné dráhy, scintilaci hvězd a celou řadu dalších efektů. V programu lze dokonce nahrávat a přehrávat vlastní vytvořené skripty. Zároveň lze navolit různé typy celkového zobrazení.

Ovládání je poměrně jednoduché pomocí klávesnice nebo myši. Program je přeložen do několika jazyků včetně češtiny.

2.2 Možnosti řešení některých úloh ve Stellariu

Pomocí programu Stellarium lze řešit řadu astronomických úloh a simulaci různých situací. Kromě základních úkonů, sloužících pro orientaci jako jsou názvy hvězd, souhvězdí, spojnice hvězd, hranice souhvězdí a figurální zobrazení souhvězdí můžeme řešit řadu úloh. Některé možnosti astronomických úloh a simulací:

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

- Určení času východu, kulminace a západu některých objektů (Slunce, Měsíc, hvězdy, planety) pro určité datum a pro určitou polohu.
- Zjištění rozdílů mezi východem, kulminací a západem tělesa při režimu skutečného horizontu a ideálního horizontu.
- Určení azimutu a výšky objektu pro určitou polohu, datum a čas.
- Ukázka rotace cirkumpolárních souhvězdí.
- Ukázka rotace cirkumpolárních souhvězdí při zapnutých souřadnicových sítí (obzorníkové u druhé rovníkové).
- Určení kulminace objektu pro určité místo, datum a čas.
- Zjištění rozdílů azimutu a výšky objektu pro určitý datum a čas při výrazné změně zeměpisné šířky (např. pro polární a rovníkové oblasti).
- Ukázka rozdílu východu a západu Slunce (Měsíce, hvězd) v oblasti rovníku a v oblasti zeměpisného pólu.
- Simulace změny výšky a polohy Slunce nad obzorem v jednotlivých významných obdobích (jarní a podzimní rovnodennost, letní a zimní slunovrat).
- Ukázka změny fází Měsíce v závislosti na čase.
- Ukázka librace Měsíce v závislosti na čase.
- Ukázka Měsíce v první (poslední) čtvrti na severní a jižní polokouli.
- Krokování východů a západů Měsíce po dnech. Sledování jeho polohy, změny fáze.
- Ukázka jednotlivých planet Sluneční soustavy a jejich zrychlená rotace.
- Ukázka částečného i úplného zatmění Měsíce pro určitou lokalitu, datum a čas.
- Ukázka částečného i úplného zatmění Slunce (případně prstencového) pro určitou lokalitu, datum a čas. Celkový pohled a blízký pohled (dalekohledem pomocí zoomu) při vypnuté atmosféře.
- Ukázka změny fáze a úhlového průměru planety Venuše v průběhu roku.
- Ukázka obloukového výstupu planety Merkur při západním (východním) obzoru.
- Ukázka kličky planety Mars vůči hvězdnému pozadí.
- Ukázka přechodu některého z měsíců planety např. Jupiter (např. Europy) přes disk, vstup měsíce do stínu, zákryt měsíce planetou, výstup měsíce.
- Ukázka náklonu Saturnova prstence v průběhu několika let.
- Ukázka běžného a tečného zákrytu hvězdy Měsícem.
- Ukázka zákrytu planety Saturn Měsícem.
- Ukázka pohybu hvězdy označené jako Barnardova šipka.
- Ukázka změny tvaru souhvězdí v časově delším období (jen u vyšších verzí Stellaria).
- Simulace úkazů jako jsou např. konjunkce planet.

V programu Stellarium lze samozřejmě řešit ještě další úlohy a simulace. Toto je pouze nastínění několika základních.



INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

3 Závěr

Stellarium je velmi zajímavý a poměrně dokonalý simulátor vesmírného dění. Není ale od věci si úkazy nasimulované tímto programem ověřit i ve skutečnosti pozorováním dějů na skutečné obloze ať již pouhým okem nebo pomocí dalekohledů. Jen tak lze získat určité povědomí o tom, co se na denní i noční obloze skutečně odehrává.

4 Použitá literatura

<http://stellarium.sourceforge.net/>

<http://sourceforge.net/projects/stellarium/>

5 Kontakt na autora

Lumír Honzík

Hvězdárna a planetárium Plzeň

lumir.honzik@seznam.cz

Středisko služeb školám, Plzeň, Částkova 78
Podpora talentovaných žáků v Plzeňském kraji
CZ.1.07/1.2.03/02.0001

Tento projekt je v roce 2013 financován z rozpočtu Plzeňského kraje

ZATMĚNÍ SLUNCE A MĚSÍCE

Lumír HONZÍK

1 Úvod

Zatmění Slunce a Měsíce jsou zajímavé a dobře pozorovatelné astronomické úkazy. Důležitou roli zde hrají tři tělesa. Největším z nich je Slunce, které zde představuje přirozený zdroj světla (samozřejmě i tepla). Slunce má průměr necelých 1400 000 km a nachází se v průměrné vzdálenosti od země 149,6 miliónu km, což je 1 AU (astronomická jednotka). Z této vzdálenosti se Slunce jeví pod úhlem přibližně $0,5^\circ$.

Druhým tělesem je přirozená družice Země - Měsíc. Ten je osvětlován Sluncem, a proto nesvítí vlastním světlem, ale pouze odráženým. Průměr Měsíce je 3476 km a od Země se pohybuje v průměrné vzdálenosti kolem 385 000 km. I on se z této vzdálenosti jeví pod úhlem kolem $0,5^\circ$, tedy přibližně stejným jaké má Slunce. Dráha Měsíce je velmi komplikovaná. Nejen že je excentrická, ale je i skloněna pod úhlem $5,2^\circ$.

Posledním důležitým tělesem je planeta Země, pátá největší planeta Sluneční soustavy. Její průměr dosahuje 12 756 km.

Tím jak Měsíc obíhá Zemi, dostává se geometricky do různých poloh a mohou nastat některé pozorovatelné úkazy. Jedním z nich jsou zatmění Slunce nebo Měsíce, které však nastanou jen při splnění některých podmínek.

2 Zatmění Slunce a Měsíce

2.1 Zatmění Měsíce

Nepříliš často dochází k úkazu, kterému říkáme zatmění Měsíce. Během něho dochází na určitou dobu k potměnění jeho povrchu.

Druhy měsíčních zatmění.

U měsíčních zatmění nastávají tři typy zatmění:

1. Polostínové zatmění Měsíce – nastává v okamžiku, kdy Měsíc vstoupí do rozbíhavého kužele polostínu. V praxi nemá význam, protože je nepozorovatelné. Lze ho zaznamenat pouze přístrojovou technikou.
2. Částečné zatmění Měsíce – nastává v okamžiku, kdy sbíhavý kužel plného stínu dopadne na část měsíčního povrchu. Tento typ lze pozorovat i okem.
3. Úplné zatmění Měsíce – nastává v okamžiku, kdy se celý Měsíc ponoří do plného stínu Země. Je pozorovatelné pouhým okem. Během úplného zatmění bývá Měsíc někdy velmi tmavý, jindy dostává různě intenzivní cihlově oranžové zbarvení. Zbarvení Měsíce během úplné fáze zatmění je závislé na znečištění atmosféry Země, neboť ta část paprsků pohlcuje a část paprsků rozptyluje.

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Zatmění Měsíce je možné z těchto důvodů:

1. Planeta Země vrhá do prostoru sbíhavý kužel plného stínu a rozbíhavý kužel polostínu.
2. Kužel plného stínu má délku kolem 1 380 000 km, což je dostatečnou hodnota proto, aby byl stín v úrovni dráhy Měsíce dosti široký a tudíž se do něj mohl celý Měsíc ponořit.
3. Měsíční dráha má sklon vůči ekliptice $5,2^\circ$.
4. Dráha Měsíce protíná ekliptiku ve dvou bodech – vzestupném a sestupném uzlu.
5. Spojnice vzestupného a sestupného uzlu se v prostoru pomalu stáčí.

Aby zatmění Měsíce mohlo nastat, musí být splněno několik podmínek:

1. Měsíc se musí nacházet za planetou Zemí, tedy na opačné straně než je Slunce.
2. Je jasné, že v tu chvíli je ve fázi úplňku.
3. Spojnice obou jeho uzlů musí být natočena ke Slunci.
4. Měsíc se musí zároveň nacházet v blízkosti jednoho z uzlů na straně od Slunce, tedy za Zemí.

Zatmění Měsíce jsou méně častá než sluneční. Lze je však pozorovat z celé přivrácené polokoule (pokud není zataženo), takže je většina lidí již viděla. Pro vědecké účely nemají již žádný praktický význam.

2.2 Zatmění Slunce

Nepříliš často dochází i k dalšímu úkazu, kterému říkáme zatmění Slunce. Během něho dochází k postupnému překrývání slunečního disku Měsícem. V případě úplného zatmění se disk Slunce na určitou dobu schová za disk Měsíce.

Rovněž u slunečních zatmění nastávají tři typy zatmění:

1. Částečné zatmění Slunce – nastává v okamžiku, kdy Měsíc začne zakrývat sluneční disk. V praxi nemá celkem žádný vědecký význam, pro cvičnou odbornou činnost lze řešit některé matematické úlohy. Je dobře pozorovatelné i okem přes vhodný filtr. Během částečné fáze ale lze pozorovat pokles osvitů, pokles teploty, změny v barvách okolní krajiny. Těchto změn si ale povšimneme až po určité době při větší fázi zatmění.
2. Prstencové zatmění Slunce – jedná se o speciální typ částečného zatmění Slunce, kdy Měsíc nedokáže zcela zakrýt sluneční disk a na krátkou dobu (několik sekund) je pozorovatelný pouze světelný kroužek. Tento typ zatmění nastane, je-li Země vůči Slunci v relativně malé vzdálenosti a tím má na obloze o něco větší úhlový průměr. Zároveň ale Měsíc je vůči Zemi v relativně velké vzdálenosti a tím má na obloze o něco menší úhlový průměr. Nedokáže proto zcela zakrýt disk Slunce. Prstencové zatmění začíná a končí jako částečné. Podobně jako částečné, nemá ani prstencové zatmění žádný vědecký význam a hodí se spíše pro cvičné úlohy.

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

3. Úplné zatmění Slunce – nastává v okamžiku, kdy Měsíc zcela zakryje disk Slunce. I tento typ zatmění začíná a končí částečným zatměním. Úplné zatmění Slunce je pozorovatelné pouze v místě, kam dopadá kužel plného stínu. Tato stopa se nazývá stopou totality. Její šířka se pohybuje kolem 150 až 250 km, délka několik tisíc km. Tento typ zatmění trvá jen několik minut (max. 7,5 min.) a je pozorovatelný pouhým okem. Během úplné fáze je viditelná horní vrstva sluneční atmosféry – koróna, v dalekohledu i protuberance. V průběhu jsou viditelné i jasné hvězdy a planety. V okamžiku před a těsně po úplném zatmění lze pozorovat po krátký čas i další úkazy jako jsou Bayliho perly, efekt diamantového prstenu, letící stíny apod. Na částečnou a hlavně úplnou fázi zatmění může reagovat příroda (fauna i flóra).

Zatmění Slunce je možné z těchto důvodů:

1. Měsíc vrhá do prostoru sbíhavý kužel plného stínu a rozbíhavý kužel polostínu.
2. Kužel plného stínu má dostatečnou délku, aby dopadl až na zemský povrch.
3. Měsíc má na obloze přibližně stejný úhlový průměr jako Slunce (úhlové průměry závisí na okamžité vzdálenosti Slunce – Země, Země – Měsíc).
4. Měsíční dráha má sklon vůči ekliptice $5,2^\circ$.
5. Dráha Měsíce protíná ekliptiku ve dvou bodech – vzestupném a sestupném uzlu.
6. Spojnice vzestupného a sestupného uzlu se v prostoru pomalu stáčí.

Aby zatmění Slunce mohlo nastat, musí být splněno několik podmínek:

1. Měsíc se musí nacházet mezi Sluncem a planetou Zemí.
2. Je jasné, že v tu chvíli je ve fázi novu.
3. Spojnice obou jeho uzlů musí být natočena ke Slunci.
4. Měsíc se musí zároveň nacházet v blízkosti jednoho z uzlů na straně u Slunce.

Zatmění Slunce) jsou sice častější než měsíční, ale jejich sledování (hlavně úplná zatmění) jsou omezená pouze na oblast pásu tzv. totality. Proto je sleduje jen malý počet lidí. Úplné zatmění pro jedno místo na Zemi nastává v průměru jednou za 200 let. Pro vědecké účely však mají dodnes velký význam.

2.3 Perioda saros

Již minulé civilizace si povšimly, že po určité době dochází k opakování stejných typů slunečních i měsíčních zatmění. Protože se jedná o periodicky se opakující události, lze proto spočítat a předpovědět, kdy nastanou další zatmění. Tato perioda se nazývá saros a trvá 223 synodických měsíců, což odpovídá 18 roků a 10 dnům.

3 Závěr

Zatmění Slunce a Měsíce patří mezi jedny z nejzajímavějších astronomických úkazů, které měly význam hlavně v minulosti. V současné době důležitost zatmění již není tak významná jako v minulosti. Zatmění Měsíce již z vědeckého hlediska významná nejsou. U slunečních zatmění mají i v dnešní době zatmění úplná. V každém případě patří zatmění Slunce a Měsíce mezi nejzajímavější a nejnápadnější astronomické úkazy, které sledovatelné i bez složitějších pozorovacích pomůcek. Proto je mohou pozorovat nejen odborníci, ale i laická veřejnost.

4 Použitá literatura

Astronomie 1; V. Guth, F. Link, J. M. Mohr, B. Šternberk; vyd.: Nakladatelství Československé akademie věd, Praha 1954

Hvězdářský zeměpis; V. Vanýsek, Nakl.: Orbis, Praha, 1953

Atlas Měsíce; A. Rükl; vyd.: Aventinum, Praha 1991, ISBN 80-85277-10-7

Dostupné na internetu:

<http://www.astro.zcu.cz/old/slunce99/publikace/index.html>

<http://www.astro.cz/rady/ukazy/zatmeni/slunce/>

<http://astro.sci.muni.cz/zatmeni/>

5 Kontakt na autora

Lumír Honzík

Hvězdárna a planetárium Plzeň

lumir.honzik@seznam.cz



INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

PRAKTIKUM Z ASTROFOTOGRAFIE

Josef Jíra

1 Úvod

Fotografie se stala nepostradatelnou součástí práce astronomů. Vynález fotografie posunul naše možnosti poznání a chápání vesmíru o pořádný kus dopředu. Možnost použití dlouhých expozic vede ke zvýšení počtu detailů zobrazených na snímku než je tomu v případě pozorování pouhým okem. Výhody astronomické fotografie se uplatňují také při archivaci napozorovaných dat a při jejich dalším využití. V některých archivech naleznete více než 100 let staré materiály, které jsou pro astronomy neocenitelným zdrojem informací. I když je v současné době klasická astronomická fotografie vytlačována CCD fotografiemi, je i nadále nenahraditelným pomocníkem při fotografování velkých hvězdných oblastí, jak je tomu například v případě bolidové sítě. Díky vývoji techniky a fotografických materiálů může téměř každý zájemce i v amatérských podmínkách dosáhnout poměrně kvalitních astronomických snímků.

2 Fotografie hvězdných drah - Startrails

Startrails (hvězdné dráhy) je velmi jednoduchá technika fotografování noční oblohy. Potřebujeme k ní jen fotoaparát s širokoúhlým objektivem, kabelovou (drátěnou) spoušť s aretací a fotografický stativ. V okamžiku, kdy exponujeme část hvězdné oblohy několik desítek minut či hodin, můžeme zachytit na snímku pohyb hvězd po obloze, který je způsobený rotací Země kolem své osy. Na fotografii lze zachytit krásné části kružnic, jejichž velikost je závislá na délce expozice a vzdálenosti hvězdy od nebeského pólu. Teoreticky kdyby byla expozice dlouhá 23 h 56 m, tak by na fotografii hvězdy vykreslily krásné kružnice. Ale i po několika desítkách minut se na snímku objeví pěkné startrails. Tyto extrémně dlouhé expozice jsme si ale mohli dovolit pouze u klasických fotografických materiálů, které se vyznačují velkým dynamickým rozsahem (schopností zachytit různé intenzity světla, aniž by došlo ke ztrátě informace). Bohužel současné elektronické snímače obrazu, které se používají v digitálních zrcadlovkách, trpí celou řadou nedostatků, které neumožňují využití tak dlouhých expozic, jako je tomu u klasické fotografie, proto se startrails fotografují pomocí série kratších expozic a následně se tyto snímky skládají v počítači, například pomocí programu Startrails.

Středisko služeb školám, Plzeň, Částkova 78
Podpora talentovaných žáků v Plzeňském kraji
CZ.1.07/1.2.03/02.0001

Tento projekt je v roce 2013 financován z rozpočtu Plzeňského kraje

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ



Fotografie složená ze 117 expozic po 90 s, celková délka expozice necelé tři hodiny.
Místo: Rokycany, Autor: Josef Jíra.

2.1 Instalace

Program Startrails určený pro skládání „hvězdných drah“ si můžeme zdarma stáhnout z adresy www.startrails.de. Do počítače si uložíme zabalený soubor o velikosti 200 kB. Není nutná klasická instalace. Soubor rozbalíme a umístíme na požadované místo v počítači.

Středisko služeb školám, Plzeň, Částkova 78
Podpora talentovaných žáků v Plzeňském kraji
CZ.1.07/1.2.03/02.0001

Tento projekt je v roce 2013 financován z rozpočtu Plzeňského kraje

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

2.2 První použití

Pro používání programu Startrails si můžeme vybrat anglickou nebo německou jazykovou verzi. Díky jednoduchému grafickému rozhraní a intuitivnímu ovládní zvládne práci s tímto programem každý, i ten kdo neovládá německý, či anglický jazyk.



Fotografie složená ze 100 expozic po 45 s s celkovou délkou expozice 1,25 hodiny. Na fotografii lze rozeznat souhvězdí Orion nad kopulí hvězdárny a červené stopy od baterky pozorovatele. Místo pořízení snímku Hvězdárna v Rokycanech. Autor: Josef Jíra.

Středisko služeb školám, Plzeň, Částkova 78
Podpora talentovaných žáků v Plzeňském kraji
CZ.1.07/1.2.03/02.0001

Tento projekt je v roce 2013 financován z rozpočtu Plzeňského kraje



INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

2.3 Skládání obrazu

Program podporuje snímky ve formátu JPG a RAW. Přes ikonu Open vybereme snímky pro skládání a případně je doplníme o tzv. dark (temné) snímky, které se používají pro odstranění šumu vzniklého elektroluminiscencí senzoru. Tento šum vzniká teplotní závislostí snímače a projeví se především při použití dlouhých expozic. Jedna z možností, jak tento druh šumu odstranit, je pořízení temných snímků, které se následně odečtou při skládání fotografií v programu. Temný snímek vytvoříme tak, že objektiv zakryjeme a exponujeme stejně dlouhé expozice za stejných teplotních podmínek jako fotografie hvězdného pole.

Program zvládne zpracovat i několik stovek snímků najednou. Můžeme si vybrat dva rozdílné výstupy. Buď složení jedné fotografie, nebo využít možnosti vytvoření videosekvence. Pro video je však nutné nastavit parametry formátu a kvality. Během skládání fotografií můžeme sledovat na monitoru vznikající výsledný snímek, který je možné v průběhu skládání i zastavit. Složenou fotografii lze uložit do formátu JPG, BMP nebo TIFF, případně tento formát upravit v libovolném grafickém editoru.

3 Závěr

S programem Startrails pracuji několik let a s jeho pomocí lze snadnou cestou pořídit velmi zajímavé fotografie hvězdné oblohy (viz příložené snímky).

4 Použitá literatura

CHARLES, J. R. Practical astrophotography, Springer – Verlag London Limited 2000, Printed in Great Britain, ISBN 1-85233-023-6

REEVES R. Wide-Field Astrophotography, Published by Willmann-Bell, Inc. P. O. BOX 35025, Richmond, Virginia 23235, Second Printing June 2001, ISBN 0-943396-64-6

5 Kontakt na autora

Mgr. Josef Jíra

Západočeská pobočka České astronomické společnosti

josef.jira@seznam.cz

Středisko služeb školám, Plzeň, Částkova 78
Podpora talentovaných žáků v Plzeňském kraji
CZ.1.07/1.2.03/02.0001

Tento projekt je v roce 2013 financován z rozpočtu Plzeňského kraje

ASTRONOMICKÉ ÚLOHY

Ota KÉHAR

1 Úvod

Ve svém příspěvku představím několik webových online aplikací dostupných na stránkách Astronomia, které využívají data nacházející se v katalogích astronomických objektů. Ukážeme si některé netradiční úlohy, které budou založené na katalogích hvězd Hipparcos a SIMBAD, seznamu očíslovaných planetek nebo plošných objektech v katalogích NGC a Messier.

2 Co je to Astronomia?

Webové stránky Astronomia jsou multimediální učební text, který vznikl v roce 2000. Od roku 2005 jsou nedílnou součástí (a dalo by se říci, že neviditelným pátým projektem) katalogy astronomických objektů. V katalogích je ukryto přes 600 tisíc objektů v celkovém objemu 180 MB dat. Samotné katalogy jde rozdělit do tří kategorií – tzv. deep-sky objekty (mlhoviny, hvězdokupy, galaxie) se nacházejí hned ve třech katalogích – NGC katalog, Messierův katalog a IC katalog. Druhou oblastí jsou hvězdy, zde máme seznam souhvězdí (známe jich 88), katalog Gliese (obsahuje 3 803 nejbližších hvězd), katalog Hipparcos (118 218 hvězd) a část francouzské astronomické databáze SIMBAD (118 171 hvězd). Do poslední kategorie katalogů – planety jsou zahrnuty planetky (v době psaní článku obsahuje seznam přes 369 tisíc planetek) a katalog exoplanet, tedy planet nacházejících se u jiných hvězd. Aby nedocházelo k zastarávání údajů, jsou některé katalogy pravidelně (denně, týdně či měsíčně) aktualizovány z důvěryhodných zdrojů se souhlasem jejich autorů, např. exoplanety z exoplanet.eu, databáze SIMBAD přímo z francouzského zdroje a planetky z Minor Planet Center.

2.1 Západ a východ slunce

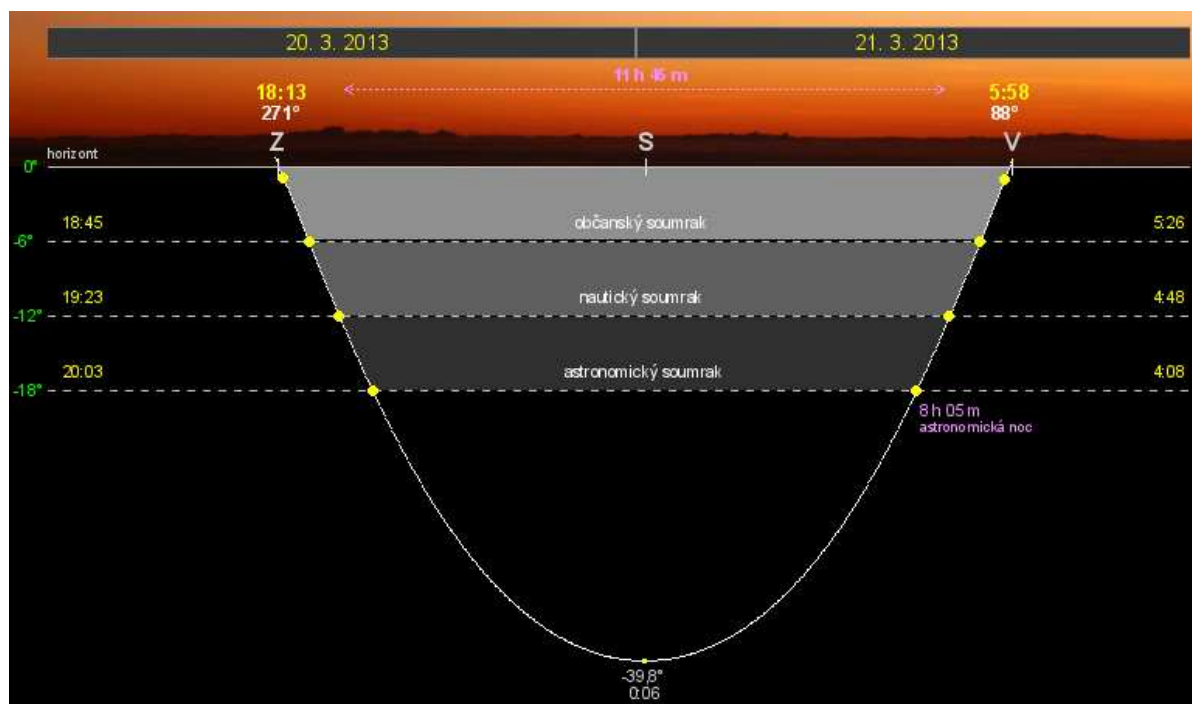
„Kde vychází slunce dříve? Kde zapadá slunce později? V Plzni nebo ve Smolenicích?“ Na první pohled jednoduché otázky, ve kterých se skrývá spousta zajímavostí. V první řadě si je nutné uvědomit, jak je definován západ či východ slunce. Musíme vzít v úvahu i atmosférickou refrakci, která nám prodlužuje trvání bílého dne. Západ (nebo východ) slunce nastane v okamžiku, kdy se horní okraj slunečního kotouče nachází přesně na ideálním horizontu. V tom okamžiku je ovšem skutečná poloha slunečního kotouče 34 úhlových minut pod obzorem. Pokud počítáme ke středu slunečního kotouče, je slunce v okamžiku západu či východu slunce 50 úhlových minut pod obzorem.

Na této úloze můžeme demonstrovat pásmové časy. Východ slunce pro Plzeň je v daný den např. 6.27, pro Smolenice ve stejný den už v 6.12. Analogicky pro západ slunce, pro

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Plzeň až v 19.49, ve Smolenicích již v 19.31. Rozdíl je zhruba 15 minut. Rozdíl zeměpisných délek mezi Plzní a Smolenicemi je $4,1^\circ$. Jedné hodině tak odpovídá 15° .

Na obr. 1 je bílou nepřerušovanou čarou zobrazen průběh (azimut a výška) Slunce na zvoleném místě od západu slunce v daný den po východ slunce následujícího dne. Vypočítány jsou další údaje – západ, východ slunce a okamžiky jednotlivých soumraků.



Obr. 1: Západ a východ slunce pro březnovou rovnodennost

2.2 Rovnodennost

Rovnodennost je okamžik, kdy střed obrazu Slunce na nebeské sféře prochází jarním nebo podzimním bodem. „*Jak je to s délkou noci a bílého dne při rovnodennosti? Jsou skutečně stejně dlouhé, tzn. 12 hodin?*“ Pomocí online webové aplikace Noční obloha se dozvíme, že tomu tak není. V roce 2013 trvala noc v den rovnodennosti jen 11 h 45 m (viz obr. 1). Bílý den trval déle než 12 hodin. Rozdíl je způsoben atmosférickou refrakcí při západu a východu slunce.

2.3 Cirkumpolární souhvězdí

„*Co jsou to cirkumpolární souhvězdí? Která to jsou?*“ Souhvězdí, která nikdy nezapadají za obzor. U souhvězdí platí, že cirkumpolární je tehdy, když žádná jeho část nezapadá. Ve Wikipedii se píše, citují: „V Evropě jsou cirkumpolární například Malý medvěd, Velká medvědice a Cassiopea.“ Platí toto tvrzení i pro Českou či Slovenskou

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

republiku? V záložce Souhvězdí (obr. 2) aplikace Noční obloha je seznam všech viditelných souhvězdí nad obzorem v danou chvíli. Modře jsou podbarvené cirkumpolární souhvězdí, zeleně souhvězdí, jejichž část zapadne. Mezi modře zabarvené patří Malý medvěd, Cassiopea, Drak, Žirafa a Kefeus. Zájemci si mohou vyzkoušet měnit zeměpisnou polohu a zjišťovat, jak se seznam souhvězdí mění.



Obr. 2: Seznam viditelných souhvězdí včetně vyznačení těch cirkumpolárních (modře)

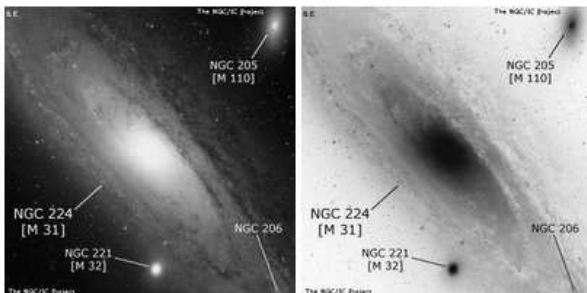
2.4 Objekty vzdáleného vesmíru

Před návštěvou hvězdárny či veřejného pozorování by nás mohlo zajímat, jaké objekty vzdáleného vesmíru jsou nad obzorem. K tomu se hodí záložka Messier (obr. 3) nebo NGC, která vypíše všechny objekty, které jsou v daný okamžik nad obzorem, včetně informace o azimutu a výšce nad obzorem. Vše je počítáno pro zvolené místo a čas, případně na omezení typu minimální výška objektu nad obzorem nebo maximální hvězdná velikost.

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Noční obloha – 20. 3. 2013, 22:22 x

Hvězdy	Souhvězdí	Messier	NGC
Galaxie			
		37	M31, M32, M33, M49, M51, M58, M59, M60, M61, M63, M64, M65, M66, M81, M82, M84, M85, M86, M87, M88, M89, M90, M91, M94, M95, M96, M98, M99, M100, M101, M102, M104, M105, M106, M108, M109, M110
Kulová hvězdokupa			
		6	NGC 5457, 7,5 mag, UMa, 27'x26', azimut = 61° (SV), výška = 56°
Mlhovina (emisní nebo reflexní)			
		3	M1, M43, M78
Otevřená hvězdokupa a mlhovina			
		1	M42
Otevřená hvězdokupa			
		17	M29, M34, M35, M36, M37, M38, M39, M41, M44, M46, M47, M48, M50, M52, M67, M93, M103
Planetární mlhovina			
		3	M57, M76, M97
			67



M31 — více
NGC 224, 3,5 mag, And, 180'x63', azimut = 334° (SZ), výška = 6°

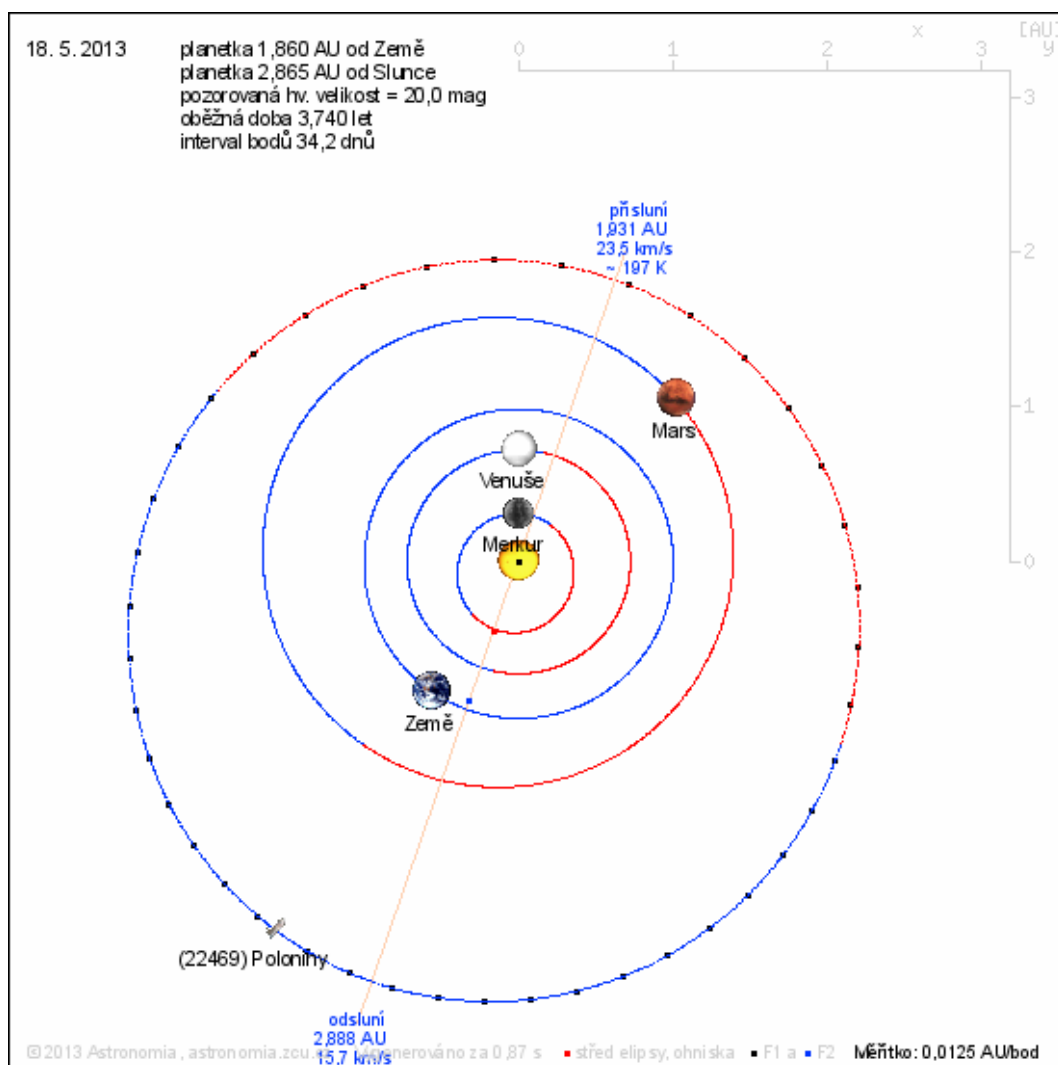
Obr. 3: Seznam objektů (mlhovin, hvězdokup a galaxií) nad obzorem

2.5 Planetka Poloniny v opozici

Planetka (22469) Poloniny je pojmenována podle první chráněné oblasti tmy na Slovensku vyhlášené 3. prosince 2010, nacházející se v Národním parku Poloniny. V parku se nachází i největší slovenský dalekohled, ve Vihorlatské hvězdárně, o průměru objektivu 1000 mm. „Pokud by se planetka Poloniny nacházela v opozici, je v dosahu vihorlatského dalekohledu?“ Limitní hvězdnou velikost dalekohledu lze vypočítat ze znalosti limitní hvězdné velikosti pro oko a poměru velikosti dalekohledu a oka (16,7 mag) nebo ji zjistíme na stránce www.cruxis.com/scope/limitingmagnitude.htm. Pozorovanou hvězdnou velikost planety v opozici zjistíme snadno na adrese <http://astronomia.zcu.cz/planety/planetka-22469>, pokud změním datum (planetka se nachází poblíž opozice např. 18. května 2013, perihéliová opozice nastane 24. listopadu 2022 nebo se můžeme podívat na postavení objektů ve sluneční soustavě v době, kdy byla planetka objevena – 2. února 1997) nebo ze vztahu $m = H + 5 \log \Delta + 5 \log r$, kde m je pozorovaná hvězdná velikost planety, H je absolutní hvězdná velikost planety (viz katalog) a Δ či r jsou vzdálenosti planety od Země, potažmo od Slunce.

Středisko služeb školám, Plzeň, Částkova 78
Podpora talentovaných žáků v Plzeňském kraji
CZ.1.07/1.2.03/02.0001

Tento projekt je v roce 2013 financován z rozpočtu Plzeňského kraje



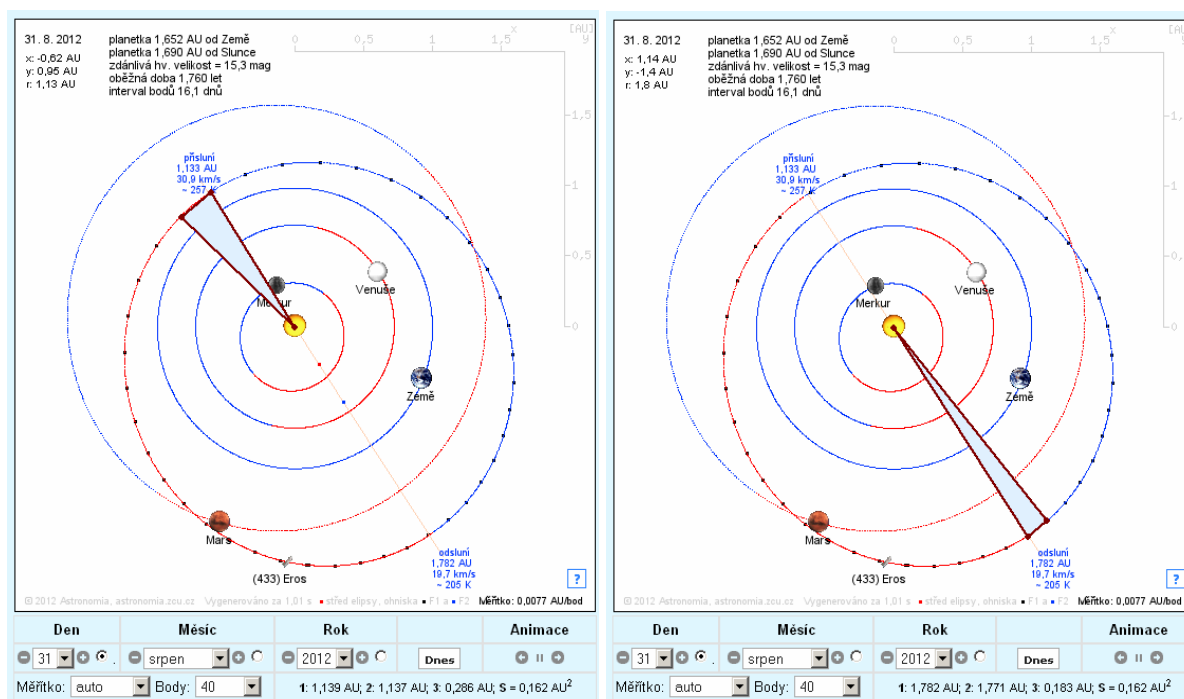
Obr. 4: Situace ve sluneční soustavě ke zvolenému dni

2.6 Keplerovy zákony a trajektorie planetky

Na obr. 5 je v základním nastavení znázorněna aktuální poloha vybrané planetky ve sluneční soustavě v rovině ekliptiky. V této ukázce se jedná o blízkozemní planetku (433) Eros, lze ale vybrat libovolnou očíslovanou planetku, z více než 369 tisíc, které mají různé trajektorie ovlivněné dráhovými elementy, zejména výstředností, sklonem dráhy k ekliptice a velkou poloosou. Je vykreslena poloha (včetně trajektorií) planet sluneční soustavy. Polohu těles ve sluneční soustavě lze vykreslit i pro jiné datum. U přisluní a odsluní se zobrazuje vzdálenost planetky od Slunce, její rychlost, odhad efektivní teploty rovnovážného záření planetky a pozorované hvězdné velikosti.

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Aplikace nám umožňuje demonstrovat a ověřovat platnost všech tří Keplerových zákonů. Postupně si ve stručnosti představíme, jak na obrázku upozornit na zajímavé vlastnosti jednotlivých Keplerových zákonů. Podrobnější popis je uveden v nápovědě, která je dostupná po kliknutí na znak otazníku nacházející se v pravém dolním rohu obrázku s trajektoriemi ve sluneční soustavě.



Obr. 5: Aktuální poloha planetky ve sluneční soustavě a ověření Keplerových zákonů

Pro první Keplerův zákon jsou důležité trajektorie planetky, poloha Slunce ve společném ohnisku, případně vyznačení středu elipsy. Vyznačena je poloha přísluní a odsluní.

Druhý Keplerův zákon se někdy označuje jako zákon ploch. Průvodič za stejnou dobu opíše plochu se stejným obsahem. Trajektorie je rozdělena na zvolený počet stejně dlouhých časových úseků. Kliknutím se vybere příslušný bod. Zobrazí se úsečka spojující ohnisko a vybraný bod společně s informací o délce úsečky v prostoru v astronomických jednotkách. Výběrem dalšího bodu se dokreslí trojúhelník a vypočítá jeho plocha.

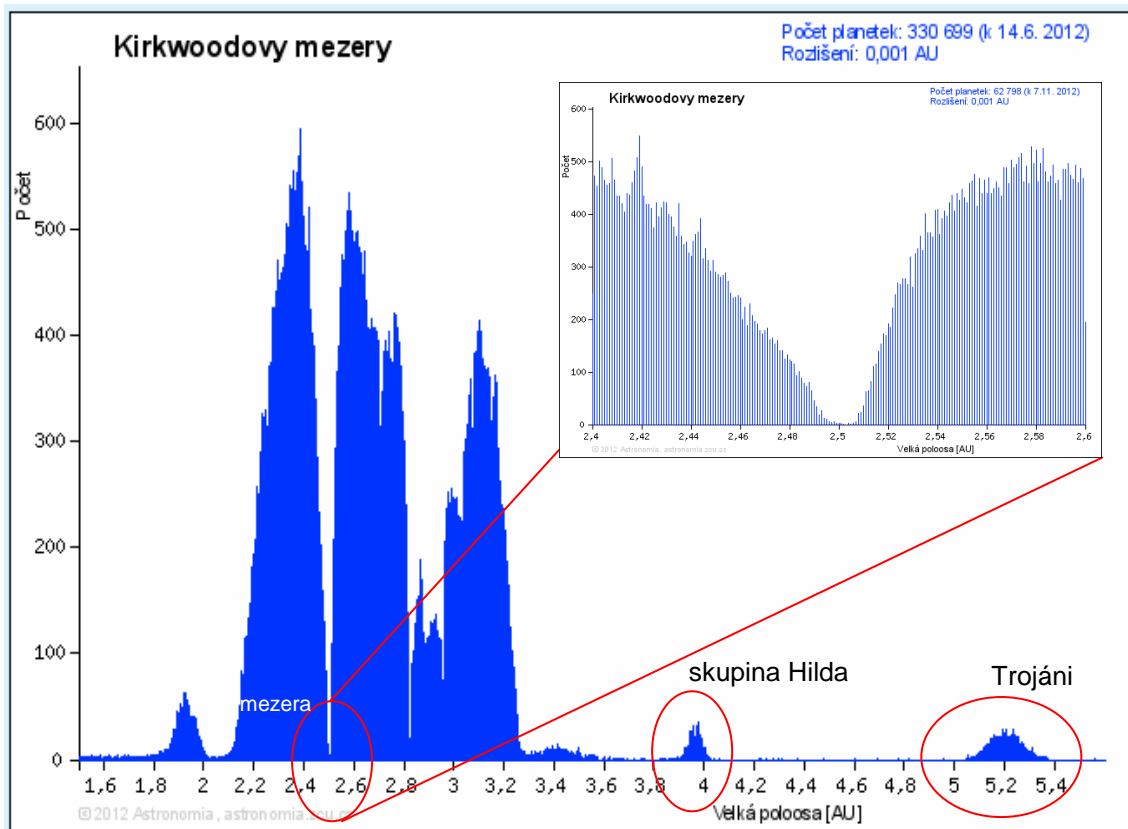
Na obr. 5 vlevo je znázorněna situace v přísluní, vpravo v odsluní. Porovnáním zjistíme, že vypočítaná plocha je stejná. Výpočet plochy nezohledňuje zakřivení trajektorie planetky, pokud je časový interval příliš velký, může dojít k nepřesnostem, které ovšem dosahuje maximálně 10 promile.

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Pro třetí Keplerův zákon zjistíme hodnotu velké poloosy a jako polovinu součtu vzdáleností planety v přísluní a odsluní. Pak můžeme vypočítat oběžnou dobu T planety a porovnat ji s údaji, které jsou uvedeny v levém rohu na obrázku. Oběžnou dobu T lze určit ze středního denního pohybu n a tím procvičit převody mezi stupni a radiány.

2.7 Kirkwoodovy mezery

Kirkwoodovy mezery (obr. 6) jsou mezery nebo poklesy v rozdělení (četnosti) hlavního pásu planetek na velké poloose (nebo oběžné době). Poprvé si tohoto uspořádání planetek všiml americký astronom Daniel Kirkwood již v roce 1857, kdy bylo známo okolo 50 planetek. První oficiální zveřejnění objevu bylo až v roce 1866 (na setkání Americké společnosti pro pokrok vědy); na konci tohoto roku bylo známo 91 planetek. Na stránce Analýza parametrů si můžete aplikaci vyzkoušet. Jak vypadalo rozdělení planetek v době, kdy Daniel Kirkwood objevil vliv Jupiteru na rozložení planetek ve sluneční soustavě? Stačí omezit rok objevu na 1801 až 1857 (potažmo 1866).



Obr. 6: Kirkwoodovy mezery aneb četnost planetek na velké poloose

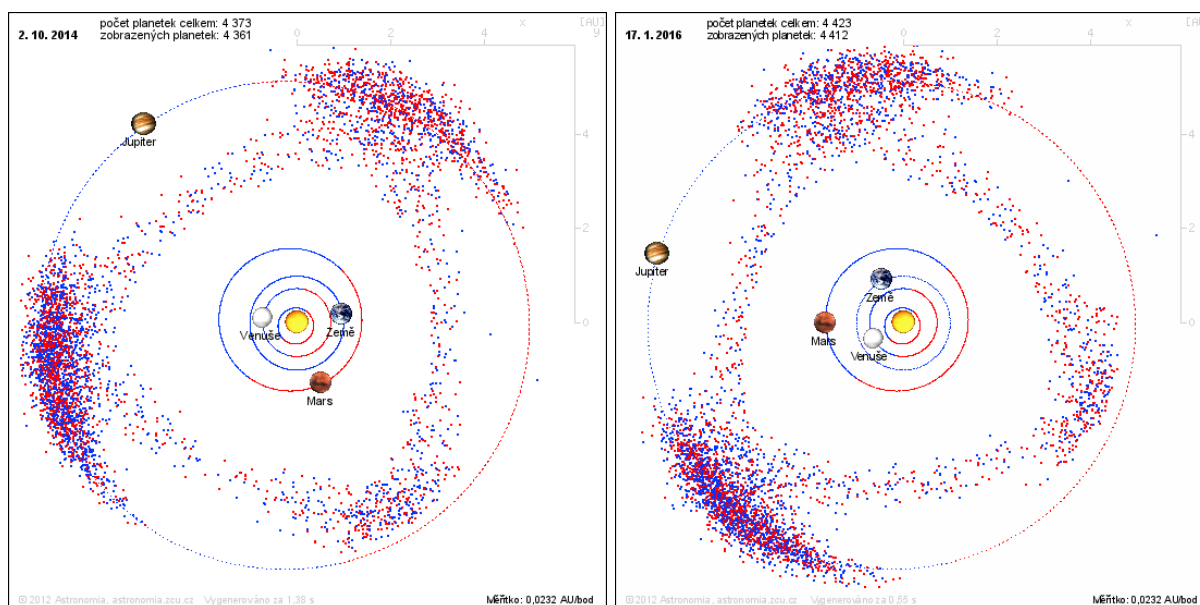
Pro zobrazení Kirkwoodových mezer je vhodné nastavit interval velké poloosy na hodnoty 2,0 až 3,5 AU. Tím se zobrazí rozložení četnosti planetek hlavního pásu. Pokud

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

zobrazíme interval od 1,4 do 5,4 AU, lze si všimnout několika zajímavých lokálních maxim: okolo 1,93 AU se nachází skupina Hungaria, okolo 3,9 AU vytváří zajímavý obrazec v prostoru skupina Hilda, která souvisí s rezonancí 2:3 s Jupiterem. A konečně okolo 5,2 AU najdeme samotnou planetu Jupiter a v libračních centrech L4 a L5 se nacházejí Trojané, rezonance 1:1 s Jupiterem.

2.8 Zajímavá postavení planetek

Zajímavé zobrazení představují planetky skupiny Trojané a Hilda (obr 7). Jedná se o planetky, jejichž trajektorie je ovlivněna gravitačními účinky planety Jupiter. Jsou to dva případy, kdy dráhová rezonance vede k vytvoření stabilní skupiny planetek. Dlouhodobé rozdělení planetek skupiny Hilda v prostoru tvoří přibližně tvar rovnostranného trojúhelníku. Vrcholy trojúhelníka leží na trajektorii Jupiteru v libračních centrech L3, L4 a L5. V libračních centrech L4 a L5 se nacházejí Trojané.



Obr. 7: Aktuální polohy planetek ve sluneční soustavě pro Trojáky a skupinu Hilda

3 Použitá literatura

Multimediální učební text Astronomie [online]. ©2013, [citováno 20. 9. 2013].
Dostupné z <http://astronomia.zcu.cz>

4 Kontakt na autora

PhDr. Ing. Ota Kéhar
Oddělení fyziky, KMT FPE ZČU v Plzni,
Klatovská 51, 306 14 Plzeň, Česká republika
e-mail: kehar@kmt.zcu.cz

Středisko služeb školám, Plzeň, Částkova 78
Podpora talentovaných žáků v Plzeňském kraji
CZ.1.07/1.2.03/02.0001

Tento projekt je v roce 2013 financován z rozpočtu Plzeňského kraje



INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

FYZIKA PLAZMATU JAKO NÁSTROJ K VYTVÁŘENÍ MATERIÁLŮ S VÝJIMEČNÝMI VLASTNOSTMI

Jiří Kohout

1 Úvod

V průmyslu se stále častěji prosazují tenkovrstvé materiály (tloušťka většinou od desítek nanometrů do desítek mikrometrů) se zajímavými vlastnostmi (např. vysoká tvrdost, nízký koeficient tření, vysoká elektrická vodivost apod.). Tyto unikátní materiály mohou být připraveny řadou různých metod. Patří k ni i tzv. magnetronové naprašování. Jedná se o efektivní a z hlediska životního prostředí šetrnou technologii založenou na rozprašování různých terčů v plazmovém výboji. Tento příspěvek je zaměřen jednak na uvedení nejzákladnějších informací o této komplexní problematice, jednak pak na stručné uvedení do problematiky diagnostiky záporných iontů při magnetronovém naprašování jako jednoho z pokročilejších témat v této oblasti.

2 Magnetronové naprašování a jeho fyzikální souvislosti

2.1 Princip magnetronového naprašování

Jaký je vlastně princip magnetronového naprašování? Máme depoziční komoru napuštěnou plynem (např. argon). Tlak plynu je velmi nízký, typicky několik desetin pascalu až několik pascalů. Na jednu stranu komory umístíme (např. titanový) terč. Na druhou stranu depoziční komory je poté umístěn substrát, což je např. křemíková destička. Následně připojíme zdroj napětí tak, že titanový terč funguje jako katoda a křemíkový substrát jako anoda. Toto napětí je zpravidla v řádu stovek voltů.

Nabitě částice, tj. záporně nabitě elektrony a kladně nabitě ionty začnou být elektrickým polem urychlovány. Díky velké střední volné dráze způsobené nízkým tlakem a tudíž nízkým počtem srážek se dokáží urychlit natolik, že jsou při srážkách schopny efektivně ionizovat atomy plynu. Kladně nabitě ionty jsou přitahovány ke katodě a vzhledem k velké intenzitě pole v její těsné blízkosti získávají před dopadem na ni značnou rychlost. Díky tomu jsou schopny po dopadnutí na titanový terč tvořící katodu vyrazit z něj atomy titanu, které následně procházejí napříč výbojem a dopadají na křemíkový substrát. Na něm poté vzniká tenká vrstva, jež často mít má díky způsobu přípravy „atom po atomu“ specifické vlastnosti.

Středisko služeb školám, Plzeň, Částkova 78
Podpora talentovaných žáků v Plzeňském kraji
CZ.1.07/1.2.03/02.0001

Tento projekt je v roce 2013 financován z rozpočtu Plzeňského kraje



INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

2.2 Diagnostika záporných iontů při magnetronovém naprašování

Značná pozornost je v posledních letech věnována vysokovýkonovému pulznímu naprašování oxidových vrstev. Patří k nim například vrstvy na bázi HfO_2 , jež mají velmi vysokou dielektrickou konstantu (zhruba 30). Z tohoto důvodu by do budoucna mohly v elektronice nahradit dosud převážně užívaný SiO_2 , jehož dielektrická konstanta je mnohem menší (pouze 3,9), což má za následek určité ztráty například v unipolárních tranzistorech.

Jedním z problémů vznikajících při přípravě vrstev tohoto typu uvedenou technikou je přítomnost vysokoenergetických záporných iontů O^- a O_2^- vznikajících především záchytem elektronů. Některé tyto ionty vznikají v blízkosti katody, jsou od ní odpuzovány a v důsledku toho získávají značnou energii v řádu stovek elektronvoltů. Následně dopadají na substrát, což vede ke vzniku defektů v rostoucí vrstvě a k degradaci jejích vlastností. Neúměrně roste rovněž povrchová drsnost vrstev, jíž je třeba především z hlediska aplikací v elektronice držet na co nižší hladině. V rámci přednášky bylo na velmi aktuálním případě přípravy vrstev HfO_2 demonstrováno, že pomocí hmotnostní spektroskopie je možné detekovat, kolik těchto vysokoenergetických iontů dopadá na substrát v závislosti na poloze přívodu kyslíku do vakuové komory. Bylo rovněž ukázáno, že existuje přímá souvislost mezi tokem vysokoenergetických iontů a některými vlastnostmi připravené vrstvy, především její povrchovou drsností. Možnost efektivně redukovat tok uvedených iontů na substrát tak má zásadní význam z hlediska přípravy kvalitních tenkovrstvých materiálů s vysokým aplikačním potenciálem.

3 Závěr

Tento příspěvek slouží k popsání základních trendů uplatňujících se v magnetronovém naprašování a v oblasti diagnostiky plazmového výboje využitého při tomto naprašování. Zájemce o magnetronové naprašování odkazují buď na populárně naučně psanou bakalářskou práci (Krbec 2012) nebo, v případě hlubšího zájmu, na knihu informující komplexním způsobem o tenkých vrstvách a metodách jejich přípravy (Ohring 1992). Řadu informací lze najít rovněž na webových stránkách Katedry fyziky ZČU www.kfy.zcu.cz

4 Použitá literatura

KRBEC, M. Plazma jako nástroj k vytváření nových materiálů - možnosti zařazení tématu do výuky na ZŠ a SŠ. Bakalářská práce, FPE ZČU, 2012. Dostupné na internetu: <http://home.zcu.cz/~jkohout4/plazma.pdf>.

OHRING, M. The materials science of thin films. San Diego, Academic Press, 1992.

5 Kontakt na autora

Mgr. Jiří Kohout

Katedra fyziky, Západočeská univerzita v Plzni, Univerzitní 22, 306 14 Plzeň
jkohout4@kfy.zcu.cz

Středisko služeb školám, Plzeň, Částkova 78
Podpora talentovaných žáků v Plzeňském kraji
CZ.1.07/1.2.03/02.0001

Tento projekt je v roce 2013 financován z rozpočtu Plzeňského kraje

ŘEŠENÍ ÚLOH Z KINEMATIKY

Pavel KRATOCHVÍL

1 Úvod

Přednáška se zabývala řešením příkladů z kinematiky. Byly řešeny úlohy na rovnoměrný, rovnoměrně zrychlený pohyb a skládání pohybů především z [2].

2.1 Příklad č.1

Od vjezdu lokomotivy do tunelu do výjezdu posledního vozu z tunelu uplynulo 65 s. Následně vlak minul telegrafní sloup za 15s. Jakou rychlostí projel vlak tunelem a jak je vlak dlouhý, pokud tunel měří 500 m?

2.2 Příklad č.2

Loďka plující po proudu řeky předešla kus dřeva v bodě A . Po dalších 60 minutách plavby se loďka obrátila a plula zpět a potkala kus dřeva v bodě vzdáleném 6 km od bodu A . Najděte rychlost proudu řeky, víte-li, že rychlost loďky vzhledem k řece je stále stejná.

2.3 Příklad č.3

Dva plavci plavou z bodu A na břehu řeky do bodu B , který je naproti bodu A na druhém břehu. Jeden plave po úsečce AB , druhý plave stále kolmo k proudu řeky a vzdálenost, o kterou ho snese proud, dojde po břehu pěšky rychlostí u . Při jaké rychlosti u se oba plavci dostanou do bodu B současně, je-li rychlost proudu řeky $2 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$ a rychlost obou plavců vzhledem k vodě je $2,5 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$?

3 Použitá literatura

[1]BEDNAŘÍK, Milan a Miroslava ŠIROKÁ. *Fyzika pro gymnázia*. 3. vyd. Praha: Prometheus, 2007, 288 s. ISBN 978-807-1961-765.

[2]Příklady z kinematiky hmotného bodu.doc. In: [online]. [cit. 2013-10-11]. Dostupné z: <http://kof.zcu.cz/st/sm/>

4 Kontakt na autora

PhDr. Pavel Kratochvíl, Ph.D.

Západočeská univerzita v Plzni, Katedra matematiky, fyziky a technické výchovy

E-mail: kratinek@kof.zcu.cz

ŘEŠENÍ ÚLOH – SKLÁDÁNÍ A ROZKLÁDÁNÍ SIL

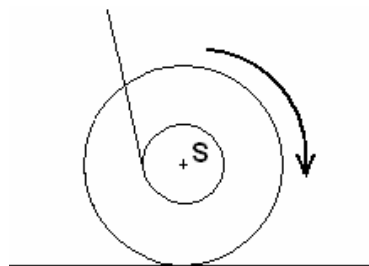
Pavel KRATOCHVÍL

1 Úvod

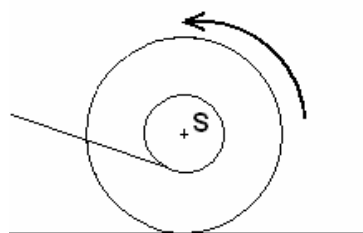
Přednáška se zabývala řešením příkladů z dynamiky. Seznámila studenty s početním i grafickým způsobem skládání sil. Byly řešeny úlohy na hledání těžiště tělesa, zatížení nosníků, třecí sílu.

2.1 Příklad č.1

V závislosti na úhlu provázku se cívka pohybuje vpřed či vzad. Zakreslete do obrázků 1 a 2 všechny síly způsobující tento pohyb.



Obr. 1



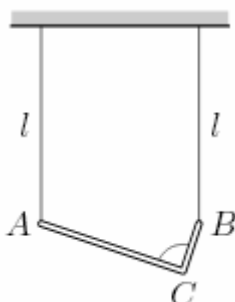
Obr. 2

2.2 Příklad č.2

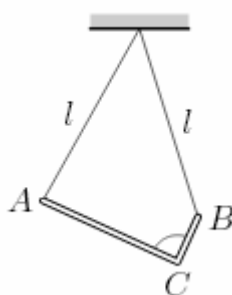
Homogenní nosník ve tvaru písmene L zanedbatelné tloušťky, jehož delší rameno má třikrát větší délku než rameno kratší a jehož celková délka je l a celková hmotnost m , je zavěšen na dvou svislých laněch stejné délky l (obr. 3).

- Jakými silami působí lana v bodech A a B?
- Jakými silami budou lana působit, upevníme-li je v jednom bodě (obr. 4)

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ



Obr. 3



Obr. 4

3 Použitá literatura

[1]BEDNAŘÍK, Milan a Miroslava ŠIROKÁ. *Fyzika pro gymnázia*. 3. vyd. Praha: Prometheus, 2007, 288 s. ISBN 978-807-1961-765.

[2]Úlohy 1. kola 55. ročníku fyzikální olympiády. In: [online]. [cit. 2013-10-11]. Dostupné z: http://fyzikalniolympiada.cz/archiv/55/fo55a1_z.pdf

4 Kontakt na autora

PhDr. Pavel Kratochvíl, Ph.D.

Západočeská univerzita v Plzni, Katedra matematiky, fyziky a technické výchovy

E-mail: kratinek@kof.zcu.cz

Středisko služeb školám, Plzeň, Částkova 78
Podpora talentovaných žáků v Plzeňském kraji
CZ.1.07/1.2.03/02.0001

Tento projekt je v roce 2013 financován z rozpočtu Plzeňského kraje

ŘEŠENÍ ÚLOH – PRÁCE, VÝKON, ENERGIE

Pavel KRATOCHVÍL

1 Úvod

Přednáška se zabývala řešením příkladů na téma práce, výkon energie. Seznámila studenty se základními pojmy. Byly prodiskutovány vztahy mezi jednotlivými veličinami a problematika přeměny energie. Byly řešeny úlohy na toto téma s návazností na kinematiku a dynamiku.

2.1 Příklad č.1

Lokomotiva táhne vlak silou 60000 N a má výkon 1500 kW. Za jakou dobu ujede vzdálenost 42 km?

2.2 Příklad č.2

Řidič automobilu o hmotnosti 900 kg začne brzdít ve vzdálenosti 30 m od překážky. Třecí síla je 3800 N. Určete mezní rychlost, při které může ještě automobil zastavit před překážkou.

2.3 Příklad č.3

Sklep o plošné výměře 50 m² je ve výšce 3 m pod úrovní okolí a zaplavila ho voda do výšky 80 cm. Za jakou dobu vyčerpá vodu čerpadlo o příkonu 1 kW a účinnosti 75 %?

2.4 Příklad č.4

Nákladní vlak hmotnosti 600 t vyjíždí ze stanice a po pěti minutách rovnoměrně zrychleného pohybu po vodorovných kolejích měl rychlost 60 km/h. Jak velkou práci vykonala tažná síla lokomotivy, jeli koeficient tření 0,01?

3 Použitá literatura

[1]BEDNAŘÍK, Milan a Miroslava ŠIROKÁ. *Fyzika pro gymnázia*. 3. vyd. Praha: Prometheus, 2007, 288 s. ISBN 978-807-1961-765.

[2] Příklady práce, výkon, energie. [online]. [cit. 2013-10-11]. Dostupné z: <http://fyzika.gjvj.cz/index.php/mechanika/prace-vykon/183-priklady-prace-vykon-energie>

4 Kontakt na autora

PhDr. Pavel Kratochvíl, Ph.D.

Západočeská univerzita v Plzni, Katedra matematiky, fyziky a technické výchovy

E-mail: kratinek@kof.zcu.cz

Středisko služeb školám, Plzeň, Částkova 78
Podpora talentovaných žáků v Plzeňském kraji
CZ.1.07/1.2.03/02.0001

Tento projekt je v roce 2013 financován z rozpočtu Plzeňského kraje

ŘEŠENÍ ÚLOH Z TERMIKY – TEPELNÁ VÝMĚNA

Pavel KRATOCHVÍL

1 Úvod

Přednáška se zabývala řešením příkladů na téma tepelné výměny. Seznámila studenty se základními pojmy (teplota, teplo) a s různými způsoby předávání tepla. Byly řešeny úlohy především na kalorimetrickou rovnici včetně skupenských přechodů.

2.1 Příklad č.1

Hliníkový předmět o hmotnosti 0,8 kg a teplotě 250°C byl vložen do vody o hmotnosti 1,5 kg a teplotě 15°C. Jaká je teplota soustavy po dosažení rovnovážného stavu?

2.2 Příklad č.2

Ocelový předmět o hmotnosti 0,5 kg byl vložen do vody o objemu 2 l a teplotě 15°C. Výsledná teplota soustavy po dosažení rovnovážného stavu je 28°C. Jakou teplotu měl ocelový předmět před vložením do vody?

2.3 Příklad č.3

V kalorimetru o tepelné kapacitě 63 J/K je olej o hmotnosti 250 g a teplotě 12°C. Do oleje ponoříme měděný váleček o hmotnosti 500 g a teplotě 100°C. Výsledná teplota soustavy po dosažení rovnovážného stavu je 33°C. Určete výslednou tepelnou kapacitu použitého oleje.

2.4 Příklad č.4

Do sklenice s vodou o teplotě 22°C a objemu 0,5 l jsme vhodili pět kostek ledu ve tvaru krychle o délce hrany 2,5cm a teplotě -15°C. Jaká je teplota soustavy po dosažení rovnovážného stavu?

3 Použitá literatura

[1]KAREL BARTUŠKA, Emanuel Svoboda. *Fyzika pro gymnázia: molekulová fyzika a termika*. Dotisk 4. vyd. Praha: Prometheus, 2001. ISBN 978-807-1962-007.

4 Kontakt na autora

PhDr. Pavel Kratochvíl, Ph.D.

Západočeská univerzita v Plzni, Katedra matematiky, fyziky a technické výchovy

E-mail: kratinek@kof.zcu.cz

Středisko služeb školám, Plzeň, Částkova 78
Podpora talentovaných žáků v Plzeňském kraji
CZ.1.07/1.2.03/02.0001

Tento projekt je v roce 2013 financován z rozpočtu Plzeňského kraje



INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

ZAJÍMAVÉ EXPERIMENTY

Pavel KRATOCHVÍL

1 Úvod

Přednáška se zabývala zajímavými a nevěděními experimenty., vysokonapětové pokusy za pomoci rozkladného transformátoru rumcorfova induktoru, teslova transformátoru. a experimenty s kapalným dusíkem.

2.1 Experimenty s vývěvou

Magdeburské polokoule, Nafukování předmětů, přečerpávání vody, vážení vzduchu, měření teploty vakua – přenos tepla zářením

2.2 Vysokonapětové experimenty

Rozkladný transformátor - vedení proudu ve skle, model bleskojistky, přenos energie pomocí VN. Rumcorfův induktor – výboje ve vzduchu a výbojové trubici. Teslův transformátor – funkce hromosvodu, plazmová koule, rozsvícení zářivky na dálku.

2.3 Experimenty s kapalným dusíkem

Levitace supravodiče I. a II. typu, lámání gumy, ledový salát, exploze PET lahve.

3 Kontakt na autora

PhDr. Pavel Kratochvíl, Ph.D.

Západočeská univerzita v Plzni, Katedra matematiky, fyziky a technické výchovy

E-mail: kratinek@kof.zcu.cz

Středisko služeb školám, Plzeň, Částkova 78
Podpora talentovaných žáků v Plzeňském kraji
CZ.1.07/1.2.03/02.0001

Tento projekt je v roce 2013 financován z rozpočtu Plzeňského kraje

JAK ZPRACOVAT ZÁZNAM Z FYZIKÁLNÍHO MĚŘENÍ, PRAKTICKÁ MĚŘENÍ

Robert KUNESCH

1 Úvod

Cílem úvodu přednášky je motivování studentů k danému tématu. Účastníkům kempu je proto podrobně vysvětleno, proč je nutné naučit se protokolovat naměřené výsledky fyzikálních (i jiných) měření, kontinuita s budoucími vědeckými pracemi, apod. V laboratořích si mají možnost prohlédnout praktické úlohy, kterými jsou úkolování vysokoškolští studenti. Hlavní motivací je plánovaná samostatná práce v závěru přednášky.

2 Elaborát, protokol.

Studenti jsou dotazováni na dosud nabyté vědomosti v dosavadní výuce fyziky či v jiných předmětech. Jsou jim ukázány různé druhy zpracování výsledků měření, jsou upozorněni na mnohá úskalí, která na ně mohou čekat při vytváření protokolu nebo i při samotném měření, které vykonali

2.1 Náležitosti jednotlivých zpracování

Na konkrétních příkladech jsou ukázané nejdůležitější formální náležitosti, které musí řádný elaborát obsahovat, jako je úvod, čísla přístrojů, použité vztahy, atd. Je vysvětlen zásadní význam závěru u každého protokolu, opět s ohledem na další praktické možnosti.

2.2 Tabulky

Studenti jsou konfrontováni se svými znalostmi a zkušenostmi z dosavadního studia při práci s programy Word a Excel. Jsou jim ukázány různé metody zpracování a následná tabelování výsledků s důrazem na přehlednost. Zvýrazněný apel na smysluplnost zmiňované části protokolu.

2.3 Grafy

Účastníkům kurzu jsou ukázány nejvýhodnější a nevhodnější metody zpracování pomocí grafů. Vše s ohledem na speciální potřeby fyziky. Je jim zdůrazněna fce grafu pro výsledek samotného měření a motivace k jejich co možná nejpřesnějšímu provedení. Jsou zasvěceni do dalších důležitých údajů, které mohou grafy poskytovat, jako je spojnice trendu, rovnice křivky v grafu, hodnota spolehlivosti, apod.

2.4 Chyby měření

Studentům jsou vysvětleny různé druhy chyb měření, hodnocení přesnosti měření, vysvětlení chyb u přímých i nepřímých měření. Důraz kladen na vysvětlení významu určování chyb měření.

2.5 Závěr protokolu

Účastníkům kurzu jsou v poslední kapitole přednášky zdůrazněna nejdůležitější část protokolu. Tím je závěr, který spojujeme zároveň s hodnocením. Důraz je v této části kladen na význam vlastního názoru a především vlastního přínosu v kontextu celého zpracování.

3 Závěr

Na závěr je vše se studenty zopakováno na jednoduché praktické ukázce v laboratořích. Demonstrace bude znázorněna na laboratorní úloze: „Rychlost střely“.

4 Použitá literatura

BROŽ, Jaromír; a kolektiv. Základy fyzikálních měření I. 1. vyd. Praha: SPN, 1967. 524 s. ISBN 16-924-67.

[HAVEL, Václav; PETŘÍK, Josef; RAUNER, Karel. Fyzikální praktikum I: Určeno stud. 1. a 2. roč. učitelství VVP \[všeobecně vzdělávací předměty\]. Plzeň: Západočeská univerzita, 1992. ISBN 80-7043-047-8.](#)

5 Kontakt na autora

Robert Kunesch, Mgr.
OF KMT FPE ZČU
kotal@kmt.zcu.cz

ZÁKLADY ZPRACOVÁNÍ FYZIKÁLNÍHO MĚŘENÍ

Robert KUNESCH

1 Úvod

Vzhledem k výzkumem prověřené averzi studentů ohledně fyzikálních měření, je hlavním úkolem úvodu přednášky motivace studentů k danému tématu. Studentům je proto podrobně vysvětlováno, proč je nutné naučit se protokolovat naměřené výsledky fyzikálních (i jiných) měření, kontinuita s možností budoucího profesního zaměření, respektive vědeckými pracemi v jejich dalším studiu či kariéře.

2 Zpracování fyzikálního měření

Účastníci kempu jsou dotazováni na dosud nabyté vědomosti se zpracováním obecného měření v dosavadní výuce fyziky či v jiných předmětech. Jsou jim ukázány různé druhy zpracování výsledků měření, jsou upozorněni na mnohá úskalí, která na ně mohou čekat při vytváření protokolu nebo i při samotném předchozím měření. Důraz kladen na vysvětlení významu určování chyb měření.

2.1 Náležitosti elaborátu

Na konkrétních příkladech jsou ukázané nejdůležitější formální náležitosti, které musí řádný protokol obsahovat, jako je úkol, úvod, čísla přístrojů, teoretická část, použité vztahy, atd. Je vysvětlen zásadní význam závěru a chyb měření u každého protokolu, ukázky dalších praktických možností.

2.2 Tabulky a grafy

Studenti jsou konfrontováni se svými znalostmi a zkušenostmi z dosavadního studia při práci s programy Word a Excel. Jsou jim ukázány různé metody zpracování a následná tabelování výsledků s důrazem na přehlednost. Jsou jim ukázány nejvýhodnější a nejvhodnější metody zpracování pomocí grafů. Vše s ohledem na speciální potřeby fyziky. Je jim zdůrazněna fce grafu pro výsledek samotného měření na bázi významu fce grafu ve fyzice obecně a motivace k jejich co možná nej přesnějšímu provedení. Jsou zasvěceni do dalších důležitých údajů, které mohou grafy poskytovat, jako je spojnice trendu, rovnice křivky v grafu, hodnota spolehlivosti, apod.

2.3 Chyby měření a závěr

Účastníkům kurzu jsou v poslední kapitole přednášky zdůrazněny nejdůležitější části protokolu. Chyby měření a závěr, který spojujeme zároveň s hodnocením. Důraz je v této části kladen na význam vlastního názoru a především vlastního přínosu v kontextu celého zpracování.



INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

3 Závěr

Na závěr je vše se studenty zopakováno v uceleném bloku pomocí ukázky přímého zpracování protokolu fyzikálního měření.

4 Použitá literatura

[HAVEL, Václav; PETŘÍK, Josef; RAUNER, Karel. Fyzikální praktikum I: Určeno stud. 1. a 2. roč. učitelství VVP \[všeobecně vzdělávací předměty\]. Plzeň: Západočeská univerzita, 1992. ISBN 80-7043-047-8.](#)

BROŽ, Jaromír; a kolektiv. Základy fyzikálních měření I. 1. vyd. Praha: SPN, 1967. 524 s. ISBN 16-924-67.

5 Kontakt na autora

Robert Kunesch, Mgr.
OF KMT FPE ZČU
kotal@kmt.zcu.cz

Středisko služeb školám, Plzeň, Částkova 78
Podpora talentovaných žáků v Plzeňském kraji
CZ.1.07/1.2.03/02.0001

Tento projekt je v roce 2013 financován z rozpočtu Plzeňského kraje

BYL JSEM V CERNU

Pavel MASOPUST

1 Úvod

Přednáška shrnovala průběh odborné exkurze studentů a zaměstnanců ZČU do výzkumného střediska CERN.

Stručně rekapitulovala historii instituce, její geografické umístění, poslání a předmět výzkumu. Studenti byli seznámeni se základními vlastnostmi standardního modelu částic a jeho částí, které jsou v CERN studovány. Prezentace použita v přednášce je dostupná jako [3].

Podrobnější informace o CERN, standardním modelu částic a dalších částech přednášky jsou v [1], [2], [4], [5].

2 Použitá literatura

[1] Wikipedia, *Standardní model*, [Online], [cit. 6. 9. 2013],

Dostupné na internetu: <http://cs.wikipedia.org/wiki/Standardn%C3%AD_model>

[2] Wikipedia, *CERN*, [Online], [cit. 6. 9. 2013],

Dostupné na internetu: <<http://en.wikipedia.org/wiki/CERN>>

[3] MASOPUST P., *Byl jsem v CERNu*, [Online], [cit. 6. 9. 2013],

Dostupné na internetu: <<http://home.zcu.cz/~pmasop/cern.pdf>>

[4] Cern, *The Large Hadron Collider*, [Online], [cit. 6. 9. 2013],

Dostupné na internetu: <<http://home.web.cern.ch/about/accelerators/large-hadron-collider>>

[4] Wikipedia, *Velký hadronový urychlovač*, [Online], [cit. 6. 9. 2013],

Dostupné na internetu: <<http://cs.wikipedia.org/wiki/LHC>>

3 Kontakt na autora

PhDr. Pavel Masopust, PhD.

ZČU, FPE, katedra matematiky, fyziky a technické výchovy

Klatovská 51, Plzeň

pmasop@kmt.zcu.cz

KIRCHHOFFOVY ZÁKONY

Pavel MASOPUST

1 Úvod

Přednáška ukázala, jak pomocí Kirchhoffových zákonů řešit základní úlohy teorie obvodů. Zmíněna byla i aplikace pro výpočet střídavých obvodů a přechodových jevů v obvodech s kondenzátory.

O zákonech lze nalézt mnoho informací jak v odborné literatuře, tak na internetu. V použité literatuře je seznam počítaných příkladů i teorie v množství dostatečném k dokonalému pochopení přednesené problematiky. Především [1] obsahuje množství multimediálních materiálů a komentovaných příkladů.

2 Použitá literatura

[1] REICHL J., *Kirchhoffovy zákony*, [Online], [cit. 1. 9. 2013],

Dostupné na internetu: <<http://fyzika.jreichl.com/index.php?page=257&sekce=browse>>

[2] SVOBODA J., *Kirchhoff's Laws*, [Online], [cit. 3. 9. 2013],

Dostupné na internetu:

<http://people.clarkson.edu/~jsvoboda/Syllabi/ES250/ckts/KCL_KVL.pdf>

[3] Wikipedie, *Kirchhoffovy zákony*, [Online], [cit. 2. 9. 2013],

Dostupné na internetu: <http://cs.wikipedia.org/wiki/Kirchhoffovy_z%C3%A1kony>

3 Kontakt na autora

PhDr. Pavel Masopust, PhD.

ZČU, FPE, katedra matematiky, fyziky a technické výchovy

Klatovská 51, Plzeň

pmasop@kmt.zcu.cz



INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

ŘEŠENÍ OBTÍŽNĚJŠÍCH ÚLOH Z ELEKTŘINY A MAGNETISMU

Pavel MASOPUST

1 Úvod

Přednáška demonstrovala použití obtížnějších metod k řešení příkladů z oblasti elektřiny a magnetismu. Seznámila studenty (nebo rozšířila znalost) použitím Coulombova zákona, Gaussovy věty elektrostatiky, Ampérova zákona. Zmíněno bylo i základní použití diferenciálního počtu a jeho souvislost s příklady z elektřiny a magnetismu. Řešeny byly příklady především z [1] (sekce II, III, IV, V, VI, VII, IX) a [2] (část II, kapitoly 22, 23, 24, 26, 28, 29 30). Příklady (většinou řešené) lze najít v těchto publikacích.

2 Použitá literatura

[1] LIAO S., DOURMASHKIN P., BELCHER J., *Fyzika 8.02: Elektřina a magnetismus*, [Online], [cit. 3. 9. 2013],

Dostupné na internetu: < <http://www.aldebaran.cz/elmg/kurz.html> >

[2] HALLIDAY, D., RESNICK, R., WALKER, J., *FYZIKA*. Prometheus, 2000, ISBN 81-7196-213-9

3 Kontakt na autora

PhDr. Pavel Masopust, PhD.

ZČU, FPE, katedra matematiky, fyziky a technické výchovy

Klatovská 51, Plzeň

pmasop@kmt.zcu.cz

Středisko služeb školám, Plzeň, Částkova 78
Podpora talentovaných žáků v Plzeňském kraji
CZ.1.07/1.2.03/02.0001

Tento projekt je v roce 2013 financován z rozpočtu Plzeňského kraje

EXPONENCIÁLNÍ ZÁVISLOST FYZIKÁLNÍCH VELIČIN

Petr MAZANEC

1 Úvod

V přednášce byly ukázány 2 příklady fyzikálních dějů s exponenciální závislostí.

2 Stat'

Příklad 1 (teplotní délková roztažnost tyče)

Odvoďte závislost délky l tyče na její teplotě t , jestliže při teplotě t_0 má tyč délku l_0 .

Řešení:

Změna délky tyče Δl je přímo úměrná změně teploty Δt a původní délce tyče l .

$$\Delta l = \alpha \Delta t$$

Koeficient přímé úměrnosti α je součinitel teplotní délkové roztažnosti materiálu tyče. Tento vztah platí pro malé změny obou veličin ($\Delta l \rightarrow 0$ $\alpha \Delta t \rightarrow 0$). V tomto případě můžeme změny nahradit diferenciály a dostaneme diferenciální rovnici, kterou vyřešíme separací proměnných a dvěma určitými integrály:

$$dl = \alpha \cdot l \cdot dt$$

$$\int_{l_0}^l \frac{dl}{l} = \alpha \cdot \int_{t_0}^t dt$$

$$[\ln l]_{l_0}^l = \alpha \cdot [t]_{t_0}^t$$

$$\ln l - \ln l_0 = \alpha(t - t_0) = \alpha \Delta t$$

$$\ln \left(\frac{l}{l_0} \right) = \alpha \Delta t = x$$

Veličina x je bezrozměrná veličina.

$$\frac{l}{l_0} = e^x$$

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Hledaná závislost tedy je exponenciální a rostoucí (tyč se při zahřívání prodlužuje a při ochlazení zkracuje).

$$l = l_0 \cdot e^x = l_0 \cdot e^{\alpha \Delta t}$$

Součinitel $\alpha \approx 10^{-5} \text{K}^{-1}$ a pro $\Delta t = \Delta T \in (-100\text{K}; +100\text{K})$ je $x \in (-0,001; 0,001)$.

Protože je $x \rightarrow 0$, bude platit velmi dobře i původní rovnice pro změny

$$\Delta l = l - l_0 \quad \alpha \Delta t = x - x_0$$

$$l - l_0 = \alpha l_0 \Delta t$$

Úpravou dostaneme jednoduchý vztah lineární

$$l = l_0 \cdot (1 + \alpha \Delta t) = l_0 \cdot (1 + x)$$

Porovnáním přesné exponenciální a přibližné lineární závislosti dostáváme

$$e^x \approx 1 + x \quad \text{pro } x \rightarrow 0$$

Přímka o rovnici $y = 1 + x$ je tečnou exponenciální křivky $y = e^x$ v bodě $x = 0$.

Kvádr má při teplotě t_0 objem $V_0 = a_0 b_0 c_0$. Potom při teplotě t má objem

$$V = abc = a_0 \cdot e^x \cdot b_0 \cdot e^x \cdot c_0 \cdot e^x = V_0 \cdot e^{3x}$$

$$V = V_0 \cdot e^{3\alpha \Delta t} = V_0 \cdot e^{\beta \Delta t} \quad \beta = 3\alpha$$

Pro malé teplotní změny objemu můžeme odvodit jednodušší vztah:

$$e^{3x} = (e^x)^3 \approx (1 + x)^3 = 1 + 3x + 3x^2 + x^3 \approx 1 + 3x$$

Vyšší mocniny x můžeme zanedbat ($x \rightarrow 0 \Rightarrow x^2 \rightarrow 0 \Rightarrow x^3 \rightarrow 0$) a funkci linearizovat pro malá x , blíží se k nule.

Přímka o rovnici $y = 1 + 3x$ je tečnou exponenciální křivky $y = e^{3x}$ v bodě $x = 0$.

Tyto dva výsledky jdou zobecnit na větu:

Přímka o rovnici $y = 1 + kx$ je tečnou exponenciální křivky $y = e^{kx}$ v bodě $x = 0$.
 $e^{kx} \approx 1 + kx$ pro $x \rightarrow 0$ a pro $k \in \mathbb{R}$

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Pro malá x tedy platí:

$$V = V_0 \cdot (1 + \beta \Delta t) \quad \beta = 3\alpha$$

Příklad 2 (radioaktivní rozpad jader atomů)

Odvoďte závislost počtu nerozpadlých jader N radioaktivního materiálu na čase t , jestliže na začátku pozorování v čase $t = 0$ byl počet nerozpadlých jader ve vzorku N_0 a poločas rozpadu je T .

Řešení:

Za poločas rozpadu klesne původní počet jader na poloviční počet, protože druhá polovina jader se rozpadla rozpadem α nebo β . Potom platí:

$$t = 0 \rightarrow N = N_0$$

$$t = T \rightarrow N = \frac{N_0}{2}$$

$$t = 2T \rightarrow N = \frac{N_0}{4}$$

$$t = 3T \rightarrow N = \frac{N_0}{8}$$

$$t = kT \quad \Rightarrow \quad N = \frac{N_0}{2^k} = N_0 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^k = N_0 \cdot 2^{-k} \quad k = \frac{t}{T}$$

Po dosazení dostaneme zákon radioaktivního rozpadu:

$$N = N_0 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{T}} = N_0 \cdot 2^{-\frac{t}{T}}$$

Počet nerozpadlých jader exponenciálně klesá s časem. Počet rozpadlých jader x v čase t je $x = N_0 - N = -\Delta N$.

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Ted' odvodíme stejný zákon řešením diferenciální rovnice. Počet x rozpadlých jader za malý časový interval Δt je přímo úměrný původnímu počtu jader a délce časového intervalu.

$$x = -\Delta N = \lambda \cdot N \cdot \Delta t$$

λ je rozpadová konstanta radionuklidu.

Tento vztah opět platí pro malé změny obou veličin ($\Delta N \rightarrow 0$ a $\Delta t \rightarrow 0$). V tomto případě můžeme změny nahradit diferenciály a dostaneme diferenciální rovnici, kterou vyřešíme separací proměnných a dvěma určitými integrály:

$$dN = -\lambda \cdot N \cdot dt$$

$$\int_{N_0}^N \frac{dN}{N} = -\lambda \cdot \int_0^t dt$$

$$[\ln N]_{N_0}^N = -\lambda \cdot [t]_0^t$$

$$\ln \left(\frac{N}{N_0} \right) = -\lambda t = -x$$

$$N = N_0 \cdot e^{-x} = N_0 \cdot e^{-\lambda t}$$

Dostali jsme vyjádření rozpadového zákona pomocí přirozené exponenciální funkce. Platí tedy exponenciální závislost pro $t \geq 0$.

$$N_0 \cdot 2^{-\frac{t}{T}} = N_0 \cdot e^{-\lambda t}$$

$$2^{-\frac{t}{T}} = e^{-\lambda t}$$

Obě strany rovnosti zlogaritmujeme přirozeným logaritmem:

$$\ln \left(2^{-\frac{t}{T}} \right) = \ln \left(e^{-\lambda t} \right)$$

$$-\frac{t}{T} \cdot \ln 2 = -\lambda t$$

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

$$\lambda = \frac{\ln 2}{T}$$

Úpravou jsme dostali vztah mezi poločasem rozpadu a rozpadovou konstantou.

Závěr: $N = N_0 \cdot 2^{-\frac{t}{T}} = N_0 \cdot e^{-\lambda t}$ $\lambda = \frac{\ln 2}{T}$

3 Závěr

Na příkladech teplotní roztažnosti a radioaktivního rozpadu jsme ukázali rostoucí a klesající exponenciální závislost mezi fyzikálními veličinami a řešení diferenciální rovnice $dy = k \cdot y \cdot dt$ separací proměnných.

4 Použitá literatura:

časopis Kvant, číslo 12, ročník 1972

5 Kontakt na autora:

Mgr. Petr Mazanec
Gymnázium Plzeň, Mikulášské nám. 23
pmazanec@mikulasske.cz

ŘEŠENÍ ROVNIC VE FYZIKÁLNÍCH ÚLOHÁCH

Petr MAZANEC

1 Úvod

V přednášce bylo ukázáno využití matematického řešení kvadratických, exponenciálních a goniometrických rovnic při řešení fyzikálních úloh.

2 Stat'

Příklad 1

Kaskadér o hmotnosti $m=90$ kg, přivázaný k pružnému lanu, používanému na bungee-jumping, o tuhosti $k=50\text{N/m}$ a délce v nezatíženém stavu $l=30\text{m}$, skáče z vrcholu mostu, který je ve výšce h nad hladinou přehrady. Určete tuto výšku, jestliže ho pružné lano při pádu zastaví těsně nad hladinou a pak ho vymrští zpět nahoru. Zanedbejte odpor vzduchu při prvním pádu a předpokládejte, že lano při deformaci vyhovuje Hookovu zákonu.

Řešení:

Úlohu vyřešíme užitím zákona zachování mechanické energie, který platí při zanedbání odporu vzduchu.

Polohová energie kaskadéra v tíhovém poli Země na začátku pádu v poloze 1 se přemění na polohovou energii deformovaného lana v nejnižší poloze 2 při pádu brzděném natahujícím se pružným lanem. Nulovou hladinu polohové energie v tíhovém poli země volíme v poloze 2. V obou polohách je kinetická energie kaskadéra nulová.

Tedy platí:

$$E_1 = E_2$$

$$mgh = \frac{kx^2}{2}$$

Z geometrie obou poloh vyplývá vztah $h = l + x$, jehož dosazením do předchozí rovnice dostaneme kvadratickou rovnici pro prodloužení lana x při deformaci v poloze 2.

$$kx^2 - 2mgx - 2mgl = 0$$

Podmínka pro neznámé prodloužení x je

$$x > 0$$

Obecně můžeme řešení vyjádřit ve tvaru

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

$$x_{1,2} = \frac{mg \pm \sqrt{m^2 g^2 + 2mgkl}}{k}$$

Číselně vychází při dosazení $g = 9,81 \text{ ms}^{-2}$

$$x_1 = 54,7\text{m} \quad x_2 = -19,4\text{m}$$

Záporné řešení nesplňuje podmínku pro prodloužení a nemá fyzikální smysl, protože lano se nemůže při kmitu směrem vzhůru zkracovat.

Tedy maximální prodloužení lana je $x = 54,7\text{m}$ a výška mostu
 $h = l + x = 30\text{m} + 54,7\text{m} = 84,7\text{m}$.

Příklad 2

Odpor termistoru v digitálním teploměru s měřicím rozsahem $t \in \langle 0^\circ\text{C}; 100^\circ\text{C} \rangle$ je funkcí termodynamické teploty čidla T v kelvinech podle vztahu

$$R = R_B \cdot e^{\frac{B}{T}}$$

kde B a R_B jsou konstanty pro daný polovodičový materiál. Při teplotě 25°C jsme naměřili odpor termistoru 100Ω a při teplotě 25°C odpor 40Ω . Vypočítejte :

- konstanty B a R_B
- odpor termistoru při teplotě 100°C
- teplotu ve $^\circ\text{C}$, při které má termistor odpor 50Ω

Řešení:

Využijeme funkční předpis a matematického vztahu $\ln(e^x) = x$.

$$R_0 = R_B \cdot e^{\frac{B}{T_1}} \quad T_1 = 273,15\text{K}$$

$$R_{25} = R_B \cdot e^{\frac{B}{T_2}} \quad T_2 = 298,15\text{K}$$

$$R_{100} = R_B \cdot e^{\frac{B}{T_3}} \quad T_3 = 373,15\text{K}$$

$$R = R_B \cdot e^{\frac{B}{T}} \quad T \in \langle 273,15\text{K}; 373,15\text{K} \rangle \quad t = T - 273,15$$

Vydělením první a druhé rovnice dostaneme

$$\frac{R_0}{R_{25}} = e^x \quad \text{kde } x = \frac{B \cdot (T_2 - T_1)}{T_2 \cdot T_1}$$

Řešením této exponenciální rovnice logaritmováním obou stran rovnice přirozeným logaritmem podle výše uvedeného matematického vztahu dostaneme

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

$$x = \ln\left(\frac{R_0}{R_{25}}\right)$$

$$B = \frac{T_2 \cdot T_1}{T_2 - T_1} \cdot \ln\left(\frac{R_0}{R_{25}}\right)$$

Číselně vychází $B = 2985K$.

Užitím B z první rovnice vyjádříme pomocí vztahu $\frac{1}{e^x} = e^{-x}$

$$R_B = \frac{R_0}{e^{\frac{B}{T_1}}} = R_0 \cdot e^{-\frac{B}{T_1}}$$

Číselně vychází $R_B = 1,795 \cdot 10^{-3} \Omega$.

Dosazením B a R_B do třetí rovnice vypočítáme $R_{100} = 5,3 \Omega$.

Z funkčního předpisu vyjádříme

$$\frac{R}{R_B} = e^x \text{ kde } x = \frac{B}{T}$$

Řešením této exponenciální rovnice dostáváme

$$x = \ln\left(\frac{R}{R_B}\right)$$

$$T = \frac{B}{\ln\left(\frac{R}{R_B}\right)}$$

$$t = \frac{B}{\ln\left(\frac{R}{R_B}\right)} - 273,15$$

Číselně pro $R=50\Omega$ dostaneme $t = 18,5^\circ C$.

Příklad 3

Za jakou dobu t od počátku pádu se kaskadér v příkladu 1 dostane do nejnižší polohy, jestliže opět v tomto časovém intervalu zanedbáme odpor vzduchu?

Řešení:

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Pád můžeme rozdělit na 2 úseky – volný pád na dráze $l = 30m$ než se napne lano za dobu t_1 a na něj navazující část netlumeného kmitu na dráze $x_1 = 54,7m$ za dobu t_2 . Celková doba pádu $t = t_1 + t_2$.

Ze vztahu pro dráhu volného pádu dostaneme

$$l = \frac{gt_1^2}{2}$$

$$t_1 = \sqrt{\frac{2l}{g}} = 2,47s$$

Těsně před napnutím lana má okamžitou rychlost $v_1 = gt_1 = 24,26m \cdot s^{-1}$.

Kmity kaskadéra se díky odporu vzduchu nakonec utlumí, a zůstane v klidu viset v rovnovážné poloze s prodloužením lana x_0 . V této poloze je tíhová síla svisle dolů v rovnováze se silou pružiny svisle vzhůru. Z toho odvodíme velikost x_0 .

$$F_G = F_P$$

$$mg = kx_0$$

$$x_0 = \frac{mg}{k} = 17,7m$$

V této rovnovážné poloze je okamžitá výchylka y z této polohy při kmitání nulová. Pokud orientujeme osu y svisle vzhůru, můžeme okamžitou výchylku y v čase t od začátku kmitu vyjádřit $y = x_0 - x$, kde x je okamžité prodloužení v čase t .

Považujeme-li část kmitu z polohy $x = 0$ do polohy $x = x_1 = 54,7m$ za netlumený kmit přes rovnovážnou polohu $x = x_0 = 17,7m$, potom jeho amplituda výchylky je $y_m = x_1 - x_0 = 37m$.

Perioda netlumeného kmitu je

$$T = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{m}{k}} = 8,43s$$

a úhlová frekvence netlumených kmitů $\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{\sqrt{5}}{3} \text{ rad} \cdot s^{-1}$.

Počáteční výchylka kmitajícího kaskadéra v čase $t = 0$ je $y_0 = x_0 = 17,7m$ a počáteční rychlost kmitání $v_0 = -v_1 = -24,26m \cdot s^{-1}$ (v_0 má opačný směr než osa y , a proto je záporná!).

Amplituda rychlosti $v_m = \omega y_m = 27,58m \cdot s^{-1}$.

Pro okamžitou výchylku y a okamžitou rychlost v kaskadéra při netlumeném kmitání platí tyto vztahy v závislosti na čase t :

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

$$y = y_m \cdot \sin(\omega t + \varphi_0)$$

$$v = v_m \cdot \cos(\omega t + \varphi_0)$$

Dosazením $t = 0$ a počátečních podmínek kmitu y_0 a v_0 dostaneme soustavu goniometrických rovnic pro počáteční fázi kmitu φ_0 .

$$\sin\varphi_0 = \frac{y_0}{y_m} = 0,4784 \quad \cos\varphi_0 = \frac{v_0}{v_m} = -0,8796$$

Řešení této soustavy leží v intervalu $(\frac{\pi}{2}; \pi)$ a je rovno přibližně $\varphi_0 = 2,64 \text{ rad}$.

Nyní již můžeme počítat dobu kmitu t_2 od okamžiku $t = 0$ do nejnižší polohy, kde $y = -y_m = -37 \text{ m}$ a $v = 0$. Pro tyto hodnoty okamžité výchylky a rychlosti dostáváme soustavu goniometrických rovnic s neznámou t a t_2 je nejmenší kladné řešení libovolné z těchto rovnic. Pro jednodušší výpočet si vybereme okamžitou rychlost, která je nulová v nejnižší poloze. Proto platí:

$$\cos(\omega t + \varphi_0) = 0$$

$$\omega t + \varphi_0 = \frac{\pi}{2} + k\pi \quad k \in \mathbb{Z}$$

Nejmenší kladné řešení dostaneme pro $k = 1$:

$$\omega t_2 + \varphi_0 = \frac{3\pi}{2}$$

$$t_2 = \frac{3\pi - 2\varphi_0}{2\omega} = 2,78 \text{ s}$$

Celková doba pádu do nejnižšího bodu je $t = t_1 + t_2 = 2,47 \text{ s} + 2,78 \text{ s} = 5,25 \text{ s}$.

3 Závěr

Ve třech příkladech bylo ukázáno využití matematického řešení kvadratických, exponenciálních a goniometrických rovnic ve fyzikálních úlohách.

4 Použitá literatura

ŠEDIVÝ, P.: Teplotní závislosti fyzikálních veličin, knihovnička FO, studijní text

5 Kontakt na autora

Mgr. Petr Mazanec

Gymnázium Plzeň, Mikulášské nám. 23

pmazanec@mikulasske.cz

TEPLOTNÍ ROZTAŽNOST PEVNÝCH LÁTEK, KAPALIN A PLYNŮ, TEPELNÁ VÝMĚNA A ZMĚNY SKUPENSTVÍ LÁTKY

Petr MAZANEC

1 Úvod

Na třech úlohách z klasické termodynamiky bylo ukázáno využití základních zákonů termodynamiky a matematické řešení těchto úloh.

2 Obsah

Příklad 1 – teplotní roztažnost

Dilatometr, na kterém je vyznačen objem $V_1 = 100 \text{ cm}^3$ a vztažná teplota $t_1 = 20 \text{ }^\circ\text{C}$, je vyroben ze skla SIMAX, jehož teplotní součinitel délkové roztažnosti je $\alpha_s = 3,7 \cdot 10^{-6} \text{ K}^{-1}$. Při teplotě $t_2 = 26 \text{ }^\circ\text{C}$ byl naplněn měřenou kapalinou a na stupnici kapiláry byl odečten objem $V_{k2} = 0,3 \text{ cm}^3$. Po zvětšení teploty na $t_3 = 61 \text{ }^\circ\text{C}$ byl na stupnici kapiláry odečten objem $V_{k3} = 5,6 \text{ cm}^3$. Určete teplotní součinitel objemové roztažnosti měřené kapaliny β .

Řešení:

Teplotní součinitel objemové roztažnosti skla je $\beta_s = 3\alpha_s = 11,1 \cdot 10^{-6} \text{ K}^{-1}$.

$$V = (V_1 + V_k)[1 + \beta_s(t - t_1)] \quad (1)$$

Podle vzorce (1) vypočítáme objemy kapaliny při teplotách t_2 a t_3 :

$$V_2 = 100,30668 \text{ cm}^3, \quad V_3 = 105,64806 \text{ cm}^3.$$

Platí:

$$V_2 = V_1 [1 + \beta(t_2 - t_1)], \quad V_3 = V_1 [1 + \beta(t_3 - t_1)],$$

kde V_1 je objem měřené kapaliny při teplotě t_1 . Úpravou dostaneme:

Středisko služeb školám, Plzeň, Částkova 78
Podpora talentovaných žáků v Plzeňském kraji
CZ.1.07/1.2.03/02.0001

Tento projekt je v roce 2013 financován z rozpočtu Plzeňského kraje

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

$$\beta = \frac{V_3 - V_2}{V_2 \cdot (t_3 - t_1) - V_3 \cdot (t_2 - t_1)} = 1,54 \cdot 10^{-3} \text{ K}^{-1}$$

Zjednodušené řešení:

Zanedbáme-li teplotní roztažnost samotné kapiláry, můžeme napsat

$$V_k = V_{k3} - V_{k2} = V_1 \beta \Delta t - V_1 \beta_s \Delta t = V_1 (\beta - \beta_s) (t_3 - t_2) \approx V_1 \beta (t_3 - t_2)$$

$$\beta \approx \frac{V_{k3} - V_{k2}}{V_1 \cdot (t_3 - t_2)} = 1,51 \cdot 10^{-3} \text{ K}^{-1}$$

Oba výsledky se v mezích přesnosti měření shodují. Měřená kapalina má teplotní součinitel objemové roztažnosti $\beta \approx 1,5 \cdot 10^{-3} \text{ K}^{-1}$.

Příklad 2 – ohřívání ledu s vodou

V zimě nabral turista do rychlovarné konvice vodu s ledem o teplotě 0°C , vody bylo 900 g, ledu 600 g. Za jak dlouho se bude voda vařit při středním výkonu konvice 2,0 kW a účinnosti 85 % ?

Řešení:

Hmotnost vody $m_1 = 0,90 \text{ kg}$, hmotnost ledu $m_2 = 0,60 \text{ kg}$, teplota $t_1 = t_2 = 0^\circ\text{C}$,

výsledná teplota $t = 100^\circ\text{C}$. Měrná tepelná kapacita vody $c = 4200 \text{ J/kg} \cdot ^\circ\text{C}$,

měrné skupenské teplo tání ledu $l_t = 332 \text{ kJ/kg}$, $P = 2,0 \text{ kW}$, účinnost $\eta = 85 \%$,

hledaná doba je τ .

Teplu na roztátí ledu $Q_2 = m_2 \cdot l_t$, teplo na ohřátí vody $Q_1 = (m_1 + m_2) \cdot c \cdot (t - t_1)$.

$Q = P \cdot \eta \cdot \tau$ je teplo dodané konvicí za dobu τ .

Sestavíme kalorimetrickou rovnici pro tepelnou výměnu:

$$Q = Q_1 + Q_2$$

$$P \cdot \eta \cdot \tau = m_2 \cdot l_t + (m_1 + m_2) \cdot c \cdot (t - t_1).$$

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Odtud pak dostaneme

$$\tau = \frac{m_2 \cdot l_t + (m_1 + m_2) \cdot c \cdot (t - t_1)}{P \cdot \eta} = 488 \text{ s} = 8,1 \text{ min}$$

Voda se bude vařit asi za 8 minut.

Příklad 3 – klasický aerostat

Navrhněte balón kulového tvaru plněný heliem (klasický aerostat), který má sloužit k výstupu do výšky $h = 1\,500 \text{ m}$. Předpokládaná hmotnost konstrukce balónu (bez plynové náplně) a zátěže je $m_b = 1\,200 \text{ kg}$. Balon bude mít ve spodní části otvor, který umožní vyrovnávání tlaku s okolním atmosférickým tlakem (jinak by mohl aerostat po výstupu působením přetlaku prasknout). Pro zjednodušení předpokládejte, že teplota vzduchu $t_0 = 20,0 \text{ °C}$ se s výškou nemění a tlak se mění podle barometrické rovnice z počáteční hodnoty $p_{a0} = 1,01 \cdot 10^5 \text{ Pa}$ na hodnotu $p_a = 0,85 \cdot 10^5 \text{ Pa}$.

a) Určete potřebný objem V balonu, jeho poloměr r a hmotnost $m_{\text{He}0}$ heliové náplně pro výšku $h_0 = 0 \text{ m}$.

b) Jaký bude relativní úbytek hmotnosti helia po výstupu do výšky h , jestliže ve výšce $h_0 = 0 \text{ m}$ byl celý objem V balónu vyplněn heliem o tlaku $p_{a0} = 1,01 \cdot 10^5 \text{ Pa}$ a teplotě $t_0 = 20 \text{ °C}$ okolního vzduchu?

Při řešení předpokládejte, že termodynamické děje, při nichž se bude rovnoměrně vyrovnávat tlak helia s tlakem okolního vzduchu, probíhají dostatečně pomalu, a že přitom nebude do balónu vnikat vzduch.

Molární hmotnost vzduchu $M_m = 28,96 \cdot 10^{-3} \text{ kg} \cdot \text{mol}^{-1}$, molární hmotnost helia $M'_m = 4,003 \cdot 10^{-3} \text{ kg} \cdot \text{mol}^{-1}$. Předpokládejte konstantní tíhové zrychlení $g = 9,81 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$. Molární plynová konstanta $R = 8,314 \text{ J} \cdot \text{mol}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$.

Řešení:

a) Ve výšce h musí nastat rovnováha tíhových sil se vztlakovou silou.

Označíme-li m_v hmotnost vzduchu vytlačeného balónem o objemu V ve výšce h a m_{He} hmotnost heliové náplně v této výšce, musí z rovnováhy sil a podle Archimédova zákona platit

$$F_{vz} - F_{g\text{He}} - F_{gb} = 0$$

$$(m_v - m_{\text{He}} - m_b)g = 0$$

$$m_b = m_v - m_{\text{He}}$$

Hmotnosti plynů ve výšce h určíme užitím stavové rovnice:

$$m_v = \frac{p_a \cdot V \cdot M_m}{R \cdot T_0}$$

$$m_{\text{He}} = \frac{p_a \cdot V \cdot M'_m}{R \cdot T_0}$$

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

$$T_0 = t_0 + 273,15 = 293,15 \text{ K}$$

Pak z podmínky rovnováhy sil vychází

$$m_b = \frac{V \cdot (M_m - M'_m) \cdot p_a}{R \cdot T_0}$$

neboli potřebný objem balonu je

$$V = \frac{m_b \cdot R \cdot T_0}{(M_m - M'_m) \cdot p_a} = 1380 \text{ m}^3$$

a jeho poloměr je

$$r = \sqrt[3]{\frac{3 \cdot V}{4\pi}} = 6,91 \text{ m.}$$

Hmotnost helia ve výšce $h_0 = 0 \text{ m}$ je dána stavovou rovnicí pro vypočtený objem V :

$$m_{He0} = \frac{p_{a0} \cdot V \cdot M'_m}{R \cdot T_0} = 229 \text{ kg.}$$

b) Úbytek hmotnosti helia ve výšce h bude úměrný úbytku tlaku:

$$\Delta m_{He} = m_{He} - m_{He0} = \frac{V \cdot M'_m \cdot (p_a - p_{a0})}{R}$$

Relativní úbytek hmotnosti helia je

$$\frac{\Delta m_{He}}{m_{He0}} = \frac{p_a - p_{a0}}{p_{a0}} \approx -0,158 = -15,8 \%$$

3 Závěr

Ve třech úlohách bylo ukázáno využití zákonů termodynamiky při kvantitativním popisu fyzikálních dějů v látkách všech skupenství (teplotní roztažnost kapalin a pevných látek, tlak plynu) a při skupenských přeměnách a změnách teploty při tepelné výměně.

4. Použitá literatura

ŠEDIVÝ P. Teplotní závislosti fyzikálních veličin, knihovnička FO, studijní text
VYBÍRAL B. Mechanika ideálních plynů, knihovnička FO, studijní text

5 Kontakt na autora

Mgr. Petr Mazanec
Gymnázium Plzeň, Mikulášské nám. 23
pmazanec@mikulasske.cz

SOUČET NEKONEČNÉ ŘADY A URČITÝ INTEGRÁL VE FYZICE

Petr MAZANEC

1 Úvod

V přednášce byla ukázána na 2 fyzikálních úlohách souvislost součtu nekonečné řady a určitého integrálu.

2 Stat'

Příklad 1

Závislost okamžité rychlosti rovnoměrně zrychleného pohybu na čase je lineární funkcí

$$v = v_0 + at$$

V čase $t = 0$ jsou počáteční podmínky $v = v_0$ a $s = 0$.
Odvoďte funkční závislost dráhy s na čase t .

Řešení:

a) Součtem nekonečné řady

Časový interval

(0; t) rozdělíme na n intervalů o délce $\Delta t = \frac{t}{n}$ ($n \in \mathbb{N}$).

Pokud je n dostatečně velké přirozené číslo ($n \rightarrow \infty$), pak můžeme předpokládat že v těchto krátkých intervalech se rychlost téměř nezmění. Označme k pořadí intervalu od začátku pohybu ($k \in \{1, 2, 3, \dots, n\}$).

Určíme rychlosti v_k a dráhy $s_k = v_k \cdot \Delta t$ v těchto intervalech.

$$k = 1 \quad t = \Delta t \quad v_1 = v_0 + a\Delta t \quad s_1 = v_1 \cdot \Delta t$$

$$k = 2 \quad t = 2\Delta t \quad v_2 = v_0 + 2a\Delta t \quad s_2 = v_2 \cdot \Delta t$$

$$k = k \quad t = k\Delta t \quad v_k = v_0 + ka\Delta t \quad s_k = v_k \cdot \Delta t$$

⋮
⋮
⋮

$$k = n \quad t = n\Delta t \quad v_n = v_0 + na\Delta t \quad s_n = v_n \cdot \Delta t$$

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Celkovou dráhu $s(n)$ v intervalu $(0; t)$ pro zvolené dělení n intervalu vypočteme

$$s(n) = s_1 + s_2 + \dots + s_k + \dots + s_n = \sum_{k=1}^n s_k = \Delta t \cdot \sum_{k=1}^n v_k$$

$$\sum_{k=1}^n v_k = \sum_{k=1}^n (v_0 + ka\Delta t) = \sum_{k=1}^n v_0 + a\Delta t \cdot \sum_{k=1}^n k = nv_0 + a\Delta t \cdot \frac{n(n+1)}{2}$$

Při výpočtu předchozího součtu jsme využili známý vzorec pro součet přirozených čísel od 1 do n :

$$\sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}$$

Z výše odvozených vztahů plyne:

$$s(n) = nv_0\Delta t + a(\Delta t)^2 \cdot \frac{n(n+1)}{2}$$

Po dosazení za $\Delta t = \frac{t}{n}$ a úpravě dostaneme

$$s(n) = v_0 t + at^2 \cdot \frac{n+1}{2n}$$

Výsledek bude tím přesnější, čím bude číslo n větší (v limitě se musí blížit k ∞).

Tedy celková dráha $s = \lim_{n \rightarrow \infty} s(n) = v_0 t + at^2 \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{2n} = v_0 t + at^2 \cdot \frac{1}{2}$

Matematicky jsme provedli součet nekonečné řady pomocí limity poslounosti

$$f(n) = \frac{n+1}{2n} = \frac{1 + \frac{1}{n}}{2}$$

Z předchozí úpravy a z toho, že $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$ vyplývá, že $\lim_{n \rightarrow \infty} f(n) = \frac{1}{2}$.

Závěr: $s = v_0 t + \frac{at^2}{2}$

Tato úvaha o součtu nekonečných řad velmi malých kladných čísel blížících se k nule dovedla Isaaca Newtona k objevu integrálního počtu.

b) Pomocí určitého integrálu

V zápise určitého integrálu je $dt = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \Delta t$. Určitý integrál funkce $v(t)$ v mezích od 0 do t (v intervalu $(0; t)$) je roven součtu nekonečné řady v řešení a).

$$s = \int_0^t v \cdot dt = \int_0^t (v_0 + at) \cdot dt = v_0 \cdot \int_0^t dt + a \cdot \int_0^t t \cdot dt = v_0 \cdot [t]_0^t + a \cdot \left[\frac{t^2}{2} \right]_0^t$$

$$\text{Závěr: } s = v_0 t + \frac{at^2}{2}$$

Využili jsme pravidla a vzorce pro výpočet určitého integrálu, při jejichž znalosti velmi rychle dojdeme ke stejnému výsledku.

Příklad 2

Tenká tyč o hmotnosti m a délce l leží na ose x s levým krajním bodem v počátku soustavy souřadnic a začne se otáčet kolem osy z s úhlovou rychlostí ω tak, že je stále kolmá na osu z (z je pevná osa otáčení a počátek je pevný bod tyče při otáčení). Určete kinetickou energii tyče při otáčení.

Řešení:

 a) Součtem nekonečné řady

Délkový interval tyče $x \in (0; l)$ rozdělíme na n intervalů o délce $\Delta x = \frac{l}{n}$ ($n \in \mathbb{N}$).

Pokud je n dostatečně velké přirozené číslo ($n \rightarrow \infty$), pak můžeme předpokládat že jsme tyč rozdělili na n hmotných bodů o stejné hmotnosti $\Delta m = \frac{m}{n}$. Označme k pořadí hmotného bodu od počátku soustavy souřadnic ($k \in \{1, 2, 3, \dots, n\}$).

Určíme rychlosti v_k a poloměry otáčení r_k a kinetické energie E_k těchto hmotných bodů.

$$k = 1 \quad r_1 = \Delta x \quad v_1 = r_1 \omega \quad E_1 = \frac{\Delta m v_1^2}{2}$$

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

$$k = 2 \quad r_2 = 2\Delta x \quad v_2 = r_2\omega \quad E_2 = \frac{\Delta m v_2^2}{2}$$

$$k = k \quad r_k = k\Delta x \quad v_k = r_k\omega \quad E_k = \frac{\Delta m v_k^2}{2}$$

⋮
⋮
⋮

$$k = n \quad r_n = n\Delta x \quad v_n = r_n\omega \quad E_n = \frac{\Delta m v_n^2}{2}$$

Celkovou kinetickou energii $E(n)$ tyče vypočteme jako součet

$$E(n) = \sum_{k=1}^n E_k = \frac{\Delta m}{2} \cdot \sum_{k=1}^n v_k^2 = \frac{\Delta m \omega^2}{2} \cdot \sum_{k=1}^n r_k^2 = \frac{\Delta m \omega^2 \cdot (\Delta x)^2}{2} \cdot \sum_{k=1}^n k^2$$

Pro součet druhých mocnin přirozených čísel od 1 do n platí vzorec

$$\sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

Užitím vzorce dostaneme

$$E(n) = \frac{\Delta m \omega^2 \cdot (\Delta x)^2 \cdot n(n+1)(2n+1)}{12}$$

Po dosazení za Δm a Δx z výše uvedených vztahů dostaneme po úpravě:

$$E(n) = \frac{m \omega^2 l^2}{12} \cdot \frac{(n+1)(2n+1)}{n^2}$$

Výsledek bude tím přesnější, čím bude číslo n větší (v limitě se musí blížit k ∞).

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Tedy celková kinetická energie $E = \lim_{n \rightarrow \infty} E(n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{m\omega^2 l^2}{12} \cdot \frac{(n+1)(2n+1)}{n^2}$

$$E = \frac{m\omega^2 l^2}{12} \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)(2n+1)}{n^2} = \frac{m\omega^2 l^2}{12} \cdot 2 = \frac{m\omega^2 l^2}{6}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)(2n+1)}{n^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right) \left(2 + \frac{1}{n}\right) = (1+0)(2+0) = 2$$

Závěr: $E = \frac{m\omega^2 l^2}{6}$

b) Pomocí určitého integrálu

Poloměr otáčení hmotného bodu o hmotnosti $dm = \lim_{\Delta m \rightarrow 0} \Delta m$ a délce

$dx = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta x$ v poloze o souřadnici x je $r = x$. Jeho rychlost $v = r\omega = x\omega$.

Diferenciál hmotnosti můžeme vyjádřit vztahem $dm = \frac{m}{l} \cdot dx$ pomocí diferenciálu délky.

Diferenciál kinetické energie $dE = \lim_{\Delta E \rightarrow 0} \Delta E$ můžeme vyjádřit pomocí diferenciálu hmotnosti:

$$dE = \frac{dm \cdot v^2}{2}$$

Po dosazení výše uvedených vztahů a úpravě dostaneme vztah mezi diferenciály dE a dx .

$$dE = \frac{m\omega^2}{2l} \cdot x^2 \cdot dx$$

Určitý integrál diferenciálu dE v mezích od 0 do l (v intervalu $x \in (0;l)$) je roven součtu nekonečné řady v řešení a), a tedy celkové kinetické energii tyče.

$$E = \int_0^l dE = \frac{m\omega^2}{2l} \cdot \int_0^l x^2 \cdot dx = \frac{m\omega^2}{2l} \cdot \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^l = \frac{m\omega^2}{2l} \cdot \frac{l^3}{3} = \frac{m\omega^2 l^2}{6}$$

Opět jsme velmi rychle došli ke správnému výsledku pomocí určitého integrálu.



INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

3 Závěr

Bylo provedeno řešení dvou fyzikálních úloh, na kterých byl ilustrován určitý integrál jako součet konvergentní nekonečné řady, pomocí kterého je definován v matematické analýze.

4 Použitá literatura:

Časopis Kvant, číslo 10, ročník 1983

5 Kontakt na autora

Mgr. Petr Mazanec
Gymnázium Plzeň, Mikulášské nám. 23
pmazanec@mikulasske.cz

Středisko služeb školám, Plzeň, Částkova 78
Podpora talentovaných žáků v Plzeňském kraji
CZ.1.07/1.2.03/02.0001

Tento projekt je v roce 2013 financován z rozpočtu Plzeňského kraje

FYZIKA A HUDEBNÍ NÁSTROJE

Josef PETŘÍK

1 Obsahem příspěvku je popis a vysvětlení některých fyzikálních jevů probíhajících v klasických hudebních nástrojích.

2 Definice hudebního zvuku –tónu a jeho vytváření.

2.1 Tónem nazýváme zvuk, vznikající v klasických hudebních nástrojích periodickým kmitáním:

pružných dřevěných plátek (klarinety , hoboje)
listových pružin (harmonika)
umělých či přírodních blan (tympány, buben)
strun (housle, klavíry, kytary, loutny, vozembouch)
hudebníkových rtů (horny, trubky, pozoun)
nárazem proudu vzduchu na ostrou hranu otvoru (píšťaly u varhan).

2.2 Další fyzikální děje, které se podílejí na vzniku a trvání tónu u klasických hudebních nástrojů:

mechanická rezonance ozvučných skříněk nástrojů
stojaté vlnění vznikající v trubicích dechových nástrojů
Helmoltzovy rezonátory.

3 Harmonická analýza periodických průběhů a její využití k určení výšky a barvy tónu.

Pojem první harmonické a určení výšky tónu.
Pojem vyšší harmonické a určení barvy tónu.
Určení hlasitosti tónu
Ohmův akustický zákon a praktické ověření jeho platnosti.

4 V příspěvku jsou uvedeny některé fyzikální děje probíhající v klasických hudebních nástrojích včetně jejich praktické realizace a experimentálního ověření.

VYBRANÉ PROBLÉMY Z NAUKY O KMITECH A VLNÁCH.

Josef PETŘÍK

Příspěvek navazuje na první část věnovanou hudebnímu zvuku-tónu a to popisem a vysvětlením fyzikálních dějů které se podílejí na vzniku a trvání tónu včetně simulačních a reálných experimentů.

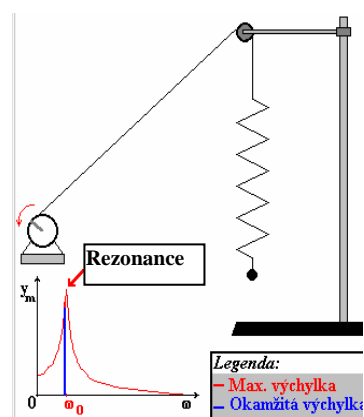
1 Mechanická rezonance ozvučných skříněk nástrojů

Pružná soustava (oscilátor) je schopná po uvedení do kmitavého pohybu volně kmitat na jisté frekvenci, nazývané vlastní kmitů soustavy. U skutečných oscilátorů bez působení vnější energie amplitudy ubývá s časem a takové kmitů nazýváme tlumené. Ke zmenšování amplitudy kmitů dochází hlavně vlivem ztrát energie třením kmitajícího tělesa o okolní prostředí.

Pro udržení amplitudy kmitů musí na oscilátor působit periodická vnější síla, jako na obrázku vpravo. Pro určitou periodu vnější síly lze dosáhnout tak zvané mechanické rezonance, kdy je amplituda kmitů největší.

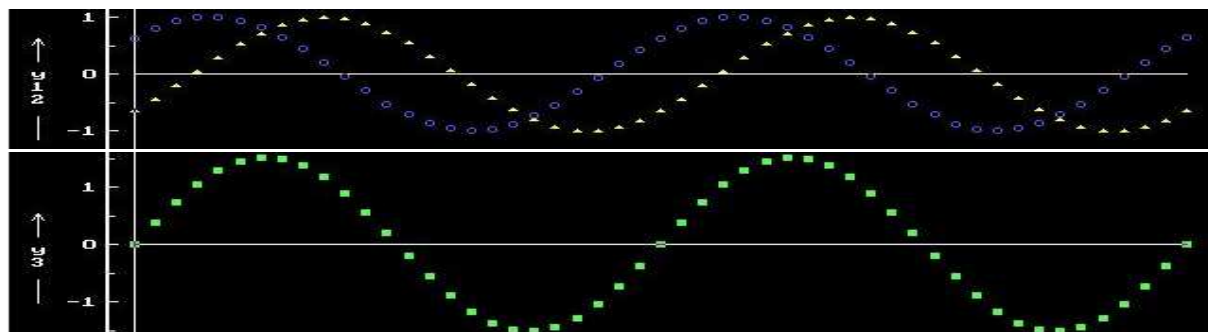
Jevu mechanické rezonance se využívá v ozvučných skřínkách

hlavně strunných hudebních nástrojů. Kmitů strun se přenesou na ozvučnou skříňku a při její vhodné konstrukci nastane jev mechanické rezonance a dojde k zesílení pásma tónů.



2 Stojaté vlnění vznikající v trubicích dechových nástrojů

Interferencí dvou vln stejné amplitudy a stejných vlnových délek postupujících touž bodovou řadou stejnou fázovou rychlostí proti sobě vznikne stojatá vlna s kmitami o dvojnásobné velikosti. Vznik těchto dvou vln nastane odrazem na volném nebo pevném konci bodové řady. Vhodnou volbou délky bodové řady dojde k zesílení tónů určitých frekvencí. Jevu se využívá hlavně u dechových hudebních nástrojů. I



INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

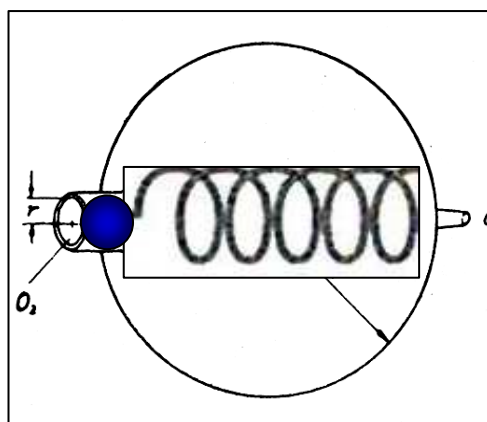
3 Helmholtzovy rezonátory.

Helmholtzův rezonátor je dutina určitého objemu mající na jedné straně tzv. hrdlo určité délky a průměru a na druhé straně tzv. výfuk. Tento rezonátor zesiluje určitá pásma kmitočtů v závislosti na objemu dutiny a na délce a průměru hrdla podle vztahu

$$f = \frac{c}{2 * \pi} \sqrt{\frac{S}{V * l}} = \frac{340}{2 * \pi} \sqrt{\frac{\pi * r^2}{V * l}}$$

U ozvučných skříněk hudebních nástrojů tvoří hrdla Helmholtzových rezonátorů například tzv. efka

jako u houslí, kontrabasu apod. nebo kulaté otvory jako například u kytar. Jako Helmholtzův rezonátor pracuje i ústní dutina a rty, kdy změnou objemu ústní dutiny a špulením rtů dochází k zesílení určitých frekvencí (formantů).



4 V příspěvku byly předváděny hlavně simulační i reálné experimenty demonstrující výše uvedené fyzikální děje.

5 Použitá literatura

Prezentace části výuky předmětu Kmity, vlny, akustika ve druhém ročníku studia na PeF.

6 Kontakt na autora

Josef Petřík Dr. Ing.
Petrik@kmt.zcu.cz

VLNOVÁ OPTIKA V PŘÍKLADECH

Jitka PROKŠOVÁ

1 Úvod

Mezi jevy vlnové optiky patří především interference, polarizace a difrakce světla. Seminář se zabývá zmíněnými jevy v následujících příkladech.

2 Příklady k procvičení

(v závorkách jsou uvedeny výsledky jednotlivých příkladů)

1. Při Youngově pokusu byla vzdálenost štěrbin od stínítka 50 cm. Jejich vzájemná vzdálenost byla 0,1 mm. Vypočtete, jak daleko se nachází 3. jasný proužek fialového světla od centrálního maxima. (6 mm)
2. Na stínítku, které je od dvojštěrbiny vzdáleno 80 cm, pozorujeme interferenční proužky. Určete vlnovou délku a barvu světla, je-li jejich vzdálenost 2,5 mm a vzájemná vzdálenost štěrbin 0,2 mm. (625 nm)
3. Nakloněné plochy skleněného dvojhranolu ($n = 1,5$) svírají kolmicí na optickou osu úhel 2° . Před hranolem je ve vzdálenosti 10 cm štěrbina, kterou na něj dopadají monochromatické paprsky vlnové délky 590 nm. Určete rozdíl interferenčních proužků ve vzdálenosti 1 m. (0,185 mm)
4. Na olejovou skvrnu (tloušťky $0,2 \mu\text{m}$) na vodní hladině dopadá kolmo bílé světlo. Určete, jaká barva se nebude odrážet a která se odrazí nejvíce. Předpokládejte, že rychlost šíření světla v oleji je $2 \cdot 10^8 \text{ ms}^{-1}$. (max - fialová, min - žlutá)
5. Mýdlová blána o indexu lomu 1,33 se při kolmém dopadu světla jevila jako modrá ($\lambda = 450 \text{ nm}$). Jakou měla tloušťku? (84 nm)
6. Na optickou mřížku (100 vrypů na 1 mm) dopadá kolmo svazek bílého světla. Pomocí spojky ($f = 30 \text{ cm}$), kterou umístíme těsně za mřížku, se vytvoří na stínítku spektrum. Vypočtete, v jaké vzdálenosti je od sebe červená a fialová barva ve spektru 2. řádu. (22 mm)
7. Sodíkové světlo dopadá kolmo na neznámou ohybovou mřížku. Na stínítku umístěném 25 cm od mřížky vznikají dvě maxima 1. řádu, jejichž vzájemná vzdálenost je 3,6 cm. Určete parametry mřížky. (1200 vrypů na 1 cm)
8. Ohybová mřížka je osvětlena kolmo svazkem bílého světla. Zjistěte, zda se může některá barva ze spektra 1. řádu úplně překrývat s některou barvou spektra 2. řádu.

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

9. Kolmo na štěrbinu dopadá světlo o vlnové délce 450 nm a na stínítku se objeví střed 2. tmavého proužku pod úhlem $5^{\circ}14'$. Určete, pod jakým úhlem bude možné pozorovat střed 4. tmavého proužku při světle o vlnové délce 760 nm. (18°)
10. Určete největší řád spektra, který ještě vznikne při ohybu žlutozeleného světla mřížkou, která má 2000 vrypů na 1 cm délky. (9)

3 Závěr

Jevy vlnové optiky jsou zajímavé především svým praktickým užitím v běžném životě, proto uvedené příklady slouží jednak k rozlišení těchto jevů a pak k poznání, jak používat zákonitosti vlnové optiky, které studenti SŠ probírají ve výuce.

4 Použitá literatura

FUKA, J., HAVELKA, B. Optika a atomová fyzika 1. 1. vyd. Praha: SPN, 1961. 842 s.
MALÝ, P. Optika, 1. vyd. Praha: Academia, 2008, 362 s. ISBN 978-80-246-1342-0

5 Kontakt na autora

RNDr. Jitka Prokšová, Ph.D.
oddělení fyziky KMT FPE ZČU v Plzni
proksovj@kmt.zcu.cz

ZAJÍMAVÉ JEVY ATMOSFÉRICKÉ OPTIKY

Jitka PROKŠOVÁ

1 Úvod

Jevy atmosférické optiky patří díky své pestrosti a nápadnosti k zajímavým úkazům, se kterými se můžeme na obloze setkat. Dochází při nich k lomu a odrazu světla, k disperzi a rozptylu světla a k projevům vlnové povahy světla (interferenci a difrakci). Barevnost optických úkazů v atmosféře záleží i na povaze a velikosti částic, na kterých se světlo odráží, láme, skládá, ohýbá, rozptyluje a rozkládá.

Přednáška se zabývá zmíněnými jevy podrobně v následujícím sledu.

2 Refrakční jevy

Refrakční jevy vznikají při průchodu světla atmosférou, přičemž zdroj je buďto vně nebo uvnitř ovzduší Země. Podle toho dělíme projevy refrakce na astronomickou a terestrickou.

2.1 Astronomická refrakce

Zdroj světla je vně atmosféry (např. Slunce). Průchodem světla nehomogenním prostředím (zemskou atmosférou) dochází stále více k lomu ke kolmici, takže pozorovatel vnímá vzdálený zdroj v jiném místě, než ve skutečnosti je. Důsledkem astronomické refrakce je např. zploštění slunečního kotouče u obzoru, prodloužení trvání dne apod.

2.2 Terestrická refrakce

Zdroj světla je uvnitř atmosféry (např. plocha odrážející sluneční záření v oáze na poušti). Pozorovatel tak vnímá vzdálené předměty blíže (fata morgána v poušti nebo v arktických krajinách). Výklad o obou typech refrakce je doprovázen obrázky a potřebnými vztahy.

3 Duha

Rozkladem světla na vodních kapkách v atmosféře se vytváří duha. Rozeznáváme několik typů – primární (způsobenou jediným vnitřním odrazem světla v kapce vody), sekundární (dva vnitřní odrazy) a terciární (tři odrazy). Barevnost a šířka duhy závisí také na velikosti kapek, což je v této části přednášky diskutováno spolu s rozdíly mezi jednotlivými typy duhy.



INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

4 Soumrakové jevy

Typické projevy podvečerní oblohy – červánky, iridiscence oblaků, glórie a další efekty se souhrnně nazývají soumrakové jevy. Důraz ve vysvětlení je kladen i na rozdíly mezi astronomickým a občanským soumrakem.

5 Halové jevy

Jevy, ke kterým dochází odrazem, lomem a interferencí světla na ledových krystalcích nazýváme halovými jevy. Patří sem např. malé a velké haló, halový sloup, cirkumzenitální oblouk, Parryho oblouk, parhélia a další.

6 Závěr

Jevy atmosférické optiky přitahují na obloze pozornost, proto je užitečné umět mezi nimi rozlišovat a dokázat tak užívat zákonitosti optiky, které studenti SŠ probírají ve výuce.

7 Kontakt na autora

RNDr. Jitka Prokšová, Ph.D.
oddělení fyziky KMT FPE ZČU v Plzni
proksovj@kmt.zcu.cz

Středisko služeb školám, Plzeň, Částkova 78
Podpora talentovaných žáků v Plzeňském kraji
CZ.1.07/1.2.03/02.0001

Tento projekt je v roce 2013 financován z rozpočtu Plzeňského kraje

KEPLEROVY ZÁKONY

Miroslav RANDA

1 Úvod

Keplerovy zákony a Newtonův gravitační zákon, který je Newtonovu gravitačnímu zákonu ekvivalentní, jsou základními zákony, které popisují pohyb těles ve sluneční soustavě, ale také pohyby dvojhvězd a pohyby hvězd v galaxiích.

2 Využití Keplerových zákonů

Keplerovy zákony umožňují určit základní charakteristiky pohybu těles sluneční soustavy, zejména planet, trpasličích planet, planetek a komet, ale rovněž pohyb měsíců a pohyb družic a sond.

Protože se uvedené zákony probírají obvykle až na střední škole, skládá se lekce ze dvou částí.

V první části jsou jmenované zákony podrobně prodebatovány včetně různých způsobů formulace zákonů, a to jak pro případ problému jednoho tělesa, tak i v případě problému dvou těles (využívaného například pro dvojhvězdy). Přitom je zvláštní pozornost věnována formulaci Keplerových zákonů v přirozených jednotkách pro tělesa sluneční soustavy (v astronomických jednotkách, rocích a hmotnostech Slunce).

Ve druhé části jsou řešeny úlohy z předchozích ročníků fyzikální a astronomické olympiády, dále úlohy ze sbírek úloh z astronomie a astrofyziky (Široký, Široká, 1973 a Štefl, Krtička, 2002) a ze studijních textů FO (Ungermann, Volf, 1985 a Volf, Jarešová, 2009). Jsou rovněž ukázány úlohy týkající se pádu v radiálním gravitačním poli Slunce a Země a ukázáno řešení takových úloh bez použití integrálního počtu, ale s využitím zákonů pro pohyb v gravitačním poli.

3 Závěr

Keplerovy zákony popisují pohyby těles ve sluneční soustavě i pohyby dvojhvězd a hvězd v galaxiích.

4 Použitá literatura

ŠTEFL, V., KORČÁKOVÁ, D., KRTIČKA, J. Úlohy z astrofyziky. 1. vyd. Brno: Masarykova univerzita, 2002. 82 s.

UNGERMANN, Z., VOLF, I.: Pohyb tělesa v radiálním gravitačním poli. Praha: SPN, 1985.

VOLF, I., JAREŠOVÁ, M. Fyzika je kolem nás (Pohyby těles v planetární soustavě). 1. vyd. Hradec Králové. MAFY, 2009.

ŠIROKÝ, J., ŠIROKÁ, M. Základy astronomie v příkladech. 2. vyd. Praha: Státní pedagogické nakladatelství, 1973. 158 s.



INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

5 Kontakt na autora

RNDr. Miroslav Randa, Ph.D.
Západočeská univerzita v Plzni
randam@kmt.zcu.cz

Středisko služeb školám, Plzeň, Částkova 78
Podpora talentovaných žáků v Plzeňském kraji
CZ.1.07/1.2.03/02.0001

Tento projekt je v roce 2013 financován z rozpočtu Plzeňského kraje

SEMILOGARITMICKÝ TVAR ČÍSEL VE FYZICE A V ASTRONOMII

Miroslav RANDA

1 Úvod

Ve fyzikálních výpočtech se často setkáme s velmi velkými, nebo naopak velmi malými čísly. Tato čísla zapsaná „normálně“, tedy pomocí značného počtu nul, jsou nepřehledná a i při zachování pravidla oddělování trojic cifer malými mezerami trvá relativně dlouho, než člověk takové číslo rozluští. Velmi často se taková čísla využívají při zápisu astronomických údajů či při řešení astronomických úloh.

2 Semilogaritmický tvar čísel

Semilogaritmický tvar čísel se normálně probírá až na střední škole ve druhém až třetím ročníku. Vychází totiž z funkce logaritmus, jejíž zvládnutí je poměrně obtížné. Přesto samotný princip semilogaritmického zápisu čísel je srozumitelný i pro žáky základních škol a odpovídajících ročníků víceletých gymnázií a umožňuje s pomocí kalkulačky provádět i komplikované výpočty.

Výklad začne zápisem čísel, která jsou násobkem deseti, a kde je zápis jednoduchý a srozumitelný. Poté následují celočíselné násobky takových čísel. Po zvládnutí následuje ukázka jednoduchých matematických operací (sčítání, odčítání, násobení a dělení) s těmito čísly a odvození pravidel pro násobení a dělení semilogaritmicky zapsaných čísel.

Dalším krokem je pak zápis čísel menších než jedna a rovněž procvičení matematických operací s takovými čísly jednak za pomoci kalkulačky, jednak bez jejího použití.

Poslední částí lekce je využití nabytých kompetencí k řešení jednoduchých fyzikálních a astronomických úloh (gravitační síla mezi dvěma hmotnými objekty, elektrická síla mezi dvěma elektrony a protony, výpočet rychlosti planet kolem Slunce a doby, za kterou by těleso běžnou rychlostí urazilo vzdálenost k Měsíci, k Jupiteru, mezi dvěma hvězdami, napříč Galaxií, ...).

3 Závěr

Semilogaritmický zápis čísel je velice účinným nástrojem pro fyzikální a astronomické výpočty.

4 Kontakt na autora

RNDr. Miroslav Randa, Ph.D.
Západočeská univerzita v Plzni
randam@kmt.zcu.cz

ZA CO MŮŽOU MOLEKULY

Václav SOUKUP

1 Úvod

Fyzikální vlastnosti látek a jejich chování jsou ovlivněny jejich strukturou. Mechanika kapalin a plynů od této struktury odhlíží. Je proto pochopitelné, že řada fyzikálních zákonitostí, které plynou z mechaniky kapalin a plynů zcela přesně neplatí. Odchyšky v chování je možné vysvětlit zohledněním částicové struktury látek.

2 Fyzikální jevy podmíněné molekulovou strukturou látek

2.1 Platí $1+1 = 2$?

Smísíme-li v dlouhé trubici stejné objemy vody a lihu a promícháme, výsledný objem směsi bude menší než součet původních objemů obou kapalin. Příčina je v existenci mezimolekulových prostorů (a tedy existence molekulové struktury) obou kapalin. Modelovou situací je možno znázornit pomocí směsi korálek dvou různých velikostí.

2.2 Kolik molekul je?

Johann Josef Loschmidt odvodil počet molekul v 1m a z něj byla odvozena Avogadrova konstanta. Hodnoty těchto konstant ukázaly na obrovský počet molekul ($N_0 = 268.1023 \cdot 10^{23}$, $N_A = 6,02.1023 \cdot 10^{23} \text{ mol}^{-1}$) a umožňují vypočítat objemy a hmotnosti molekul.

2.3 Jak se molekuly chovají?

Řada pozorování dokládá, že molekuly jsou v neustálém neuspořádaném pohybu. Brownův pohyb pylových zrnek pozorovaný v roce 1827, ale vysvětlený Einsteinem (a za to Nobelova cena) lze simulovat pohybem malých korálek na skleněné misce, přimísíme-li mezi ně větší korálek. Difúze navíc dokládá vliv teploty na rychlost molekul. V teplé vodě proběhne rychleji než ve studené.

Rychlost molekul lze měřit. Ukazuje se, že podíl molekul s danou rychlostí je při určité teplotě konstantní. To umožňuje vypočítat střední kvadratickou rychlost a celkovou energii neuspořádaného pohybu molekul.

Důkazem pohybu molekul a závislosti jejich rychlosti na teplotě je též roztažnost těles.



INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

2.4 Plave kovový předmět na hladině kapaliny, která má menší hustotu než předmět?

Archimédův zákon něco takového nepřipouští. Existuje-li na povrchu kapaliny dostatečně pevná povrchová vrstva, může se na ní kovový předmět udržet. Povrchová vrstva, kapilární elevace a deprese, existence kapek jsou důsledkem silového působení mezi molekulami uvnitř látek, ale i mezi molekulami látek ve vzájemném dotyku.

3 Závěr

Správné pochopení chování molekul uvnitř látek umožňuje vysvětlit a využít řadu fyzikálních jevů, se kterými se běžně setkáváme v přírodě i v praxi.

4 Použitá literatura

V textu nebylo využito žádných citací.

5 Kontakt na autora

RNDr. Václav Soukup
Masarykovo gymnázium Plzeň
soukup@mgplzen.cz

Středisko služeb školám, Plzeň, Částkova 78
Podpora talentovaných žáků v Plzeňském kraji
CZ.1.07/1.2.03/02.0001

Tento projekt je v roce 2013 financován z rozpočtu Plzeňského kraje

ZA CO MŮŽOU NABITÉ ČÁSTICE

Václav SOUKUP

1 Úvod

Fyzikální vlastnosti látek a jejich chování jsou ovlivněny jejich strukturou. Vazby mezi molekulami jsou podmíněny existencí elektrických nábojů. Ty pak ovlivňují rozpustnost látek a jejich chování v elektrickém poli.

2 Nabité částice v látkách

2.1 Voda jako rozpouštědlo

Rozborem struktury molekuly vody lze odvodit, že atom kyslíku je nabit záporně, atomy vodíku kladně. Důsledkem jejich vzájemného přitahování je existence vody v kapalném skupenství za normální teploty a rozpouštění iontech sloučenin ve vodě. Vzniklé ionty se obalují molekulami vody (hydratace) a to znemožňuje opětovné vytvoření krystalu, není-li voda odpařena.

2.2 Vznik iontů

Proč se elektroskop vybije, přiblížíme-li k němu plamen svíčky? Dojde k ionizaci vzduchu, zvýší se vodivost vzduchu. K ionizaci je nutno dodat ionizační energii. K ionizaci může dojít i nárazem, a to tím snáze, čím je tlak plynu nižší, neboť s klesajícím tlakem roste střední volná dráha elektronů a iontů.

2.3 Jak se ionty chovají?

V elektrickém poli se ionty pohybují účinkem elektrických sil. Jejich pohyb je spojen s přenosem hmoty, které popisuje Faradayův zákon pro elektrolýzu. Lze jej odvodit ze vzájemné úměrnosti přeneseného náboje a hmotnosti látek vyloučených na elektrodách.

2.4 Jaké napětí „vyrobí“ naše tělo?

Uchopíme-li do jedné ruky měděnou destičku a do druhé ruky destičku zinkovou, které jsou připojeny k voltmetru, ukáže přístroj napětí. Příčinou je vznik iontů na styku kovů a kůže a vodivost lidského těla způsobeného ionty obsaženými v tělesných tkáních. Obsah iontů může i vypovídat o zdravotním stavu člověka.



INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

3 Závěr

Správné pochopení chování částic s nábojem umožňuje vysvětlit a využít řadu fyzikálních jevů, se kterými se běžně setkáváme v přírodě i v praxi.

4 Použitá literatura

V textu nebylo využito žádných citací.

5 Kontakt na autora

RNDr. Václav Soukup
Masarykovo gymnázium Plzeň
soukup@mgplzen.cz

Středisko služeb školám, Plzeň, Částkova 78
Podpora talentovaných žáků v Plzeňském kraji
CZ.1.07/1.2.03/02.0001

Tento projekt je v roce 2013 financován z rozpočtu Plzeňského kraje

VZDÁLENOSTI VE VESMÍRU

Zuzana SUKOVÁ

1 Úvod

Každý ví, že naše sluneční soustava a naše Galaxie jsou veliké, ale měli bychom mít také představu, jak moc veliké jsou. Konkrétní rozměry můžeme snadno zjistit na internetu, ale i když známe vzdálenost ve vesmíru, tak si ji mnohdy nedokážeme vůbec představit. Jak velká by asi byla Země, kdybychom Pluto zmenšili na zrnko pepře? Sestavme společně model planet z ovoce a přibližme si i rozměry mimo sluneční soustavu pomocí názorných modelů.

2 Modely vzdáleností

Během přednášky si přiblížíme rozměry v naší sluneční soustavě, hvězd a Galaxie pomocí názorných modelů.

2.1 Modely sluneční soustavy

Žijeme na planetě Zemi, která je jednou z osmi planet naší sluneční soustavy. Naší hvězdou je Slunce a každý ví, že je mnohem větší, než ostatní tělesa naší soustavy. Jaké ale ty rozměry jsou? Zkusme si představit model, kde by trpasličí planeta Pluto byla veliká jen jako zrnko pepře. Žáci dostali právě takový úkol a pomocí koření, ovoce a zeleniny kulatého tvaru (pepř, nové koření, ořechy, hroznové víno, mandarinky, pomeranče, zelí, meloun, ...) měli model vytvořit. Správných hodnot se po odhadnutí doberou výpočtem. Slunce by například mělo rozměry obří dýně. (Macháček 2008, Suková 2012)

Když už máme model poměrů velikostí, zkusíme si nejprve odhadnout a pak i vypočítat vzdálenosti jednotlivých objektů v modelu. I tyto hodnoty jsou pro žáky často překvapivé, protože Pluto by od Slunce v modelu bylo vzdálené 6 km. Je to stejné, jako bychom na celém území města Liberec nebo Hradec Králové umístili pouze jednu obří dýni, 4 citrusy, 2 oříšky a 2 hrášky. (Macháček 2008)

Obdobným modelem může být umístění Slunce o průměru 93 m (měřítko 1:15 000 000) na Staroměstské náměstí v Praze. V tomto měřítku nám planety pokryjí velkou část České republiky – například Země o průměru 85 cm bude v Letňanech v Praze, Saturn o průměru 7,8 m v Pardubicích a Neptun o průměru 3,3 m v Českém Těšíně.

2.2 Jak daleko je ke hvězdám

Po Slunci nejbližší je k nám hvězda Proxima Centauri, která je vzdálená jen 4,24 světelného roku. Myslím si ale, že toto číslo si většina lidí opět nedokáže představit. Žáci dostanou proto za úkol vypočítat, jak dlouho by k ní běžel gepard rychlostí 100 km/h a jak dlouho by šel člověk rychlostí 4 km/h. Opět je překvapivé, že k naší po Slunci nejbližší hvězdě by člověk šel více než miliardu let, což znamená, že by se na cestu musel vydat jako

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

jedna z prvních eukaryotních buněk. Gepard by potřeboval necelých 50 000 000 let – vyrazil by tedy jako jedna z prvních prašelem. (Suková 2013)

2.3 Souhvězdí Orion

Nejznámější zimní souhvězdí Orion se skládá ze 7 velmi jasných hvězd. Papírový model nám ukáže srovnání velikostí i dalších parametrů jednotlivých hvězd (povrchová teplota, vzdálenost o Zemi, ...). Věděli jste například, že červený obr Betelgeuse má poloměr tisíckrát větší než naše Slunce? Žáci si na tomto modelu připomenou, že souhvězdí vzniká pouze promítnutím hvězd blízko sebe na nebeskou klenbu, ale ve skutečnosti spolu tyto hvězdy nijak nesouvisejí.

2.4 Model naší Galaxie

A jak si můžeme přiblížit naši Galaxii? Jedná se o kouli, čoučku nebo spíše disk? Pro seznámení se s tvarem naší Galaxie a jejími rozměry žáci opět vypočítávají rozměry modelu. Tentokrát si celou Galaxii můžeme velmi dobře přirovnat ke kompaktnímu disku (CD), protože zatímco její průměr je 110 000 světelných let, tak její tloušťka v nejširším místě dosahuje pouhých 5 000 světelných let a po okrajích jen 1 000 světelných let. (Suková 2013)

3 Závěr

Díky pěti jednoduchým modelům si žáci mohli udělat alespoň částečnou správnou představu o rozměrech v naší sluneční soustavě, hvězdách a tvaru naší Galaxie.

4 Použitá literatura

MACHÁČEK, M.: Fyzika pro gymnázia – Astrofyzika. 3. vyd. Praha 2008, nakl. Prometheus, 143 s. ISBN 978-80-7196-376-9.

SUKOVÁ, Z. Kdyby gepard vyrazil coby prašelma, už by dorazil na Proximu Centauri I. Školská fyzika [online]. 2012, roč. IX, č. 4. [cit. 25. 8. 2013]. Dostupné na internetu: <http://sf.zcu.cz/cs/2012/4/1-kdyby-gepard-vyrazil-coby-praselma-uz-by-dorazil-na-proximu-centauri-i>

SUKOVÁ, Z. Kdyby gepard vyrazil coby prašelma, už by dorazil na Proximu Centauri II. Školská fyzika [online]. 2013, roč. X, č. 1. [cit. 25. 8. 2013]. Dostupné na internetu: <http://sf.zcu.cz/cs/2013/1/8-kdyby-gepard-vyrazil-coby-praselma-uz-by-dorazil-na-proximu-centauri-ii>

5 Kontakt na autora

PhDr. Zuzana Suková

ZČU v Plzni, FPE, katedra matematiky, fyziky a technické výchovy, Klatovská 51, Plzeň
zsukova@kmt.zcu.cz

VESTA – POSLEDNÍ Z PROTOPLANET

Ondřej TRNKA

1 Úvod

Vesta je planetkou hlavního pásu, jež byla objevena během pátrání po zbytcích domnělé rozpadlé planety mezi Marsem a Jupiterem. O objev se postaral Heinrich Wilhelm Mathias Olbers v roce 1807. Byla to již druhá planetka, kterou tento německý lékař a astronom objevil. Jméno Vesta však od matematika Carla Fridricha Gausse, který v té době svými výpočty pomáhal při objevu několika planetek. Vesta byla římská bohyně ctnosti, čistoty a rodinného krbu.

2 Zdroje informací o Vestě

Jako u ostatních planetek nebylo možné tehdejšími přístroji zjistit jakékoli podrobnosti. I při největších zvětšeních se planetky jevily jen jako zářící body a tak se brzy po jejich objevu začaly nazývat asteroidy (hvězdám podobné) a později malé planety, či planetky. Odhady velikostí se různily v řádu několika stovek kilometrů a až v posledních dvou desetiletích se podařilo shromáždit více detailnějších informací. Přispěly k tomu obří Keckův dalekohled na Havaji a Hubbleův kosmický dalekohled. Díky jejich rozlišení se podařilo nasnímat povrch Vesty dostatečně detailně, aby bylo možné určit její tvar. Spektroskopy pak určily chemické složení minerálů na povrchu a speciální filtry odhalily rozložení vybraných minerálů na povrchu.

Srovnáním pozorovaných dat se spektra meteoritů se podařilo zjistit, že Vesta má přímou souvislost s početnou skupinou pozemských meteoritů, označovaných zkratkou HED (představuje asi 5 % všech meteoritů). HED označuje první písmena názvů tří podskupin:

- Howardity - meteority převážně z povrchu planetky
- Eukrity - meteority ze středních hloubek
- Diogenity - meteority z větších hloubek

2.1 Vesta před přiletem sondy Dawn

Na konci tisíciletí se tedy vědělo, že Vesta je těleso tvaru trojosého elipsoidu s poloosami 289 km, 280 km a 229 km. Hmotnost tělesa je asi 279 x menší než hmotnost Měsíce a střední hustota dosahuje 3,7 g/cm³. Při složení z minerálů typických pro danou část Sluneční soustavy by v tělese bylo zastoupeno asi 86 % hornin a 14 % železa.

Dále podle množství a rozložení kráterů je patrné, že Vesta se nemění vlivem vnitřních procesů a nechrání ji žádná atmosféra. Přítomnost výlevných hornin (bazaltů), tvar tělesa, i složení materiálů na povrchu nasvědčují tomu, že Vesta byla z počátku vulkanicky aktivní

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

a v celém objemu v tekutém stavu. To způsobilo vnitřní diferenciaci, tedy vytvoření hutného kovového jádra a řidšího minerálního pláště a kůry. Kvůli svému malému rozměru nemá Vesta snahu navracet se do kulového stavu i po utuhnutí, a tak může být na její jižní polokouli obrovský kráter, který způsobuje tak výraznou odchylku od kulového tvaru. Rotace Vesty nebyla příliš rychlá a tak těleso utuhlo v kulovém tvaru. Nyní doba rotace činí 5,342 hodiny.

Meteority HED potvrdily mnohé domněnky o vývoji Vesty. Jejich 3 poddruhy korespondují s různou hloubkou, ze které pocházejí. Při srážce, jež vytvořila jižní kráter Rheasilvia Vesta ztratila asi 1 % své hmoty. Uvolněný materiál vytvořil početnou rodinu malých planetek - Vestoidy. Velké množství materiálu napadlo i na planety a další tělesa. Vesta je dnes jedním ze 4 těles, o kterém s jistotou víme, že jejich materiál máme ve formě meteoritů v laboratořích. Stáří hornin v meteoritech odpovídá 4,5 miliardy let. Vesta tedy prošla roztavením krátce po zformování Sluneční soustavy.

2.2 Mise sondy Dawn

Vesta se díky své zajímavosti dostala do hledáčku kosmické mise Dawn (úsvit). Tato sonda má za úkol prozkoumat dvě významná tělesa hlavního pásu planetek. První byla planetka 4 Vesta a druhým je trpasličí planeta Ceres. Americká sonda odstartovala 27. září 2007 a po průletu okolo Marsu, který využila ke změně sklonu dráhy, se přiblížila k planetce Vesta. Dawn je první sonda, která má postupně zakotvit a obíhat okolo dvou cizích těles Sluneční soustavy. Na oběžnou dráhu Vesty vstoupila 16. července 2011. Je vybavena přístroji pro mapování a vzdálený průzkum. Nese stereografickou mapovací kameru, vizuální a infračervený spektrometr pro chemický a geologický průzkum a neutronový a gama detektor pro zjišťování vlastností podpovrchových vrstev.

Sonda Vestu mapovala nejdříve z větší vzdálenosti a postupně přecházela na nižší orbity, z nichž se pak zaměřovala na nejzajímavější detaily a útvary. Z původní výšky 16 000 km sestoupila na 2 750 km, dále na 680 a nakonec skončila pouhých 210 km nad povrchem. V srpnu 2012 se pak začala odpoutávat od Vesty a nabrala kurz k druhému Cereře.

Dawn zmapoval většinu povrchu kromě severních polárních oblastí, které byly po celou dobu ve stínu. Snímky objevily obrovské množství kráterů. Objevily se však i velké impaktní pánve, zlomy a výrazné zvlnění terénu po velkých srážkách. Na jižním pólu byla důkladně zkoumána pánve Rheasilvia, která vytváří výrazné zploštění celé planetky. Právě při vzniku této pánve se do kosmu rozlétly úlomky, které dnes nacházíme jako HED meteority. Srážka byla tak mohutná, že je s podivem, že celá planetka vydržela v jediném kusu.

2.3 Vesta mezi planetkami

Vesta je největší planetkou, již se doposud podařilo prozkoumat zblízka. Po Cereře a Palladě je to největší planetka vůbec. Hmotností je dokonce 2 nehmotnější hned po Cereře.

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Ceres již však není planetkou, ale trpasličí planetou a tak lze říci, že Vesta je dnes druhou největší a současně nehmotnější planetkou.

2.4 Je Vesta jedinou protoplanetou?

Protoplanety jsou kosmická tělesa, jejichž postupnými srážkami se vytváří planety. Naše Země vznikla postupně z deseti, možná i více protoplanet. Poslední srážka s protoplanetou Thea při tom vytvořila Měsíc. Protoplanety vznikly krátce po vzniku Sluneční soustavy a tvořily předstupeň planet. Byly jich řádově stovky, měly průměry od stovek kilometrů až přes tisíc kilometrů a vznikly ve vnitřních částech Sluneční soustavy, takže obsahují převážně horniny a kovy. Prošly vnitřní diferenciací, měly kulový tvar a byly geologicky aktivní. Vznikem planet však protoplanet ubývalo až nakonec téměř, či zcela vymizely.

Budeme-li hledat nyní taková tělesa ve Sluneční soustavě, bude planetka 4 Vesta nejjistějším kandidátem. Splňuje všechny znaky a s jistotou se jedná o protoplanetu. Do úvahy však připadají ještě: trpasličí planeta Ceres, která je dokonce větší, a planety 2 Pallas a 10 Hygiea, které jsou menší a lehčí, přesto srovnatelné s planetkou 4 Vesta.

Ceres je zřejmě ledové těleso podobné Tritonu a dalším ledovým měsícům, zřejmě vznikla dále od Slunce a na svou současnou dráhu se dostala později. Dálkový průzkum planetek 2 Pallas a 10 Hygiea odhalil, že u nich zřejmě nedošlo k diferenciaci a tak se podobají spíše malým planetkám.

3 Závěr

Nebude-li učiněn zásadní objev u trpasličí planety Ceres, bude Vesta zřejmě jedinou přeživší protoplanetou. Díky tomu si zaslouží značnou pozornost při dalších výzkumech, neboť je to jediný zachovalý důkaz o tom, z jakých těles vznikaly planety, včetně naší Země.

4 Kontakt na autora

Bc. Ondřej Trnka
Hvězdárna a planetárium Plzeň
trnka@plzen.eu

ZAJÍMAVOSTI ZE SVĚTA PLANETÁRNÍCH SOND

Ondřej TRNKA

1 Úvod

Sluneční soustava má oproti ostatním částem vesmíru značnou výhodu ve své blízkosti. Díky tomu ji můžeme zkoumat nejen nepřímými metodami, pomocí dalekohledů, ale také přímo kosmickými sondami. Přednáška pojednává o skupině kosmických sond, jež byly sestrojeny a vypuštěny do kosmu za účelem průzkumu ostatních planet Sluneční soustavy. Přednáška o nich pojednává z ryze technického hlediska. Objevy, jež tyto přístroje vykonaly, jsou totiž tak mnohé a úžasné, že by nebylo možné je do rozsahu výkladu začlenit. Navíc právě výsledky a objevy těchto sond jsou často a právem diskutovány a přednášeny při mnohých příležitostech. Tato přednáška si však bere za cíl vzpomenout samotné sondy a vzdát hold jejich konstruktérům a operátorům, kteří se nebáli obtížných úkolů a kteří i přes mnohé nezdary a komplikace vždy posouvali lidské poznání i techniku kupředu.

2 Zajímavosti ze světa planetárních sond

Průřez vývojem sond i jejich úspěchy a osudy je členěn podle planet, jež byly a jsou jejich cíli. Vzhledem k počtu všech planetárních sond se nelze věnovat všem. Proto jsou vybrány pouze sondy průkopnické, unikátní, nejúspěšnější, či naopak s nejtěžšími osudy. V několika případech jsou přidány i technické poznámky o rozličných způsobech cestování mezi planetami.

2.1 Merkur

Planeta nejbližší Slunci rozhodně nepatří k nejjednodušším cílům kosmických misí. Proto zůstávala většinu kosmického věku na okraji zájmu a zatím ji navštívily pouze dvě sondy. Obě vyslala americká NASA. První, s názvem Mariner 10 odstartovala v listopadu 1973 a k Merkuru se přiblížila třikrát při průletech v březnu a září 1974 a v březnu 1975. Sonda nebyla schopna zmapovat celý povrch, protože pouhé tři průlety a pomalá rotace Merkuru neumožnily nafotit celý povrch při osvětlení Sluncem. Mariner 10 se však zapsal do historie i jako první sonda, která využila gravitační manévru, při průletu okolo jiné planety. Tuto metodu gravitačního praku, jež se později proslavila obzvlášť při tzv. Velké cestě sond Voyager, provedl při průletu okolo Venuše v únoru 1974.

Druhou sondou u Merkuru je současná Merkurova družice MESSENGER. Její cesta byla mnohem náročnější, neboť začala v srpnu 2004 a skončila až v březnu 2011 úspěšným navedením na oběžnou dráhu okolo Merkuru. Mezitím MESSENGER provedl celkem 6 gravitačních manévru: jeden u Země, dva u Venuše a tři u Merkuru. To mu umožnilo dostat se s minimální spotřebou paliva na dráhu vhodnou k zakotvení u Merkuru. Sonda měla pracovat

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

jeden rok. Úspěšně však odolává pekelné výhni v blízkosti naší hvězdy a tak její mise dosud pokračuje.

2.2 Venuše

Venuše vždy vzdorovala průzkumu. Její hustá oblačnost neumožňuje optický průzkum a pekelné podmínky na povrchu nedovolují dlouhodobý provoz automatů na povrchu. Venuši navštívila více než třicítka sond Sovětského svazu, úspěch však zaznamenala jen polovina z nich. Z osmi sond NASA byla jen jedna neúspěšná a jediná evropská družice Venuše uspěla.

První sondy Sovětského svazu i USA na začátku 60. let 20. stol. pouze prolétaly okolo Venuše. Sovětské Veněry však zkoušely měkce přistát na povrchu. Veněra 3 vstoupila do atmosféry již nefunkční a tak se nemohlo jednat o měkké přistání. Veněra 4 již při vstupu fungovala. Tepelný štít přežil teplotu až 11 000 °C a elektronika odolala přetížení 300G a během klesání na padáku vysílala 93 minut informace o teplotě a v tlaku atmosféry. 26 km nad povrchem se však sonda odmlčela, zničená buď narůstajícím tlakem, či teplotou.

Až Veněra 7 v prosinci 1970 měkce dosedla na povrch Venuše a 23 minut vysílala, než ji zničila okolní vysoká teplota. Veněra 9 pak v říjnu 1975 přinesla první fotografie Venušina povrchu. Rekordmankou se pak stala Veněra 13, která fungovala na povrchu celých 127 minut. (plánováno bylo 32 minut). Pořídila barevné panorama okolí a změřila tvrdost povrchu. Venuše byla zkoumána i pomocí balónových sond. Jednou z nich byla Vega 1.

Nejvíce se však o průzkum Venuše zasloužily v letech 1984-85 sondy Veněra 15 a 16 a poté v letech 1990-94 americká sonda Magellan. Ty obíhaly okolo planety a pomocí radarových výškoměrů mapovaly její povrch. Magellan při tom dosáhl lepšího rozlišení, neboť využíval mnohem pokročilejší elektroniku a také pracoval nad Venuši po delší dobu.

Evropská sonda Venus Express obíhá okolo Venuše od dubna 2006 a zaměřuje se na průzkum její atmosféry. Japonsko se pokusilo vyslat k Venuši dvě sondy. Akatsuki a Ikaros startovaly v květnu 2010. První se však nepodařilo kvůli technickým obtížím zaparkovat na oběžné dráze Venuše a i když se k Venuši ještě přiblíží, zřejmě je natolik nefunkční, že se jí manévry ani podruhé nezdaří. Ikaros pak je sluneční plachetnice, jež měla dokázat, že mezi planetami lze úspěšně cestovat i s pomocí sluneční plachty.

2.3 Mars

Ze všech planet se Mars těší největšímu zájmu planetárních sond i průzkumných automatů. Je to dáno jednak jeho celkem snadnou dostupností i vědeckým potenciálem. Stále není rozřešena otázka možného života na této planetě, což poutá veliký zájem vědecké i laické veřejnosti. Kromě USA a Sovětského svazu k Marsu vyslaly své automaty Japonsko, Evropská kosmická agentura (ESA) a Velká Británie. Z nich však jen ESA slavila úspěch.



INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Nejúspěšnější se stala americká NASA, z jejichž 22 vyslaných sond jen 5 neuspělo. Automaty Sovětského svazu slavily plný úspěch jen 3× a 5× alespoň částečně. 12 jich zcela selhalo.

Americký Mariner 4 poslal v červenci 1965 první detailní snímky Marsu. Protože jen prolétl, nezachytil více než 1 % povrchu. Mariner 9 se pak stal v listopadu 1971 první družicí obíhající okolo jiné planety. Jeho fotografický průzkum však z počátku velmi omezila celoplanetární prachová bouře, která se na Marsu objevila krátce před jeho příletem. Nad prachová mračna vystupovaly jen vrcholky obřích sopek na planině Tharsis. Přesto během jednoho roku zaznamenala více než 6GB dat o topografii, atmosféře, gravitačním poli i o satelitech Marsu. Sovětská sonda Mars 2 se v téže době pokoušela o měkké přistání, s následným vysláním samohybu s kamerkou. Přistávací modul však havaroval a nepodařilo se s ním navázat spojení. Přesto jde o první objekt vyrobený člověkem, jež dosáhl povrchu Marsu.

Významnou roli v průzkumu Marsu sehrály a hrají právě přistávací pouzdra a vozítka. Prvními byly americké Vikingy, dva statické moduly, jež se snažily přímo pátrat po marsovském životě. Ač se jim nepodařilo otázky místního života rozluštit, technologicky i funkčně šlo o extrémně dokonalé přístroje, jež posunuly elektroniku, výpočetní techniku a umělou inteligenci o notný kus kupředu. Na Marsu se také vystřídaly již 3 generace průzkumných vozítek. První Sojourner fungoval jen jako prodloužené rameno své základny – modulu Mars Pathfinder. Přesto fungovalo déle, než samotný modul. Větší rovery MSL Spirit a Opportunity přistály na Rudé planetě začátkem roku 2004 a mnohonásobně překonaly svoji plánovanou životnost 90 dní. Spirit fungoval až do března 2010. Opportunity funguje až dosud a je v překvapivě dobrém stavu. Důvodem jeho výdrže je mírný vítr, který udržuje jeho sluneční panely bez prachu a zajišťuje tak dostatečné dodávky energie. Poslední a největší vozítko je Americké MSL Curiosity. Přistálo v srpnu 2012, rozměry odpovídá malému autu a nese mnohem více vědeckých přístrojů, než jeho menší předchůdci.

Při cestách k Marsu se ne vždy projevil pouze technické závady. Někdy byly na vině také lidské chyby. Sovětská sonda Fobos 1, jež měla v roce 1988 doletět k Marsovu měsíci Fobos, se krátce před příletem odmlčela. Následně se zjistilo, že v řídicím programu pro sondu byla chyba. Ta způsobila, že místo zapojení gama-spektrometru se vypojoil řídicí systém. O 11 let později zničila jiná chyba americkou sondu Mars Climate Orbiter. Ta měla využít tzv. aerobrakingu, kdy mírné tření o vrchní vrstvy atmosféry Marsu upraví dráhu z eliptické na kruhovou bez spotřeby paliva. Proto je však nutné velmi přesné navedení k planetě, aby sonda proletěla ve správné výšce. Ačkoli měli všichni výrobci a členové řízení sondy pracovat s jednotkami SI, se kterými počítal i řídicí software sondy, v datech pro korekci kurzu těsně před příletem k planetě byly místo Newtonů data v imperiálních jednotkách Pound-force (lbf), jež mají zcela jinou hodnotu. Sonda se zanořila příliš hluboko do Marsovy atmosféry a skončila jako jasný bolid na marsovském nebi.

Středisko služeb školám, Plzeň, Částkova 78
Podpora talentovaných žáků v Plzeňském kraji
CZ.1.07/1.2.03/02.0001

Tento projekt je v roce 2013 financován z rozpočtu Plzeňského kraje

2.4 Jupiter

Počínaje Jupiterem je průzkum planet Sluneční soustavy doménou pouze americké NASA. Všechny sondy, které se vydaly do této, či větší vzdálenosti byly vždy zcela, či alespoň z většiny úspěšné. Okolo Jupiteru nejprve prolétly v prosinci 1973 Pioneer 10 a o rok později Pioneer 11. Ten následně pokračoval k Saturnu.

Další průlety okolo Jupiteru provedly v květnu a červenci 1979 sondy Voyager 1 a 2. Tyto sondy následně vykonaly Velkou cestu. Gravitačními manévry u planet, kolem kterých prolétaly, se urychlovaly na cestu k dalším planetám. Voyager 1 takto prolétl okolo Jupiteru a Saturnu, Voyager 2 byl naveden k riskantnějším průletům a dostal se díky tomu i k Uranu a Neptunu. Stal se tak jedinou sondou, jež navštívila všechny velké planety. Oba Voyagery stále fungují. Voyager 1 v posledních měsících zřejmě vylétá z heliopauzy a dostává se do oblasti, kde převládá mezihvězdné kosmické počasí.

Jupiter se dočkal i umělé družice - sondy Galileo. Ta kolem něj obíhala od prosince 1995 do září 2003, kdy řízeně zanikla v atmosféře Jupiteru. Galileo se ukázal být nesmírně odolnou sondou, která se vyrovnala s nerozevřenou anténou a s tím i velmi ztíženou komunikací se Zemí, i s velmi silnou radiací v Jupiterových radiačních pásích. Před příletem se ze sondy oddělilo atmosférické pouzdro, které zkoumalo vrchní vrstvy atmosféry Jupiteru. Samotnou sondu potkal stejný osud, protože hrozilo, že by mohla neřízeně spadnout na Europu, měsíc, jež má potenciál hostit primitivní život. Protože sonda nebyla sterilizována, nechťeli operátoři riskovat případnou kontaminaci.

Nyní letí k Jupiteru sonda Juno, která má dorazit v srpnu 2016. Na rozdíl od předchozích sond využívá sluneční panely. Je to poprvé, co budou použity v takové vzdálenosti od Slunce.

2.5 Saturn

Saturn se krom sond Pioneer 11 a obou Voyagerů dočkal jen jedné sondy. Od července 2004 u něj krouží sonda Cassini. Tato veleúspěšná americká sonda je poslední a nejdokonalejší z velkých planetárních sond. V jejím hledáčku je kromě samotné planety i její rozsáhlý prstenec a bohatá rodina satelitů. Do atmosféry Titanu, největšího ze Saturnových satelitů, vypustila v lednu 2005 přistávací pouzdro Huygens. To se stalo prvním lidským strojem, jež přistál na měsíci jiné planety. Mise sondy Cassini je naplánována nejméně do roku 2017.

2.6 Uran a Neptun

Tyto planety jen krátce navštívil Voyager 2. Ač sonda fungovala v obou případech skvěle, během krátkého průletu vždy zachytila jen nepatrné množství informací, často velmi zajímavých a nečekaných. A tak za sebou zanechala více nových otázek, než rozřešených odpovědí.

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

2.7 Pluto

V lednu 2006 odstartovala New Horizons, první sonda k poslední planetě Sluneční soustavy. Půl roku po startu však byl její cíl přeřazen mezi trpasličí planety. Sonda využívá iontový motor, který jí na rozdíl od klasického chemického raketového motoru může udělit podstatně větší impuls. Tah motoru je sice minimální, ale působí po dobu měsíců i roků. Předpokládaný průlet okolo Pluta nastane 14. července 2015. Sonda bude mít velmi málo času na detailní průzkum Pluta a jeho satelitů. Proto nyní probíhá intenzivní teleskopický průzkum ze Země, aby bylo možné sondu předem zaměřit na nejzajímavější oblasti Pluta. Data zaznamenaná při průletu se budou na Zemi vysílat asi 9 měsíců. Probíhá také pátrání po dalších tělesech za drahou Pluta, která by mohla být dále zkoumána touto sondou při cestě ze Sluneční soustavy.

3 Závěr

Planetární sondy nám umožnily mnohem detailnější průzkum významných těles Sluneční soustavy. Samozřejmě existuje více podobných sond, některé zkoumají Slunce, jiné planetky či komety, samotnou Zemi, nebo náš Měsíc. Rozsah přednášky však neumožňuje zabývat se všemi. Kromě přímého vědeckého přínosu však měly obrovský přínos pro techniku a vývoj nových technologií i jejich testování v extrémních podmínkách.

4 Kontakt na autora

Bc. Ondřej Trnka
Hvězdárna a planetárium Plzeň
trnka@plzen.eu

ARCHIMÉDŮV ZÁKON

Josef VESELÝ

1 Úvod

Archimédův zákon bývá probírán na konci školního roku, patří proto mezi méně procvičené pasáže středoškolské fyziky. Lze však nalézt mnoho zajímavých úloh a atraktivních experimentů s touto tematikou.

2 Vztlková síla

Vztlková síla působí na každé těleso ponořené do kapaliny nebo do plynu.

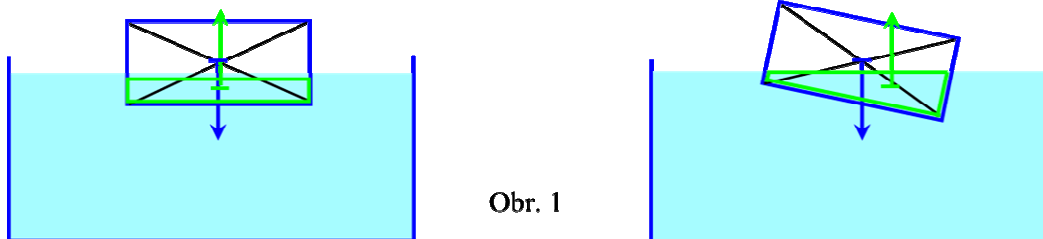
V kapalině vzniká vztlková síla díky závislosti hydrostatického tlaku na hloubce. Spodní část tělesa je v oblasti vyššího tlaku, působí proto na ni větší tlaková síla než na část horní. Výslednicí je vztlková síla mířící svisle vzhůru. Tlakové síly působící ze stran se vzájemně vruší.

V atmosféře namísto hydrostatického tlaku působí tlak atmosférický. Vzhledem k tomu, že hustota vzduchu ($1,2$ až $1,3 \text{ kg/m}^3$) je téměř tisíckrát menší než hustota vody, projevuje se vztlková síla vzduchu jen při působení na tělesa s velmi malou hustotou (Teplovzdušný balón, pouťový balónek plněný heliem apod.)

3 Rovnováha plovoucího tělesa

Těleso plovoucí v kapalině může být podobně jako tuhé těleso na tuhé podložce v rovnovážné poloze stálé, volné nebo vratké.

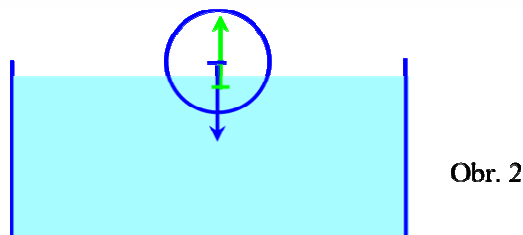
Při vychýlení plovoucího tělesa z rovnovážné polohy stálé vznikne moment dvojice sil vracející těleso do původní polohy. Viz obr. 1



Obr. 1

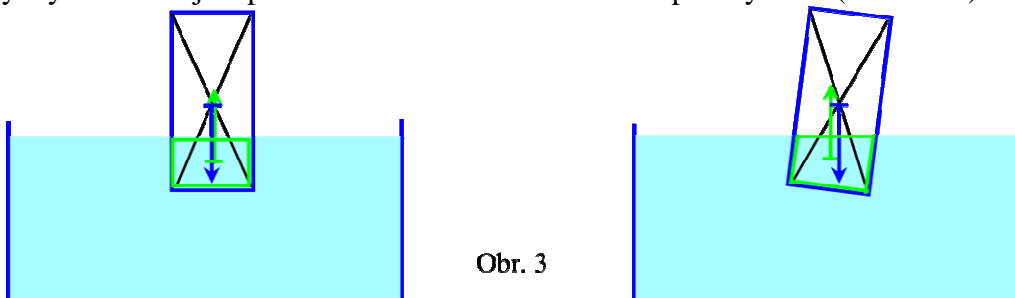
Při vychýlení plovoucího tělesa z rovnovážné polohy volné je moment sil stále nulový, těleso zůstává v nové poloze (viz obr. 2)

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ



Obr. 2

Při vychýlení plovoucího tělesa z rovnovážné polohy vratké vznikne moment dvojice sil, který vychylku zvětšuje a převrátí těleso až do rovnovážné polohy stálé (viz obr. 3).



Obr. 3

4 Úlohy

4.1 Těleso

Vypočítejte hmotnost tělesa m , které má hustotu ρ a dá se ve vodě o hustotě ρ_1 zvednout silou F . Řešte obecně, pak pro hodnoty $\rho = 3000 \text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$, $\rho_1 = 1000 \text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$, $F = 98 \text{ N}$, $g = 9,8 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$.

Řešení: $m = \frac{F\rho}{g(\rho - \rho_1)} = 15 \text{ kg}$

4.2 Člun

Na vlečný člun bylo naloženo 50 tun písku. Ponor člunu se zvětšil o 25 cm. Jaká je plocha průřezu člunu v místě ponoru?

Výsledek: $S = 200 \text{ m}^2$

5. Pokus

Může se „potápět“ zkrácená zápalka?

Zápalku odřízneme asi 2 mm od hlavičky a vložíme do nepříliš široké zkumavky naplněné vodou. Zkumavku uzavřeme palcem a silně stlačíme. Zápalka se začne potápět. Tlak palce uvolníme, zápalka se začne vynořovat.

Jak je to možné?

Hustota zkrácené zápalky je jen nepatrně menší než hustota vody. Když zvýšíme tlak, zmenší se objem zápalky, tím její hustota vzroste a zápalka se potápí.



INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

4 Závěr

Vztlková síla určená na základě Archimédova zákona se uplatňuje při plování těles s hustotou menší než je hustota kapaliny, při balónovém létání a v mnoha dalších situacích.

5 Použitá literatura

Byly použity pouze nové úlohy, nebo upravené úlohy z archivu autora.

6 Kontakt na autora

Mgr. Josef Veselý
Gymnázium Jaroslava Vrchlického, Klatovy
jvesely@gymkt.cz

Středisko služeb školám, Plzeň, Částkova 78
Podpora talentovaných žáků v Plzeňském kraji
CZ.1.07/1.2.03/02.0001

Tento projekt je v roce 2013 financován z rozpočtu Plzeňského kraje

ŘEŠENÍ OBTÍŽNĚJŠÍCH ÚLOH Z DYNAMIKY

Josef VESELÝ

1 Úvod

Při řešení reálných situací používáme vždy více nebo méně zjednodušené modely skutečnosti. Jednodušší modely se snadno matematicky zpracovávají, ale jejich výsledky většinou neodpovídají realitě.

Zdokonalování modelů si můžeme vyzkoušet na úloze o pohybu dvou závaží na pevné kladce. Zrychlení soustavy budeme teoreticky vypočítávat i měřit experimentálně.

Dále budeme řešit ještě další úlohy.

2 Teoretické řešení

Závaží o hmotnostech $m_1 = 30$ g a $m_2 = 50$ g zavěsíme přes pevnou kladku a budeme počítat zrychlení a soustavy. Tíhové zrychlení $g = 9,81$ m·s⁻².

2.1 Nejjednodušší model

Zanedbáme hmotnost kladky a závěsu, dále tření, vztlakovou sílu, odpor vzduchu a vliv zemské rotace.

V tomto modelu proti sobě působí tíhové síly obou závaží, z pohybové rovnice snadno dostáváme $a = g(m_2 - m_1)/(m_2 + m_1) = 2,45$ m·s⁻²

2.2 Uvažujeme hmotnost kladky

Kladka je válec o hmotnosti $m_3 = 48$ g (určeno pomocí siloměru) a poměru r . Síly napínající závěsy označíme F_2 a F_1 , úhlové zrychlení kladky ε .

Závaží konají posuvný pohyb, kladka koná pohyb otáčivý, musíme proto nejprve napsat pohybové rovnice pro jednotlivá tělesa:

$$F_{G2} - F_2 = m_2 a$$

$$F_1 - F_{G1} = m_1 a$$

$$(F_2 - F_1)r = J\varepsilon$$

Úpravou dostaneme

$$a = \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2 + \frac{1}{2}m_3} g = 1,88 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$$

3 Experimentální řešení

Těžší závaží necháme opakovaně klesat na dráze $s = 1,00$ m a změříme dobu pohybu t . Měření času opakovaně provedlo větší množství studentů, průměrná hodnota $t = 1,1$ s. Pro zrychlení potom platí $a = 2s/t^2 = 1,65 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$.

Experimentálně určené zrychlení je stále menší než zrychlení vyplývající z přesnějšího modelu. Pro dosažení lepšího výsledku by bylo třeba uvažovat i tření v ose kladky. Další faktory jsou již skutečně zanedbatelné.

4 Další úlohy

4.1 Válec

Válec o hmotnosti m_1 je přes lehkou kladku bez tření tažen závažím o hmotnosti m_2 . Určete zrychlení a posuvného pohybu válce a velikost síly F_p , kterou je napínán lehký, ale pevný provázek. Řešte obecně, potom pro hodnoty $m_1 = 10$ kg, $m_2 = 5$ kg, $g = 10 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$.

$$\text{Řešení: } a = \frac{m_2}{m_2 + \frac{1}{2}m_1} \cdot g = 2,5 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}, \quad F_p = \frac{3m_1 m_2}{2m_2 + 3m_1} g = 37,5 \text{ N}$$

4.2

Závaží o hmotnosti m_1 táhne přes lehkou kladku (bez tření) po vodorovné rovině válec o hmotnosti m_2 pomocí lehké nitě omotané okolo válce. Niť se odvíjí a válec se valí bez prokluzování. Určete velikost zrychlení závaží a_1 a velikost zrychlení posuvného pohybu válce a_2 . Dále určete velikost síly F_p , kterou je namáhána niť. Řešte obecně, potom pro hodnoty $m_1 = 2,5$ kg, $m_2 = 4$ kg, $g = 10 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$.

$$\text{Řešení: } a_1 = \frac{m_2}{m_1 + \frac{1}{2}m_2} \cdot g = 5 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$$
$$a_2 = \frac{m_1}{2m_1 + \frac{1}{2}m_2} \cdot g = 2,5 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$$
$$F_p = \frac{5m_1 m_2}{8m_1 + 5m_2} \cdot g = 12,5 \text{ N}$$

5 Závěr

Úlohy z kinematiky lze řešit užitím diferenciálního a integrálního počtu nebo použitím středoškolských vzorců a středoškolské matematiky. Vždy je třeba úlohu správně tematicky zařadit, vyhledat v paměti nebo v tabulkách potřebné vzorce, matematickými úpravami najít řešení a toto řešení fyzikálně vyhodnotit.

6 Použitá literatura

Byly použity pouze nové úlohy, nebo upravené úlohy z archivu autora. Úlohy 4.1 a 4.2 byly publikovány na školní síti Gymnázia v Klatovech

7 Kontakt na autora

Mgr. Josef Veselý
Gymnázium Jaroslava Vrchlického, Klatovy
jvesely@gymkt.cz

ŘEŠENÍ OBTÍŽNĚJŠÍCH ÚLOH Z KINEMATIKY

Josef VESELÝ

1 Úvod

Pro řešení obtížnějších úloh z mechaniky je vhodné seznámit se se základy diferenciálního a integrálního počtu. Zjednoduší se tím zavádění pojmů jako okamžitá rychlost a zrychlení, je pak možné řešit i úlohy o nerovnoměrně zrychlených pohybech.

Standardní úlohy (byť komplikovanější) o průměrné rychlosti a o rovnoměrných a rovnoměrně zrychlených pohybech a pohybech z nich složených lze řešit užitím klasické středoškolské matematiky bez diferenciálního počtu.

2 Kinematické veličiny

V kinematice budeme používat čas t , polohový vektor \mathbf{r} , dráhu s , okamžitou rychlost \mathbf{v} , průměrnou rychlost v_p , zrychlení \mathbf{a} .

2.1 Polohový vektor, okamžitá rychlost, okamžité zrychlení

Používáme trojrozměrný polohový vektor $\mathbf{r} = (x, y, z)$. Pro počítání s polohovými vektory platí pravidla známá ze středoškolské matematiky. Jedná se o sčítání (skládání) vektorů, násobení vektoru reálným číslem, odčítání vektorů, skalární a vektorové násobení. Násobit však budeme obvykle vektorem jiného druhu.

Okamžitou rychlost definujeme jako časovou derivaci polohového vektoru. Vektor derivujeme po jednotlivých souřadnicích.

Okamžité zrychlení je dáno časovou derivací rychlosti, tj. druhou derivací polohového vektoru.

Jedná-li se o pohyb přímočarý, vystačíme s jednou souřadnicí. Pokud je závislost této souřadnice na čase dána kvadratickou funkcí, dostáváme známé vzorce pro pohyb rovnoměrně zrychlený.

2.2 Trajektorie, dráha, průměrná rychlost

Trajektorie je geometrická křivka, po které se uvažovaný hmotný bod pohybuje. Dráhou rozumíme délku této trajektorie.

Průměrná rychlost je podíl dráhy a času. Jedná se o skalární veličinu.

3 Úlohy

3.1 Automobil

Automobil ujede 1. část dráhy s_1 za dobu t_1 , ve druhé části dráhy má průměrnou rychlost v_2 . Jak dlouho trvala celá jízda, jestliže průměrná rychlost celého pohybu je v_p ?

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Vypočítejte celkovou dráhu, rychlost na prvním úseku v_1 a délku druhého úseku s_2 . Řešte obecně, potom pro hodnoty $s_1 = 36$ km, $t_1 = 20$ min, $v_2 = 54$ km/h, $v_p = 90$ km/h.

Obecné řešení:

Celkový čas $t = (s_1 - v_2 t_1) / (v_p - v_2)$, celková dráha $s = s_1 + v_2 (s_1 - v_p t_1) / (v_p - v_2)$, rychlost na prvním úseku $v_1 = s_1 / t_1$, délka druhého úseku $s_2 = v_2 (s_1 - v_p t_1) / (v_p - v_2)$

Číselně: $t = 0,5$ h, $s = 45$ km, $v_1 = 108$ km/h, $s_2 = 9$ km

3.2 Člun

Rychlost proudu v řece je v_1 . Rychlost člunu na klidné vodě je v_2 . Určete dobu potřebnou k tomu, aby člun urazil vzdálenost s tam a zpět kolmo na proud a průměrnou rychlost v_p člunu vzhledem ke břehu. Řešte obecně, potom pro hodnoty $v_1 = 5$ m/s, $v_2 = 3$ m/s, $s = 88$ m.

Řešení: $t = 2s / \sqrt{(v_2^2 - v_1^2)} = 44$ s, $v_p = \sqrt{(v_2^2 - v_1^2)} = 4$ m/s

3.3 Okno

Okolo okna výšky h padá kámen po dobu t . Z jaké výšky h_1 nad oknem kámen padá? Jakou měl kámen rychlost v_1 u horního okraje okna a jakou měl rychlost v_2 u dolního okraje okna? Úlohu řešte nejprve obecně, pak pro hodnoty $h = 2$ m, $t = 0,3$ s, $g = 9,8$ m·s⁻².

Obecné řešení: $h_1 = \frac{(2h - gt^2)^2}{8gt^2}$; $v_1 = h/t - gt/2$; $v_2 = h/t + gt/2$

Číselně: $h_1 = 1,4$ m, $v_1 = 5,2$ m·s⁻¹, $v_2 = 8,1$ m·s⁻¹

3.4 Autobus

Autobus jede po přímé silnici rychlostí v_1 . Ve vzdálenosti d je značka příkazující snížení rychlosti na v_2 . Reakční doba řidiče je t_1 . Určete velikost zrychlení autobusu a tak, aby rychlosti v_2 dosáhl přesně u značky. Pro numerické řešení použijte hodnoty $v_1 = 72$ km·h⁻¹, $d = 100$ m, $v_2 = 36$ km·h⁻¹, $t_1 = 1$ s.

Řešení: $a = (v_1^2 - v_2^2) / 2(d - t_1 v_1) = 15 / 8$ m·s⁻²

4 Závěr

Úlohy z kinematiky lze řešit užitím diferenciálního a integrálního počtu nebo použitím středoškolských vzorců a středoškolské matematiky. Vždy je třeba úlohu správně tematicky zařadit, vyhledat v paměti nebo v tabulkách potřebné vzorce, matematickými úpravami najít řešení a toto řešení fyzikálně vyhodnotit.

5 Použitá literatura

Byly použity pouze nové úlohy, nebo upravené úlohy z archivu autora.

Středisko služeb školám, Plzeň, Částkova 78
Podpora talentovaných žáků v Plzeňském kraji
CZ.1.07/1.2.03/02.0001

Tento projekt je v roce 2013 financován z rozpočtu Plzeňského kraje



evropský
sociální
fond v ČR



EVROPSKÁ UNIE



MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ,
MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY



OP Vzdělávání
pro konkurenceschopnost



INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

6 Kontakt na autora

Mgr. Josef Veselý

Gymnázium Jaroslava Vrchlického, Klatovy

jvesely@gymkt.cz

Středisko služeb školám, Plzeň, Částkova 78
Podpora talentovaných žáků v Plzeňském kraji
CZ.1.07/1.2.03/02.0001

Tento projekt je v roce 2013 financován z rozpočtu Plzeňského kraje