



INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

**Podpora talentovaných žáků v Plzeňském kraji**

**Reg. č. CZ.1.07/1.2.03/02.0001**

**SBORNÍK**  
**ODBORNÝ PŘÍRODOVĚDNÝ**  
**KEMP**

**20. - 24. SRPNA 2012 – MATEMATIKA**

**3. – 7. ZÁŘÍ 2012 - FYZIKA**

[WWW.PODPORATALENTU.CZ](http://WWW.PODPORATALENTU.CZ)

## Obsah:

### MATEMATICKÝ KEMP

Celá část reálného čísla .....	5
Důkazové techniky - nerovnosti .....	7
Důkazové techniky - planimetrie .....	10
Dynamická geometrie - program Geogebra .....	12
Historické aspekty postupného rozšiřování pojmu číslo .....	14
Kombinatorika .....	16
Komplexní čísla .....	18
Konečné součty a nekonečné řady .....	20
Lineární diofantovské rovnice .....	22
Netradiční řešení rovnic .....	24
Některé diofantovské rovnice .....	27
O metodách rozkladu přirozených čísel v součin prvočísel .....	29
O řešení soustav algebraických rovnic s chytrou kalkulačkou .....	32
Počtetní techniky prvních civilizací .....	35
Reciproké rovnice .....	37
Rovnice vyšších řádů, numerické řešení rovnic .....	39
Rovnosti, nerovnosti a posloupnosti .....	41
Teorie čísel a geometrie trojúhelníku .....	54
Zlatý řez - matematický diamant .....	68

### FYZIKÁLNÍ KEMP

Diferenciální rovnice vedoucí k exponenciální závislosti veličin .....	73
EPR Paradox .....	80

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Fyzika v pohádkách .....	82
Fyzikální odhad a některé paradoxní případy .....	86
Chemie ve fyzice aneb fyzika v chemii I .....	89
Chemie ve fyzice aneb fyzika v chemii II .....	91
Jak nás oko klame .....	93
Jak využít data z astronomických katalogů? .....	95
Keplerovy zákony .....	101
Mayský kalendář a konec světa .....	103
Modely atomu a řešení vybraných příkladů .....	106
Newtonův gravitační zákon .....	108
Nové principy zobrazovačů .....	110
Odhady vzdáleností v naší sluneční soustavě .....	112
Ohybové jevy .....	114
Robotická vozítka na Marsu .....	116
Rozbor úloh z minulých ročníků AO .....	123
Řešení obtížnějších úloh z elektřiny a magnetismu .....	126
Řešení obtížnějších úloh z hydromechaniky .....	129
Řešení obtížnějších úloh z mechaniky .....	132
Řešení vybraných úloh z optiky .....	136
Řešení vybraných úloh z termiky .....	138
Řešení zajímavých úloh z optiky .....	140
Svět barev (i v nás) .....	142
Úlohy ze školních kol FO .....	144
Využití matematiky při řešení fyzikálních úloh - kvadratické, exponenciální a goniometrické rovnice .....	149



## INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Využití matematiky při řešení fyzikálních úloh - součet nekonečné řady a určitý integrál ve fyzice .....	156
Základy zpracování fyzikálních měření .....	164
Zatmění Slunce a Měsíce .....	166
Závislost odporu na teplotě .....	170

## CELÁ ČÁST REÁLNÉHO ČÍSLA

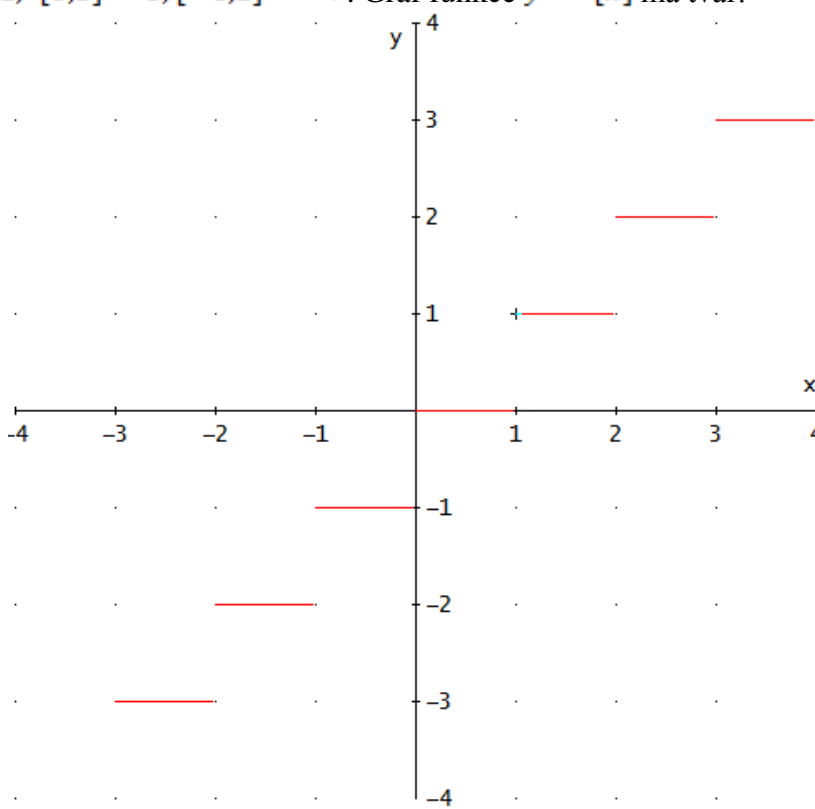
Josef KUBEŠ

### 1 Úvod

Celá část celého čísla je kapitola, která se ve středoškolské matematice probírá pouze okrajově v zaměřených třídách. Je ovšem zdrojem řady netriviálních úloh, které se občas zařazují do matematických soutěží.

### 2 Celá část reálného čísla

Výraz  $[a]$  znamená celou část z reálného čísla  $a$ . Je rovna nejbližšímu nižšímu celému číslu. Tedy  $[1] = 1$ ,  $[3,5] = 3$ ,  $[-6,2] = -7$ . Graf funkce  $y = [x]$  má tvar:



2.1 V oboru reálných čísel řešte soustavu rovnic

$$10x[y] = 1492$$

$$10y[x] = 1776$$

## INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Řešení každé úlohy s celou částí neznámé je vždy originální a není na ně univerzální pravidlo. Zadaná soustava se převede na soustavu dvou nerovnic

$$\begin{aligned} [x][y] &\leq 149 \\ ([y] + 1)[x] &\geq 178. \end{aligned}$$

Odtud stanovíme podmínky pro obě proměnné a dosadíme všechny možné případy. Soustava má čtyři řešení.

**2.2** V oboru reálných čísel řešte rovnici

$$[3x - 5] = 5x - 8$$

**2.3** Určete všechna reálná čísla, která vyhovují rovnici  $4x - 2[x] = 5$

**2.4** Zjistěte, kolik řešení má v oboru reálných čísel rovnice

$$x = [x] + \frac{x}{2004}$$

Ve všech úlohách využijeme definici celé části, tedy  $[x] = x + k$ , kde  $0 \leq k < 1$ .

### 3 Závěr

Uvedené úlohy z velké části přesahují rozsah základního středoškolského učiva matematiky. Pro řešení příkladů matematické olympiády jsou však důležité a navazuje se na ně ve vyšších kolech. Řešitele zdokonalují ve strategii a důslednosti řešení.

### 4 Použitá literatura

ŠVRČEK, J., CALÁBEK, P. Sbíрка netradičních matematických úloh. 1. vyd. Praha: Prométheus, spol. s r. o., 2007. 186 s. ISBN 978-80-7196-341-7

### 5 Kontakt na autora

PaedDr. Josef Kubeš

Gymnázium, Plzeň, Mikulášské nám. 23

[Josef.Kubes@mikulasske.cz](mailto:Josef.Kubes@mikulasske.cz)

## DŮKAZOVÉ TECHNIKY – NEROVNOSTI

Josef KUBEŠ

### 1 Úvod

Znalost důkazových technik patří k základnímu vybavení každého řešitele matematické olympiády. Ověřování platnosti zadaných nerovnic vždy vyžaduje originální přístup, určitý nadhled a zkušenost.

### 2 Nerovnosti a jejich ověřování

Základním stavebním kamenem je nerovnost vyplývající z druhé mocniny dvojčlenu  $(x - 1)^2$ . Pro libovolné reálné číslo platí, že  $(x - 1)^2 \geq 0$ . Odtud plyne  $x + \frac{1}{x} \geq 2$ .

Další důležitá nerovnost je vztah mezi geometrickým a aritmetickým průměrem. Pro libovolnou  $n$ -tici reálných kladných čísel  $x_1, x_2, \dots, x_n$  platí:  $\sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_n} \leq \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}$ .

Poslední nerovností, se kterou se budeme zabývat je Cauchyova nerovnost. Pro libovolné dvě  $n$ -tice reálných čísel  $x_1, x_2, \dots, x_n$  a  $y_1, y_2, \dots, y_n$  platí  $(x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots + x_n y_n)^2 \leq (x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2)(y_1^2 + y_2^2 + \dots + y_n^2)$ .

**2.1** Dokažte, že obsah obdélníka o stranách  $a, b$  je menší než polovina obsah u čtverce sestrojeného nad jeho úhlopříčkou.

Vhodnou úpravou přejdeme na druhou mocninu dvojčlenu.

**2.2** Dokažte, že pro každý ostrý úhel  $\alpha$  platí

$$\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{cotg} \alpha \geq 2$$

Použijeme vztah mezi funkcemi tangens a kotangens a upravíme na druhou mocninu dvojčlenu.

**2.3** Dokažte, že pro libovolnou trojici kladných čísel  $a, b, c$  platí

$$(a + b)(b + c)(c + a) \geq 8abc$$

Roznásobíme a použijeme nerovnost mezi aritmetickým a geometrickým průměrem.

2.4 Dokažte, že pro libovolné přirozené číslo  $n > 1$  platí:

$$n! < \left(\frac{n+1}{2}\right)^n$$

Využijeme rovnost: Pro libovolné přirozené číslo  $n$  větší než jedna platí:  $1 + 2 + 3 + 4 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$ . Dále je potřeba použít vztah mezi aritmetickým a geometrickým průměrem.

2.5 Dokažte, že pro všechna  $x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbb{R}^+$  platí:

$$\left(\sum_{i=1}^n x_i\right)^2 \leq n \sum_{i=1}^n x_i^2$$

Dosadíme do Cauchyovy nerovnosti za  $y_1, y_2, \dots, y_n$  číslo 1.

2.6 Dokažte, že pro každé reálné číslo  $a$  platí:

$$3(1 + a^2 + a^4) \geq (1 + a + a^2)^2$$

2.7 Necht'  $x, y, z \in \mathbb{R}_0^+$ . Dokažte, že platí:

$$\sqrt{xy + yz + zx} \leq \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

Obě nerovnosti dokážeme aplikací Cauchyovy nerovnosti.

2.8 Dokažte, že pro libovolnou trojici reálných čísel  $a, b, c$  platí:

$$(a + b - c)^2 + (b + c - a)^2 + (c + a - b)^2 \geq ab + bc + ca$$

Upravíme levou stranu a opět šikovně použijeme Cauchyova nerovnost.

### 3 Závěr

Uvedené úlohy z velké části přesahují rozsah základního středoškolského učiva matematiky. Pro řešení příkladů matematické olympiády jsou však základní a navazuje se na ně ve vyšších kolech. Řešitele zdokonaluje ve strategii a důslednosti řešení. Důkazové úlohy uvedeného typu také vyžadují precizní znalost v upravování algebraických výrazů.





INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

#### 4 Použitá literatura

ŠVRČEK, J., CALÁBEK, P. Sbíрка netradičních matematických úloh. 1. vyd. Praha: Prométheus, spol. s r. o., 2007. 186 s. ISBN 978-80-7196-341-7

KUFNER, A. Nerovnosti a odhady. 1. vyd. Praha: Mladá fronta 1975. 120 s. 508/21/82.6

#### 5 Kontakt na autora

PaedDr. Josef Kubeš

Gymnázium, Plzeň, Mikulášské nám. 23

[Josef.Kubes@mikulasske.cz](mailto:Josef.Kubes@mikulasske.cz)

## DŮKAZOVÉ TECHNIKY - PLANIMETRIE

Josef KUBEŠ

### 1 Úvod

Planimetrie, tedy rovinná geometrie, je velmi stará disciplína, která svou náročností potrápí řadu studentů. Vyžaduje představivost a určitou schopnost si zadanou situaci dobře načrtnout. Každá úloha je vlastně originální, a proto její řešení vyžaduje značnou míru kreativity. Znalost planimetrie je využitelná v běžném životě i v profesní kariéře u řady oborů. Obvykle si školské postupy nepamatuujeme, zůstávají v našem podvědomí a přiřazujeme si je k dalším životním zkušenostem.

### 2 Důkazové úlohy v planimetrii

Důkazové úlohy jsou velkým balíkem úloh. Pomáhají k ujasnění vzájemných vztahů a geometrických pouček. Aplikujeme kromě geometrických znalostí také poznatky matematické logiky. Pro snazší vyjadřování využijeme poznatky z teorie množin.

**2.1** Označme  $S$  střed strany  $AB$  ostroúhlého trojúhelníku  $ABC$  a  $V$  průsečík jeho výšek. Obraz bodu  $V$  ve středové souměrnosti se středem  $S$  označme  $U$ . Dokažte, že úhly  $ACV$  a  $BCU$  jsou shodné.

První krok k řešení je důkaz, že čtyřúhelník  $AUBC$  je tětíkový čtyřúhelník. Shodnost velikostí obou úhlů dokážeme pomocí věty o obvodových úhlech a podobnosti vhodných trojúhelníků.

**2.2** Je dán libovolný vnitřní bod  $P$  pravoúhlého rovnoramenného trojúhelníka  $ABC$  s přeponou  $AB$ . Dokažte, že z úseček délek  $|AP|$ ,  $|BP|$  a  $|CP|\sqrt{2}$  lze sestrojit trojúhelník.

Po přečtení úlohy bychom předpokládali použití trojúhelníkové nerovnosti. To by byla cesta nesprávným směrem. Zobrazíme trojúhelník  $BPC$  v rotaci se středem v bodě  $C$  a úhlem otočení  $-90^\circ$ . V obrázku vyhledáme zadané úsečky a zjistíme, že mohou tvořit trojúhelník.

**2.3** Necht'  $S$  značí střed kružnice vepsané danému ostroúhlému trojúhelníku  $ABC$ . Označme dále  $A'$ ,  $B'$ ,  $C'$  obrazy bodu  $S$  v osových souměrnostech po řadě podle přímk  $BC$ ,  $AC$ ,  $AB$ . Dokažte, že trojúhelníky  $ABC$ ,  $A'B'C'$  jsou podobné, právě když  $ABC$  je rovnostranný trojúhelník.

Využijeme trojúhelník sestrojený ze středních příček trojúhelníku  $ABC$ . Jedná se o důkaz ekvivalence, tento fakt si musíme dobře uvědomit.

## INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

**2.4** Uvažujme polokružnici  $k$  sestrojenou nad stranou  $AB$  vně jednotkového čtverce  $ABCD$ . Na polokružnici  $k$  sestrojte bod  $P$ , pro který nabývá výraz  $|AP|^2 + |CP|^2$  největší hodnoty a určete ji.

Základem úspěšného řešení úlohy je dobré zakreslení zadání. Ačkoliv je požadována konstrukce bodu  $P$ , převedeme úlohu na algebraický problém. K řešení potřebujeme kosinovou větu a vztahy mezi goniometrickými funkcemi. Výsledný výraz vyjádříme pomocí velikosti úsečky  $|AP|$ . K určení extrému použijeme vztah mezi geometrickým a aritmetickým průměrem.

### 3 Závěr

Planimetrické úlohy včetně důkazových jsou vděčným tématem matematických soutěží a obvykle patří k těm, které oddělují úspěšné řešitele od neúspěšných. Uvedené příklady reprezentují vždy velkou skupinu úloh, proto každá je řešena jiným způsobem.

### 4 Použitá literatura

ŠVRČEK, J., CALÁBEK, P. Sbíрка netradičních matematických úloh. 1. vyd. Praha: Prométheus, spol. s r. o., 2007. 186 s. ISBN 978-80-7196-341-7

### 5 Kontakt na autora

PaedDr. Josef Kubeš

Gymnázium, Plzeň, Mikulášské nám. 23

[Josef.Kubes@mikulasske.cz](mailto:Josef.Kubes@mikulasske.cz)

## DYNAMICKÁ GEOMETRIE – PROGRAM GEOGEBRA

Josef KUBEŠ

### 1 Úvod

GeoGebra je dynamický matematický software spojující geometrii, algebru a matematickou analýzu. Byl vytvořen pro účely vyučování a učení se matematiky Markusem Hohenwarterem na Univerzitě Florida Atlantic.

### 2 Pojem dynamické geometrie

Můžeme říci, že dynamická geometrie je fenoménem posledního desetiletí, který sebou přinesla informační revoluce. "Geometrie na počítači", jak by se dala také dynamická geometrie nazvat, byla v prvopočátcích jen náhražkou za "tužku a papír", ale postupem času se ukázalo, že má mnohem širší možnosti.

Kde jsou tedy výhody využití geometrického náčrtníku před "tužkou a papírem? Pokud se jedná jen o samotné narýsování dané konstrukce, je situace v obou případech stejná, jen s tím rozdílem, že na počítači bude zajisté konstrukce přesnější. Revolučním prvkem je možnost měnit volné prvky již hotové konstrukce, přičemž se celý zbytek konstrukce překreslí automaticky tak, aby byly zachovány všechny vazby, které byly při konstrukci dány.

### 3 Určení programu

Program GeoGebra je interaktivní geometrický systém, se kterým je možno konstruovat: body, přímky, úsečky, vektory, kružnice, kuželosečky, ale také například grafy funkcí. Všechny uvedené elementy lze pochopitelně interaktivně měnit. Zadání je možné provádět také pomocí souřadnic a rovnic. GeoGebra umožňuje počítat s čísly, vektory, souřadnicemi bodů, určovat derivace, integrály, nulové body a extrémy funkcí.

### 4 Jak získat program Geogebra

Podrobnější informace se dozvíte na oficiálních stránkách programu Geogebra (<http://www.geogebra.org/cms/cz>). Z této www stránky je možné program stáhnout a nainstalovat do vašeho počítače. Velká výhoda programu je v možnosti používat jej off-line (přímá instalace do Vašeho počítače - doporučuji), případně spustit online formou appletu na Vašem internetovém prohlížeči (<http://www.geogebra.org/webstart/geogebra.html>).



INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

## 5 Závěr

Řešení úloh v soutěžích obvykle vyžaduje exaktní postupy a důkazy. Přesto program Geogebra má své místo při přípravě matematicky nadaných studentů. Pomůže jim názorněji zobrazit studovanou situaci a měnit výsledek při změně vstupních parametrů (zadání). Pomůže jim lépe vníknout do řešeného problému.

## 6 Kontakt na autora

PaedDr. Josef Kubeš

Gymnázium, Plzeň, Mikulášské nám. 23

[Josef.Kubes@mikulasske.cz](mailto:Josef.Kubes@mikulasske.cz)

## Historické aspekty postupného rozšiřování pojmu číslo

Jiří Potůček

### 1 Úvod

Stručná charakteristika rozšiřování pojmu číslo ve školské matematice a v historickém vývoji matematiky, periodizace vývoje matematiky a základní informace o prvním vývojovém období matematiky – období formulace základních matematických pojmů a vztahů. Dále vybrané problémy z druhého vývojového období matematiky – období matematiky konstantních veličin, které se vztahují k rozšiřování a prohlubování pojmu číslo a budování číselných teorií.

### 2 Matematika tzv. vodních říší a v antickém Řecku

Stručná charakteristika matematiky prvních civilizací vznikajících kolem 5. tisíciletí př. n. l. v klimaticky příznivých podmínkách v povodí velkých řek, zejména informace o číselném zápisu a tehdy používaných početních postupech. Dále matematika v antických řeckých matematických a filozofických školách.

#### 2.1 Matematika ve starém Egyptě

Moskevský a Londýnský papyrus – hlavní zdroje informací o tehdejší egyptské matematice. Hieroglyfické písmo a vyjadřování kladných čísel a zlomků v nepoziční desítkové číselné soustavě. Porovnání tehdejších číselných zápisů s dnešní poziční desítkovou číselnou soustavou. Egyptské kmenné zlomky. Základní početní operace sčítání a odčítání a dále násobení a dělení založené na zdvojnásobování a půlení.

#### 2.2 Matematika na území Mezopotámie

Počítání pomocí klínového písma a objev poziční šedesátkové číselné soustavy. Nedostatky šedesátkové soustavy a snahy o jejich odstranění. Počítání pomocí tabulek dílčích výsledků. Srovnání egyptské a babylónské numerace a zřetelný pokrok související s objevem poziční (byť nedokonalé) číselné soustavy.

#### 2.3 První matematické a filozofické školy v antickém Řecku

Milétská škola naivních materialistů, Pythagorejská škola a první číselné teorie, objev nesouměřitelnosti úseček. Eleatská škola a paradoxy Parmenidova žáka Zénóna a jejich vysvětlení.



INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

### 3 Závěr

Poukázání na souvislosti postupného rozšiřování číselného oboru ve školské matematice s jeho paralelami v historickém vývoji matematiky. Vytvoření poziční desítkové číselné soustavy v Indii v 7. až 8. stol. n. l. a její rozšíření do světa Araby.

### 4 Použitá literatura

STRUÍK, D. J., Dějiny matematiky, Praha, Orbis 1963

KOLMAN, A., Dějiny matematiky ve starověku, Academia, Praha 1968

### 5 Kontakt na autora

RNDr. Jiří Potůček, CSc.

Fakulta pedagogická Západočeské univerzity v Plzni

E-mail: [potucek@kmt.zcu.cz](mailto:potucek@kmt.zcu.cz)

# KOMBINATORIKA

Jiří Potůček

## 1 Úvod

Jedním z důležitých úkolů školské matematiky je rozvíjení kombinatorického myšlení. Samotná kombinatorika nepotřebuje (kromě schopnosti správně logicky myslet a uvažovat) žádnou speciální předběžnou přípravu. V tomto tématu se zaměříme na zavedení základních kombinatorických pojmů a vztahů pro jejich výpočet.

## 2 Základní kombinatorické pojmy

Kombinace a variace bez opakování a s opakováním prvků jako skupiny prvků vybírané z prvků určité množiny (opakování prvků ve skupinách je buď zakázáno, nebo povoleno). Kombinace jako libovolné  $k$ -prvkové podmnožiny dané množiny, variace jako uspořádané  $k$ -tice vytvořené z prvků dané množiny. Kombinační číslo určuje počet kombinací, lze je vyjádřit pomocí faktoriálů. Vztahy mezi kombinačními čísly. Všechna možná uspořádání  $n$  prvků – permutace  $n$  prvků – jako variace  $n$ -té třídy z  $n$  prvků.

### 2.1 Ilustrace kombinatorických pojmů na příkladech

Základní úlohy na výpočet kombinací a variací příslušné třídy s opakováním i bez opakování prvků, ukázky užití kombinatoriky na úlohách z technické praxe, hospodářského i společenského života, ale i školské modelové úlohy sloužící k procvičení i motivaci ke studiu.

## 3 Závěr

Kombinatorika poskytuje řadu možností pro realizaci nadaných žáků a studentů v matematice. Ve třídách základní školy s rozšířeným vyučováním matematice byla zařazena již v 5. Třídě. Pomocí tzv. procházek po čtvercové síti zde byl elementárními prostředky odvozen výpočet kombinačního čísla a Pascalovo schéma kombinačních čísel. Také v úlohách matematické olympiády se náměty z kombinatoriky poměrně často vyskytují.

## 4 Použitá literatura

Smida, J., Kosmák, L., Odvárko, O., Šedivý, J.: Matematika pro II. ročník gymnázia, SPN, Praha, 1980





evropský  
sociální  
fond v ČR



EVROPSKÁ UNIE



MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ,  
MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY



OP Vzdělávání  
pro konkurenceschopnost



INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

## 5 Kontakt na autora

RNDr. Jiří Potůček, CSc.

Fakulta pedagogická Západočeské univerzity v Plzni

E-mail: [potucek@kmt.zcu.cz](mailto:potucek@kmt.zcu.cz)

## KOMPLEXNÍ ČÍSLA

Jiří Potůček

### 1 Úvod

V přednášce o postupném rozšiřování číselného oboru jsme dospěli k potřebě existence odmocnin ze záporných čísel. Množina reálných čísel to neumožňuje. Rafael Bombelli navrhl na přelomu 15. a 16. století řešení této situace v souvislosti s řešením kubických rovnic. Návodem na řešení těchto problémů bylo zavedení komplexních čísel.

Konstrukce množiny komplexních čísel musí být provedena tak, aby obsahovala množinu reálných čísel jako svoji podmnožinu. V jedné přednášce proto vybudujeme množinu komplexních čísel, zavedeme početní operace s nimi (analogicky jako s reálnými čísly) a zobrazování komplexních čísel v rovině, ve druhé přednášce ukážeme užití komplexních čísel při řešení rovnic.

### 2 Komplexní čísla I

Zavedení komplexních čísel, jejich základní charakteristiky a počítání s nimi.

#### 2.1 Algebraický tvar komplexního čísla

Algebraický tvar komplexního čísla definuje komplexní číslo jako uspořádanou dvojici reálných čísel, při čemž první složka se nazývá reálná část, druhá složka imaginární část komplexního čísla. Pokud je některá ze složek nulová, jde buďto o číslo reálné, nebo ryze imaginární. Imaginární složku komplexního čísla v algebraickém zápisu označuje imaginární jednotka  $i$ , jejíž druhá mocnina je rovna  $-1$ . Při sečítání nebo odečítání komplexních čísel sečítáme či odečítáme příslušné složky, tj. reálné nebo imaginární. Při násobení komplexních čísel v algebraickém tvaru pracujeme s komplexními čísly jako s dvojčleny. Při dělení komplexních čísel rozšíříme zlomek číslem komplexně sdruženým k číslu ve jmenovateli. Je-li  $a + ib$  komplexní číslo, pak komplexní číslo k němu sdružené je číslo  $a - ib$ .

Na složky komplexních čísel lze nahlížet jako na souřadnice bodů v rovině. Rovina se zavedeným souřadným systémem je tedy množinou obrazů komplexních čísel a nazýváme ji Gaussova rovina. Absolutní hodnotu komplexního čísla definujeme geometricky jako vzdálenost obrazu komplexního čísla od počátku souřadné soustavy.

#### 2.2 Goniometrický tvar komplexního čísla

Zavedeme-li pojem argument (nebo také amplituda) komplexního čísla jako úhel, který svírá spojnice obrazu komplexního čísla a počátku souřadné soustavy s kladnou částí osy  $x$  (měřeno v kladném smyslu), pak lze vyjádřit komplexní číslo  $z$  ve tvaru  $|z| \cdot (\cos x + i \cdot \sin x)$ . Při tom symbol  $|z|$  značí absolutní hodnotu komplexního čísla,  $x$  je argument komplexního čísla. Pro násobení

komplexních čísel pak můžeme s výhodou použít Moivreovu větu, kterou můžeme rozšířit i na umocňování.

### 3 Komplexní čísla II

Znalostí o komplexních číslech lze nyní využít při řešení rovnic v komplexním oboru. U kvadratických rovnic nyní nebude na závalu záporné číslo pod odmocninou.

#### 3.1 Řešení lineárních a kvadratických rovnic v komplexním oboru

Znalostí o komplexních číslech nyní můžeme využít při řešení lineárních rovnic s komplexními koeficienty nebo při řešení kvadratických rovnic obecně v komplexním oboru. Využíváme při tom vlastností komplexních čísel a znalostí početních operací s komplexními čísly.

#### 3.2 Binomické rovnice

Binomická rovnice  $n$ - tého stupně má  $n$  komplexních kořenů, které vytvoří v Gaussově rovině vrcholy pravidelného  $n$ -úhelníka. Binomické rovnice budeme řešit s využitím goniometrického tvaru komplexního čísla a Moivreovy věty, neboť tímto způsobem lze řešení binomické rovnice algoritmizovat. Obecně však lze řešit binomické rovnice i v algebraickém tvaru.

### 4 Závěr

Informace o komplexních číslech navazuje organicky na postupné rozšiřování číselného oboru. Ukazuje historické souvislosti vývoje vědecké matematiky a školské matematiky a motivaci pro rozšiřování číselného oboru (jak ve vědecké, tak i ve školské matematice).

### 4 Použitá literatura

Calda, E.: Matematika pro gymnázia – Komplexní čísla, 2. vydání, Prométheus, Praha 1995

Smida, J., Benešová, K., Gedeonová, E.: Matematika pro IV. Ročník gymnázií, 1. vydání, SPN Praha 1982

### 5 Kontakt na autora

RNDr. Jiří Potůček, CSc.

Fakulta pedagogická Západočeské univerzity v Plzni

E-mail: potucek@kmt.zcu.cz

# KONEČNÉ SOUČTY A NEKONEČNÉ ŘADY

Jaroslav HORA

## 1 Úvod

Seznámíme se s tzv. teleskopickou metodou součtu řady.

## 2 Dva příklady

Příklad 1: Určete součet řady  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$ .

Řešení: Obdobné příklady se řeší tzv. teleskopickou metodou. Název metody má zřejmě naznačit, že je třeba „vidět daleko“ a umět odhadnout, že se podaří zjednodušit částečné součty.

Nejprve pišme  $a_n = \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$  a tento fakt užijme při zápisu částečných součtů

řady:

$$s_1 = a_1 = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2},$$

$$s_2 = a_1 + a_2 = \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3},$$

$$s_3 = s_2 + a_3 = \frac{2}{3} + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4},$$

...

$$s_n = s_{n-1} + a_n = \left(1 - \frac{1}{n}\right) + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = 1 - \frac{1}{n+1} = \frac{n}{n+1}.$$

Nalezli jsme posloupnost částečných součtů  $\{s_n\}_1^{\infty} = \left\{\frac{n}{n+1}\right\}_1^{\infty}$ . Nakonec připomeňme, že součet  $s$  nekonečné řady je limitou posloupnosti částečných součtů  $\{s_n\}_1^{\infty}$ , tj.  $s = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n$ . Je tedy  $s =$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+1} = 1.$$

Příklad 2: Určete součet řady  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)(2n+5)}$ .

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

**Řešení:** Snadno zjistíme, že lze psát  $a_n = \frac{1}{(2n-1)(2n+5)} = \frac{1}{6} \left( \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+5} \right)$ . Nyní již vidíme, že „teleskopická metoda“ bude v tomto případě úspěšná. Je

$$s_1 = a_1 = \frac{1}{6} \left( 1 - \frac{1}{7} \right),$$

$$s_2 = s_1 + a_2 = \frac{1}{6} \left( 1 - \frac{1}{7} \right) + \frac{1}{6} \left( \frac{1}{3} - \frac{1}{9} \right) = \frac{1}{6} \left( 1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{7} - \frac{1}{9} \right),$$

$$s_3 = s_2 + a_3 = \frac{1}{6} \left( 1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{7} - \frac{1}{9} \right) + \frac{1}{6} \left( \frac{1}{5} - \frac{1}{11} \right) = \frac{1}{6} \left( 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} - \frac{1}{9} - \frac{1}{11} \right),$$

$$s_4 = s_3 + a_4 = \frac{1}{6} \left( 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} - \frac{1}{9} - \frac{1}{11} \right) + \frac{1}{6} \left( \frac{1}{7} - \frac{1}{13} \right) =$$

$= \frac{1}{6} \left( 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{9} - \frac{1}{11} - \frac{1}{13} \right)$  [„anihilace“ zlomků  $\frac{1}{7}$  je prvním úspěchem „teleskopické metody“],

$$s_5 = s_4 + a_5 = \frac{1}{6} \left( 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{9} - \frac{1}{11} - \frac{1}{13} \right) + \frac{1}{6} \left( \frac{1}{9} - \frac{1}{15} \right) =$$

$$= \frac{1}{6} \left( 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{11} - \frac{1}{13} - \frac{1}{15} \right),$$

$$s_n = \frac{1}{6} \left( 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+3} - \frac{1}{2n+5} \right).$$

Určili jsme posloupnost částečných součtů  $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$  a nakonec ještě vypočteme  $s = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \frac{1}{6} \left( 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} \right) = \frac{23}{90}$ .

### 3 Kontakt na autora

Doc. RNDr. Jaroslav Hora, CSc.

Katedra matematiky, fyziky a technické výchovy FPE ZČU, Klatovská 51, Plzeň

E-mail: horajar@kmt.zcu.cz

## LINEÁRNÍ DIOFANTOVSKÉ ROVNICE

Jaroslav HORA

### 1 Úvod

Diofantos z Alexandrie žil ve 3. stol. n. l. a je nazýván „otcem algebry“. Studoval mj. tzv. neurčité rovnice. Seznámíme se s nejnámější z nich. Tu pak využijeme k řešení jedné slovní úlohy.

### 2 Lineární diofantovská rovnice o dvou neznámých

má tvar  $ax + by = c$ , (1)

kde  $a, b, c \in \mathbb{Z}$  a neznámé  $x, y$  jsou rovněž celá čísla.

Je zřejmé, že některé lineární diofantovské rovnice o dvou neznámých nemají řešení. To nastává právě tehdy, když největší společný dělitel  $d = D(a, b)$  nedělí číslo  $c$ . Kupř. tedy rovnice  $4x - 6y = 7$  nemá řešení.

Nechť tedy v (1) platí  $d = D(a, b)$ ,  $d | c$ . Seznámení s Euklidovým algoritmem pro výpočet největšího společného dělitele dvou celých číselch a s technikou „návratu“ Euklidovým algoritmem pro výpočet celých čísel  $u, v$ , pro něž  $au + bv = d$ . To dává klasické vyjádření největšího společného dělitele  $d$  jakožto lineární kombinace celých čísel  $a, b$ .

Jestliže nyní  $d | c$ ,  $c = dk$ , pak  $c = dk = a(uk) + b(vk)$ .

Položíme-li  $x_1 = uk$ ,  $y_1 = vk$ , našli jsme již jedno řešení rovnice (1). Lze ukázat, že obecné řešení (1) lze zapsat ve tvaru  $x = x_1 + (b/D)t$ ,  $y = y_1 - (a/D)t$ ,  $t \in \mathbb{Z}$ .

### 3 Slovní úloha

Bylo vystřeleno několik ran do terče se soustřednými kruhy, označenými čísly 8, 12, 20, která znamenají počet bodů. Každá rána byla zásahem a celkový počet bodů byl 168. Ve středním kruhu bylo tolik zásahů jako v obou ostatních dohromady. Kolik zásahů bylo v jednotlivých kruzích?

Označme počet zásahů ve středním kruhu  $x$ , ve dvanáctibodovém, resp. osmibodovém mezikruží  $y$ , resp.  $z$ . Dostáváme soustavu dvou lineárních diofantovských rovnic o třech neznámých

## INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

$$20x + 12y + 8z = 168 \quad (2)$$

$$y = x + z. \quad (3)$$

Po dosazení za  $y$  do (2) ovšem získáme jedinou lineární diofantovskou rovnici

$$32x + 20z = 168. \quad (4)$$

Tato rovnice je řešitelná, neboť  $d = D(32, 20) = 4 \wedge 4|168$ . Zřejmě dále platí  $4 = 32 \cdot 2 + 20 \cdot (-3)$ , po vynásobení 42 dostaneme  $168 = 32 \cdot 84 + 20 \cdot (-126)$  a našli jsme jedno řešení rovnice (4), totiž  $x_0 = 84, z_0 = -126$ .

Známa teorie pro řešení lineárních diofantovských rovnic pak říká, že obecné řešení rovnice (4) je dáno ve tvaru  $x = x_0 + (b/D) \cdot t = 84 + 5t, z = z_0 - (a/D) \cdot t = -126 - 8t$ , kde  $t$  je celočíselný parametr. Ze (3) snadno dopočteme  $y = -42 - 3t, t \in \mathbb{Z}$ . Tím je původní soustava vyřešena v množině  $\mathbb{Z}^3 = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ , ale slovní úloha vyžaduje najít řešení v oboru  $\mathbb{N}^3$ . Hledáme takové hodnoty celočíselného parametru  $t$ , které současně vyhovují podmínkám  $84 + 5t \geq 0, -42 - 3t \geq 0, -126 - 8t \geq 0$ . Zjistí se, že vyhovuje jediná hodnota  $t = -16$  a ta poskytuje jediné řešení uvedené slovní úlohy, totiž  $x = 4, y = 6, z = 2$ .

#### 4 Použitá literatura

DRÁBEK, J. a kol.: Základy elementární aritmetiky, SPN Praha, 1985.

#### 5 Kontakt na autora

Doc. RNDr. Jaroslav Hora, CSc.

Katedra matematiky, fyziky a technické výchovy FPE ZČU, Klatovská 51, Plzeň

E-mail: horajar@kmt.zcu.cz

## NETRADIČNÍ ŘEŠENÍ ROVNIC

Josef KUBEŠ

### 1 Úvod

Řešení rovnic patří k základním matematickým dovednostem. K řešení rovnic vede i velké množství praktických úloh a problémů. Některé typy rovnic uměli řešit již ve starověkých civilizacích.

### 2 Netradiční řešení rovnic

Následující úlohy jsou určeny studentům, kteří se umí na problematiku podívat trochu z jiného úhlu. Nestáčí použít pouze nacvičený algoritmus, je třeba provést analýzu zadání a použít netradiční postup.

**2.1** Určete všechny dvojice  $[x, y]$  celých čísel, které vyhovují rovnici

$$2x^3 + xy - 7 = 0$$

Úloha je jednoduchá, převedeme číslo 7 na pravou stranu rovnice, vhodně vytkneme na levé straně rovnice a využijeme dělitelnost.

**2.2** Určete všechny dvojice  $[x, y]$  přirozených čísel, které vyhovují rovnici

$$4^{x+1} = 2^x + y^3$$

Upravíme tak, aby výraz s neznámou  $x$  byl na jedné straně a s  $y$  na druhé straně. Využijeme dělitelnost.

**2.3** V oboru reálných čísel řešte soustavu rovnic

$$x + \frac{1}{x} = \frac{2}{y^2}$$

$$y + \frac{1}{y} = \frac{2}{z^2}$$



INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

$$z + \frac{1}{z} = \frac{2}{x^2}$$

Stanovíme obor každé proměnné. Všechny tři rovnice sečteme a vhodnou úpravou stanovíme řešení.

**2.4** V oboru reálných čísel řešte soustavu rovnic

$$x^3 + y^3 = 3y + 3z + 4$$

$$y^3 + z^3 = 3z + 3x + 4$$

$$z^3 + x^3 = 3x + 3y + 4$$

Vhodným odečtením dvou dvojic rovnic a porovnání jednotlivých proměnných dokážeme jejich rovnost.

**2.5** V oboru reálných čísel řešte soustavu rovnic

$$\sqrt{\sqrt{x} + 2} = y - 2$$

$$\sqrt{\sqrt{y} + 2} = x - 2$$

Ukážeme, že  $x = y$ . Tím se podaří převést soustavu na řešení jedné rovnice. Dále pokračujeme vhodnou substitucí.

### 3 Závěr

Vybrané úlohy slouží jako příprava pro řešení podobných úloh v soutěžních kolech matematické olympiády. Cílem bylo navodit takový pohled na postup řešení, který pomůže zvládnout právě takové typy v soutěžních kolech.

### 4 Použitá literatura

ŠVRČEK, J., CALÁBEK, P. Sbíрка netradičních matematických úloh. 1. vyd. Praha: Prométheus, spol. s r. o., 2007. 186 s. ISBN 978-80-7196-341-7

### 5 Kontakt na autora

PaedDr. Josef Kubeš



evropský  
sociální  
fond v ČR



EVROPSKÁ UNIE



MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ,  
MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY



OP Vzdělávání  
pro konkurenceschopnost



INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Gymnázium, Plzeň, Mikulášské nám. 23

[Josef.Kubes@mikulasske.cz](mailto:Josef.Kubes@mikulasske.cz)

## NĚKTERÉ DIOFANTOVSKÉ ROVNICE

Jaroslav HORA

### 1 Úvod

Diofantovské rovnice představují poměrně rozsáhlý a různorodý zdroj úloh, vyskytujících se v matematických soutěžích. Některé z nich se nám podaří vyřešit s využitím našich znalostí o dělitelnosti celých čísel (viz následující úloha). Jiné lze elementárně vyřešit např. s využitím nerovností pro některou neznámou, příp. pomocí rozkladu některých členů v rovnici. Jsou však i rovnice těžší, pro něž byla vypracována teorie. A ke všemu existují i diofantovské rovnice, které matematici (zatím) řešit nedovedou.

### 2 Jeden příklad

Příklad: Řešme diofantovskou rovnici

$$x(y+1)^2 = 32y.$$

Vyjádříme lineární neznámou  $x$  a dostaneme

$$x = \frac{32y}{(y+1)^2}.$$

Číslo  $32y$  musí být dělitelné  $(y+1)^2$ . Protože  $y+1$  je nesoudělné s  $y$ , musí číslo  $(y+1)^2$  dělit  $32 = 2^5$ . Toto číslo má však je tři dělitele, kteří jsou druhou mocninou celého čísla. Jde o čísla 1, 4 a 16. Pro  $y$  tak nastávají možnosti

$$(1) \quad y+1 = 1$$

$$(2) \quad y+1 = 4$$

$$(3) \quad y+1 = 16$$

$$(4) \quad y+1 = -1$$

$$(5) \quad y+1 = -4$$

$$(6) \quad y+1 = -9.$$

Dostáváme celkem šest řešení dané rovnice.

Je  $P = \{[0, 0], [1, 8], [3, 6], [-2, -64], [-3, -24], [-5, -10]\}$ . Viděli jsme teď příklad diofantovské rovnice, která má konečný počet řešení.

### 3. Známé typy diofantovských rovnic

Je například známo, že tzv. lineární diofantovská rovnice se dvěma neznámými  $x, y$  tvaru  $ax + by = c$ , kde  $a, b, c \in \mathbb{Z}$ , má buď nekonečně mnoho řešení nebo nemá vůbec žádné řešení. První situace nastává právě tehdy, když největší společný dělitel  $d = D(a, b)$  dělí  $c$ .

Podobně má pythagorejská rovnice  $x^2 + y^2 = z^2$  nekonečně mnoho řešení, Pellova rovnice  $x^2 - Ay^2 = 1$ , kde  $A$  je přirozené číslo, které není druhou mocninou žádného přirozeného čísla, má též nekonečně mnoho řešení, ale tzv. zobecněná Pellova rovnice  $x^2 - Ay^2 = C$ , kde  $C$  je celé číslo, již pro některé hodnoty  $A, C$  žádné řešení nemá, pro jiné dvojice  $A, C$  pak existuje nekonečně mnoho řešení.

### 4 Závěr

Je tedy přirozené se ptát, zda by šlo poznat (či zda by existoval algoritmus), který by umožnil rozhodnout, zda má daná diofantovská rovnice řešení či nikoli. V roce 1970 byl tento slavný problém pocházející od německého matematika Davida Hilberta vyřešen negativně ruským matematikem J. V. Matijasevičem – algoritmus požadovaných vlastností neexistuje.

### 5 Kontakt na autora

Doc. RNDr. Jaroslav Hora, CSc.

Katedra matematiky, fyziky a technické výchovy FPE ZČU, Klatovská 51, Plzeň

E-mail: horajar@kmt.zcu.cz

## O METODÁCH ROZKLADU PŘIROZENÝCH ČÍSEL V SOUČIN PRVOČÍSEL

Jaroslav HORA

### 1 Fermatova faktorizační metoda

Pomineme -li velmi známou metodu opakovaného dělení, je Fermatova faktorizační metoda nejstarší systematickou metodou pro faktorizaci přirozených čísel. Uvidíme, že obecně není příliš efektivní. Je však elementární a občas se vyskytuje ve školských úlohách či v různých matematických soutěžích.

Fermatovou ideou bylo, pokusit se zapsat liché složené číslo  $N$  ve tvaru rozdílu čtverců dvou přirozených čísel. Podaří -li se to, pak  $N = x^2 - y^2 = (x - y)(x + y)$  a našli jsme faktory, na něž se rozkládá číslo  $N$ .

Příklad: Rozložme číslo 8 051!

Povšimneme -li si, že  $8\ 051 = 8\ 100 - 49$ , je řešení snadné a vyžaduje jen znalost vzorce pro rozdíl dvou čtverců:  $8\ 051 = 90^2 - 7^2 = 97 \cdot 83$ . Jak aplikovat Fermatovu metodu v obecném případě, kdy je dáno přirozené číslo  $N$ , které se snažíme zapsat ve tvaru  $N = x^2 - y^2$ , kde  $x, y$  jsou přirozená čísla?

Zřejmě musí být  $x > \sqrt{N}$ , takže vypočteme  $m = \lceil \sqrt{N} \rceil + 1$ , což je nejmenší možná hodnota pro  $x$  (až na ten případ, kdy  $N$  je druhou mocninou,  $N = x^2$ , kdy je vlastně nalezena reprezentace  $N = x^2 - 0^2$ ). Nyní budeme zkoumat, zda číslo  $z = m^2 - N$  je čtverec. Pokud ano, našli jsme rozklad  $N = x^2 - y^2$  a jsme hotovi. Není -li tomu tak, přejdeme na další možné  $x$ , tj. na hodnotu  $m + 1$ , a vypočteme  $(m + 1)^2 - N = z + 2m + 1$ . Opět otestujeme, zda toto číslo je čtvercem atd. Postup i to, jak si zorganizovat zápis výpočtů, bude jasné z následujícího příkladu.

Příklad: Rozložme číslo  $N = 3\ 503$  v součin prvočísel s využitím Fermatovy faktorizační metody.

Řešení: Je  $\sqrt{N} = 59,186\dots$ , číslo  $N$  není druhou mocninou přirozeného čísla. Máme  $m = \lceil \sqrt{N} \rceil + 1 = 60$  a číslo  $z = m^2 - N = 97$  není čtvercem. Je tedy zapotřebí přejít na číslo  $m + 1$  a postup opakovat. Výsledky zapisujeme do tab 1.

<b>m</b>	<b>2 m + 1</b>	<b>z</b>
60	121	97
61	123	218
62	125	341

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

63	127	466
64	129	593
65	131	722
66	133	853
67	135	986
68	137	1121
69	139	1258
70	141	1397
71	143	1538
72	145	$1681 = 41^2$

Tab.1

Proč obsahuje tato tabulka ještě prostřední sloupec nadepsaný  $2m + 1$ ? Jak vyplývá z úvah provedených před tímto příkladem, získá se „následující“ hodnota  $z$  sečtením „původního“  $z$  a čísla  $2m + 1$ . Číslo  $z = 218$  ve druhém řádku tab. 1 se tedy získá tak, že se vrátíme o řádek výše a sečteme  $z + (2m + 1) = 121 + 97 = 218$ . Obdobně postupujeme i v dalších řádcích až do té doby, kdy zjistíme, že číslo  $z$  je druhou mocninou. Pak máme  $z = 1681 = 41^2 = m^2 - N = 72^2 - 3\,503$ ,  $3\,503 = 72^2 - 41^2 = 31 \cdot 113$ .

Fermatova faktorizační metoda je „rychlá“, pokud se číslo  $N$  dá rozložit na dva téměř sobě rovné faktory. Je však horší než metoda opakovaného dělení v případě, že toto nenastane. Podívejme se proto na rychlou metodu faktorizace, která ale hraje jakousi většinou velmi úspěšnou, ale přece jen „loterii“ s volbou parametru  $x_0$ .

## 2 Pollardova $\rho$ – metoda

Zapišme nástin algoritmu pro Pollardovu  $\rho$  – metodu:

Je dáno přirozené číslo  $N$ , které chceme rozložit.

1. Zvolme přirozené číslo  $x_0$ .
2. Vypočtíme  $x_{i+1} \equiv x_i^2 + 1 \pmod{N}$ ,  $i = 0, 1, \dots$
3. Pro jistý počet  $i \in N$  vypočtíme největší společný dělitel  $D(x_{2i} - x_i, N)$ .
4. Opakujme to do té doby, než  $D(x_{2i} - x_i, N)$  je netriviálním dělitelem čísla  $N$  – úspěch.

Pokud proces běží přes daný časový limit – neúspěch.

Příklad: Rozložme číslo  $N = 221$  pomocí Pollardovy  $\rho$  – metody.

Řešení: Volme kupř.  $x_0 = 5$  a vypočtíme dalších deset členů posloupnosti  $\{x_i\}$ . Máme  $x_1 = 26$ ,  $x_2 = 14$ ,  $x_3 = 197$ ,  $x_4 = 135$ ,  $x_5 = 104$ ,  $x_6 = 209$ ,  $x_7 = 145$ ,  $x_8 = 31$ ,  $x_9 = 78$ ,  $x_{10} = 118$ . Dále

$$D(x_2 - x_1, N) = D(14 - 26, 221) = 1,$$

## INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

$$D(x_4 - x_2, N) = D(135 - 14, 221) = 1,$$

$$D(x_6 - x_3, N) = D(209 - 197, 221) = 1,$$

$$D(x_8 - x_4, N) = D(31 - 135, 221) = 13.$$

Nalezli jsme netriviální dělitel čísla  $N = 221$ , je  $221 = 13 \cdot 17$ .

Vidíme, že výpočet vyžaduje jen provádění elementárních početních operací s celými čísly a výpočet největšího společného dělitele.

### 3 Použitá literatura

HORA, J.: O některých otázkách souvisejících s využíváním programů počítačové algebry ve škole, III. díl. Pedagogické centrum Plzeň, 2001, 74 stran, ISBN 80-7020 -092-8.

### 4 Kontakt na autora

Doc. RNDr. Jaroslav Hora, CSc.

Katedra matematiky, fyziky a technické výchovy FPE ZČU, Klatovská 51, Plzeň

E-mail: horajar@kmt.zcu.cz

# O ŘEŠENÍ SOUSTAV ALGEBRAICKÝCH ROVNIC S CHYTROU KALKULAČKOU

Jaroslav HORA

## 1 Úvod

Je velice zajímavé, že kupříkladu vyřešení soustavy

$$x^2 + x y = 3 \quad (1)$$

$$y^2 + x y = 6,$$

kterou jsme řešili „lidskými“ prostředky, zvládne i „chytrá“ kalkulačka TI -92 Plus.

Jak je to možné? Zde nejde jen o pokrok elektrotechniky, ale i matematiky samé. Zhruba si popíšeme jeden objev, kterého dosáhli matematici v poslední třetině minulého století. Byl objeven Buchbergerův algoritmus pro výpočet Gröbnerovy báze ideálu. Nelíbí se nám zadaná soustava? Je možné si zažádat některý z komerčních programů (Maple, Mathematica) či z programů volně šiřitelných (např. CoCoA) o výpočet této báze:

```
GroebnerBasis[{x^2 + x y - 3, y^2 + x y - 6},{x,y}]  
a dostaneme
```

$$\{-4 + y^2, 2x - y\}.$$

Řešila by se nám místo původní soustavy (1) snáze soustava

$$\begin{aligned} y^2 - 4 &= 0 \\ 2x - y &= 0? \end{aligned}$$

Jistě bychom raději řešili tuto druhou soustavu rovnic, vzniklou z Gröbnerovy báze. Přitom jde o soustavu ekvivalentní s původní soustavou, tj. mající stejnou množinu řešení.

## 2 Buchbergerův algoritmus

Buchbergerův algoritmus pro výpočet Gröbnerovy báze:

```
procedure Gbasis (P)
```



INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

# Je dána množina polynomů  $P$ . Urči množinu  $G$  takovou, že  $\langle G \rangle = \langle P \rangle$  a  $G$  je Gröbnerova báze.

$G \leftarrow P; k \leftarrow \text{length}(P)$

# Označme  $i$ -tý prvek uspořádané množiny  $G$  jako  $g_i$ .

$B \leftarrow \{[i, j], 1 \leq i < j \leq k\}$

while  $B \neq \emptyset$  do {

$[i, j] \leftarrow \text{selectpair}(B, G)$

$B \leftarrow B - \{[i, j]\}$

$h \leftarrow \text{normalf}(\text{Spoly}(g_i, g_j), G)$

if  $h \neq \emptyset$  then {

$G \leftarrow G \cup \{h\}; k \leftarrow k + 1$

$B \leftarrow B \cup \{[i, k]; 1 \leq i < k\}\}$

return ( $G$ )

end

## 2.1 ...ještě redukce ...

# 1. odstranění „přebytečných“ prvků

foreach  $g \in G$  do {

if there exist a  $p \in G - \{g\}$  such that  $\text{lt}(p) \mid \text{lt}(g)$

then  $G \leftarrow G - \{g\}$

}

# 2. redukovaná, monická Gröbnerova báze

foreach  $g \in G$  do {

$g \leftarrow \text{normalf}(g, G - \{g\})$

$g \leftarrow \frac{1}{\text{lc}(g)} \cdot g$  }



INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

### 3 Závěr

Chceme-li sledovat kalkulačku či počítač, je třeba se psychicky připravit na to, že tyto nástroje provedou bez chyb a bez únavy celkem dost algebraických úprav výrazů, což je činnost, kterou člověk nedělá obvykle moc rád. Také je ještě zapotřebí se seznámit s tím, které „ošklivé“ členy eliminují dříve a které později (uspořádají si tyto „škůdce např. v tzv. slovníkovém, lexikografickém uspořádání členů (termů)).

Ukázky výpočtů se nalezou v připojené literatuře.

### 4 Použitá literatura

COX, D., LITTLE, J., O' SHEA, D.: Ideals, Varieties, and Algorithms, second ed., Springer 1996.

ERNESTOVÁ, M.: Soustavy algebraických rovnic. Učitel matematiky 10 (2001/2002), č. 4(44), 193-208.

HECK, A.: A Bird's - Eye View of Gröbner Bases. Dostupné na WWW na URL – adrese <http://www.can.nl/~heck/AIHENP96/AIHENP96.html>.

HORA, J.: O některých otázkách souvisejících s využíváním programů počítačové algebry ve škole, II. díl, Pedagogické centrum Plzeň, 1998, 51 stran, ISBN 80-7020-038-3.

### 5 Kontakt na autora

Doc. RNDr. Jaroslav Hora, CSc.

Katedra matematiky, fyziky a technické výchovy FPE ZČU, Klatovská 51, Plzeň

E-mail: [horajar@kmt.zcu.cz](mailto:horajar@kmt.zcu.cz)

# POČETNÍ TECHNIKY PRVNÍCH CIVILIZACÍ

Jiří Potůček

## 1 Úvod

První významné civilizace vynikaly od 6. tisíciletí př. n. l. v povodí velkých řek tekoucích v klimaticky příznivých podmínkách. Existují doklady o takových civilizacích v Egyptě, Mezopotámii, Číně a Indii. Příznivé klimatické podmínky spolu se schopností těchto civilizací využívat záplav vedly k rozvoji intenzivního zemědělství, které bylo schopno uživit velké množství lidí. Vysoká úroveň zemědělství se však neobešla bez relativně kvalitních matematických znalostí.

## 2 Matematika v tzv. vodních říších

Matematika ve zmíněných vodních říších má až na výjimky srovnatelnou úroveň. Zde si všimneme a porovnáme matematiku v Egyptě a na území Mezopotámie.

### 2.1 Matematika starých Egyptanů a Babyloňanů

V Egyptě používali v 5. tisíciletí př. n. l. nepoziční číselnou desítkovou soustavu a znali sečítání, odčítání, násobení a dělení. Násobení se zakládalo na schématu využívajícím zdvojnásobování, při dělení se využívalo půlení a tzv. kmenné zlomky. O početních operacích i o vyjadřování čísel máme spolehlivé informace z několika zachovaných papyrů s matematickými texty. Jsou v nich popsány i techniky a algoritmy početních operací.

### 2.2 Matematika v Mezopotámii

Na území Mezopotámie se více bojovalo a tak jsou matematické znalosti ovlivňovány z vnějšku. Používalo se klínové hieroglyfické písmo, které se rylo tvarovanými rydlý do hliněných tabulek. V 5. tisíciletí př. n. l. tam byla objevena (sice nedokonalá) poziční šedesátková soustava, která však znamenala velký krok vpřed a umožnila v 7. a 8. století našeho letopočtu objev dnešní desítkové poziční soustavy.

## 3 Závěr

Informace o historickém vývoji matematiky patří ke všeobecnému přehledu žáků a studentů s hlubším zájmem o matematiku. Často mají i pozitivní vliv na motivaci ke studiu matematiky.



INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

#### **4 Použitá literatura**

Struik, D., J., Dějiny matematiky, Praha, Orbis, 1963

Kolman, A., Dějiny matematiky ve starověku, Academia, Praha, 1968

#### **5 Kontakt na autora**

RNDr. Jiří Potůček, CSc.

Fakulta pedagogická Západočeské univerzity v Plzni

E-mail [potucek@kmt.zcu.cz](mailto:potucek@kmt.zcu.cz)

## RECIPROKÉ ROVNICE

Jiří Potůček

### 1 Úvod

Reciproké rovnice spolu s dalšími speciálními typy rovnic jsou vhodnou příležitostí pro využití znalostí o komplexních číslech, samozřejmě vedle další škály potřebných znalostí. Nicméně jsou potvrzením užitečnosti zavedení komplexních čísel. Výklad o reciprokových rovnicích je také příležitostí pro zopakování, připomenutí a utřídění znalostí o rovnicích.

### 2 Shrnutí znalostí o pojmu rovnice.

Pojem rovnice vystupuje ve školské matematice ve dvou základních situacích a sice jako úloha, tj. zásadním problémem je řešit rovnici, a vedle toho jako definice funkce, což se promítá i do analytické geometrie. My se zde zaměříme na rovnice jakožto úlohy.

#### 2.1 Základní schéma řešení rovnic

Řešit rovnici znamená zjednodušovat ji úpravami tak, až lze objevit její řešení. Úpravy rovnic rozdělujeme na ekvivalentní a důsledkové. Rovnice získaná z předchozí rovnice ekvivalentní úpravou je s předchozí rovnicí ekvivalentní v tom smyslu, že všechny její kořeny jsou zároveň i kořeny rovnice předcházející. Při použití důsledkové úpravy je nová rovnice pouze důsledkem úpravy. Kořeny nové rovnice proto nemusí být kořeny rovnice předcházející, na níž byla důsledková úprava aplikována. Např. při řešení iracionální rovnice (rovnice s neznámou pod odmocninou) upravujeme rovnici umocněním, což patří mezi důsledkové úpravy.

#### 2.2 Reciproké rovnice a další zvláštní rovnice

Reciproké rovnice jsou takové rovnice, v nichž jsou koeficienty symetricky rozloženy (popř. až na znaménko). To umožňuje vytknutí a převedení rovnice do součinnového tvaru vhodným rozkladem. V soustředění budeme řešit reciproké rovnice do 5. stupně včetně. Vedle binomických rovnic, které jsme již poznali, patří spolu s reciprokými rovnicemi mezi zvláštní rovnice, jimiž se budeme zabývat, ještě rovnice trinomické a diofantovské.



INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

### 3 Závěr

Uvedené zvláštní typy rovnic a jejich řešení mohou posloužit jako vodítko pro řešení analogických úloh, s nimiž se můžeme setkat při řešení školních úloh i případně úloh matematické olympiády.

### 4 Použitá literatura

Šedivý, J., Odvárko, O., Vocelka, J. Matematika pro IV. ročník gymnázia, SPN Praha, 1982.

### 5 Kontakt na autora

RNDr. Jiří Potůček, CSc.

Fakulta pedagogická Západočeské univerzity v Plzni

E-mail: [potucek@kmt.zcu.cz](mailto:potucek@kmt.zcu.cz)

# ROVNICE VYŠŠÍCH ŘÁDŮ, NUMERICKÉ ŘEŠENÍ ROVNIC

Josef KUBEŠ

## 1 Úvod

Způsoby řešení rovnic vyšších řádů propracovávali matematikové řadu století. Ve školské látce se vyskytuje úplně řešení kvadratické rovnice a speciálních typů rovnic vyšších řádů – binomické rovnice, okrajově reciproké rovnice.

## 2 Rovnice vyšších řádů, numerické řešení rovnic

Řešení rovnic vyšších řádů je další oblíbené téma, které slouží k nácviku netradičních přístupů k řešení zadaných rovnic. Obvykle je zadána podmínka pro kořeny, či lze jedno z řešení odhadnout. Další velkou oblastí, která se rozvíjí v souvislosti s nástupem výpočetní techniky, je numerické řešení rovnic. To se skládá z části separace kořenů a části určení kořene s předem stanovenou přesností.

**2.1** Nechť  $p$  je takové reálné číslo, že rovnice

$$2x^3 + (2p - 5)x^2 + (p^2 - 5p)x + 2p = 0$$

o neznámé  $x$  má tři různé reálné kořeny, přičemž dva z nich jsou navzájem převrácená čísla. Určete číslo  $p$  a všechny kořeny dané rovnice.

Použijeme vztahy mezi kořeny a koeficienty a podmínku pro kořeny uvedenou v zadání. Úloha vede na řešení tří rovnic o třech neznámých, které vhodným postupem dořešíme.

**2.2** Určete všechny hodnoty parametru  $a$  z množiny reálných čísel tak, aby reálné kořeny rovnice

$$x^3 - x^2 + 49ax - 4a = 0$$

tvořily tři po sobě jdoucí členy geometrické posloupnosti

Opět použijeme vztahy mezi kořeny a koeficienty a definici geometrické posloupnosti. Další řešení vede přes soustavu tří rovnic a třech neznámých, ve které je jedna z proměnných třetího stupně. Zvláštní pozornost je třeba věnovat hodnotě  $a = 0$ .

## INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

### 2.3 V oboru reálných čísel řešte

$$x^3 - 2x + 5 = 0$$

V tomto případě nelze nalézt žádné netradiční řešení. Můžeme použít velmi náročné vzorce pro řešení kubické rovnice, což je velmi nepraktické. Vzhledem k tomu, že se jedná o speciální postup, není pro naše účely zajímavý. Z tohoto vyřešíme rovnici numericky. Separaci kořenů provedeme graficky a dořešení s přesností například na tři desetinná místa zvládneme metodou půlení intervalů.

### 2.4 V oboru reálných čísel řešte

$$2x^3 - 9x^2 - 14x + 60 = 0$$

Grafickou metodou provedeme separaci kořenů. K jejich upřesnění tentokrát použijeme metodu postupného přibližování. K výpočtům lze s výhodou použít tabulkový procesor, například Excel.

## 3 Závěr

Cílem setkání nad řešením rovnic vyšších řádů je navázat na látku z hodin matematiky a prohloubit znalosti žáků. První dvě úlohy slouží k přípravě na rozvoj analytického a logického myšlení žáků. Numerický způsob řešení má ukázat na provázanost klasického řešení s použitím postupů, které se používají v reálné praxi.

## 4 Použitá literatura

ŠVRČEK, J., CALÁBEK, P. Sbíрка netradičních matematických úloh. 1. vyd. Praha: Prométheus, spol. s r. o., 2007. 186 s. ISBN 978-80-7196-341-7

## 5 Kontakt na autora

PaedDr. Josef Kubeš

Gymnázium, Plzeň, Mikulášské nám. 23

[Josef.Kubes@mikulasske.cz](mailto:Josef.Kubes@mikulasske.cz)



## Rovnosti, nerovnosti a posloupnosti

Petr TOMICZEK

## 1 Úvod

Tento příspěvek je věnován příkladům matematických olympiád celého světa, ve kterých se řešily příklady s rovnostmi, nerovnostmi a posloupnostmi. Rovnosti jsou řešeny v oborech celých a racionálních čísel. Jednotlivé podkapitoly v nerovnostech se postupně věnují příkladům s absolutní hodnotou, průměrům (aritmetický, geometrický, harmonický) a Bernoulliově nerovnosti. K řešení příkladů na posloupnosti je nutná znalost pojmu limita posloupnosti.

## 2 Rovnosti

Příklad 2.1: (New York 1977)

Pro  $x, y \in \mathbb{Z}$  řešte rovnici  $2^x + 1 = y^2$ .

Řešení: Z nerovnosti  $0 < 2^x = y^2 - 1$  vyplývá pro  $x, y \in \mathbb{Z}$ , že  $2^x = y^2 - 1 \geq 3$  a  $x > 1$ . Tedy  $2^x + 1$  je liché číslo i  $y$  je liché. Pak  $y = 2k + 1, k \in \mathbb{Z}$  a  $2^x + 1 = (2k + 1)^2$ , odtud  $2^{x-2} = (k + 1)k$ . Tato rovnost nastane pouze pro  $k = 1$ , neboli  $x = 3, y = 3$ .

Příklad 2.2: (NDR 1973)

Pro  $x \in \mathbb{Z}$  řešte rovnici  $x(x + 1)(x + 7)(x + 8) = y^2$ .

Řešení: Substitucí  $z = x + 4$  přejdeme k  $(z^2 - 16)(z^2 - 9) = y^2$ . Pro  $z = 0$  je  $y = \pm 12$ , pro  $z = \pm 3, z = \pm 4$  je  $y = 0$ , pro  $z = \pm 5$ , je  $y = \pm 12$ . Pro  $z = \pm 1, \pm 2$  řešení v celých číslech neexistuje. Zbývá uvažovat  $|z| \geq 6$ . Pak  $z^4 - 25z^2 + 144 = y^2 = (z^2 - 12)^2 - z^2$ . Tedy  $(z^2 - 12)^2 \geq y^2$  a  $y^2 > (z^2 - 13)^2 = z^4 - 25z^2 + 144 - (z^2 - 25)$ , neboť  $(z^2 - 25) > 0$  pro  $|z| \geq 6$ . Další řešení tudíž neexistují.

Příklad 2.3: (Rumunsko 1981)

Pro  $x, y \in \mathbb{Z}$  řešte rovnici  $x^6 + 3x^3 + 1 = y^4$ .

Řešení: Substitucí  $z = x^3$  přejdeme ke kvadratické rovnici  $z^2 + 3z + 1 - y^4 = 0$ , pro jejíž diskriminant musí platit  $D = 5 + 4y^4 = n^2, n \in \mathbb{N}$ , abychom dostali řešení v celých číslech. Položíme  $m = 2y^2$ , pak  $n^2 = m^2 + 5$  a  $n \geq m + 1$ , tedy  $m^2 + 5 \geq (m + 1)^2 = m^2 + 2m + 1$ . Odtud plyne  $2 \geq m = 2y^2$ , tudíž  $1 \geq |y|$ . Pro  $y = 0$  řešení neexistuje, pro  $y = \pm 1$  je  $x = 0$ .

Příklad 2.4: (Jugoslávie 1974)

Pro  $x, y \in \mathbb{Z}$  řešte rovnici  $x^2 + xy + y^2 = x^2y^2$ .

Řešení: Díky symetrii příkladu můžeme bez újmy na obecnosti předpokládat, že  $y = ax, |a| \geq 1$ . Potom  $x^2(1 + a + a^2) = a^2x^4$  a  $x^2 = \frac{1+a+a^2}{a^2} \leq 3$ , tedy pro  $x = -1$ , je  $y = 1$ , pro  $x = 0$ , je  $y = 0$ , pro  $x = 1$ , je  $y = -1$ .

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Příklad 2.5: (NDR 1974)

Pro  $x, y \in \mathbb{Z}$  řešte rovnici  $(x+2)^4 - x^4 = y^3$ .

Řešení: Výpočtem dostaneme  $8(x^3+2(x+1)^2+x^2) = y^3$ , tudíž  $y$  je sudé  $y = 2k, k \in \mathbb{Z}$  a  $x^3+2(x+1)^2+x^2 = k^3$ . Odtud vyplývá, že  $k \geq x+1$ . Pro  $k = x+1$  platí  $x^3+2(x+1)^2+x^2 = x^3+3x^2+3x+1$ , tedy  $x = -1, y = 0$ . Pro  $k \geq x+2$  musí platit  $x^3+2(x+1)^2+x^2 \geq x^3+6x^2+12x+8$ , neboli  $0 \geq 3x^2+8x+6$ , což nikdy nenastane.

Příklad 2.6: (NDR 1970)

Dokažte, že pro lichá čísla  $a, b, c \in \mathbb{Z}$  rovnice  $ax^2 + bx + c = 0$  nemá řešení v  $\mathbb{Q}$ .

Řešení: Aby kořeny kvadratické rovnice byly racionální čísla, tak pro její diskriminant musí platit  $D = b^2 - 4ac = n^2, n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ . Z lichosti čísel  $a, b, c$  a rovnosti  $b^2 - 4ac = n^2$  plyne, že i  $n$  je liché číslo. Položíme  $a = 2a_1 + 1, b = 2b_1 + 1, c = 2c_1 + 1, n = 2n_1 + 1$ , potom  $4b_1^2 + 4b_1 + 1 - 4(4a_1c_1 + 2a_1 + 2c_1 + 1) = 4n_1^2 + 4n_1 + 1$  a  $b_1^2 + b_1 - (4a_1c_1 + 2a_1 + 2c_1 + 1) = n_1^2 + n_1$ . Jelikož  $b_1^2 + b_1$  i  $n_1^2 + n_1$  jsou sudá čísla, tak číslo na levé straně poslední rovnosti je liché a vpravo sudé, což je spor s předpokladem, že kořeny rovnice jsou racionální čísla.

Příklad 2.7: (Anglie 1970)

Pro  $x, y \in \mathbb{Q}$  řešte rovnici  $\sqrt{2\sqrt{3}-3} = \sqrt{x\sqrt{3}} - \sqrt{y\sqrt{3}}$ .

Řešení: Po umocnění dostaneme  $2\sqrt{3}-3 = x\sqrt{3} - 2\sqrt{xy\sqrt{3}} + y\sqrt{3}$ , vydělením  $\sqrt{3}$ , pak  $2 - \sqrt{3} = x - 2\sqrt{xy} + y$  a  $2 - x - y = \sqrt{3} - 2\sqrt{xy}$ . Opět umocníme, potom  $(2 - x - y)^2 =$

$3 - 4\sqrt{xy\sqrt{3}} + 4xy$ . Odtud plyne, že  $\sqrt{xy\sqrt{3}} \in \mathbb{Q}$ . V první rovnosti  $2\sqrt{3}-3 = x\sqrt{3} - 2\sqrt{xy\sqrt{3}} + y\sqrt{3}$  vytkneme  $\sqrt{3}$ , pak  $\sqrt{3}(2-x-y) = 3 - 2\sqrt{xy\sqrt{3}}$   $\in \mathbb{Q}$ . Nutně tedy  $2-x-y = 0$  a  $3 - 2\sqrt{xy\sqrt{3}} = 0$ . Odtud již dostaneme řešení  $x = \frac{3}{2}, y = \frac{1}{2}$ .

V dalším použijeme následujícího jednoduchého tvrzení

**Věta 2.1:** (modulo 4)

Nechť  $x \in \mathbb{Z}$ , pak při dělení  $x^2$  číslem 4 jsou zbytky pouze 0, když  $x$  je sudé, a 1, když  $x$  je liché. Píšeme  $x^2 \pmod{4} \equiv 0$  ( $x$  sudé),  $x^2 \pmod{4} \equiv 1$  ( $x$  liché).

Příklad 2.8: (ČSSR 1976)

Pro  $x, y, z \in \mathbb{Z}$  řešte rovnici  $x^2 + y^2 = 3z^2$ .

Řešení: Triviální řešení  $x = 0, y = 0, z = 0$  je zřejmé. Bez újmy na obecnosti můžeme tedy předpokládat, že  $x, y, z$  jsou nesoudělná čísla a alespoň jedno je nenulové. Podle předchozího tvrzení ?? platí  $(x^2 + y^2) \pmod{4} \equiv 0$  nebo 1 nebo 2 a  $3z^2 \pmod{4} \equiv 0$  nebo 3. Tudíž  $(x^2 + y^2) \pmod{4} \equiv 0$  a  $3z^2 \pmod{4} \equiv 0$ , což nastane pouze v případě, že všechna čísla  $x, y, z$  jsou sudá. Dostali jsme spor s předpokladem nesoudělnosti. Úloha tedy nemá netriviální řešení.

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Příklad 2.9: (USA 1976)

Pro  $x, y, z \in \mathbb{Z}$  řešte rovnici  $x^2 + y^2 + z^2 = x^2y^2$ .

Řešení: Opět úloha má triviální řešení  $x = 0, y = 0, z = 0$ . Podle tvrzení ?? buď a)  $x^2y^2 \pmod 4 \equiv 1$  nebo b)  $x^2y^2 \pmod 4 \equiv 0$ .

ad a) Tedy  $x, y$  jsou liché, pak i  $z$  je liché a  $x^2 + y^2 + z^2 \pmod 4 \equiv 3 \neq x^2y^2 \pmod 4 \equiv 1$ . Tedy možnost a) nenastane.

ad b) Nechť  $x$  je sudé,  $y$  je liché, pak  $z$  je též liché a  $x^2 + y^2 + z^2 \pmod 4 \equiv 2 \neq x^2y^2 \pmod 4 \equiv 0$ . (Analogicky  $y$  je sudé,  $x$  je liché.) Zbývá možnost  $x$  je sudé,  $y$  je sudé, pak i  $z$  je sudé. Potom  $x = 2x_1, y = 2y_1, z = 2z_1$  a  $x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 = 4x_1^2y_1^2$ . Odtud  $x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 \pmod 4 \equiv 4x_1^2y_1^2 \pmod 4 \equiv 0$ , což nastane pouze v případě, že  $x_1, y_1, z_1$  jsou sudá čísla atd. Čísla  $x, y, z$  jsou tedy dělitelná libovolnou mocninou čísla 2, tato situace nastane pouze pro  $x = 0, y = 0, z = 0$ .

### 3 Nerovnosti

#### 3.1 Absolutní hodnota

**Definice 3.1:** Zobrazení  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_0^+ = \{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\}$  definované předpisem  $f(x) = \max\{x, -x\}$  nazveme **absolutní hodnotou**.

Absolutní hodnotu čísla  $x$  značíme  $|x|$ .

Absolutní hodnotu čísla  $x$  můžeme definovat i následujícím způsobem.

Cvičení 3.1: Dokažte:  $|x| = \begin{cases} x & x \geq 0 \\ -x & x \leq 0. \end{cases}$

$$[x \geq 0 \Rightarrow \max\{x, -x\} = x, \quad x \leq 0 \Rightarrow \max\{x, -x\} = -x.]$$

**Věta 3.2:** (vlastnosti absolutní hodnoty)

Nechť  $a, b \in \mathbb{R}$ , pak

i)  $|a| \geq 0, \quad |a \cdot b| = |a| \cdot |b|, \quad \left| \frac{a}{b} \right| = \frac{|a|}{|b|} \quad b \neq 0,$

$$\sqrt{a^2} = |a|, \quad a \leq |a|,$$

iii)  $|a + b| \leq |a| + |b|$  trojúhelníková nerovnost, (N1)

iv)  $||a| - |b|| \leq |a - b|,$  (N2)

číslo  $|a - b|$  nazýváme **vzdálenost bodů  $a, b$** .

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Příklad 3.1: (USA 1982)

Dokažte, že pro reálná čísla  $a_1, a_2, \dots, a_n$  a  $1 \geq b_1 \geq b_2 \geq \dots \geq b_n \geq 0$  existuje  $k \in \{1, 2, \dots, n\}$  takové, že platí

$$\left| \sum_{i=1}^n b_i a_i \right| \leq \left| \sum_{i=1}^k a_i \right|.$$

Řešení:  $S = \left| \sum_{i=1}^n b_i a_i \right| = \left| b_1 a_1 + \sum_{i=2}^n b_i (a_i + \dots + a_1) - \sum_{i=2}^n b_i (a_{i-1} + \dots + a_1) \right| = \left| \sum_{i=1}^n b_i (a_i + \dots + a_1) - \sum_{i=1}^{n-1} b_{i+1} (a_i + \dots + a_1) \right| = \left| \sum_{i=1}^n (b_i - b_{i+1}) (a_i + \dots + a_1) \right|$ , kde  $b_{n+1} = 0$ . Nyní položíme  $A_i = |a_i + \dots + a_1|$  a  $A_k = \max_i A_i$ , potom  $S \stackrel{(N2)}{\leq} \sum_{i=1}^n |(b_i - b_{i+1})| |a_i + \dots + a_1| \leq A_k = \left| \sum_{i=1}^k a_i \right|$ .

Příklad 3.2: (Jugoslávie 1972)

Máme reálné číslo  $M$  a matice reálných čísel  $(a_{ij})_{i,j=1}^n$  splňuje nerovnost

$$\sum_{i=1}^n |a_{i1} x_1 + a_{i2} x_2 + \dots + a_{in} x_n| \leq M$$

pro libovolné  $x_i \in \{-1, 1\}$ . Dokažte, že pak platí

$$|a_{11}| + |a_{22}| + \dots + |a_{nn}| \leq M.$$

Řešení: Každé z čísel  $x_i$  nabývá dvou hodnot, proto také

$$\sum_{\{x_1, \dots, x_n\}} \sum_{i=1}^n |a_{i1} x_1 + a_{i2} x_2 + \dots + a_{in} x_n| \leq 2^n M$$

a

$$\sum_{i=1}^n \sum_{\{x_1, \dots, x_n\}} |a_{i1} x_1 + a_{i2} x_2 + \dots + a_{in} x_n| \leq 2^n M.$$

Označíme

$$S_i = \sum_{\{x_1, \dots, x_n\}} |a_{i1} x_1 + a_{i2} x_2 + \dots + a_{in} x_n|.$$

Pro  $S_i$  platí

$$\begin{aligned} S_i &= \sum_{\{x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n\}} |a_{i1} x_1 + \dots + a_{i(i-1)} x_{i-1} + a_{ii} + a_{i(i+1)} x_{i+1} + \dots + a_{in} x_n| \\ &+ \sum_{\{x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n\}} |a_{i1} x_1 + \dots + a_{i(i-1)} x_{i-1} - a_{ii} + a_{i(i+1)} x_{i+1} + \dots + a_{in} x_n| \\ &\stackrel{(N1)}{\geq} \sum_{\{x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n\}} 2|a_{ii}| = 2^n |a_{ii}|. \end{aligned}$$

Odtud již plyne  $2^n \sum_{i=1}^n |a_{ii}| \leq \sum_{i=1}^n S_i \leq 2^n M$ , což jsme měli dokázat.

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Příklad 3.3: (Bulharsko 1982)

Dokažte, že pro čísla  $a_1, a_2, \dots, a_n \in [0, 2]$ ,  $n \geq 2$  platí nerovnost

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n |a_i - a_j| \leq n^2.$$

Pro jaké hodnoty nastane rovnost?

Řešení: Zřejmě platí  $|a_i - a_j| = |a_j - a_i|$  a můžeme předpokládat, že  $a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_n$ , pak

$$S = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n |a_i - a_j| = 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} |a_j - a_i| \stackrel{a_j \geq a_i}{=} 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} (a_j - a_i) =$$

$$2 \left( \sum_{j=2}^n (j-1) a_j - \sum_{i=1}^{n-1} (n-i) a_i \right) = \sum_{i=1}^n (2i - n - 1) a_i.$$

Součet  $S$  bude maximální, pokud  $a_i = 2$  pro  $i$  takové, že  $2i - n - 1 > 0$  a  $a_i = 0$  pro  $i$  splňující  $2i - n - 1 < 0$ .

$$\text{Pro liché } n = 2k + 1 \text{ je pak } S = 2 \sum_{i=k+2}^n (2i - 2k - 2) 2 = 4k(k+1) < n^2.$$

$$\text{Pro sudé } n = 2k \text{ je } S = 2 \sum_{i=k+1}^n (2i - 2k - 1) 2 = 4(k)^2 = n^2.$$

Tedy pro  $n$  sudé a  $a_1 = \dots = a_{\frac{n}{2}} = 0$ ,  $a_{\frac{n}{2}+1} = \dots = a_n = 2$  nastane rovnost.

### 3 Průměry

Vzdálenost dvou čísel  $a, b$  na reálné ose se rovná  $|a - b| = \sqrt{(a - b)^2}$ . Zřejmě  $(a - b)^2 \geq 0$ , což je ekvivalentní se základní nerovností

$$2ab \leq a^2 + b^2, \quad \text{popřípadě} \quad ab \leq \frac{a^2 + b^2}{2}, \quad (\text{N3})$$

která se objevuje v mnoha úlohách; například:

Cvičení 3.2: Pro  $a, b, c \in \mathbb{R}$  dokažte nerovnosti:  $a + b \leq \sqrt{2(a^2 + b^2)}$  a  $ab + bc + ac \leq a^2 + b^2 + c^2$ .

V 15. ročníku MO kategorie B se objevila úloha

Příklad 3.4:

Je dán kvádr o rozměrech  $a, b, c$ , který není krychlí. Dokažte, že součet objemů krychlí o hranách  $a, b, c$  je větší než trojnásobek objemu daného kvádru.

Řešení: V podstatě máme dokázat platnost nerovnosti  $3abc \leq a^3 + b^3 + c^3$ .

Platnost této nerovnosti plyne z následující věty.

**Věta 3.3:** (o průměrech)

Nechť  $a_i > 0$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ , pak platí

$$\frac{1}{\frac{1}{a_1} + \dots + \frac{1}{a_n}} \leq \sqrt[n]{a_1 \cdot \dots \cdot a_n} \leq \frac{a_1 + \dots + a_n}{n} \leq \sqrt{\frac{a_1^2 + \dots + a_n^2}{n}}. \quad (\text{N4})$$

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

**Definice 3.2:** Nechť  $a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ , **aritmetický průměr** se nazývá číslo

$$\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n}.$$

Nechť  $a_i \geq 0$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ , **geometrický průměr** se nazývá číslo

$$\sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_n}.$$

Nechť  $a_i > 0$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ , **harmonický průměr** se nazývá číslo

$$\frac{n}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n}}.$$

Nechť  $a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ , **kvadratický průměr** se nazývá číslo

$$\sqrt{\frac{a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2}{n}}.$$

Důkaz věty 3.2: Nejdříve dokážeme vztah mezi geometrickým a aritmetickým průměrem

$$\sqrt[n]{a_1 \cdot \dots \cdot a_n} \leq \frac{a_1 + \dots + a_n}{n}. \quad (\text{GA})$$

Upravíme (GA) do tvaru  $n \leq \frac{a_1 + \dots + a_n}{\sqrt[n]{a_1 \cdot \dots \cdot a_n}}$ , a položíme  $x_i = \frac{a_i}{\sqrt[n]{a_1 \cdot \dots \cdot a_n}}$ ,  $i = 1, \dots, n$ .

Potom  $x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_n = 1$  a pomocí matematické indukce budeme dokazovat, že  $n \leq x_1 + x_2 + \dots + x_n$ . Pro  $n = 1$  tvrzení zřejmě platí. Z využitím indukčního předpokladu  $n \leq x_1 + x_2 + \dots + x_n$  chceme dokázat, že  $n + 1 \leq x_1 + x_2 + \dots + x_n + x_{n+1}$ , pokud  $x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_n \cdot x_{n+1} = 1$ . Bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že  $x_1 \geq 1$  a  $x_2 \leq 1$ , potom  $(x_1 - 1)(x_2 - 1) \leq 1$ , tedy  $1 + x_1 x_2 \leq x_1 + x_2$  a také

$$1 + x_1 x_2 + x_3 + \dots + x_n + x_{n+1} \leq x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_n + x_{n+1}.$$

Pro  $n$  čísel  $x_1 x_2, x_3, \dots, x_{n+1}$  platí  $x_1 x_2 \cdot x_3 \cdot \dots \cdot x_{n+1} = 1$  a podle indukčního předpokladu  $n \leq x_1 x_2 + x_3 + \dots + x_n + x_{n+1}$ . Odtud již dostaneme

$$1 + n \leq 1 + x_1 x_2 + x_3 + \dots + x_n + x_{n+1} \leq x_1 + x_2 + \dots + x_n + x_{n+1},$$

což jsme měli dokázat.

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Pokud položíme  $a_i = \frac{1}{b_i}$ ,  $i = 1, \dots, n$  v nerovnosti (GA), pak dostaneme  $\sqrt[n]{\frac{1}{b_1} \cdot \dots \cdot \frac{1}{b_n}} \leq \frac{\frac{1}{b_1} + \dots + \frac{1}{b_n}}{n}$ . Odtud již snadno plyne nerovnost mezi harmonickým a geometrickým průměrem

$$\frac{1}{\frac{1}{b_1} + \dots + \frac{1}{b_n}} \leq \sqrt[n]{b_1 \cdot \dots \cdot b_n}. \quad (\text{HG})$$

Nerovnost mezi aritmetickým a kvadratickým průměrem dokážeme také pomocí matematické indukce. Chceme tedy dokázat

$$\frac{a_1 + \dots + a_n}{n} \leq \sqrt{\frac{a_1^2 + \dots + a_n^2}{n}}, \quad (\text{AK})$$

což pro  $n = 1$  zřejmě platí.

Za indukčního předpokladu  $(a_1 + \dots + a_n)^2 \leq n(a_1^2 + \dots + a_n^2)$ , dokážeme platnost  $(a_1 + \dots + a_n + a_{n+1})^2 \leq (n+1)(a_1^2 + \dots + a_n^2 + a_{n+1}^2)$ .

Platí

$$(a_1 + \dots + a_n + a_{n+1})^2 = (a_1 + \dots + a_n)^2 + 2(a_1 + \dots + a_n)a_{n+1} + (a_{n+1})^2 \stackrel{(N3)}{\leq} n(a_1^2 + \dots + a_n^2) + a_1^2 + a_{n+1}^2 + \dots + a_n^2 + a_{n+1}^2 + a_{n+1}^2 = (n+1)(a_1^2 + \dots + a_n^2 + a_{n+1}^2),$$

což jsme měli dokázat.

Poznamenejme, že rovnost v (N4) nastane pouze pro  $a_1 = a_2 = \dots = a_n$ .

S nerovnostmi z předchozí věty se často setkáme v úlohách z matematických olympiád.

Příklad 3.5: (2.ročník MO kat. A)

Dokažte, že pro  $a_i > 0$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ , platí nerovnost

$$(a_1 + a_2 + \dots + a_n) \left( \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n} \right) \geq n^2.$$

Řešení: Jednoduchou úpravou dostaneme

$$\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} \geq \frac{n}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n}}, \quad (\text{HA})$$

což je nerovnost mezi harmonickým a aritmetickým průměrem, viz (N4).

Řešení však můžeme dostat i jiným postupem s využitím základní nerovnosti (N3).

$$(a_1 + a_2 + \dots + a_n) \left( \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n} \right) = \sum_{i=1}^n a_i \cdot \frac{1}{a_i} + \sum_{\substack{i \neq j \\ i, j=1 \\ i, j=1}}^n a_i \cdot \frac{1}{a_j} =$$

$$n + \underbrace{\sum_{1 \leq i < j \leq n} \left( \frac{a_i}{a_j} + \frac{a_j}{a_i} \right)}_{\geq 2} = n + \binom{n}{2} \cdot 2 = n^2.$$

Příklad 3.6:

Dokažte, že pro trojici kladných čísel  $a, b, c$ , platí nerovnost

$$(a+b)(a+c)(b+c) \geq 8abc.$$

Kdy nastane rovnost?

Řešení: Podle (GA) nerovnosti je  $a+b \geq 2\sqrt{ab}$ , tudíž  $(a+b)(a+c)(b+c) \geq 2\sqrt{ab}2\sqrt{ac}2\sqrt{bc} = 8abc$ , což jsem měli dokázat. Rovnost nastane pouze v případě, kdy  $a = b = c$ .

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Příklad 3.7: (17.ročník MO kat. A)

Dokažte, že pro trojici nezáporných čísel  $a, b, c$ , platí nerovnost

$$a(a - \sqrt{bc}) + b(b - \sqrt{ac}) + c(c - \sqrt{ab}) \geq 0.$$

Řešení: Podle (GA) nerovnosti je  $\sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2}$ , tudíž  
 $a(a - \sqrt{bc}) + b(b - \sqrt{ac}) + c(c - \sqrt{ab}) \geq a(a - \frac{b+c}{2}) + b(b - \frac{a+c}{2}) + c(c - \frac{a+b}{2}) = \frac{1}{2}((a-b)^2 + (b-c)^2 + (a-c)^2) \geq 0.$

Příklad 3.8:

Dokažte, že pro libovolné přirozené číslo  $n$ , platí nerovnost

$$n! \leq \left(\frac{n+1}{2}\right)^n.$$

Řešení: Platí  $1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$ , pak  $\left(\frac{n+1}{2}\right)^n = \left(\frac{1+2+\dots+n}{n}\right)^n \stackrel{(GA)}{\geq} n!$ .  
 Poznámka: Lze to dokázat i matematickou indukcí a binomickou větou.

Příklad 3.9: (22.ročník MO kat. A)

Máme posloupnost  $(a_n)$  reálných čísel, která splňuje  $a_{n-1} + a_{n+1} \geq 2a_n$ , pro  $n > 1$ . Označíme

$A_n = \frac{a_1 + \dots + a_n}{n}$ , dokažte že pak platí nerovnost

$$A_{n-1} + A_{n+1} \geq 2A_n.$$

Řešení: Nerovnost  $A_{n-1} + A_{n+1} \geq 2A_n$  přepíšeme do tvaru  $A_{n+1} - A_n \geq A_n - A_{n-1}$  a dosadíme z definice  $A_n$ . Tedy

$$\frac{a_1 + \dots + a_{n+1}}{n+1} - \frac{a_1 + \dots + a_n}{n} \geq \frac{a_1 + \dots + a_n}{n} - \frac{a_1 + \dots + a_{n-1}}{n-1}.$$

Přechodem na společného jmenovatele dostaneme postupně

$$\frac{n a_{n+1} - a_1 - \dots - a_n}{(n+1)n} \geq \frac{(n-1) a_n - a_1 - \dots - a_{n-1}}{n(n-1)},$$

$$(n-1)[n a_{n+1} - a_1 - \dots - a_n] \geq (n+1)[(n-1) a_n - a_1 - \dots - a_{n-1}],$$

$$(n-1)n(a_{n+1} - a_n) \geq 2(n-1)a_n - 2a_1 - \dots - 2a_{n-1},$$

$$\frac{(n-1)n}{2}(a_{n+1} - a_n) \geq [(n-1)(a_n - a_{n-1}) + (n-2)(a_{n-1} - a_{n-2}) + \dots + (a_2 - a_1)],$$

$$((n-1) + \dots + 1)(a_{n+1} - a_n) \geq [(n-1)(a_n - a_{n-1}) + \dots + (a_2 - a_1)].$$

Z předpokladu  $a_{n-1} + a_{n+1} \geq 2a_n$  plyne  $a_{n+1} - a_n \geq a_n - a_{n-1}$  i  $a_{n+1} - a_n \geq a_{n-1} - a_{n-2}, \dots, a_{n+1} - a_n \geq a_2 - a_1$ . Odtud již zřejmě dostaneme platnost dokazované nerovnosti.



INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Příklad 3.10: (New York 75)

Dokažte, že pro dvě libovolná různá kladná čísla  $a, b$  platí nerovnosti

$$\sqrt{ab} < \frac{(a-b)^2}{8\left(\frac{a+b}{2} - \sqrt{ab}\right)} < \frac{a+b}{2}.$$

Řešení: Označíme  $A = \frac{a+b}{2}$  a  $G = \sqrt{ab}$ , pak  $\frac{(a-b)^2}{8\left(\frac{a+b}{2} - \sqrt{ab}\right)} = \frac{(a-b)^2}{8(A-G)} = \frac{(a+b)^2 - 4ab}{8(A-G)} = \frac{4A^2 - 4G^2}{8(A-G)} = \frac{A+G}{2}$  a zřejmě  $G < \frac{A+G}{2} < A$ .

Příklad 3.11: (Jugoslávie 75)

Dokažte, že pro tři libovolná čísla  $a, b, c$  větší než 1 platí nerovnost

$$2\left(\frac{\log_b a}{a+b} + \frac{\log_c b}{b+c} + \frac{\log_a c}{c+a}\right) \geq \frac{9}{a+b+c}.$$

Řešení: Platí odhady  $2\left(\frac{\log_b a}{a+b} + \frac{\log_c b}{b+c} + \frac{\log_a c}{c+a}\right) \stackrel{(GA)}{\geq} 6\sqrt[3]{\frac{\log_b a \log_c b \log_a c}{(a+b)(b+c)(c+a)}} = \frac{6}{\sqrt[3]{(a+b)(b+c)(c+a)}} \stackrel{(GA)}{\geq} \frac{18}{(a+b)+(b+c)+(c+a)}$ .

Příklad 3.12: (Jugoslávie 1976)

Nechť součin třech čísel se rovná jedné a jejich součet je větší než součet jejich převrácených hodnot. Dokažte, že pak právě jedno z těchto čísel je větší než jedna.

Řešení: Platí  $abc = 1$  a  $a+b+c > \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$ . Potom  $a+b+c > \frac{bc+ac+ab}{abc} \stackrel{abc=1}{\Rightarrow}$

$$a+b+c - (bc+ac+ab) + abc - 1 > 0 \Rightarrow a-1 + b(1-a) + bc(a-1) + c(1-a) > 0 \Rightarrow (a-1)(1-b+bc-c) \Rightarrow (a-1)(b-1)(c-1) > 0. \text{ Odtud již plyne požadované tvrzení.}$$

Příklad 3.13: (ČSSR 1959)

Nechť  $a+b+c > 0$ ,  $bc+ac+ab > 0$  a  $abc > 0$ , potom dokažte, že všechna čísla  $a, b, c$  jsou kladná.

Řešení: Z předpokladu  $abc > 0$  plyne (bez újmy na obecnosti) pro spor, že  $a < 0$ ,  $b < 0$ ,  $c > 0$ . Potom  $bc+ac+ab > 0 \Rightarrow c(a+b) > -ab \stackrel{(GA)}{>} -\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 \Rightarrow c < \frac{a+b}{-4} \Rightarrow -4c - a - b > 0 \stackrel{c > 0}{\Rightarrow} -c - a - b > 0$ , což je spor s  $a+b+c > 0$ .

Příklad 3.14: (Balkaniáda 84)

Dokažte, že pro libovolná kladná čísla  $a_i$ ,  $i = 1, \dots, n$ ,  $n \geq 2$ , jejichž součet je jedna, platí

$$\sum_{i=1}^n \frac{a_i}{2-a_i} \geq \frac{n}{2n-1}$$

Řešení: Platí  $\sum_{i=1}^n \frac{a_i}{2-a_i} = \sum_{i=1}^n \frac{a_i+2-2}{2-a_i} = \sum_{i=1}^n \left(\frac{2}{2-a_i} - 1\right) = 2 \sum_{i=1}^n \frac{1}{2-a_i} - n \stackrel{(HA)}{\geq} 2 \frac{n^2}{(2-a_1)+\dots+(2-a_n)} - n = \frac{2n^2}{2n-1} - n = \frac{n}{2n-1}$ .

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Příklad 3.15: (NDR 84, Anglie 76)

Dokažte, že pro libovolná kladná čísla  $a_i, i = 1, \dots, n, n \geq 2$  platí

$$\sum_{i=1}^n \frac{a_i}{s - a_i} \geq \frac{n}{n-1}, \quad \text{kde } s = \sum_{i=1}^n a_i.$$

Řešení: Platí  $\sum_{i=1}^n \frac{a_i}{s - a_i} = \sum_{i=1}^n \frac{a_i - s + s}{s - a_i} = \sum_{i=1}^n \frac{s}{s - a_i} - n \stackrel{(HA)}{\geq} \frac{s n^2}{(s - a_1) + \dots + (s - a_n)} - n = \frac{n^2}{n-1} - n = \frac{n}{n-1}.$

Příklad 3.16: (New York 75)

Dokažte, že pro libovolná kladná čísla  $a_i, i = 1, \dots, n+1, a_{n+1} = a_1$  platí

$$\sum_{i=1}^n \left( \frac{a_i}{a_{i+1}} \right)^n \geq \sum_{i=1}^n \frac{a_{i+1}}{a_i}.$$

Řešení: Označíme  $x_i = \frac{a_i}{a_{i+1}}$ , pak platí  $\prod_{i=1}^n x_i = 1$ . Položíme  $x_{n+1} = 1$ , pak  $\sum_{i=1}^{n+1} \frac{1}{x_i} = \sum_{i=1}^{n+1} \prod_{j \neq i} x_j \stackrel{(GA)}{\leq} \sum_{i=1}^{n+1} \frac{1}{n} \sum_{j \neq i} x_j^n = \sum_{i=1}^{n+1} (x_i)^n$ . Odtud plyne naše tvrzení.

#### 4 Bernoulliho nerovnost

Máme dokázat, že  $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}, x \geq -2$  platí:

$$(1+x)^n \geq 1+nx.$$

1. Pro  $n = 1$  nastane rovnost  $1+x = 1+x$ .
2. Ukážeme, že platí:  $(1+x)^{n+1} \geq 1+(n+1)x$ . Upravíme uvedenou nerovnost a dostaneme

$$\begin{aligned} (1+x)^n(1+x) &\geq 1+nx+x, \\ (1+x)^n + (1+x)^n x &\geq 1+nx+x. \end{aligned}$$

Podle indukčního předpokladu je  $(1+x)^n \geq 1+nx$  a stačí tedy dokázat, že

$$(1+x)^n x \geq x.$$

Pro  $x \geq 0$  nerovnost zřejmě platí.

Pokud  $x < 0$  danou nerovnost vydělíme  $x$  a dostaneme  $(1+x)^n \leq 1$ . Tato nerovnost platí pro  $-2 \leq x < 0$ . Což jsme měli dokázat.

**Věta 4.4:** (Bernoulliho nerovnost)

Nechť  $x > -1, x \neq 0$ , pak

$$\begin{aligned} (1+x)^\alpha &< 1+\alpha x, & \text{pro } 0 < \alpha < 1 \\ (1+x)^\alpha &> 1+\alpha x, & \text{pro } \alpha \notin [0, 1] \end{aligned} \quad (\text{BN})$$

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Příklad 4.1: (Kanada 1982)

Dokažte, že pro  $x > 0$ ,  $x \neq 1$ ,  $a < 1$  platí

$$\frac{1-x^a}{1-x} < (1+x)^{a-1}.$$

Řešení: Nejdříve budeme předpokládat, že  $x \in (0, 1)$ , potom  $(1+x)^{a-1} - \frac{1-x^a}{1-x} > 0 \Leftrightarrow (1-x)(1+x)^{a-1} - (1-x^a) > 0$ .

Nyní využijeme Bernoulliuvu nerovnost:  $(1-x)(1+x)^{a-1} - (1-x^a) \stackrel{(BN)}{>} (1-x)(1+(a-1)x) - 1 + x^a = 1 + (a-1)x - x - (a-1)x^2 - 1 + x^a = (a-1)(x-x^2) + x(x^{a-1}-1) = (a-1)(x-x^2) + x((1-(x-1))^{a-1}-1) \stackrel{(BN)}{>} (a-1)(x-x^2) + x(1+(a-1)(x-1)-1) = 0$ .

Pro  $x > 1$  položíme  $t = \frac{1}{x}$ , pak  $t \in (0, 1)$  a využijeme dokázanou nerovnost:

$$\frac{1-x^a}{1-x} = \frac{1-(\frac{1}{t})^a}{1-\frac{1}{t}} = t^{1-a} \frac{t^a-1}{t-1} < t^{1-a} (1+t)^{a-1} = (1+\frac{1}{t})^{a-1} = (1+x)^{a-1}.$$

Příklad 4.2: (SSSR 1982)

Dokažte, že pro  $1 \geq x_1 \geq x_2 \geq \dots \geq x_n \geq \dots > 0$ ,  $a \leq 1$  platí

$$(1+x_1+x_2+\dots+x_n)^a \leq 1+1^{a-1}x_1^a+2^{a-1}x_2^a+\dots+n^{a-1}x_n^a.$$

Řešení: K důkazu použijeme matematickou indukci.

Pro  $a < 0$  zřejmě  $(1+x_1+x_2+\dots+x_n)^a \leq 1$ , tedy platí i naše tvrzení.

Pro  $n = 1$  ( $x_1 \in (0, 1]$ ), pak pro  $a \in [0, 1]$  platí  $(1+x_1)^a \leq 1+x_1 \leq 1+x_1^a$ .

V druhém kroku chceme dokázat, že  $(1+x_1+x_2+\dots+x_n+x_{n+1})^a \leq 1+1^{a-1}x_1^a+2^{a-1}x_2^a+\dots+n^{a-1}x_n^a+(n+1)^{a-1}x_{n+1}^a$ .

Odhadneme  $(1+x_1+\dots+x_n+x_{n+1})^a - (1+x_1+\dots+x_n)^a = (1+x_1+\dots+x_n)^a \left( (1+\frac{x_{n+1}}{1+x_1+\dots+x_n})^a - 1 \right) \leq (1+x_1+\dots+x_n)^{a-1} \cdot x_{n+1} \leq (n+1)^{a-1}x_{n+1}^a$ .

Díky indukčnímu předpokladu dostaneme

$$(1+x_1+x_2+\dots+x_n+x_{n+1})^a \leq (1+x_1+\dots+x_n)^a + (n+1)^{a-1}x_{n+1}^a \leq 1+1^{a-1}x_1^a+2^{a-1}x_2^a+\dots+n^{a-1}x_n^a+(n+1)^{a-1}x_{n+1}^a.$$

## 5 Posloupnosti

Příklad 5.1: (Jugoslávie 1976)

Nechť  $a_n = \frac{1}{(n+1)\sqrt{n+n\sqrt{n+1}}}$ . Sečtěte  $a_1 + a_2 + \dots + a_{99}$ .

Řešení: Upravíme  $a_n = \frac{1}{(n+1)\sqrt{n+n\sqrt{n+1}}} \cdot \frac{(n+1)\sqrt{n-n\sqrt{n+1}}}{(n+1)\sqrt{n-n\sqrt{n+1}}} = \frac{-1}{\sqrt{n+1}} + \frac{1}{\sqrt{n}}$ . Potom  $a_1 + a_2 + \dots + a_{99} = \frac{-1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{-1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \dots + \frac{-1}{\sqrt{100}} + \frac{1}{\sqrt{99}} = \frac{9}{10}$ .

Základním pojmem při vyšetřování chování posloupnosti je následující pojem limity.

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

**Definice 5.1 :** Řekneme, že posloupnost  $(a_n)$  je **konvergentní**, jestliže

$$\exists a \in \mathbb{R} \forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n \in \mathbb{N} : n > n_0 \Rightarrow |a_n - a| < \varepsilon.$$

Říkáme, že  $a$  je **limita** posloupnosti  $(a_n)$  a píšeme

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a.$$

Jestliže posloupnost  $(a_n)$  není konvergentní, pak říkáme, že je **divergentní**. Speciálně, jestliže

$$\forall K \in \mathbb{R} \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n \in \mathbb{N} : n > n_0 \Rightarrow a_n > K \quad (a_n < K),$$

pak řekneme, že posloupnost  $(a_n)$  **diverguje k  $+\infty$  ( $-\infty$ )**.

Příklad 5.2 : (USA 1974)

Vypočítejte

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot \dots \cdot 2n}.$$

Řešení: Platí  $a_n^2 = \frac{1^2 \cdot 3^2 \cdot \dots \cdot (2n-1)^2}{2^2 \cdot 4^2 \cdot \dots \cdot (2n)^2} = \frac{1 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n-1)(2n+1)}{(2n)^2} \cdot \frac{1}{2n+1} \leq \frac{1}{2n+1}$ . Tudíž  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot \dots \cdot 2n} = 0$ .

Příklad 5.3 : (Finsko 1980)

Máme pevné  $n \in \mathbb{N}$ , položíme  $a_0 = \frac{1}{2}$ ,  $a_k = a_{k-1} + \frac{1}{n}(a_{k-1})^2$ ,  $k = 1, \dots, n$ . Dokažte, že platí

$$1 - \frac{1}{n} < a_n < 1.$$

Řešení: Odhadneme rozdíl  $\frac{1}{a_{k-1}} - \frac{1}{a_k} = \frac{a_k - a_{k-1}}{a_{k-1}a_k} = \frac{\frac{1}{n}(a_{k-1})^2}{a_{k-1}(a_{k-1} + \frac{1}{n}(a_{k-1})^2)} = \frac{1}{n+a_{k-1}}$ . Po sečtení dostaneme  $2 - \frac{1}{a_n} = \frac{1}{a_0} - \frac{1}{a_n} = \frac{1}{n+a_0} + \frac{1}{n+a_1} + \dots + \frac{1}{n+a_n} < n \cdot \frac{1}{n} = 1$ . Odtud vyplývá nerovnost  $a_n < 1$ . Zároveň tak dostáváme  $\frac{1}{a_{k-1}} - \frac{1}{a_k} > \frac{1}{n+1}$  a opět po sečtení  $2 - \frac{1}{a_n} = \frac{1}{a_0} - \frac{1}{a_n} > \frac{n}{n+1}$ , tudíž  $1 - \frac{1}{n} < a_n$ .

Příklad 5.4 : (Anglie 1980)

Nechť  $a_{n+1} = 2^n - 3a_n$ ,  $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ . Pro které hodnoty  $a_0$  je tato posloupnost rostoucí?

Řešení: Upravíme  $a_{n+1} = 2^n - 3a_n = 2^n - 3(2^{n-1} - 3a_{n-1}) = 2^n - 3 \cdot 2^{n-1} + 3^2 \cdot 2^{n-2} + \dots + (-3)^n \cdot 2^0 + (-3)^{n+1}a_0 = 2^n \frac{1 - (-\frac{3}{2})^{n+1}}{1 + \frac{3}{2}} + (-3)^{n+1}a_0 = \frac{2^{n+1}}{5} + (-3)^{n+1}(-\frac{1}{5} + a_0)$ . Odtud vyplývá, že posloupnost  $a_n$  je rostoucí pouze pro  $a_0 = \frac{1}{5}$ .

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

*Příklad 5.5:* (ČSSR 1968)

Dokažte, že  $a_n = \frac{(2+\sqrt{3})^n - (2-\sqrt{3})^n}{2\sqrt{3}}$  je celé číslo pro každé  $n \in \mathbb{Z}$ . Pro které hodnoty  $n$  je  $a_n$  dělitelné třemi?

Řešení: Položíme  $\alpha = \frac{(2+\sqrt{3})^n}{2\sqrt{3}}$ ,  $\beta = \frac{(2-\sqrt{3})^n}{2\sqrt{3}}$ , potom pro  $n \in \mathbb{Z}$  platí  $a_n = \alpha - \beta$ ,  
 $a_{n+1} = (2+\sqrt{3})\alpha - (2-\sqrt{3})\beta$ ,  $a_{n+2} = (2+\sqrt{3})^2\alpha - (2-\sqrt{3})^2\beta = (7+4\sqrt{3})\alpha - (7-4\sqrt{3})\beta =$   
 $4((2+\sqrt{3})\alpha - (2-\sqrt{3})\beta) - (\alpha - \beta) = 4a_{n+1} - a_n$ .

Pro zbytky při dělení třemi platí  $a_{n+2} \pmod 3 \equiv a_{n+1} \pmod 3 - a_n \pmod 3$ . Zároveň platí  
 $a_1 = 1 \pmod 3 \equiv 1$ ,  $a_2 = 4 \pmod 3 \equiv 1$ , tedy  $a_3 \pmod 3 \equiv a_2 \pmod 3 - a_1 \pmod 3 \equiv 0$ . Podobně  
dostaneme  $a_4 \pmod 3 \equiv 2$ ,  $a_5 \pmod 3 \equiv 2$  a  $a_6 \pmod 3 \equiv 0$ , odtud vyplývá, že  $a_n$  je dělitelné  
třemi pro  $n = 3k, k \in \mathbb{N}$  a protože  $a_0 = 0$  a  $-a_{-n} = a_n$ , tak  $a_n$  je dělitelné třemi obecně pro  
 $n = 3k, k \in \mathbb{Z}$ .

### Závěr

Příklady použité v tomto textu se již vyskytly v některé národní či mezinárodní matematické olympiádě. Věřím, že budou dobrou přípravou našim talentovaným matematikům. Některá řešení jsou originální a nejsou přejatá z dostupné literatury. Přeji čtenářům, aby se jim dařilo nacházet ještě jednodušší a elegantnější řešení.

### Použitá literatura

Alois Kufner : Nerovnosti a odhady, Škola mladých matematiků(39), Nakladatelství Mladá Fronta, Praha 1975

František Veselý: O nerovnostech a nerovnicích, Škola mladých matematiků(48), Nakladatelství Mladá Fronta, Praha 1982

Konjagin, Tonojan, Šarigin, a jiní: Zaruběžnye matematičeskie olimpiady, M. Nauka, Hlavní redakce fiz.-mat. literatury, 1987

### Kontakt na autora

RNDr. Petr Tomiczek CSc.

Západočeská univerzita v Plzni

tomiczek@kma.zcu.cz

## PODPORA TALENTOVANÝCH ŽÁKŮ V PLZEŇSKÉM KRAJI

## MATEMATICKÝ KEMP

## TEORIE ČÍSEL A GEOMETRIE TROJÚHELNÍKU

Josef KRÍŠŤAN

## 1 Úvod

Následující text si klade za cíl zopakovat některé typové příklady, které se probíraly na přednášce. Text je rozdělen do tří částí. V první se zabýváme elementárními důkazy v teorii čísel, ve druhé a třetí části důkazy v geometrii. Obě témata jsou dobře známa jak z hodin matematiky, tak z matematických soutěží jako je například matematická olympiáda. Přejeme hodně radosti z nalezených řešení příkladů.

## 2 Důkazové techniky v teorii čísel.

**Příklad 1.** Čísla  $a, b, \frac{a+1}{b} + \frac{b+1}{a}$  jsou přirozená. Dokažte, že potom pro největší společný dělitel  $D$  čísel  $a$  a  $b$  platí nerovnost  $D \leq \sqrt{a+b}$ . Nastane v této nerovnosti někdy rovnost za podmínky  $D < a < b$ ?

**Řešení.** Označme  $nsd(m, n)$  největší společný dělitel přirozených čísel  $m$  a  $n$ , a speciálně  $D = nsd(a, b)$ . Pak existují navzájem nesoudělná přirozená čísla  $a_0, b_0$  taková, že  $a = Da_0$  a  $b = Db_0$ . Upravme následující zlomek jen pomocí  $D, a_0$  a  $b_0$ ,

$$\begin{aligned} \frac{a+1}{b} + \frac{b+1}{a} &= \frac{a^2 + a + b^2 + b}{ab} = \frac{D(a_0^2 + b_0^2) + a_0 + b_0}{Da_0b_0} \\ &= \frac{D((a_0 + b_0)^2 - 2a_0b_0) + a_0 + b_0}{Da_0b_0} \\ &= \frac{(a_0 + b_0)(D(a_0 + b_0) + 1)}{Da_0b_0} - 2. \end{aligned} \tag{1}$$

Zlomek (1) je podle zadání přirozené číslo, tj. číselník je beze zbytku dělitelný jmenovatelem, a protože jsou čísla  $D$  a  $D(a_0 + b_0) + 1$  nesoudělná,  $D$  dělí  $a_0 + b_0$ . Odkud dostaneme nerovnost  $D \leq a_0 + b_0$ . Pronásobením této nerovnosti číslem  $D$  už získáme dokazovanou

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

nerovnost:

$$\begin{aligned} D &\leq a_0 + b_0, \\ D^2 &\leq D(a_0 + b_0) = Da_0 + Db_0 = a + b, \\ D &\leq \sqrt{a + b} \end{aligned} \quad (2)$$

Nakonec se pokusíme nalézt trojici  $(a, b, D)$ , pro kterou nastává v nerovnosti (2) rovnost. Protože  $D < a = Da_0$ , je  $a_0 > 1$  a z podmínky  $a < b$  zase plyne  $a_0 < b_0$ . Při hledání vhodné trojice se pokusíme pracovat s co nejmenšími čísly. Z tohoto důvodu volme nejprve  $a_0 = 2$ . Pokud by taková volba nevedla k řešení, zvolíme  $a_0 = 3$ , atd.

Pro  $a_0 = 2$  je  $a = 2D$  a  $b_0 \geq 3$ . Z dělitelnosti  $D|a_0 + b_0$  plyne, že existuje přirozené číslo  $m$ , pro které  $b_0 + 2 = mD$ , tj.

$$b_0 = mD - 2.$$

Podívejme se ještě jednou na zlomek (1) a dělitelnost číslem  $b_0$ . Protože  $\text{nsd}(b_0, a_0 + b_0) = 1$ ,  $b_0$  musí dělit beze zbytku číslo  $Da_0 + Db_0 + 1$ , tj.  $b_0|Da_0 + 1 = 2D + 1$ , neboli existuje přirozené číslo  $n$ , že  $2D + 1 = nb_0$ , tj.

$$2D + 1 = nb_0 = n(mD - 2) \quad \Rightarrow \quad D = \frac{2n + 1}{mn - 2}.$$

Všimněme si, že  $D$  je liché, neboť čítec zlomku (2) je liché číslo. Volme nejmenší možné  $m = 1$ , potom

$$D = \frac{2n + 1}{n - 2} = \frac{2(n - 2) + 5}{n - 2} = 2 + \frac{5}{n - 2}, \quad n \geq 3.$$

Volba  $n = 3$  dává  $D = 7$ ,  $b_0 = mD - 2 = 1 \cdot 7 - 2 = 5$ . Jedna z možných trojic, pro kterou nastane v nerovnosti (2) rovnost je tedy  $(a, b, D) = (14, 35, 7)$ . Zkouškou se snadno přesvědčíme, že nalezená trojice splňuje všechny požadované podmínky zadání.

**Příklad 2.** Pro přirozené číslo  $n$  označme  $d(n)$  počet kladných dělitelů čísla  $n$ . Najděte všechna  $n$ , pro která platí  $4n = d^3(n)$ .

**Řešení.** Pišme číslo  $n$ , které splňuje zadanou rovnici, v prvočíselném rozkladu jako

$$n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_k^{\alpha_k},$$

kde  $k \geq 1$  a  $2 \leq p_1 < p_2 < \cdots < p_k$  jsou navzájem různá prvočísla. Exponenty  $\alpha_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, k$ , jsou nezáporná přirozená čísla. Tento zápis čísla  $n$  je výhodný pro výpočet



INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

počtu dělitelů  $d(n)$ . Dělitelem  $n$  je každé číslo ve tvaru

$$p_1^{\beta_1} p_2^{\beta_2} \cdots p_k^{\beta_k}, \quad 0 \leq \beta_i \leq \alpha_i, i = 1, 2, \dots, k.$$

Nyní je snadné určit  $d(n) = (\alpha_1 + 1)(\alpha_2 + 1) \cdots (\alpha_k + 1)$ . Řešíme proto rovnici

$$4n = 2^2 p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_k^{\alpha_k} = d^3(n) = (\alpha_1 + 1)^3 (\alpha_2 + 1)^3 \cdots (\alpha_k + 1)^3. \quad (3)$$

Jelikož levá strana rovnice (3) je třetí mocninou, musí být nutně nejmenší prvočíslo rovno 2, tj.  $p_1 = 2$ , a exponenty  $\alpha_i$  tvaru

$$\alpha_1 = 3\beta_1 + 1, \alpha_2 = 3\beta_2, \dots, \alpha_k = 3\beta_k, \quad \beta_i \geq 0, i = 1, 2, \dots, k.$$

Rovnice získala nový tvar,

$$2^{\beta_1+1} p_2^{\beta_2} \cdots p_k^{\beta_k} = (3\beta_1 + 2)(3\beta_2 + 1) \cdots (3\beta_k + 1). \quad (4)$$

Pravá strana (4) delitelná 3, proto  $p_2 \geq 5$ . Podle Bernoulliho nerovnosti můžeme hrubě, ale dostatečně, odhadnout: pro  $i \geq 2$  je

$$p_i^{\beta_i} \geq 5^{\beta_i} = (4 + 1)^{\beta_i} \geq 1 + 4\beta_i \geq 1 + 3\beta_i, \quad (5)$$

Rovnosti v posloupnosti nerovnic nastanou jen v případě  $\beta_i = 0$ . Rovnici (4) přepíšeme do jiného tvaru, abychom mohli využít předchozí odhad (5),

$$\frac{3\beta_1 + 2}{2^{\beta_1+1}} = \frac{p_2^{\beta_2}}{3\beta_2 + 1} \cdots \frac{p_k^{\beta_k}}{3\beta_k + 1} \geq 1, \quad (6)$$

tj.

$$3\beta_1 + 2 \geq 2^{\beta_1+1}. \quad (7)$$

V nerovnici (7) roste exponenciála na pravé straně rychleji než lineární člen na levé straně. Již pro  $\beta_1 \geq 3$  platí vždy opačná nerovnost, takže zbývají vyšetřit pouze 3 případy.

Pro  $\beta_1 = 0$  dostáváme z rovnice (6)

$$1 = \frac{p_2^{\beta_2}}{3\beta_2 + 1} \cdots \frac{p_k^{\beta_k}}{3\beta_k + 1} \geq 1,$$

a rovnost nastane, jak víme, pouze pro  $\beta_i = 0$  pro  $i \geq 2$ . V tomto případě získáváme první řešení  $n = 2$ .

Případ  $\beta_1 = 2$  je totožný s předchozím případem. Další řešení je  $n = 2^7$ .



INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Poslední případ,  $\beta_1 = 1$ , je náročnější. Z rovnice (6) dostaneme

$$\frac{5}{4} = \frac{p_2^{\beta_2}}{3\beta_2 + 1} \cdots \frac{p_k^{\beta_k}}{3\beta_k + 1},$$

odkud je vidět, že  $p_2 = 5$ . Pro  $i \geq 3$  je tedy  $p_i > 5$  a díky Bernoulliho nerovnosti platí, za předpokladu  $\beta_i \geq 1$ , odhad

$$\begin{aligned} \frac{p_i^{\beta_i}}{3\beta_i + 1} &> \frac{5^{\beta_i}}{3\beta_i + 1} \geq \frac{4\beta_i + 1}{3\beta_i + 1} \\ &= 1 + \frac{\beta_i}{3\beta_i + 1} \geq 1 + \frac{1}{4} = \frac{5}{4}. \end{aligned} \quad (8)$$

Poslední nerovnost  $\frac{\beta_i}{3\beta_i + 1} \geq \frac{1}{4}$  je pro  $i \geq 3$  ekvivalentní podmínce  $\beta_i \geq 1$ . Z tohoto rozboru vyplývá (za předpokladu  $\beta_i \geq 1$ )

$$\frac{5}{4} = \frac{p_2^{\beta_2}}{3\beta_2 + 1} \cdots \frac{p_k^{\beta_k}}{3\beta_k + 1} \geq \frac{5}{4} \frac{p_3^{\beta_3}}{3\beta_3 + 1} \cdots \frac{p_k^{\beta_k}}{3\beta_k + 1} > \frac{5}{4} \left(\frac{5}{4}\right)^{k-2} \quad (9)$$

Tato nerovnost nemůže platit pokud  $k > 3$ . Je tedy  $k = 2$  a rovnost v (9) platí pouze pokud  $\beta_2 = 1$ . Pro  $\beta_2 > 1$  platí ostrá nerovnost. Celkem jsme zjistili, že  $p_1 = 2$ ,  $p_2 = 5$ ,  $\alpha_1 = 3\beta_1 + 1 = 4$ ,  $\alpha_2 = 3\beta_2 = 3$  a další řešení je  $n = 2^4 5^3$ .

Zadání splňují tři přirozená čísla:  $n \in \{2, 2^7, 2^4 5^3\}$ .

**Příklad 3.** Dokažte, že neexistuje žádná čtveřice  $x, y, z, u$  přirozených čísel splňující rovnost  $x^2 + y^2 = 3(z^2 + u^2)$ .

**Řešení.** Na této úloze budeme demonstrovat tzv. metodu extrému, konkrétně metodu nekonečného klesání. Pro spor předpokládejme, že taková čtveřice existuje. Mezi všemi takovými čtveřicemi vybereme tu s nejmenší hodnotou  $x^2 + y^2$  (pokud je jich více, vezmeme libovolnou z nich) a označme ji  $(a, b, c, d)$ . Z rovnosti  $a^2 + b^2 = 3(c^2 + d^2)$  plyne  $3|a^2 + b^2$ , a to je možné jen v případě  $3|a$  a současně  $3|b$  (podle malé Fermatovy věty: je-li číslo  $x$  nesoudělné s 3, pak dává  $x^2$  zbytek 1 po dělení 3. V řeči kongruencí:  $x^2 \equiv 1 \pmod{3}$  pokud  $\text{nsd}(x, 3) = 1$ .) Existují proto  $a_0, b_0$ , že  $a = 3a_0, b = 3b_0$ . Dosazením do původní rovnice:  $c^2 + d^2 = 3(a_0^2 + b_0^2)$ . Našli jsme tedy další čtveřici, která splňuje zadanou rovnici. Je jí čtveřice  $(c, d, a_0, b_0)$ , přičemž

$$a^2 + b^2 = 3(c^2 + d^2) > c^2 + d^2.$$



## INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Jak je vidět z předchozí nerovnosti, nově nalezená čtveřice  $(c, d, a_0, b_0)$  má menší součet kvadrátů prvních dvou složek než námi zvolená čtveřice  $(a, b, c, d)$ . To je ale ve sporu s předpokladem, že čtveřice  $(a, b, c, d)$  měla takový součet nejmenší. A to je hledaný spor. Proto žádná čtveřice, která splňuje rovnost ze zadání, neexistuje.

### 3 Příčky v trojúhelníku.

**Příklad 4.** V trojúhelníku  $ABC$  jsou body  $X, Y$  a  $Z$  vnitřní body stran  $BC, CA$  a  $AB$  v tomto pořadí. Úsečky  $AX, BY$  a  $CZ$  se protínají v bodě  $X$ . Jak zvolit body  $X, Y, Z$ , aby jsme maximalizovali součin  $|AZ||BX||CY|$ ?

**Řešení.** Zavedme bezrozměrná čísla  $x = |BX|/a, y = |CY|/b$  a  $z = |AZ|/c$ , pak  $|CX|/a = 1 - x, |AY|/b = 1 - y, |BZ|/c = 1 - z$ . Protože se úsečky  $AX, BY$  a  $CZ$  protínají v jednom bodě, platí podle Cévyovy věty rovnost

$$\begin{aligned} |BX||CY||AZ| &= |CX||AY||BZ|, \\ xyz &= (1-x)(1-y)(1-z), \quad x, y, z \in (0, 1) \end{aligned} \quad (10)$$

Z (10) pomocí A-G nerovnosti určíme horní odhad pro součin  $xyz$ :

$$\begin{aligned} (xyz)^2 &= x(1-x)y(1-y)z(1-z) \leq \\ &\leq \left(\frac{x+1-x}{2}\right)^2 \left(\frac{y+1-y}{2}\right)^2 \left(\frac{z+1-z}{2}\right)^2 \leq \left(\frac{1}{2}\right)^6, \\ xyz &\leq \frac{1}{8} \end{aligned} \quad (11)$$

Otázka nyní zní, lze-li horního odhadu  $\frac{1}{8}$  nabýt. Z A-G nerovnosti plyne, že rovnost v (11) platí jen tehdy, když  $x = y = z = \frac{1}{2}$ . Tato podmínka říká, že body  $X, Y, Z$  jsou středy příslušných stran. Jak je známo, těžnice se protínají v jednom bodě, proto tato konfigurace bodů  $X, Y, Z$  splňuje všechny požadované podmínky. Závěr: součin  $|AZ||BX||CY|$  je maximální, pokud  $X, Y, Z$  jsou středy příslušných stran.

Na přednášce jsme se dále zabývali základními vlastnostmi příček v trojúhelníku. Velmi mě potěšilo zjištění, že studenti mají velmi dobré znalosti z geometrie a nebojí se prezentovat (po krátkém přemlouvání :-)) před tabulí.

Na přednášce jsme zmínili tvrzení o Cévyově a Meneleaově větě. Jedním z praktických úkolů bylo například odvození délky těžnice. Studenti použili při odvození kosinovou větu. Z dvojího vyjádření délky těžnice  $t_c$  vyloučíme  $\cos \alpha$ : z trojúhelníků  $AC_1C$  a  $ABC$  postupně určíme

$$\begin{aligned} t_c^2 &= \frac{1}{4}c^2 + b^2 - bc \cos \alpha, \\ a^2 &= c^2 + b^2 - 2bc \cos \alpha, \end{aligned}$$

odkud

$$t_c = \frac{1}{2} \sqrt{2a^2 + 2b^2 - c^2}.$$

Pak je již snadné dokázat následující rovnost

$$a^2 + b^2 + c^2 = \frac{4}{3}(t_a^2 + t_b^2 + t_c^2),$$

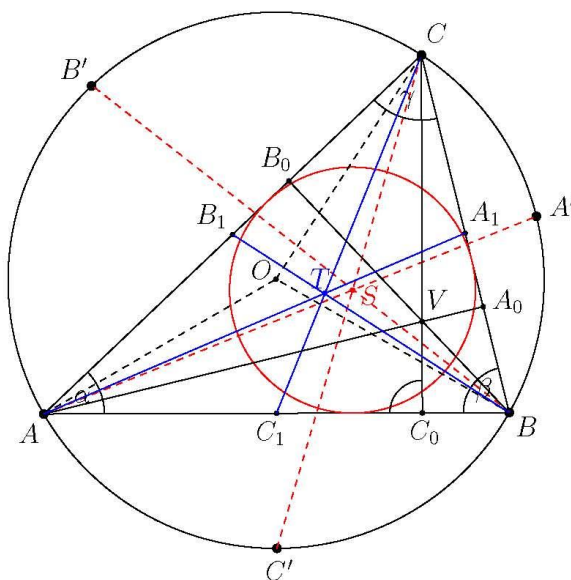
kteřá platí pro každý trojúhelník. Stewartův vzorec umožňuje vyjádřit délku obecné příčky v trojúhelníku. Předpokládejme, že na straně  $AB$  je bod  $D$ . Označme

$$p = |AD|/c, \quad q = |BD|/c, \quad p + q = 1.$$

Potom pro délku  $|CD|$  lze (stejně snadno jako pro délku těžnice) dokázat

$$|CD|^2 = pa^2 + qb^2 - pqc^2.$$

Vzorec pro délku těžnice získáme volbou  $p = q = \frac{1}{2}$ .



Obrázek 1: základní vlastnosti trojúhelníku.

Dalšími jednoduchými příklady bylo určení délky výšky  $CC_0$  a délky osy úhlu. Dále jsme ukázali, že bod  $C'$  je středem oblouku  $AB$  (obsahující bod  $C'$ ). Důkaz lze provést

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

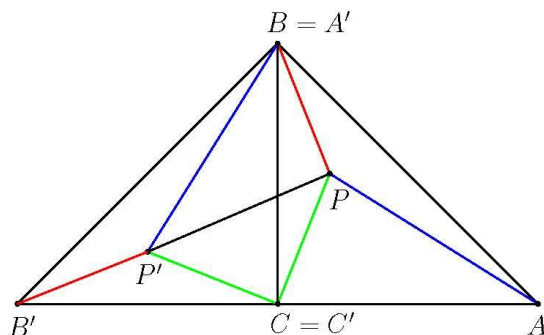
snadno pomocí obvodových úhlů nad tětivami  $AC'$  a  $BC'$ . Totiž, přímka  $CC'$  je osa úhlu  $ACB$ , tj.  $|\angle ACC'| = |\angle BCC'|$ , což je ekvivalentní podmínce  $|AC'| = |BC'|$ . Důkaz je hotov.

Dále jsme zmínili ortický trojúhelník  $A_0B_0C_0$  a některé jeho vlastnosti. Například jsme ukázali, že trojúhelníky  $ABC$  a  $A_0B_0C$  jsou podobné.

Připomněli jsme si také základní vlastnosti kružnice vepsané a opsané trojúhelníku  $ABC$ . Je snadné ukázat, že  $|\angle AOB| = 2|\angle ACB|$  a  $|\angle ASB| = \pi - \gamma$ . Podobných jednoduchých tvrzení bylo na přednášce ukázáno mnoho a důkazy provedli většinou sami studenti.

#### 4 Geometrická zobrazení.

**Příklad 5.** Je dán libovolný vnitřní bod  $P$  pravoúhlého rovnoramenného trojúhelníka  $ABC$  s přeponou  $AB$ . Dokažte, že z úseček délek  $|AP|$ ,  $|BP|$  a  $|CP|\sqrt{2}$  lze sestrojit trojúhelník.



Obrázek 2: náčrt k příkladu 5.

**Řešení.** Jelikož je trojúhelník  $ABC$  pravoúhlý a rovnoramenný s přeponou  $AB$ , uvažujme rotaci se středem v bodě  $C$  a úhlem rotace  $\omega = +90^\circ$ . V této rotaci jsou body  $A'$ ,  $B'$ ,  $C'$  a  $P'$  postupně obrazy bodů  $A$ ,  $B$ ,  $C$  a  $P$ , viz obrázek 2.

Z vlastností rotace okamžitě plynou následující rovnosti:  $|AP| = |A'P'| = |BP'|$ ,  $|PP'| = \sqrt{|PC|^2 + |PC'|^2} = \sqrt{2}|CP|$ . Tedy trojúhelník  $BPP'$ , který vznikl po dané rotaci má délky stran  $|BP|$ ,  $|BP'| = |AP|$ , a  $|PP'| = |CP|\sqrt{2}$ . Vzhledem k tomu, že daný trojúhelník existuje vždy, lze opravdu pro libovolný vnitřní bod  $P$  trojúhelníka  $ABC$  sestrojit trojúhelník s požadovanými délkami stran.

**Příklad 6.** Označme  $S$  střed kružnice vepsané v trojúhelníku  $ABC$  a  $A'$ ,  $B'$  a  $C'$  postupně obrazy bodu  $S$  v osové souměrnosti podle přímk  $BC$ ,  $CA$  a  $AB$ . Dokažte, že trojúhelníky  $ABC$  a  $A'B'C'$  jsou podobné právě tehdy, když je  $ABC$  rovnostranný trojúhelník.

**Řešení.** Volme klasické označení stran a úhlů. Jak známo, bod  $S$  leží na osách vnitřních úhlů trojúhelníku  $ABC$ , takže snadno dopočítáme  $|\angle C'SB'| = \pi - \alpha$ .

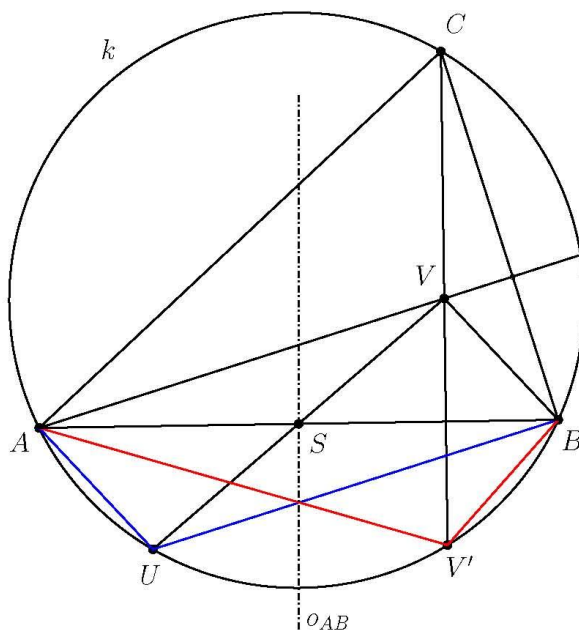
Na druhé straně, bod  $S$  je pro trojúhelník  $A'B'C'$  střed kružnice opsané. To lze snadno nahlédnout z toho, že např.  $A'S = 2r$ , kde  $r$  je poloměr kružnice vepsané trojúhel-



níku  $ABC$ . V trojúhelníku  $A'B'C'$  plyne z vlastnosti obvodových a středových úhlů:  $|\angle B'SC'| = 2|\angle B'A'C'|$ . Za předpokladu, že trojúhelníky  $ABC$  a  $A'B'C'$  jsou podobné musí být  $|\angle B'SC'| = 2\alpha$ . Z dvojího vyjádření velikosti úhlu  $\angle B'SC'$  plyne podmínka  $\pi - \alpha = 2\alpha$ ,  $\alpha = \pi/3$ . Podobně dostaneme  $\beta = \gamma = \pi/3$ , tj. musí trojúhelník  $ABC$  je rovnostranný. Naopak, pokud je trojúhelník  $ABC$  rovnostranný, není téměř co dokazovat.

**Příklad 7.** V ostroúhlém trojúhelníku  $ABC$  označme  $V$  jeho ortocentrum a  $S$  střed  $AB$ . Buď  $U$  bod souměrně sdružený bodu  $V$  podle středu  $S$ . Dokažte, že  $|\angle ACV| = |\angle BCU|$ .

Řešení.



Obrázek 3: náčrt k příkladu 7.

Ve středové souměrnosti, ve které přejde bod  $V$  na bod  $U$  přejde trojúhelník  $AVB$  na  $BUA$ , a proto

$$\begin{aligned} |\angle AUB| &= |\angle AVB|, \\ |AU| &= |BV| \end{aligned} \tag{12}$$

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Velikost  $|\angle AVB|$  dopočítáme z trojúhelníku  $AVB$ . Platí  $|\angle VAB| = \pi/2 - \beta$  a  $|\angle VBA| = \pi/2 - \alpha$ , pak  $|\angle AVB| = \alpha + \beta = \pi - \gamma$ . Proto také  $|\angle AUB| = \pi - \gamma$ , z čehož plyne, že čtyřúhelník  $AUBC$  je tětivový a opsaná kružnice tomuto čtyřúhelníku je totožná s opsanou kružnicí trojúhelníku  $ABC$ .

Označme  $V'$  obraz bodu  $V$  v osové souměrnosti podle přímky  $AB$ . V této souměrnosti přejde trojúhelník  $AVB$  na trojúhelník  $AV'B$ , takže

$$\begin{aligned} |\angle AV'B| &= |\angle AVB| = \pi - \gamma, \\ |BV'| &= |BV| = |AU|, \quad (\text{viz (12)}) \end{aligned} \quad (13)$$

Jak vidíme, bod  $V'$  leží také na kružnici opsané trojúhelníku  $ABC$ , viz obrázek 3.

Nyní již víme, že body  $U$  a  $V'$  leží na kružnici opsané trojúhelníku  $ABC$ . Protože  $|AU| = |BV'|$ , obvodové úhly nad těmito tětivami jsou shodné:  $|\angle ACU| = |\angle BCV'|$ . Pak

$$\begin{aligned} |\angle ACV| &= |\angle ACV'| = |\angle ACU| + |\angle UCV'| = \\ &= |\angle BCV'| + |\angle V'CU| = |\angle BCU|, \end{aligned}$$

což jsme měli dokázat.

**Příklad 8.** *Bud' k kružnice opsaná trojúhelníku  $ABC$  a  $A', B'$  a  $C'$  průsečíky os vnitřních úhlů při vrcholech  $A, B$  a  $C$ . Dokažte, že obsah trojúhelníku  $A'B'C'$  je větší nebo roven obsahu trojúhelníku  $ABC$ .*

**Řešení.**

Pokusme se najít prvek, který mají trojúhelníky  $ABC$  a  $A'B'C'$  společný. Je jím právě opsaná kružnice  $k$ . Ta nám pomůže vyjádřit obsah příslušných trojúhelníků. Označme úhly v trojúhelníku  $ABC$  obvyklým způsobem  $\alpha, \beta$  a  $\gamma$ . Potom z vlastnosti obvodových úhlů platí, viz obrázek 4,

$$|\angle CC'B'| = |\angle CAB'| = \frac{\alpha}{2}, \quad |\angle A'C'C| = |\angle A'BC| = \frac{\beta}{2},$$

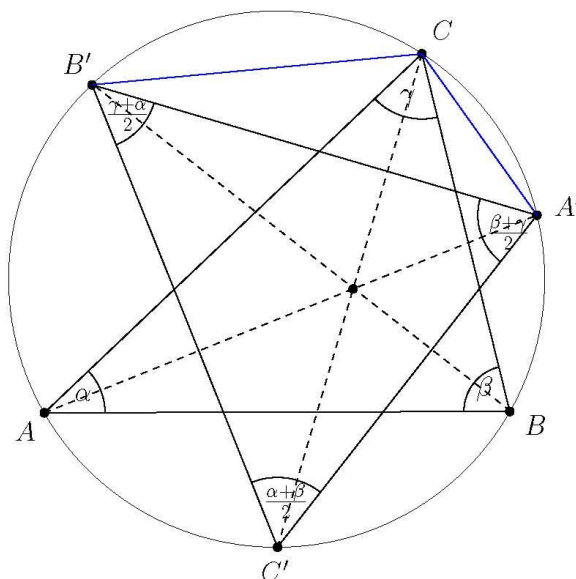
tedy

$$|\angle A'C'B'| = |\angle A'C'C| + |\angle CC'B'| = \frac{\alpha + \beta}{2}.$$

Podobně spočítáme zbývající dva úhly v trojúhelníku  $A'B'C'$ ,

$$|\angle C'A'B'| = \frac{\alpha + \gamma}{2}, \quad |\angle A'B'C'| = \frac{\beta + \gamma}{2}.$$





Obrázek 4: náčrt k příkladu 8.

Nyní snadno vyjádříme obsahy obou trojúhelníků. Využijeme přitom sinovou větu, jejíž jeden z možných tvarů (pro trojúhelník  $ABC$ ) je

$$2R = \frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma},$$

kde  $R$  značí poloměr kružnice opsané trojúhelníku  $ABC$ . Proto

$$S_{ABC} = \frac{1}{2}ab \sin \gamma = 2R^2 \sin \alpha \sin \beta \sin \gamma,$$

$$S_{A'B'C'} = 2R^2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\beta + \gamma}{2} \sin \frac{\gamma + \alpha}{2}.$$

Dokazujeme nakonec goniometrickou nerovnost pro libovolné úhly  $\alpha$ ,  $\beta$  a  $\gamma$  v trojúhelníku:

$$\sin \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\beta + \gamma}{2} \sin \frac{\gamma + \alpha}{2} \geq \sin \alpha \sin \beta \sin \gamma.$$

Při důkazu takové nerovnosti nám pomůže znalost průběhu funkce sinus na intervalu  $(0, \pi)$ . Na tomto intervalu je funkce sinus konkávní. To znamená, že pro libovolná čísla

$x, y \in (0, \pi)$  platí nerovnost

$$\sin \frac{x+y}{2} \geq \frac{\sin x + \sin y}{2}.$$

Položíme-li např.  $x = \alpha$  a  $y = \beta$ , platí

$$\sin \frac{\alpha + \beta}{2} \geq \frac{\sin \alpha + \sin \beta}{2} \geq \sqrt{\sin \alpha \sin \beta},$$

kde druhá nerovnost je důsledkem A-G nerovnosti pro kladná čísla  $x = \alpha$  a  $y = \beta$  (funkce sinus nabývá na intervalu  $(0, \pi)$  jen kladných hodnot). Podobně

$$\sin \frac{\beta + \gamma}{2} \geq \frac{\sin \beta + \sin \gamma}{2} \geq \sqrt{\sin \beta \sin \gamma},$$

$$\sin \frac{\gamma + \alpha}{2} \geq \frac{\sin \gamma + \sin \alpha}{2} \geq \sqrt{\sin \gamma \sin \alpha}.$$

Vynásobením posledních třech nerovností získáme dokazovanou nerovnost. Rovnost nastane jen tehdy, pokud  $\alpha = \beta = \gamma = \pi/3$  (trojúhelník  $ABC$  je v tomto případě rovnostranný).

## 5 Závěr.

Na přednášce jsem se zabývali teorií čísel a geometrií trojúhelníku. Největší přínos vidím hlavně v aktivním zapojení studentů do přednášky.

## 6 Poděkování.

Tímto bych chtěl poděkovat všem lidem, kteří se podíleli na přípravě Matematického Kempu. Zvláště bych chtěl poděkovat PaedDr. Naděždě Kubešové za pozvání a studentům za skvělou atmosféru při přednáškách.

## 7 Literatura.

- Dušan Djurkić a kol., The IMO Compendium. A Collection of Problems Suggested for the International Mathematical Olympiads: 1959-2004, Springer 2006, ISBN 0-387-24299-6.
- Marko Radovanović, Complex Numbers in Geometry, The Author(s) and the IMO Compendium Group 2007, [www.imomath.com](http://www.imomath.com).



evropský  
sociální  
fond v ČR



EVROPSKÁ UNIE



MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ,  
MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY



OP Vzdělávání  
pro konkurenceschopnost



PLZEŇSKÝ KRAJ

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

## 8 Kontakt na autora.

Josef Křišťan  
email: [kristan1@email.cz](mailto:kristan1@email.cz)  
tel.: +420777944564

## ZLATÝ ŘEZ – MATEMATICKÝ DIAMANT

Josef KUBEŠ

### 1 Úvod

Zlatý řez definuje již Eukleidés v 6. knize *Základů*. Můžeme se s ním setkat v matematice i řadě dalších oborů. Lze jej vypořádat v rostlinné i živočišné říši. Se zlatým řezem pracovala řada malířů, architektů, fotografů a v dnešní době jej lze také nalézt v oblasti tvorby webových stránek a designu.

### 2 Definice zlatého řezu

Je dána úsečka AB a její vnitřní bod C, který leží tak, že délka delšího úseku v poměru k délce kratšího úseku se rovná poměru délky celé úsečky a délky delšího jejího úseku.



Jestliže tento vztah vyjádříme algebraicky, získáme rovnici:

$$\frac{|AB|}{|AC|} = \frac{|AC|}{|BC|} \text{ po dosazení za } |AB| = a, |AC| = x, |BC| = a-x, \text{ dostaneme vztah:}$$

$$\frac{a}{x} = \frac{x}{a-x}$$

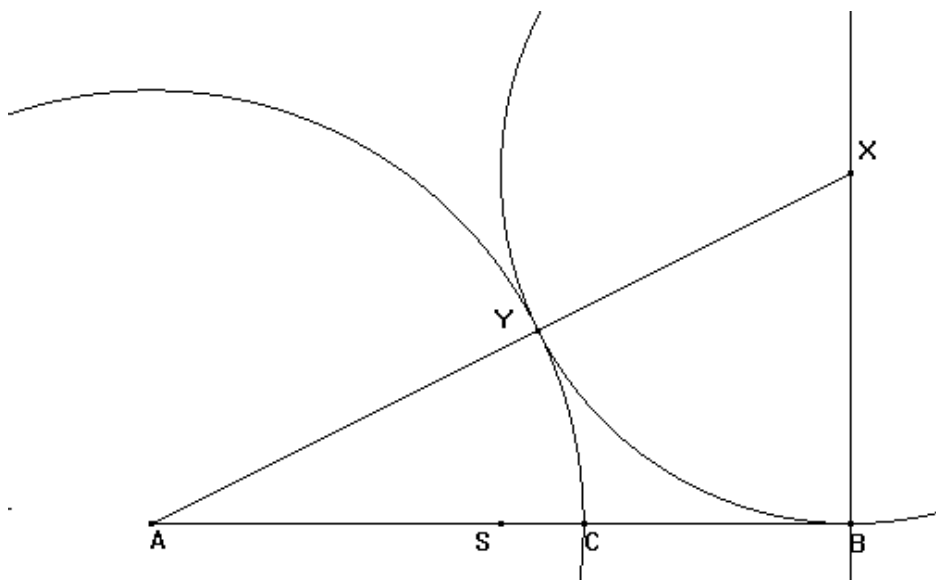
Poměr celé úsečky a její větší části označíme jako  $\phi$ , vyjádříme  $a$  pomocí  $\phi$  a pokračujeme v úpravách až ke kvadratické rovnici, kterou vypočteme (za výsledek můžeme prohlásit jen ten větší nule, protože hledáme poměr mezi délkami úseček).

Hledaný výsledek je vyjádřený hodnotou 1,618033988728.

#### 2.1 Konstrukce zlatého řezu

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Je dána úsečka AB a její střed S. V bodě B narýsujeme kolmici na úsečku AB. Na tuto kolmici nanese délku úsečky AS, tak vznikne bod X, který spojíme s bodem A. V bodě X opišeme kružnici o poloměru  $|AS|$ , v průsečíku s úsečkou AX vzniká bod Y. Tímto bodem vedeme kružnici se středem v bodě A. Tato kružnice protíná úsečku AB v bodě C, který dělí úsečku AB ve zlatém řezu.



## 2.2 Zlatý obdélník

Zlatý obdélník je takový obdélník, pro který platí, že poměr jeho délky a šířky odpovídá číslu  $\varphi$ , tedy zlatému poměru.

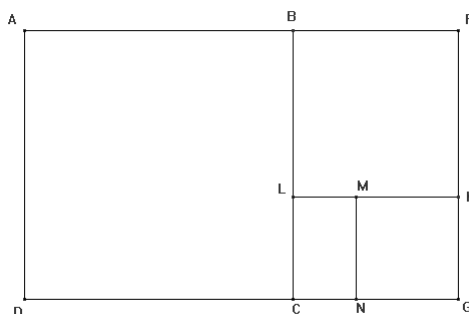


Obdélník, jehož strany jsou vzájemně ve zlatém poměru je považován za nejestetičtější obdélník.

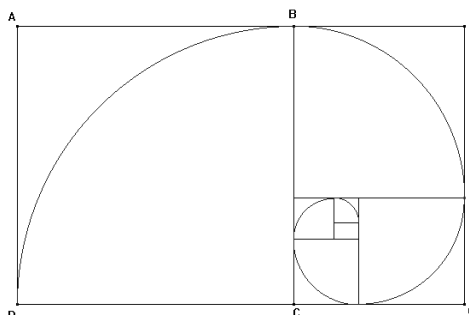
Jestliže zlatý obdélník vepíšeme do čtverce, rozdělí jeho vrcholy strany čtverce ve zlatém poměru.

## INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Oddělíme-li z původního zlatého obdélníku čtverec, zbude nám obdélník, který je opět zlatým. Koeficient podobnosti mezi původním a nově vzniklým menším obdélníkem je  $\varphi$ . Tento postup můžeme opakovat v podstatě do nekonečna, stále nám budou vznikat podobné zlaté obdélníky s rozměry násobků  $\varphi$ .



Spojením předních rohů, popř. středů čtverců hladkou nepřerušenu křivkou získáme zlatou spirálu, která je velmi podobná spirále logaritmické.



### 2.3 Zlatý trojúhelník

Zlatým trojúhelníkem nazýváme takový rovnoramenný trojúhelník, pro který platí, že poměr délky ramene a základny se rovná číslu  $\varphi$ , úhly ležící při základně mají velikost  $72^\circ$  a úhel při vrcholu má velikost  $36^\circ$ .

### 2.4 Fibonacciho posloupnost

Uvažujme následující posloupnost: 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233,... Snadno zjistíme, že počínaje třetím členem, je každý následující člen součtem dvou předcházejících. Tato posloupnost byla první známou rekurzivní posloupností v Evropě. Posloupnost nazval francouzský matematik Edouard Lucas Fibonacciho posloupností. V roce 1634 byl pro Fibonacciho posloupnost matematikem Albertem Girardem zaveden zápis:

## INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

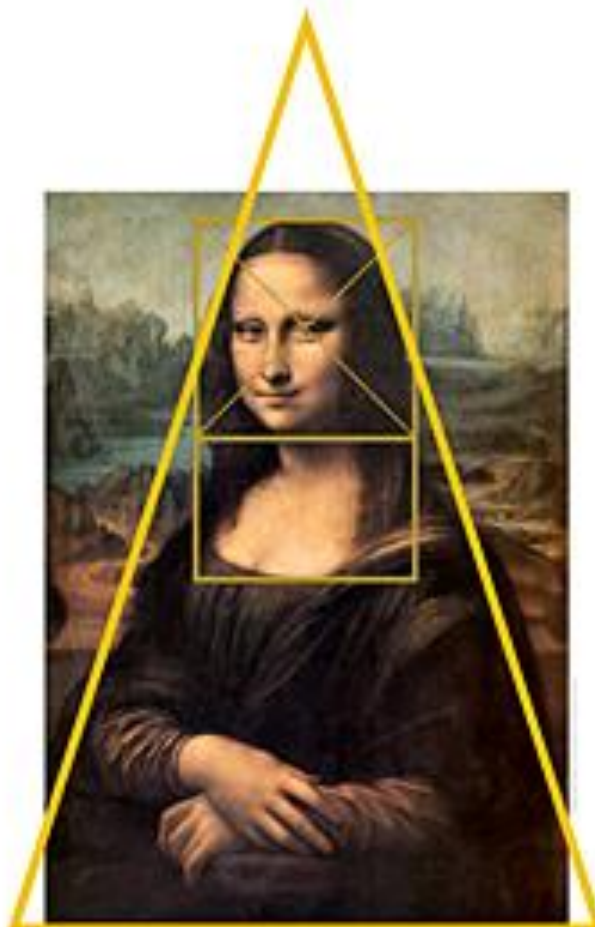
$$F_{n+2} = F_{n+1} + F_n.$$

Jedna ze zajímavých vlastností Fibonacciho posloupnosti, kterou objevil Johannes Kepler, se týká druhých mocnin čísel náležejících posloupnosti. Druhá mocnina kteréhokoli jejího členu se liší nanejvýš o jedničku od součinu dvou členů, které sousedí s umocňovaným číslem. Vezmeme-li například šestý člen posloupnosti – číslo 8 – potom jeho druhá mocnina je rovna 64;  $8^2 = 64$ . Součin jeho okolních členů je  $5 \cdot 13 = 65$ . Tento postup bychom mohli opakovat pro libovolný člen Fibonacciho posloupnosti se stejným výsledkem.

Proslulost Fibonacciho posloupnosti tkví ve skutečnosti, že její stopy můžeme nalézt i v dalších přírodních úkazech. Například světelné paprsky se při průchodu skleněnými deskami v podstatě řídí Fibonacciho posloupností. Nejznámějším příkladem přírodního úkazu, který lze Fibonacciho čísla popsat, je způsob růstu listů na rostlinách. Přechod od jednoho listu ke druhému má charakter šroubovitého výstupu a jejich rozmístění odpovídá právě číslům Fibonacciho posloupnosti. Totéž platí i pro uspořádání šupin borové šišky, semínek slunečnic a šupin ananasu, ty vyrůstají ve spirálách po směru a proti směru hodinových ručiček, jejich počty odpovídají výše uvedeným číslům. Dalším velmi známým příkladem jsou ulity měkkýšů, např. loděnky. Jestliže porovnáme průměr dvou sousedních spirál (které kopírují zlatou spirálu), dostaneme opět Fibonacciho čísla a průměr mezi nimi blíží se číslu 1,618.

### 3 Závěr

Na závěr ukažme na jednom příkladu užití zlatého řezu v malířství. Nejznámějším dílem Leonarda da Vinci dílem je portrét Mona Lisa. O tom, že portrét je umístěn do trojúhelníkové (nebo pyramidové) kompozice není sporu. Kolem postavy lze sestrojít zlatý trojúhelník. Dále lze nakreslit zlatý obdélník, který ohraničí oblast od vrcholku hlavy až po živůtek, a v jeho horní části vytvořit čtverec. Pokud se podíváme na obraz poprvé, zřejmě utkvíme pohledem v levém oku modelu. Toto oko nazýváme „dominantním okem“ a leží v průsečíku úhlopříček čtverce vzniklého ve výše popsaném zlatém obdélníku. Všechny předchozí konstrukce ukazuje následující obrázek.



#### 4 Použitá literatura

VRÁTNÍKOVÁ, K. Krása skrytá v číslech. Práce SOČ 2008

<http://www.volny.cz/zlaty.rez/>

#### 5 Kontakt na autora

PaedDr. Josef Kubeš

Gymnázium, Plzeň, Mikulášské nám. 23

[Josef.Kubes@mikulasske.cz](mailto:Josef.Kubes@mikulasske.cz)



## FYZIKÁLNÍ KEMP 2012

### Diferenciální rovnice vedoucí k exponenciální závislosti veličin

Petr Mazanec

#### 1. Úvod

V přednášce bylo ukázáno několik příkladů fyzikálních dějů s exponenciální závislostí.

#### 2. Stat'

Příklad 1 (teplotní délková roztažnost tyče)

Odvoďte závislost délky  $l$  tyče na její teplotě  $t$ , jestliže při teplotě  $t_0$  má tyč délku  $l_0$ .

Řešení:

Změna délky tyče  $\Delta l$  je přímo úměrná změně teploty  $\Delta t$  a původní délce tyče  $l$ .

$$\Delta l = \alpha l \Delta t$$

Koeficient přímé úměrnosti  $\alpha$  je součinitel teplotní délkové roztažnosti materiálu tyče.

Tento vztah platí pro malé změny obou veličin ( $\Delta l \rightarrow 0$  a  $\Delta t \rightarrow 0$ ). V tomto případě můžeme změny nahradit diferenciály a dostaneme diferenciální rovnici, kterou vyřešíme separací proměnných a dvěma určitými integrály:

$$dl = \alpha \cdot l \cdot dt$$

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

$$\int_{l_0}^l \frac{dl}{l} = \alpha \cdot \int_{t_0}^t dt$$

$$[\ln l]_{l_0}^l = \alpha \cdot [t]_{t_0}^t$$

$$\ln l - \ln l_0 = \alpha(t - t_0) = \alpha \Delta t$$

$$\ln \left( \frac{l}{l_0} \right) = \alpha \Delta t = x$$

Veličina  $x$  je bezrozměrná veličina.

$$\frac{l}{l_0} = e^x$$

Hledaná závislost tedy je exponenciální a rostoucí (tyč se při zahřívání prodlužuje a při ochlazení zkracuje).

$$l = l_0 \cdot e^x = l_0 \cdot e^{\alpha \Delta t}$$

Součinitel  $\alpha \approx 10^{-5} K^{-1}$  a pro  $\Delta t = \Delta T \in \langle -100K; +100K \rangle$  je  $x \in \langle -0,001; 0,001 \rangle$ .

Protože je  $x \rightarrow 0$ , bude platit velmi dobře i původní rovnice pro změny

$$\Delta l = l - l_0 \quad a \quad \Delta t = t - t_0$$

$$l - l_0 = \alpha l_0 \Delta t$$

Úpravou dostaneme jednoduchý vztah lineární

$$l = l_0 \cdot (1 + \alpha \Delta t) = l_0 \cdot (1 + x)$$

Porovnáním přesné exponenciální a přibližné lineární závislosti dostáváme

$$e^x \approx 1 + x \quad \text{pro } x \rightarrow 0$$

Přímka o rovnici  $y = 1 + x$  je tečnou exponenciální křivky  $y = e^x$  v bodě  $x = 0$ .

Kvádr má při teplotě  $t_0$  objem  $V_0 = a_0 b_0 c_0$ . Potom při teplotě  $t$  má objem

$$V = abc = a_0 \cdot e^x \cdot b_0 \cdot e^x \cdot c_0 \cdot e^x = V_0 \cdot e^{3x}$$

$$V = V_0 \cdot e^{3\alpha\Delta t} = V_0 \cdot e^{\beta\Delta t} \quad \beta = 3\alpha$$

Pro malé teplotní změny objemu můžeme odvodit jednodušší vztah:

$$e^{3x} = (e^x)^3 \approx (1 + x)^3 = 1 + 3x + 3x^2 + x^3 \approx 1 + 3x$$

Vyšší mocniny  $x$  můžeme zanedbat ( $x \rightarrow 0 \Rightarrow x^2 \rightarrow 0 \Rightarrow x^3 \rightarrow 0$ ).

Přímka o rovnici  $y = 1 + 3x$  je tečnou exponenciální křivky  $y = e^{3x}$  v bodě  $x = 0$ .

Tyto dva výsledky jdou zobecnit na větu:

Přímka o rovnici  $y = 1 + kx$  je tečnou exponenciální křivky  $y = e^{kx}$  v bodě  $x = 0$ .

$$e^{kx} \approx 1 + kx \quad \text{pro } x \rightarrow 0 \text{ a pro } k \in \mathbb{R}$$

Pro malá  $x$  tedy platí:

$$V = v_0 \cdot (1 + \beta \Delta t) \quad \beta = 3\alpha$$

### Příklad 2 (radioaktivní rozpad jader atomů)

Odvoďte závislost počtu nerozpadlých jader  $N$  radioaktivního materiálu na čase  $t$ , jestliže na začátku pozorování v čase  $t = 0$  byl počet nerozpadlých jader ve vzorku  $N_0$  a poločas rozpadu je  $T$ .

**Řešení:**

Za poločas rozpadu klesne původní počet jader na poloviční počet, protože druhá polovina jader se rozpadla rozpadem  $\alpha$  nebo  $\beta$ . Potom platí:

$$t = 0 \rightarrow N = N_0$$

$$t = T \rightarrow N = \frac{N_0}{2}$$

$$t = 2T \rightarrow N = \frac{N_0}{4}$$

$$t = 3T \rightarrow N = \frac{N_0}{8}$$

$$t = kT \quad \Rightarrow \quad N = \frac{N_0}{2^k} = N_0 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^k = N_0 \cdot 2^{-k} \quad k = \frac{t}{T}$$

Po dosazení dostaneme zákon radioaktivního rozpadu:

$$N = N_0 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{T}} = N_0 \cdot 2^{-\frac{t}{T}}$$

Počet nerozpadlých jader exponenciálně klesá s časem. Počet rozpadlých jader  $x$  v čase  $t$  je  $x = N_0 - N = -\Delta N$ .

Ted' odvodíme stejný zákon řešením diferenciální rovnice. Počet  $x$  rozpadlých jader za malý časový interval  $\Delta t$  je přímo úměrný původnímu počtu jader a délce časového intervalu.

$$x = -\Delta N = \lambda \cdot N \cdot \Delta t$$

$\lambda$  je rozpadová konstanta radionuklidu.

Tento vztah opět platí pro malé změny obou veličin ( $\Delta N \rightarrow 0$  a  $\Delta t \rightarrow 0$ ). V tomto případě můžeme změny nahradit diferenciály a dostaneme diferenciální rovnici, kterou vyřešíme separací proměnných a dvěma určitými integrály:

$$dN = -\lambda \cdot N \cdot dt$$

$$\int_{N_0}^N \frac{dN}{N} = -\lambda \cdot \int_0^t dt$$

$$[\ln N]_{N_0}^N = -\lambda \cdot [t]_0^t$$

$$\ln \left( \frac{N}{N_0} \right) = -\lambda t = -x$$

$$N = N_0 \cdot e^{-x} = N_0 \cdot e^{-\lambda t}$$

Dostali jsme vyjádření rozpadového zákona pomocí přirozené exponenciální funkce.

Platí tedy exponenciální rovnost pro  $t > 0$ .

$$N_0 \cdot 2^{-\frac{t}{T}} = N_0 \cdot e^{-\lambda t}$$

$$2^{-\frac{t}{T}} = e^{-\lambda t}$$

Obě strany rovnosti zlogaritmujeme přirozeným logaritmem:

$$\ln\left(2^{-\frac{t}{T}}\right) = \ln(e^{-\lambda t})$$

$$-\frac{t}{T} \cdot \ln 2 = -\lambda t$$

$$\lambda = \frac{\ln 2}{T}$$

Úpravou jsme dostali vztah mezi poločasem rozpadu a rozpadovou konstantou.

$$\text{Závěr: } N = N_0 \cdot 2^{-\frac{t}{T}} = N_0 \cdot e^{-\lambda t} \quad \lambda = \frac{\ln 2}{T}$$

### 3. Závěr

Na příkladech teplotní roztažnosti a radioaktivního rozpadu jsme ukázali rostoucí a klesající exponenciální závislost mezi fyzikálními veličinami a řešení diferenciální rovnice  $dy = k \cdot y \cdot dt$  separací proměnných.



INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

**Použitá literatura:**

časopis Kvant, číslo 12, ročník 1972

**Kontakt na autora:**

Mgr. Petr Mazanec

Gymnázium Plzeň, Mikulášské nám. 23

[pmazanec@mikulasske.cz](mailto:pmazanec@mikulasske.cz)

## EPR PARADOX

Robert KUNESCH

### 1 Úvod

Hlavním úkolem či cílem úvodu přednášky je motivování studentů k danému tématu. Účastníci kempu nejsou ještě obeznámeni s konkrétními problémy kvantové fyziky, ale znají základní pojmy a jsou proto je možné pokusit se na základě těchto pojmů o vysvětlení některých základních zákonitostí, specifik a zajímavostí kvantové mechaniky

### 2 EPR paradox

Přednáška, doprovázená prezentací začíná poznatky o rozdílnosti a odlišnostech makro a mikrosvěta. Studenti jsou dotazováni na dosud nabyté vědomosti v dosavadní výuce fyziky i na vlastní zkušenosti v dané problematice.

Je nutné osvětlit v krátkosti některé v prezentaci používané pojmy.

#### 2.1 Vysvětlení pojmů

Filmové ukázky a doktor Quantum pomohou studentům pochopit, co je to Matrix, dualismus částic při ohybu na štěrbině a hlavně co to jsou kvantově korelované fotonové páry.

#### 2.2 Alain Aspect experiment

V roce 1982 na universitě v Paříži provedl výzkumný tým vedený fyzikem A. Aspectem experiment, který aspiroval na jeden z nejvýznamnějších experimentů století. Část vědecké veřejnosti věří, že jeho objev může změnit tvář vědy. Studenti budou seznámeni s principem tohoto experimentu

#### 2.3 Einsteinův postulát

Studenti si zopakují znalosti ohledně rychlosti světla a obeznámí se během prezentace s problémy, kterými tento Einsteinův postulát procházel v průběhu minulého století. Ať to byla kodaňská interpretace kvantové mechaniky, samotný EPR paradox, Bellovi nerovnosti či experiment týmu Alaina Aspecta.

### 3 Závěr





INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Postuláty kvantové mechaniky jsou neslučitelné se speciální teorií relativity nebo kvantová mechanika není kompletní. To je vedle nově zavedených pojmů závěr, který by si měli studenti z přednášky odnést. Jako možná budoucí fyziky je posluchače možno motivovat ke snaze o možnost budoucího bádání dosud nepoznaného.

#### **4 Použitá literatura**

RADOMÍR KUČHTA - Kvantová teorie - přednášky, pracovní verze

#### **5 Kontakt na autora**

Robert Kunesch, Mgr.

OF KMT FPE ZČU

kotal@kmt.zcu.cz

## FYZIKA V POHÁDKÁCH

Karel RAUNER

### 1 Úvod

Zájem o studium fyziky vykazuje celosvětově klesající tendenci, což je v rozporu s potřebami hospodářství. Cílem přednášky je ukázat všudypřítomnost fyziky a její spojení i s tak zdánlivě odtažitým tématem, jakým jsou pohádky. Dalším cílem je ukázka humoru ve fyzice a představení numerického způsobu řešení fyzikálních problémů.

### 2 Fyzika v pohádkách

V přednášce jsou rozebrány možnosti řešení čtyř příhod z filmových pohádek Mrazík, Tři oříšky pro Popelku a Císařův pekař, Pekařův císař. První scénou, která je fyzikálně řešena je vrh svislý vzhůru v nehomogenním gravitačním poli. Jde o scénu, ve které Ivan vyhazuje klacky loupežníků, aby o několik měsíců později spadly na totéž místo.

Druhá scéna, rovněž z filmu Mrazík ukazuje tři možná fyzikální řešení scény, ve které Nastěnka vrací slunce za obzor, aby stačila doplést punčochu.

Třetí scéna z dvojfilmu Císařův pekař – Pekařův císař vysvětluje fyzikální řešení výroby zlata z olova, kterou předvádí alchymista v podání Josefa Kemra.

Čtvrtá scéna z filmu Tři oříšky pro Popelku je situací, ve které Popelka škrábe jinovatku z okna tanečního sálu. Fyzikální chybou je, že jinovatka je na vnější straně oken.

#### 2.1 Vrh svislý vzhůru v nehomogenním gravitačním poli

Ve známé scéně vyhazuje Ivan klacky loupežníků. Nejprve jeden, pak dva, nakonec čtyři najednou. Klacky nepadají a Ivan na otázku odpovídá: „Počkejte do zimy, spadnou“. V další scéně klacky padají na hlavy loupežníků (vedlejší zajímavostí je, že jich není sedm ale deset) ve vhodné chvíli, ve které jsou Nastěnka i Ivan zajati loupežníky.

Na základě obecně známých scén je sestaven fyzikální příklad: Jakou rychlostí musí být vyhozeny klacky, aby na 56. stupni severní šířky a v nadmořské výšce 200 metrů dopadly za 200 dnů. Středoškolské řešení pomocí známých vzorců pro vrh svislý vzhůru v homogenním tíhovém poli přináší nesmyslnou hodnotu: rychlost 86 400 km/s. Je tady zjevný rozpor s hodnotou druhé kosmické rychlosti, nad kterou by se klacky nevrátily nikdy.

Následně je sestavena diferenciální rovnice pro pohyb nehomogenním tíhovém poli, ve které se využívá gravitačního zákona. Po převodu gravitační konstanty a hmotnosti Země na tíhové zrychlení je převedena rovnice do integrodiferenciálního tvaru pro rychlost a je stručně vysvětlen její význam. Rovnice se převede do rekurentního vztahu pomocí jedнокrokové Eulerovy metody. Jsou nalezeny

## INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

vstupní hodnoty: tíhové zrychlení  $9,815\ 83\ \text{m/s}^2$  a vzdálenost od středu Země  $6\ 375\ 000\ \text{m}$ . Počítačové řešení hledá první hodnotu rychlosti, která je nulové nebo záporná. Při vstupní hodnotě počáteční rychlosti se tak nalezne doba letu vzhůru, která je požadována 100 dní. Postupně se upravuje vkládaná počáteční rychlost, až se dosáhne požadované doby. Originalita počítačového řešení je v proměnném kroku integrace, který je zpočátku  $200\ \mu\text{s}$ , na konci asi 100 s. Nalezená potřebná rychlost je  $11\ 174,823\ 7\ \text{m/s}$ . Citlivost na přesnost je taková, že kdyby se 7 na konci změnila na 6, klacky by dopadly o 5 minut dříve. Kontrolou přesnosti výpočtu je ověření druhé kosmické rychlosti. Ta pro dané místo vychází neuvěřitelně přesně: teoreticky  $11\ 187,13\ \text{m/s}$ , výpočtem  $11\ 187,12\ \text{m/s}$ .

Následně je vypočítána i „ukrutná“ síla, kterou musí Ivan působit na klacky:  $1,2\ \text{GN}$  a ještě neuvěřitelnější výkon:  $7 \cdot 10^{12}\ \text{W}$ .

Na závěr jsou konstatovány nedostatky idealizovaného výpočtu: ve vzduchu by klacky při dané rychlosti shořely, Země se otáčí, muselo by se proto počítat i s Coriolisovou silou a synchronizací s rotační periodou a klacky se dostanou až do vzdálenosti 2,88 milionu km od Země, kde již na klacky mohou působit další tělesa sluneční soustavy. Protože by klacky stejnou rychlostí dopadaly, nedá se očekávat, že loupežníci po dopadu budou pouze kroutit očima, ale zbyl by po nich poměrně velký kráter.

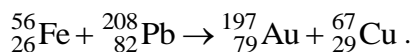
## 2.2 Pohyb těles ve sluneční soustavě, refrakce

V další známé scéně prosí Nastěnka slunce, aby zašlo za obzor, protože potřebuje doplést punčochu, aby ji macecha nevytrhala vlasy. Je představeno jedno z možných řešení: zastavit rotaci Země, roztočit ji opačným směrem (z filmové ukázky plyne, že úhlová rychlost musí být 42krát větší než obvyklá hodnota), opět ji zastavit a znovu roztočit do původního směru původní rychlostí. I když celková bilance energie je nulová, musíme někde vzít energii k roztočení Země 42krát větší rychlostí. Tato energie je obudná:  $3,8 \cdot 10^{32}\ \text{J}$ . Dále jsou fyzikálně diskutovány problémy se zachováním momentu hybnosti a s unášivou rychlostí, která překonává rychlost únikovou. Je konstatováno, že takovýto krok by znamenal zkázu lidstva. Dále je diskutována možnost posunu Slunce. Bohužel vychází potřebná rychlost přesunu větší než rychlost světla ve vakuu. Ani třikrát pomalejší posunutí nepřináší řešení: potřebná energie by vyžadovala anihilovat pětinu Slunce.

Třetí představené řešení je nejpřijatelnější. Dalo by se využít refrakce, která způsobuje, že vlivem lomu v atmosféře vidíme slunce o několik minut dříve, než je geometricky nad obzorem. Stačilo by v trajektorii lomeného paprsku odstranit vzduch a slunce by nebylo vidět. Na 56 stupni s. š. by tak slunce vyšlo o 5 minut později.

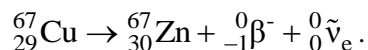
## 2.3 Výroba zlata jadernou reakcí železa a olova

Alchymistická metoda popsána ve filmu Císařův pekař – Pekařův císař představuje výrobu zlata bušením železné palice do oloveného bloku. Fyzikální možností je jaderná reakce



## INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Je zjištěno, že tato energie je exoenergetická, vedlejším produktem by proto mohla být energie. Dalším vedlejším produktem je měď, která je však nepříjemně radioaktivní. S poměrně krátkým poločasem se však přeměňuje na stabilní zinek:



Dále je vypočítána rychlost, kterou by musela mít železná palice, aby dostala atomy železa a zlata do vzdálenosti, na které již působí jaderné síly. Vychází obrovská rychlost 30 000 km/s. Dále jsou navržena řešení problému atmosféry a radioaktivity mědi. Bohužel se taková výroba zlata ukazuje nemožná, neboť vypočítaná energie palice dosahuje při potřebné rychlosti energie dvacetinásobku jaderné pumy svržené na Hirošimu.

## 2.4 Vztah rosného bodu, relativní vlhkosti a teploty

Hrubou fyzikální chybou filmu Tři oříšky pro Popelku je to, že Popelka po příchodu k budově, ve které se koná ples, škrábe a dýchá na jinovatku, která je na okně zvenku. Na základě diagramu mezi teplotou, relativní vlhkostí a rosným bodem je dokázáno, že pokud venku bylo  $-5\text{ °C}$  a 50% relativní vlhkost, muselo být v sále maximálně  $-15\text{ °C}$ . Není pravděpodobné, že by plesové šaty mohly při této teplotě ochránit účastníky před omrzlinami.

## 3 Závěr

Přednáška byla připravena pro všechny účastníky fyzikálního kempu. Kromě úkolů představených v úvodu byli účastníci seznámeni i s matematickými metodami při řešení reálných fyzikálních příkladů, byla jim stručně vysvětlena derivace, integrace a numerické řešení diferenciální rovnice.

## 4 Použitá literatura

ALEXANDR ROU, Mrazík, film, Sovětský Svaz, 1964

MARTIN FRIC, Císařův pekař – Pekařův císař, film, ČSR, 1951

VÁCLAV VOŘÍŠEK, Tři oříšky pro Popelku, film, ČSSR, 1973

## 5 Kontakt na autora

doc. Dr. Ing. Karel Rauner

Fakulta pedagogická Západočeská univerzita v Plzni

[rauner@kmt.zcu.cz](mailto:rauner@kmt.zcu.cz)

## FYZIKÁLNÍ ODHAD A NĚKTERÉ PARADOXNÍ PŘÍPADY

Karel RAUNER

sylabus přednášky

Karel Rauner

### 1 Úvod

Přednáška je zaměřena na pěstování fyzikálního odhadu i v případech, kdy nás mohou smysly a „zdravý lidský rozum“ zklamat.

### 2 Chybné odhady způsobené smyslově nepostřehnutelnými rozměry

V první části přednášky jsou demonstrovány případy nespolehlivosti lidských smyslů: jsou představeny některé základní optické klamy a vysvětlen původ chybných závěrů.

Druhá část je věnována problémům s fyzikálními odhady v případě smyslově nepostřehnutelných rozměrů. Na modelech je demonstrována všeobecně mylná představa o rozměrech těles v sluneční soustavě a jejich vzdálenostech, podobně je demonstrován smysly neuchopitelný rozměr naší Galaxie. Ve světě extrémně malých rozměrů je ukázána obrovská velikost Avogadrova čísla a obrovská koncentrace volných elektronů v kovech. Druhý příklad vede na neočekávaně malou rychlost, kterou se translačně pohybují elektrony ve vodičích při vedení elektrického proudu. Další ukázky z této oblasti chybných odhadů: Jak dlouho by trval pád Měsíce na Zemi, kdyby se Měsíc zastavil, jakou hmotnost má krychlový milimetr neutronové hvězdy.

### 3 Chybné odhady způsobené chybně interpretovaným objemem

Třetí část ukazuje neschopnost lidského mozku odhadnout objemy těles, které rostou s třetí mocninou rozměru. Jako příklad je uveden odhad doby, za kterou by vytekl krychlový kilometr vody, bude-li vytékat každou sekundu 1 litr.

### 4 Vliv rotace Země a jejího tvaru

Velmi mnoho chybných odhadů je založeno na tom, že Země je rotující soustava (kolem osy a kolem Slunce). Posluchači jsou vyzváni k následujícím úvahám: jak vypadá zatmění Měsíce Slunce pozorované z přivrácené a odvrácené strany Měsíce, možnost pozorování východu Země na Měsíci,. Další dotazy jsou směřovány na počet oběhů Měsíce kolem Země za jeden rok, na počet východů Měsíce nad obzor za jeden rok.

Odhady vyžadované v páté části, která vyhodnocuje kulatý tvar Země, jsou: Na které světové straně vychází Slunce na jižní polokouli, Kde je Slunce v poledne v jižní Africe, Na které světové

## INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

straně vychází Slunce na severním pólu, Kde na Zemi ukazuje kompas oběma konci na sever, Kde všude na Zemi ukazuje kompas severním pólem na jih, Kde všude na Zemi je někdy vidět slunce na severu.

### 5 Nelineární závislosti

Šestá část je věnována nelineárním závislostem a nelinearitě zpravování fyzikálních veličin lidskými smysly.

### 6 Chybné odhady v neinerciálních soustavách

V další části je ukázáno, jak chybě člověk vnímá souvislost trajektorie a působící síly. Jsou rovněž probrány problémy s přímočarými a křivočarými pohyby včetně působení zdánlivých sil. Chybné odhady se vyskytují i u řešení některých problémů v neinerciálních soustavách, hlavně v soustavách rotujících.

### 7 Použitá literatura

HALLIDAY, DAVID; RESNICK, ROBERT; WALKER, JEARL; MUSILOVÁ, JANA; OBDRŽÁLEK, JAN; DUB, PETR. Fyzika: vysokoškolská učebnice obecné fyziky. Část 1, Mechanika. Brno: VUTIM, 2000. ISBN 80-214-1868-0.

HALLIDAY, DAVID; RESNICK, ROBERT; WALKER, JEARL; OBDRŽÁLEK, JAN; DUB, PETR. Fyzika: vysokoškolská učebnice obecné fyziky. Část 2, Mechanika - Termodynamika. Brno : VUTIM, 2000. ISBN 80-214-1868-0.

HALLIDAY, DAVID; RESNICK, ROBERT; WALKER, JEARL; ŠTRUNC, MARIAN; OBDRŽÁLEK, JAN; DUB, PETR. Fyzika: vysokoškolská učebnice obecné fyziky. Část 3, Elektřina a magnetismus. Brno: VUTIM, 2000. ISBN 80-214-1868-0.

HALLIDAY, DAVID; RESNICK, ROBERT; WALKER, JEARL; KOMRŠKA, JIŘÍ; OBDRŽÁLEK, JAN; DUB, PETR. Fyzika: vysokoškolská učebnice obecné fyziky. Část 4, Elektromagnetické vlny - Optika - Relativita. Brno: VUTIM, 2001. ISBN 80-214-1868-0.

### 8 Kontakt na autora

doc. Dr. Ing. Karel Rauner

Fakulta pedagogická Západočeská univerzita v Plzni

[rauner@kmt.zcu.cz](mailto:rauner@kmt.zcu.cz)

## Chemie ve fyzice aneb fyzika v chemii I

Václav Soukup

### 1 Úvod

Jen málokdy se v současnosti setkáme s „čistou“ fyzikou. Ani ve fyzikální ani ve školní praxi se neobejdeme bez vnímání mezioborových souvislostí fyziky s matematikou, astronomií, technikou a také s chemií. Znalost fyzikálních zákonů umožňuje efektivně řešit problémy chemie, orientace v problematice chemie umožňuje vysvětlit řadu jevů navenek fyzikálních.

### 2

#### Stavba atomu

Při výuce fyziky se setkáváme s problematikou stavby atomu velmi záhy, v prvních náznacích již v primě, na nejvyšší úrovni pak v oktávě. V průběhu gymnaziálního studia používáme jednotlivé modely atomu podle jejich schopnosti vysvětlit daný jev a podle rozumové úrovně žáků. Nejmenší problémy jsou s chápáním stavby jádra: protonovo-neutronová struktura (pokud ji vůbec musíme zmiňovat) nečiní žádné potíže ani při výkladu ani žákům a to ani při vysvětlování vzniku radioaktivního záření přeměnou protonu a neutronu s vyzařením neutrina a antineutrina.

Složitější situace nastává v souvislosti s elektronovým obalem. V různých fázích výkladu fyziky využíváme různé (mnohdy překonané) modely elektronového obalu podle jejich schopnosti vysvětlit určitý jev. Stále velmi frekventovaný je planetární model (s různými, většinou neúspěšnými pokusy „vpašovat“ do něj prvky kvantově mechanického modelu). Planetární model umožňuje vysvětlit rozdělení atomu na obal a jádro, nulový náboj atomu, vznik iontů a velikost jejich náboje, nabíjení a vybíjení těles, ionizaci plynů, vedení elektrického proudu v látkách. S aplikací Bohrova modelu uspějeme při vysvětlení vzniku spekter prvků.

Při zkoumání vlastností a struktury molekul, krystalů a vazeb v nich je nutné pracovat se základními poznatky kvantově mechanického modelu atomu. Důležitou pomůckou i pro fyzika by měla být periodická soustava prvků.

Dmitrij Ivanovič Mendělejev je objevitelem periodického zákona z roku 1869. Vlastnosti prvků a jejich sloučenin jsou periodicky závislé na jejich relativní atomové hmotnosti. Rozpor: K (39,09), Ar (39,94).

Tabulka byla neúplná, obsahovala 63 tehdy známých prvků. Mendělejev vynechal místa pro předpovězené prvky, u 10 z nich stanovil předem jejich vlastnosti. K nejslavnějším objevům předpovězených prvků patřil objev eka-aluminia (Ga), eka-boru (Sc) a zejména eka-silicia (Ge), jehož vlastnostem Mendělejev věnoval nejvíce pozornosti. Germanium objevil roku 1886 Clemens Winkler při analýze nerostu argyroditu. Objev germania se stal triumfem periodického zákona.



## INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Současná formulace: Vlastnosti prvků a jejich sloučenin jsou periodicky závislé na protonovém čísle (počtu elektronů v obalu).

Periodicita vlastností je důsledkem periodicity stavby elektronového obalu (valenčních elektronů).

Příčinou rozdílných formulací je stav tehdejšího poznání. Atomy byly vnímány jako nedělitelné částice a jedinou jejich charakteristikou byla relativní atomová hmotnost. Ke zpřesnění mohlo dojít až v souvislosti s rozpoznáním struktury atomu a jejich zákonitostí (elektron objeven 1897).

Současný tvar periodické soustavy odráží kvantově-mechanický model atomu.

Polovodiče.

Jedním z témat, která navazují úzce na chemii je vysvětlení vodivosti polovodičů. Jako polovodiče lze označit prvky, které se nacházejí ve střední části PSP, jsou přechodem mezi kovy a nekovy (kovalentní vazba). Fyzikálně mají daleko blíže k izolantům, většina jejich valenčních elektronů je vázána ve vazbách. Dodáním energie se z nich mohou snadno uvolnit a způsobovat vedení el. proudu (polovodiče s vlastní vodivostí - s teplotou roste jejich vodivost).

Ještě snazší je uvolnit elektron, který ve vazbě vůbec není (příměsová vodivost typu N, do krystalu Si atomy prvku z 5. skupiny PSP), nebo naopak ve struktuře chybí (příměsová vodivost typu P, do krystalu Si atomy prvku ze 3. skupiny PSP).

El. proud v kapalinách

Vedení el proudu v kapalinách a plynech je založeno na tvorbě a pohybu iontů v elektrickém poli. Ionty v kapalných vodičích (elektrolytech) vznikají disociací sloučenin iontového charakteru v polárních rozpouštědlech. Zpětnému spojování iontů brání jejich solvatace (obklopení molekulami rozpouštědla). Ionty putují roztokem vlivem elektrických sil, na elektrodách se vybíjí.

Na katodě probíhá redukce  $X^{\square+} + \square e \rightarrow X$

na anodě oxidace  $Y^{\square-} \rightarrow Y + \square e$

Přítom dochází

- k vylučování látek (usazování kovů na elektrodě, uvolňování plynů). Reakci s elektrodami zabráníme chemicky málo reaktivním materiálem elektrod (uhlík, platina).
- k reakci s elektrodou
- reakci s elektrolytem

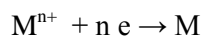
Galvanické články:

Původně stejné elektrody (např. C) se v průběhu elektrolýzy pokrývají vrstvou produktů elektrolýzy a vzniká galvanický článek (polarizace elektrod). Opačná polarita vůči vnějšímu zdroji způsobuje, že proud elektrolytem prochází až po zvýšení vnějšího napětí nad napětí rozkladné. Jevu se využívá při nabíjení článků a akumulátorů.

Galvanické články vznikají též jako kombinace dvou různých elektrod a elektrolytu. Velikost napětí je určena rozdílem potenciálů elektrod.

## INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Ponoříme-li kov do roztoku jeho soli, dochází vytváření rovnováhy mezi elektrodou a ionty kovu v roztoku.



Děje probíhají u kovů různě ochotně. Čím probíhá snáze první reakce, je kov je méně ušlechtilý. U ušlechtilých kovů naopak převažuje reakce druhá. Schopnost odevzdávat elektrony je vyjádřena postavením v Beketovově řadě kovů, zleva doprava klesá a číselně je vyjádřena standardním elektrodovým potenciálem.

### 3 Závěr

Z výše uvedeného rozboru vyplývá, že fyzika a chemie jsou související obory, které si navzájem pomáhají v řešení základních otázek souvisejících s procesy kolem nás.

### 4 Použitá literatura

Příspěvek byl připraven na základě znalostí a vlastního studia autora. Nejsou v něm citace s žádné publikace.

### 5 Kontakt na autora

RNDr. Václav Soukup

Masarykovo gymnázium, Plzeň

E-mail: [soukupnez@seznam.cz](mailto:soukupnez@seznam.cz)

## Chemie ve fyzice aneb fyzika v chemii II

Václav Soukup

### 1 Úvod

Teoretické poznatky ukazující souvislost fyziky a chemie v řadě jevů lze doložit i experimenty.

### 2

Spektroskopie:

Struktura elektronového obalu se promítá do struktury spektra.

Základní princip: Rozklad světla vycházející z kahanu (výbojové trubice) spektroskopem, identifikace prvků podle tabulky spekter. Využití při chemické analýze látek.

Provedení: Spektroskop upevníme do stojanu do výšky nesvítivého plamene kahanu. Vyžítáme platinový drátek - ve spektroskopu pozorujeme spojité spektrum.

Nabereme na drátek sůl Na, Li, Ca vneseme do plamene. Ve spektroskopu pozorujeme soustavu spektrálních čar. Porovnáme s tabulkou spekter.

Spojení principů vedení elektrického proudu v látkách se stanovením složení roztoků.

Základní princip: Titrace, při které je měřena vodivost roztoku (procházející proud) v závislosti na průběhu reakce a z této závislosti je určen bod ekvivalence.

Provedení: Neutralizace  $\text{Ba}(\text{OH})_2$  pomocí  $\text{H}_2\text{SO}_4$ . Na začátku reakce velká vodivost (značné množství iontů), postupnou reakcí ubývání iontů, v bodu ekvivalence minimum, pak nárůst (ionty z nadbytečné  $\text{H}_2\text{SO}_4$ ).

Galvanické články:

a) Sestavte elektrický obvod ze stejnosměrného zdroje, roztoku NaCl, do kterého jsou ponořeny dvě uhlíkové elektrody a ampérmetru. Po uzavření obvodu nechte dvě minuty protékat proud. Pokuste se určit produkty elektrolýzy. Rozpojte obvod a k elektrodám připojte voltmetr. Proč ukazuje napětí?

b) Sestavte galvanické články z měděné, zinkové a železné elektrody a síranů měďnatého, zinečnatého a železnatého. Roztoky propojte solným můstkem. Změřte napětí článků a porovnejte s tabulkovými hodnotami redoxních potenciálů.

Fyzikálně-chemické výpočty:

1. Určete molární hmotnost plynu, který má při teplotě 27 °C a tlaku  $10^5$  Pa hustotu  $0,64 \text{ kg/m}^3$ .
2. Jaký objem bude mít vodní pára vzniklá při výbuchu 1 g vodíku při tlaku  $10^5$  Pa a teplotě 627 °C?
3. Určete mřížkový parametr niklu v jeho plošně centrované kubické mřížce, je-li jeho hustota  $8900 \text{ kg/m}^3$  a relativní atomová hmotnost je 58,7.
4. Určete jaká energie je třeba na výrobu 1 t hliníku z  $\text{Al}_2\text{O}_3$  elektrolýzou taveniny, je-li na elektrodách napětí 12 V a relativní atomová hmotnost hliníku je 27.
5. Jaké napětí na elektrodách způsobí samostatný výboj v plynu, je-li vzdálenost elektrod 10 cm, ionizační energie plynu jsou 2 eV a střední volná dráha 10mm?

### 3 Závěr

Provedené experimenty ukazují, že existuje řada situací, kdy chemik může čerpat ze znalostí fyzikálních jevů a naopak.

### 4 Použitá literatura

Příspěvek byl připraven na základě znalostí a vlastního studia autora. Nejsou v něm citace s žádné publikace.

### 5 Kontakt na autora

RNDr. Václav Soukup

Masarykovo gymnázium, Plzeň

E-mail: [soukupnez@seznam.cz](mailto:soukupnez@seznam.cz)

## JAK NÁS OKO KLAME

Jitka PROKŠOVÁ

### 1 Úvodní poznámky

Úvodem se přednáška zabývá obecnými poznatky o lidském oku a průchodem světla částmi oka. Důraz je kladen na odlišnost optických prostředí, rozebírá se jejich index lomu a další vlastnosti.

### 2 Optické klamy

Účastníci kempu (studenti SŠ různých ročníků) jsou vyzváni, aby vysvětlili, co je světlo. Jejich pohled na tuto problematiku ovlivňuje dosavadní výuka fyziky i vlastní zkušenosti. Podobně je to s jejich znalostí problematiky optických iluzí.

Lidské oko pro nás představuje nejdůležitější optickou soustavu, v jistých případech však může interpretovat pozorované jevy mylně. Při zpracování vjemu mozkiem pak dochází k závěrům, které neodpovídají skutečnosti. Tyto zvláštní zrakové vjemy bývají souhrnně označovány jako optické klamy. Podle příčiny jejich vzniku je lze rozdělit na klamy objektivní, fyziologické a psychologické.

#### 2.1 Objektivní optické klamy

Do první skupiny, tj. mezi klamy **objektivní**, řadíme ty, které jsou vyvolány lomem a odrazem světla v atmosféře, jejíž hustota se spojitě mění. Jedná se tedy většinou o jevy tzv. atmosférické optiky, mezi které patří např. *astronomická* či *terestrická refrakce*. (1)

#### 2.2 Fyziologické klamy

Do druhé skupiny **fyziologických** klamů patří klamy z iradiace, trvání vjemu a z kontrastu. Na vybraných obrázcích i experimentech jsou studentům prokázány jevy, které vznikají v důsledku nedokonalosti lidského oka. (2)

#### 2.3 Psychologické klamy

Do třetí skupiny tzv. **psychologických** klamů patří například klamy odhadu vzdálenosti a velikosti úhlů. Tyto klamy většinou vznikají z řady psychologických příčin při pozorování stejných předmětů z téže vzdálenosti a při stejném zorném úhlu. Všechny zmíněné jevy jsou demonstrovány ukázkami. (1)

## INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

V posledních letech se s optickými klamy můžeme setkat nejen v běžném životě – např. v podobě řady atmosférických jevů, ale mnohdy upoutají i jako zajímavé logo značkových výrobků. Proto jsou závěrem přednášky naznačeny i možnosti využití optických klamů. (2)

### 3 Závěr

Cílem přednášky je seznámit účastníky kempu s vlastnostmi a fyzikální i biologickou podstatou světelných jevů, které vyvolávají optickou iluzi. Výklad doprovázejí konkrétní příklady a vybrané demonstrace optických klamů.

### 4 Použitá literatura

- (1) FUKA, B., HAVELKA, F.: Optika a atomová fyzika I. Optika, SPN Praha 1961.
- (2) MALÝ, P.: Optika, Nakladatelství Karolinum Praha 2008.

### 5 Kontakt na autora

Jitka Prokšová, RNDr. Ph.D.

OF KMT FPE ZČU

proksovj@kmt.zcu.cz

## JAK VYUŽÍT DATA Z ASTRONOMICKÝCH KATALOGŮ?

Ota KÉHAR

Ve svém příspěvku představím zajímavé možnosti využití katalogů astronomických objektů, které jsou dostupné na stránkách Astronomia (astronomia.zcu.cz). Budeme se zabývat tvorbou a prací s Hertzsprungovými-Russellovými diagramy. Podíváme se i na seznam očíslovaných planetek, na kterém lze demonstrovat aktuální polohy těles ve sluneční soustavě, sestavit graf s Kirkwoodovými mezerami nebo interaktivně ověřit jednotlivé Keplerovy zákony. Pro zobrazení průběhu Slunce pod obzorem během noci bude představena aplikace, na které je možné vysvětlit význam jednotlivých soumraků, východ a západ Slunce. Pro konkrétní okamžik lze najít seznam nejjasnějších hvězd, viditelnost souhvězdí nad obzorem či informace o viditelnosti Messierových a NGC objektů.

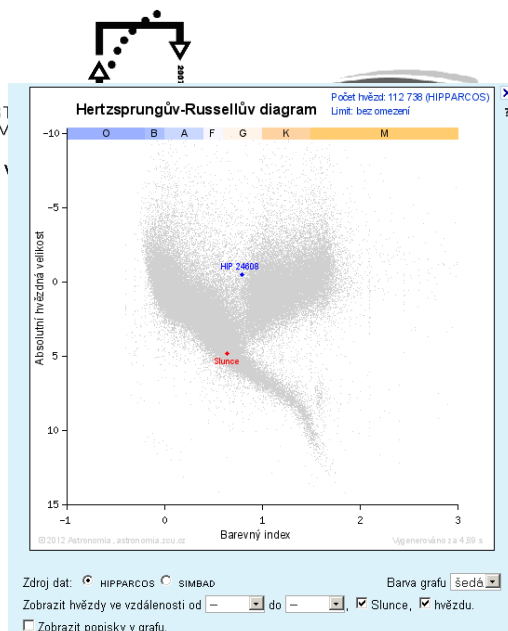
### Astronomia

Webové stránky Astronomia jsou multimediální učební text, který je v provozu již od roku 2000 za postupného přispění několika grantů v rámci Fondu rozvoje vysokých škol. Nejdříve vznikla v podobě statických stránek část věnující se sluneční soustavě. O dva roky později k nim přibyly galaxie včetně mlhovin a hvězdokup. V roce 2005 jsme vytvořili první verzi redakčního systému nasazeném na třetí projekt – hvězdy. V roce 2009 jsme redakční systém vylepšili do podoby odpovídající současným trendům a přibyl zatím poslední projekt – astronomická fotografie. Od roku 2005 jsou nedílnou součástí, a dalo by se říci, že neviditelným pátým projektem, katalogy astronomických objektů. V katalogích je ukryto téměř 600 tisíc objektů v celkovém objemu 172 MB dat. Samotné katalogy jde rozdělit do tří kategorií – tzv. deep-sky objekty (mlhoviny, hvězdokupy, galaxie) se nacházející hned ve třech katalogích – NGC katalog, Messierův katalog a IC katalog. Další oblasti jsou hvězdy, zde máme seznam souhvězdí (známe jich 88), katalog Gliese (obsahuje 3 803 nejbližších hvězd), katalog Hipparcos (118 218 hvězd) a část francouzské astronomické databáze SIMBAD (118 171 hvězd). Do poslední kategorie katalogů – planety jsou zahrnuty planetky (v době psaní článku obsahuje katalog přes 337 tisíc planetek) a katalog exoplanet, tedy planet nacházejících se u jiných hvězd. Aby nedocházelo k zastarávání údajů, jsou některé katalogy pravidelně (denně, týdně či měsíčně) aktualizovány z důvěryhodných zdrojů se souhlasem jejich autorů, např. exoplanety z exoplanet.eu, databáze SIMBAD přímo z francouzského zdroje a planetky z Minor Planet Center.

Jistě by byla škoda, aby tato data ležela na stránkách nebo v databázích jen tak bez užitku a povšimnutí. Pojdme se v rychlosti podívat, jaké možnosti nám současná výpočetní technika z pohledu uživatele nabízí. Detailní popis, který ale naleznete u každé představené aplikace, by byl nad rámec tohoto článku.

## HR diagram přímo generovaný z katalogu hvězd

Hertzsprungův-Russellův (HR) diagram je generován z katalogů hvězd HIPPARCOS nebo SIMBAD. Pro lepší orientaci v diagramu je určeno zobrazení popisků jednotlivých oblastí (hlavní posloupnost, bílí trpaslíci a další). Počet hvězd použitých pro vytvoření diagramu lze omezit jejich vzdáleností. Je zajímavé porovnat diagramy blízkých a vzdálených hvězd. Vyzkoušejte si pro blízké hvězdy zadat omezení do 100 pc (326 světelných let) a u vzdálených hvězd interval od 100 pc do 400 pc. Proč se diagramy liší? Vysvětlení nalezneme ve výběrovém efektu, u diagramu vzdálených hvězd totiž chybí oblast slabých hvězd. Ve větších vzdálenostech nejsme schopni detekovat slabé hvězdy, naopak objevíme větší množství hvězdných obrů a velmi jasných hvězd. U hvězdné velikosti platí, že čím jasnější objekt, tím menší hodnota, všimněte si opačného měřítka u svislé osy. Absolutní hvězdná velikost je veličina určující hvězdnou velikost (jasnost hvězdy na obloze) vztahenou na standardní pozorovací podmínky (hvězda ve vzdálenosti 10 pc). Barevný index je rozdíl hvězdných velikostí ve vybraných spektrálních intervalech.



### ANALÝZA PLANETEK

Katalogové číslo: 588 – 333 412

Min: 1      Max: 333 841  
**Rok objevu:** 1906 – 2010

Min: 1801      Max: 2011  
**Velká poloosa:** 4,9 AU – 5,4 AU

Min: 0,8 AU      Max: 857,8 AU      Max: 857,8 AU  
**Výstřednost dráhy:** 0,0 – 0,3

Min: 0,0      Max: 1,0  
**Sklon dráhy k ekliptice:** 0,1° – 55,5°

Min: 0,0°      Max: 170,4°  
**Absolutní hvězdná velikost:** 7,2 mag – 14,9 mag

Min: -1,2 mag      Max: 24,2 mag

**Typ planetky..** (zaškrtnout vše / odškrtnout vše) ..rozbalit/sbalit..

<input type="checkbox"/> blízkozemní planetky (NEO)	<input type="checkbox"/> planety hlavního pásu	<input checked="" type="checkbox"/> <b>trojáni</b>
<input type="checkbox"/> NEO větší než 1 km	<input type="checkbox"/> Hungaria	<input type="checkbox"/> kentauri
<input type="checkbox"/> potenciálně nebezpečné planetky (PHA)	<input type="checkbox"/> Phocaea	<input type="checkbox"/> plutina
<input type="checkbox"/> Aten	<input type="checkbox"/> Hilda	<input type="checkbox"/> kubewana
<input type="checkbox"/> Apollo	<input type="checkbox"/> peňhel < 1,381 AU	<input type="checkbox"/> jiné rezonanční TNO
<input type="checkbox"/> Amor		<input type="checkbox"/> objekty rozptýleného disku (SDO)

**Export dat..** ..rozbalit/sbalit..

2 977

(počet nalezených planetek)

nejsme schopni detekovat slabé hvězdy, naopak objevíme větší množství hvězdných obrů a velmi jasných hvězd. U hvězdné velikosti platí, že čím jasnější objekt, tím menší hodnota, všimněte si opačného měřítka u svislé osy. Absolutní hvězdná velikost je veličina určující hvězdnou velikost (jasnost hvězdy na obloze) vztahenou na standardní pozorovací podmínky (hvězda ve vzdálenosti 10 pc). Barevný index je rozdíl hvězdných velikostí ve vybraných spektrálních intervalech.

### Analýza parametrů planetek

Seznam očíslovaných planetek umožňuje interaktivní analýzu několika parametrů. Vybraným posuvníkem omezíme množinu planetek. Při zvolení

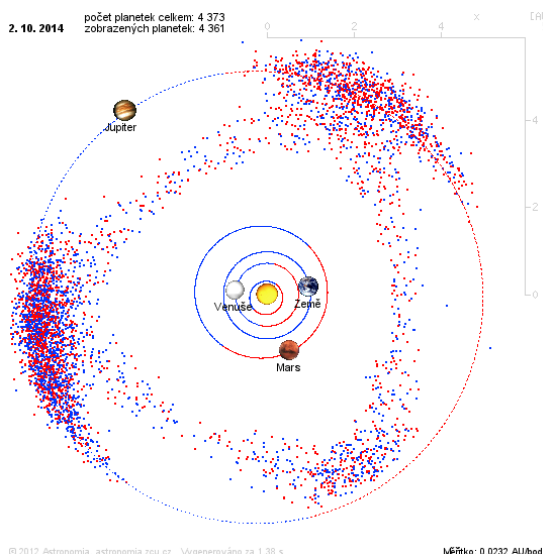
typu planetky ze seznamu se posuvníky u jednotlivých parametrů nastaví podle vybraného typu. Tím jsme schopni zjistit spoustu informací o dané skupině planetek: označení a rok objevu první planetky této skupiny, interval velké poloosy, výstřednost dráhy nebo sklon drah k ekliptice. Pomocí absolutní hvězdné velikosti odhadneme rozměry planetek. Získaný seznam planetek můžeme uložit do textového souboru a dále zpracovávat.

Více na <http://astronomia.zcu.cz/planety/planetky/2381-analyza-planetek>

### Aktuální polohy planetek ve sluneční soustavě

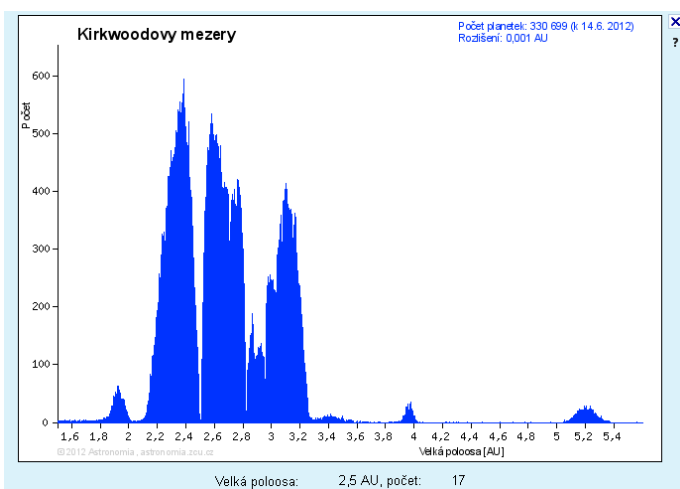


INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ



Kromě textového výstupu lze u výše uvedené analýzy parametrů planetek zvolit u některých speciálních případů grafického výstupu (ve formátu PNG). Na obrázku vlevo je ukázka aktuální polohy vybraných skupin planetek v rovině ekliptiky. Zajímavé zobrazení představují planetky skupin Trojané a Hilda. Jedná se o planetky, jejichž trajektorie je ovlivněna gravitačními účinky planety Jupiter. Jsou to dva případy, kdy dráhová rezonance vede k vytvoření stabilní skupiny planetek. Dlouhodobé rozdělení planetek skupiny Hilda v prostoru tvoří přibližně tvar rovnostranného trojúhelníku. Vrcholy trojúhelníka leží na trajektorii Jupiteru v libračních centrech  $L_3$ ,  $L_4$  a  $L_5$ . V libračních centrech  $L_4$  a  $L_5$  jsou Trojané.

**Kirkwoodovy mezery**



Speciálním grafickým (ale i textovým) výstupem analýzy parametrů planetek jsou Kirkwoodovy mezery, což jsou mezery nebo poklesy v rozdělení (četnosti) hlavního pásu planetek na velké poloose (nebo oběžné době). Poprvé si tohoto uspořádání planetek všiml americký astronom Daniel Kirkwood již v roce 1857, kdy bylo známo okolo 50 planetek. První oficiální zveřejnění objevu bylo až v roce 1866 (na setkání Americké společnosti pro pokrok vědy); na konci tohoto roku bylo známo 91 planetek.

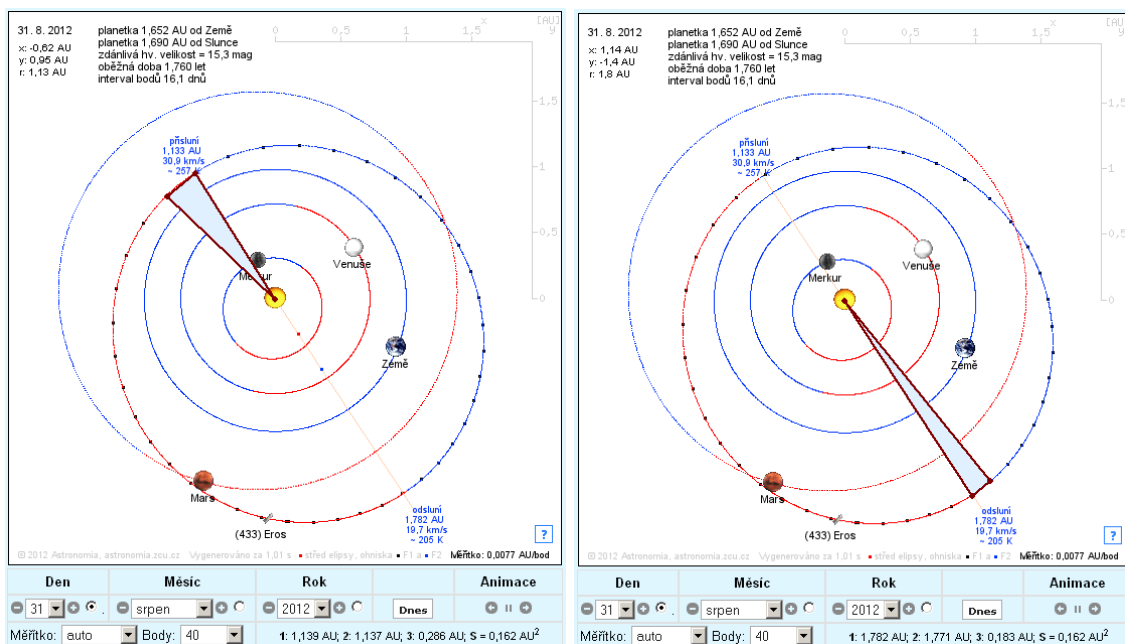
Nerovnoměrnosti v rozdělení oběžných drah planetek zaregistroval i brněnský rodák Karel Hornstein. Sami si můžete pomoci této aplikace vyzkoušet, jak vypadalo rozdělení planetek v době, kdy Daniel Kirkwood objevil vliv Jupiteru na rozložení planetek ve sluneční soustavě. Stačí omezit rok objevu na 1801 až 1857 (potažmo 1866). Pro zobrazení Kirkwoodových mezer je vhodné nastavit interval velké poloosy na hodnoty 2,0 až 3,5 AU. Tím se zobrazí rozložení četnosti planetek hlavního pásu. Pokud zobrazíme interval od 1,4 do 5,4 AU, lze si všimnout několika zajímavých lokálních maxim: okolo 1,93 AU se nachází skupina Hungaria, okolo 3,9 AU vytváří zajímavý obrazec v prostoru skupina Hilda (viz graf Aktuální polohy), která souvisí s rezonancí 2:3 s Jupiterem. A konečně okolo 5,2 AU najdeme samotnou planetu Jupiter a v libračních centrech  $L_4$  a  $L_5$  se nacházejí Trojané.

**Poloha planetky a ověření Keplerových zákonů**

Na obrázcích níže je v základním nastavení znázorněna aktuální poloha vybrané planetky ve sluneční soustavě v rovině ekliptiky. V této ukázce se jedná o blízkozemní planetku (433)

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Eros, lze ale vybrat libovolnou očíslovanou planetku. Měřítka je zvoleno automaticky podle vzdálenosti planetky v odsluní tak, aby se celá trajektorie planetky vykreslila a optimálně vyplnila plochu obrázku. Je vykreslena i poloha (včetně trajektorií) planet sluneční soustavy. Polohu těles ve sluneční soustavě lze vykreslit i pro jiné datum. U přísluní a odsluní se zobrazuje vzdálenost planetky od Slunce, její rychlost, odhad efektivní teploty rovnovážného záření planetky a zdánlivé hvězdné velikosti.



Aplikace nám umožňuje demonstrovat a ověřovat platnost Keplerových zákonů.

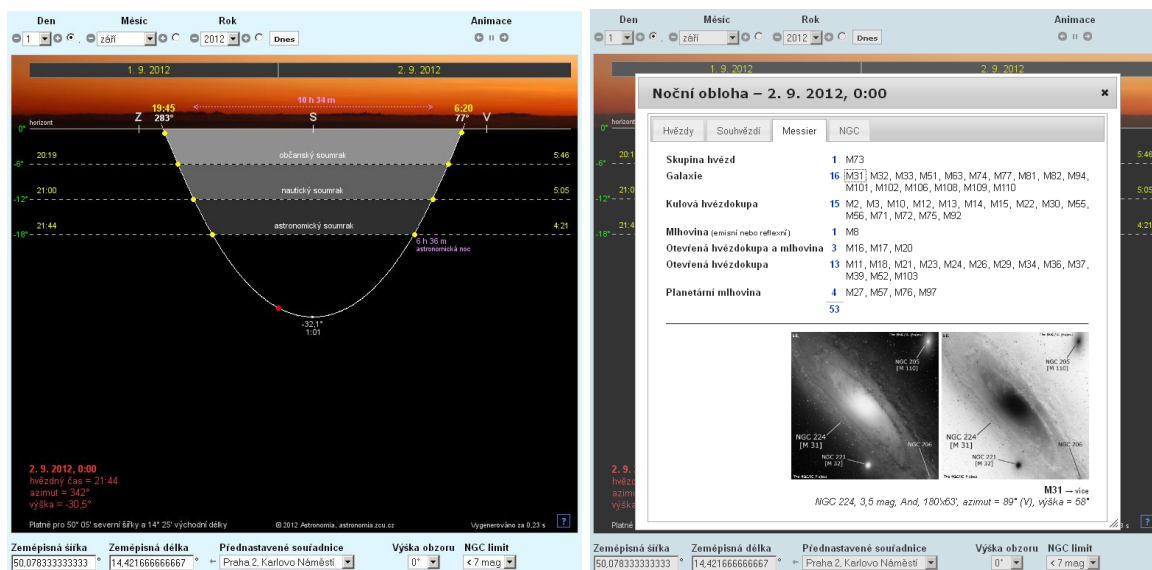
Pro první Keplerův zákon jsou důležité trajektorie planetky, poloha Slunce ve společném ohnisku, případně vyznačení středu elipsy. Vyznačena je poloha přísluní a odsluní. Druhý Keplerův zákon se někdy označuje jako zákon ploch. Průvodič za stejnou dobu opíše plochu se stejným obsahem. Trajektorie je rozdělena na zvolený počet stejně dlouhých časových úseků. Kliknutím se vybere příslušný bod. Zobrazí se úsečka spojující ohnisko a vybraný bod společně s informací o délce úsečky v prostoru v AU. Výběrem dalšího bodu se dokreslí trojúhelník a vypočítá jeho plocha. Na obrázku vlevo je znázorněna situace v přísluní, vpravo v odsluní. Porovnáním zjistíme, že vypočítaná plocha je stejná. Výpočet plochy nezohledňuje zakřivení trajektorie planetky, pokud je časový interval příliš velký, může dojít k nepřesnostem. Pro třetí Keplerův zákon zjistíme hodnotu velké poloosy jako polovinu součtu vzdáleností planetky v přísluní a odsluní. Pak můžeme vypočítat oběžnou dobu planetky a porovnat ji s údaji, které jsou uvedeny v levém rohu na obrázku.

Více na <http://astronomia.zcu.cz/planety/planetka-433>

### Noční obloha

Na levém obrázku je bílou nepřerušovanou čarou zobrazen průběh Slunce na zvoleném místě od západu Slunce v daný den po východ Slunce následujícího dne. Vypočítány jsou další časové údaje – západ, východ Slunce, okamžiky jednotlivých soumraků. Pro konkrétní okamžik lze najít seznam nejjasnějších hvězd, viditelnost souhvězdí nad obzorem či informace o viditelnosti Messierových a NGC objektů.

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ



Na obrázku vpravo je seznam Messierových objektů viditelných nad obzorem. Jsou rozděleny do skupin podle typu objektu. Kliknutím na název dojde k načtení obrázků daného objektu s doplňujícími informacemi (aktuální výška nad obzorem a azimut). Věděli jste například, že souhvězdí Velké Medvědice nepatří v našich zeměpisných šířkách mezi cirkumpolární souhvězdí? Nezapadá totiž jen 88 % tohoto souhvězdí.

Více na <http://astronomia.zcu.cz/hvezdy/hipparcos/2382-nocni-obloha>

### Ukázka praktické úlohy

Planetka (15925) Rokycany je pojmenována podle města Rokycany, kde se nachází Hvězdárna v Rokycanech. Na hvězdárně je od roku 2008 dalekohled s objektivem o průměru 508 mm. Pokud by se planetka nacházela v opozici, je v dosahu rokycanského dalekohledu? Limitní hvězdnou velikost dalekohledu lze vypočítat – 15,8 mag. Zdánlivou hvězdnou velikost planetky v opozici zjistíme velmi snadno na adrese <http://astronomia.zcu.cz/planety/planetka-15925> (planetka se nachází poblíž opozice např. 12. července 2012). Odpověď na otázku nechám na každém z vás.

Jakékoli zkušenosti, připomínky, nápady nebo podněty s výše uvedenými aplikacemi sdělte autorovi článku. Budu vám za ně vděčný.

### Použitá literatura

[1] *Multimediální učební text Astronomia* [online]. c2012, [citováno 7. 9. 2012]. Dostupné z <http://astronomia.zcu.cz>

### Kontakt na autora

PhDr. Ing. Ota Kéhar



INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Oddělení fyziky Katedry matematiky, fyziky a technické výchovy, Fakulta pedagogická, Západočeská univerzita v Plzni

[kehar@kmt.zcu.cz](mailto:kehar@kmt.zcu.cz)

## Keplerovy zákony

Zuzana SUKOVÁ

### 1 Úvod

Naším domovem je planeta Země, ale budeme moci na ní žít věčně? A kde bychom mohli najít nový domov? Jaké zákonitosti musí splňovat těleso ve sluneční soustavě, aby mohlo existovat po delší dobu a mohlo být obyvatelné? Projekt předkládá žákům problém a jejich úkolem je navrhnout náš nový domov.

### 2 Možný zánik Země a řešení v podobě nového objektu

Země je pro nás domovem, ale možná si budeme muset v budoucnu hledat jiný obyvatelný svět. Důvodem může být přelidněnost naší planety nebo její zničení. Zasažení obřím meteoritem je lákavé pro tvůrce filmů, ale katastrofa obdobná té, která se podílela na vymření dinosaurů, je přeci reálná. Jednou možná bude lidstvo stát před otázkou, na jaké místo se přesunout. (Grygar 1994)

Ne každé těleso naší sluneční soustavy ale může být obydleno. Byla by potřebná dostatečná hmotnost k udržení atmosféry, pevný povrch a raději bychom měli hledat dál od Slunce, aby nás nemohlo zničit, až bude ve fázi červeného obra. Všechno může splňovat například uměle vytvořený měsíc planety Jupiter.

#### 2.1 Obyvatelný měsíc

Žáci dostanou za úkol navrhnout parametry uměle vytvořeného obyvatelného měsíce Jupitera tak, aby byly zachovány základní podmínky pro život. Kromě navrhování jména a délky dne musí žáci prokázat a použít i fyzikální znalosti Keplerových zákonů. Eliptičnost dráhy volí pomocí numerické excentricity a dobu oběhu počítají s využitím 3. Keplerova zákona. Vzdálenost od Jupitera si volí sami, ale kvůli značné radioaktivitě v blízkosti planety je vhodné umístit ji až za dráhu jeho měsíce Ganymeda. (Bednařík 1993)

Naopak při volbě hmotnosti a poloměru musí být dodržen pevný povrch a přijatelné tíhové zrychlení.

#### 2.2 Presentování

Během projektu si žáci uvědomí provázanost jednotlivých veličin a při presentování svých výsledků zdůvodní všechny hodnoty. Výsledkem každého týmu je ucelená prezentace, o které diskutují s ostatními a snaží se je přesvědčit o výhodách jimi navržených parametrů. (Tomková 2009)

### 3 Závěr

Při projektu dosáhneme u žáků větší motivace, protože jim předkládáme reálný problém, a zároveň jsou více aktivní, protože se jedná o jejich práci, kterou budou následně prezentovat. Týmová práce a propojení učiva fyziky s informatikou (hledání informací na internetu a zpracování prezentace) pomáhá naplňovat klíčové kompetence.

### 4 Použitá literatura

BEDNAŘÍK, M., BUJOK, P., ŠIROKÁ, M. Fyzika pro gymnázia – Mechanika. 1. vyd. Praha: Prometheus, 1993. kap. 5 Gravitační pole, s. 135-173. ISBN 80-901619-3-1.

GRYGAR, J. K riziku srážky Země s kometou či planetkou. Vesmír [online]. 1994, roč. 73, č. 6, [cit. 28. 8. 2012]. Dostupné na internetu: <<http://www.vesmir.cz/clanek/k-riziku-srazky-zeme-s-kometou-ci-planetkou>>.

73, 329, 1994/6

TOMKOVÁ, A., KAŠOVÁ, J., DVOŘÁKOVÁ, M. Učíme v projektech. 1. vyd. Praha: Portál, 2009. 173 s. ISBN 978-80-7367-527-1.

### 5 Kontakt na autora

PhDr. Zuzana Suková

ZČU, FPE, katedra matematiky, fyziky a technické výchovy, Klatovská 51, Plzeň

Email: [zsukova@kmt.zcu.cz](mailto:zsukova@kmt.zcu.cz)

## Mayský kalendář a konec světa

Zuzana SUKOVÁ

### 1 Úvod

Média na nás chrlí informace o blížícím se konci světa 21. 12. 2012, ale z čeho usuzují, že se blíží poslední den lidstva? Protože tímto dnem končí mayský kalendář? Ale je tomu skutečně tak? A jak vůbec kalendář Mayů vypadal, fungoval a k čemu sloužil?

### 2 Mayský kalendář

S blížícím se datem 21. prosince 2012 se stále častěji setkáváme s informací o konci světa, před kterým nás údajně varuje mayské proroctví. O tom, že v tento den má skončit kalendář starověkých Mayů, jistě ví každý, ale co známe o jejich vyspělé civilizaci? A z jakých písemných pramenů usuzujeme na konec světa?

#### 2.1 Kdo byli Mayové

Mayové jsou původní obyvatelé jižního Mexika a severní části střední Ameriky. Území mayské civilizace osídlené početnými mayskými národy se rozprostíralo v celé dnešní Guatemale, celém Belize, severozápadním Hondurasu, v mexických státech Yucatán, Quintana Roo, Campeche, Chiapas a na východě mexického státu Tabasco. O prvních Mayích můžeme podle posledního výzkumu mluvit už asi od roku 2500 př. n. l., čili přibližně s výskytem prvního zemědělství. Největší rozkvět zaznamenala říše v 7. – 9. stol. n. l. Roku 1520 přišli 1. dobyvatelé, okolo roku 1550 dobyli Španělé většinu mayského území (Petén až roku 1697). Dobývání trvalo velmi dlouho, protože zejména severní Mayové byli ještě stále vyspělí.

Mayské písmo bylo jediné opravdové písmo v celé Americe, zachovalo se zejména na stélách popisujících občanské události a zaznamenávajících kalendářní a astronomické údaje. Bohužel ze všech knih přežily jen čtyři tzv. kodexy. Měli jednoduchou číselnou soustavu, její základ tvořilo dvacet číslic. Navíc v matematice používali nulu, kterou v té době v Evropě neznali. Také astronomie byla velmi vyspělá, kněží velmi pravděpodobně věděli, že Země je kulatá, analyzovali dráhy měsíců Jupitera, znali cykly oběhu Měsíce, Venuše, spočítali tropický a hvězdný rok.

Právě na základě velmi precizních astronomických pozorování vznikl jejich kalendář. Mayský kalendář byl nejsložitějším v celé Americe, byl přesnější než náš dnešní kalendář a měli dokonce speciální název (alautun) pro období dlouhé 63 081 429 let.

Vyspělost civilizace lze usuzovat i z jiných zdrojů – stavěli dálkové cesty přes džungli, vysušovali močály, stavěli podzemní nádrže na vodu a především umělecky hodnotné pyramidy, paláce a města.



## 2.2 Mayské kalendáře

Nejvýznamnější skutečností mayského chápání světa je cykličnost (ty samé periody, stejné události, božstva a jejich rozhodnutí). Používali zejména 3 kalendáře – tzolkin, haab a dlouhý počet. Na konci některých period (např. při shodě tzolkinu a haabu) Mayové obětovali bohům.

Tzolkin kombinuje čísla 1 – 13 (měsíce) a 20 pojmenovaných dní. Rok měl tedy 260 dní a sloužil pouze pro sakrální potřeby. Haab obsahuje 18 měsíců po 20 dnech a přídavný měsíc o 5 bezejmenných nešťasných dnech. Vycházel tedy z tropického roku a měl 365 dní. Sloužil především pro sledování ročních období v zemědělství.

U dlouhého počtu (Long Count) jde o načítání dnů od prvního dne mayské chronologie v cyklu cca 5 125 let, tento kalendář, ze kterého je usuzováno na blížící se konec světa, se ale již v době příchodu Španělů dávno nepoužíval. (Vondrák 2010)

## 2.3 Konec světa?

Mayský kalendář neříká nic o konci světa. Apokalyptické předpovědi jsou mezi lidmi poměrně populární, hodně na ně slyší. Ale sami Mayové nepřikládali konci svého kalendáře smysl zániku světa, považovali jej za pouhý konec jednoho cyklu a začátek dalšího.

Jediný zdroj, který skutečně zmiňuje datum 13.0.0.0. 4 Ajaw 3 K'ank'in (21.12. 2012), je takzvaný „Monument 6“ z města Tortuguero. V 2. pol. 7. stol. n. l. tam vládl král Bahlam Ajaw, na jehož příkaz byl postaven chrám a do něho umístěna reliéfní deska, která popisuje jeho narození, korunovací a slavné skutky, včetně krvavých válek, které vedl, a lidí, které nechal obětovat. V závěru se zmiňuje, že na den 13.0.0.0. 4 Ajaw 3 K'ank'in sestoupí z nebes božstvo Bolon Yokte' a bude třeba je náležitě uctít. Reliéf je bohužel poškozen, takže přesně nevíme, co se stane. Nápis však působí dojmem, že chrám byl vystavěn k počtě tohoto nebezpečného boha a právě zde se mají v roce 2012 odehrát usmiřovací obřady, jejichž účelem je si Bolon Yokte'ho příznivě naklonit. Jestli Mayové čekali v souvislosti s jeho sestupem nějaké negativní události, nebyly ani zdaleka neodvratitelné. (Kostičová 2012)

## 3 Závěr

Dalším problémem je, že nevíme, od kterého data Mayové počítali dny. Proroctví o konci kalendáře dne 21. 12. 2012 používá přepočít Goodmana, Martíneze a Thompsona a je odvozen z historických událostí, ale v rozporu s datováním astronomických úkazů. Proto se v dnešní době stále více vědců přiklání k výsledkům českých bratří Bohumila a Vladimíra Böhmových, podle kterých by měl kalendář skončit až 14. 12. 2116. Jejich výpočtům odpovídá nejen datování historických událostí pomocí radiokarbonové metody, ale i vypočítaným slunečním zatměním. Přesto se ale nemusíme bát konce světa, stejně jako nenastal při přelomu našeho letopočtu. (Kyša 2010, Vondrák 2010)





INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

#### 4 Použitá literatura

KYŠA, L., LUKÁŠOVÁ, B. Konec mayského kalendáře v roce 2012? Omyl, tvrdí čeští badatelé [online]. 2010, [cit. 28. 8. 2012] Dostupné na internetu: <<http://tech.ihned.cz/c1-49065440-konec-mayskeho-kalendare-v-roce-2012-omyl-tvrdi-cesti-badatele>>.

KOSTIČOVÁ, Z. M. Co by řekli Mayové, kdybychom se jich zeptali na rok 2012 [online]. 2012, [cit. 28. 8. 2012] Dostupné na internetu: <<http://www.national-geographic.cz/detail/co-by-rekli-mayove-kdybychom-se-jich-zeptali-na-rok-2012-13749/>>.

VONDRÁK, J. Mayský kalendář a rok 2012 [online]. 2010, [cit. 28. 8. 2012] Dostupné na internetu: <<http://www.astro.cz/clanek/4378>>.

#### 5 Kontakt na autora

PhDr. Zuzana Suková

ZČU, FPE, katedra matematiky, fyziky a technické výchovy, Klatovská 51, Plzeň

Email: [zsukova@kmt.zcu.cz](mailto:zsukova@kmt.zcu.cz)

## MODELY ATOMU A ŘEŠENÍ VYBRANÝCH PŘÍKLADŮ

Karel RAUNER

### 1 Úvod

Modely atomu jsou v pohledu historického vývoje vzorovým příkladem na pokroky v poznávání reálného světa. Většina studentů a žáků má ale vlivem někdy až přehnané popularizace zkreslené představy o složení atomu.

### 2 Historie výzkumu atomu

V úvodu přednášky jsou zmíněny první filozofické úvahy starořeckých filozofů, které vedly k představě o existenci atomů jako základních částic hmoty, dále nedělitelných. Jsou představeni zástupci této hypotézy: Leukippos a Démokritos. Je zmíněno i odlišné chápání složení hmoty Aristotelem. Je popsán postup, kterým Joseph John Thomson vyvodil z pokusu s katodovým zářením existenci elektronu. Na základě toho je popsán pudinkový model atomu.

Ověření pudinkového modelu pokusy Rutherforda, Geigera a Marsdena je pudinkový model vyvrácen. V přednášce je uvedena animace Rutherfordova pokusu i animace vysvětlující odpuzování alfa částice a atomového jádra při těsném přiblížení. Je zformulován planetární model atomu. Jsou uvedeny některé poznatky a experimenty, které popírají možnost planetárního modelu. Třemi postuláty je formulován Bohrov model atomu a i u něj jsou zmíněny rozpory s experimenty. Zvláště je zdůrazněna neexistence orbitálního momentu hybnosti u atomu vodíku v základním stavu. Jsou představeny základní zákonitosti kvantově mechanického modelu – pravděpodobnostní charakter, vlnové vlastnosti mikročástic, kvantování energie a dalších fyzikálních veličin.

#### 2.1 Postup při výpočtech jednotlivých veličin u Rutherfordova modelu atomu

Jsou uvedeny základní zákony, kterým by se řídil elektron v izoelektronových atomech. Jsou to především Coulombův zákon silového působení dvou bodových nábojů, potenciální energie elektronu v poli jádra a její vztah k působící síle. Je uveden postup, kterým je možné vypočítat kinetickou energii za předpokladu, že Coulombova síla je silou dostředivou. Důležitý je vztah celkové energie a ionizační práce. Je popsán způsob výpočtu frekvence elektronu na dráze, která je určena ionizační prací. Na animaci je ukázán postup, jak odvodit vztah mezi vlnovou délkou, frekvencí a rychlostí šíření vlnění.

#### 2.2 Instruktažní příklad výpočtů v Rutherfordově modelu atomu vodíku v základním stavu

Teoretický postup z předchozího odstavce je konkretizován na jednoduchém příkladu s atomem vodíku v základním stavu. Je vypočítána působící síla, potenciální energie, kinetická energie, poloměr dráhy vycházející z ionizační práce 13,6 eV. Výsledek je ztotožněn s důležitou fyzikální konstantou –



## INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Bohrovým poloměrem. Dále je číselně vypočítána frekvence rotace elektronu v poli jádra. Je zmíněna důležitost korekce na pohyb jádra a s tím související objev deutéria.

### 3 Závěr

V závěru přednášky byly diskutovány některé problémy kvantové mechaniky související s pravděpodobnostním charakterem a vlnovými vlastnostmi – Schrödingerova kočka, tunelový jev, radioaktivní rozpad.

### 4 Použitá literatura

### 5 Kontakt na autora

doc. Dr. Ing. Karel Rauner

Fakulta pedagogická Západočeská univerzita v Plzni

[rauner@kmt.zcu.cz](mailto:rauner@kmt.zcu.cz)

# NEWTONŮV GRAVITAČNÍ ZÁKON

Miroslav RANDA

## 1. Úvod

Newtonův gravitační zákon a Keplerovy zákony, které jsou ekvivalentní Newtonovu gravitačnímu zákonu, jsou základními zákony, které popisují pohyb těles ve sluneční soustavě, ale také pohyby dvojhvězd a pohyby hvězd v galaxiích.

## 2 Využití Keplerových zákonů

Newtonův gravitační zákon a Keplerovy zákony umožňují určit základní charakteristiky pohybu těles sluneční soustavy, zejména planet, trpasličích planet, planetek a komet, ale rovněž pohyb měsíců a pohyb družic a sond.

Protože se uvedené zákony probírají obvykle až na střední škole, skládá se lekce ze dvou částí.

V první části jsou jmenované zákony podrobně prodebatovány včetně různých způsobů formulace zákonů, a to jak pro případ problému jednoho tělesa, tak i v případě problému dvou těles (využívaného například pro dvojhvězdy). Přitom je zvláštní pozornost věnována formulaci Keplerových zákonů v přirozených jednotkách pro tělesa sluneční soustavy (v astronomických jednotkách, rocích a hmotnostech Slunce).

Ve druhé části jsou řešeny úlohy z předchozích ročníků fyzikální a astronomické olympiády, dále úlohy ze sbírek úloh z astronomie a astrofyziky (Široký, Široká, 1973 a Štefl, Krtička, 2002) a ze studijních textů FO (Ungermann, Volf, 1985 a Volf, Jarešová, 2009). Jsou rovněž ukázány úlohy týkající se pádu v radiálním gravitačním poli Slunce a Země a ukázáno řešení takových úloh bez použití integrálního počtu, ale s využitím zákonů pro pohyb v gravitačním poli.

## 3. Použitá literatura

ŠIROKÝ, J., ŠIROKÁ, M. Základy astronomie v příkladech. 2. vyd. Praha: Státní pedagogické nakladatelství, 1973. 158 s.

ŠTEFL, V., KORČÁKOVÁ, D., KRTIČKA, J. Úlohy z astrofyziky. 1. vyd. Brno: Masarykova univerzita, 2002. 82 s.

UNGERMANN, Z., VOLF, I.: Pohyb tělesa v radiálním gravitačním poli. Praha: SPN, 1985.

VOLF, I., JAREŠOVÁ, M. Fyzika je kolem nás (Pohyby těles v planetární soustavě). 1. vyd. Hradec Králové. MAFY, 2009.



INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

#### 4. Kontakt na autora

Miroslav Randa

ZČU v Plzni

Email: [randam@kmt.zcu.cz](mailto:randam@kmt.zcu.cz)

## NOVÉ PRINCIPY ZOBRAZOVAČŮ

Karel RAUNER

sylabus přednášky

Karel Rauner

### 1 Úvod

Přednáška je zaměřena na představení a fyzikální podstatu nových zobrazovačů. Hlavní pozornost je přitom zaměřena na dnes velmi rozšířené obrazovky a monitory LCD a plasma.

V krátkém důvodu je definován zobrazovač a jejich dělení na pasivní a aktivní zobrazovače. Je nastíněn historický vývoj zobrazovačů až k před 15 lety dominujícímu typu CRT obrazovky.

### 2 Plasmová obrazovka a DMM

V další části jsou popsány základní principy, na kterých je založena plasmová obrazovka. Je popsána struktura pixelu, jsou uvedeny výhody i nevýhody tohoto zobrazovače.

Pozornost je věnována i špičkovému zařízení v projekčních přístrojích obvodu DMM. Je popsán systém mikrozrcadel i jejich natáčení. Jsou uvedeny frekvence a možné způsoby barevné projekce. Jsou porovnány rozlišovací schopnosti s projektory založenými na LCD.

### 3 Struktury LCD

Principům zobrazovačů na bázi kapalných krystalů je věnována další část. Je popsána základní buňka i struktura obrazovky. Opět jsou zdůrazněny výhody a nevýhody, hlavně v porovnání s plasmovou obrazovkou. Přednáška se věnuje i modernizaci tohoto zobrazovače použitím technologie TFT.

### 4 Zobrazovače OLED – s organickými svítivými diodami

Další část je věnována perspektivním zobrazovačům založeným na technologii organických svítivých diod – OLED. Jsou popsány principy a první projekty v oblasti televize, displejů na mobilních telefonech, fotoaparátech a tiskárnách. Je zdůrazněna výhoda – ultratenkého zobrazovače v několika použitích. Jsou zdůrazněny i nevýhody: menší životnost, velký pixel.

V závěru přednášky jsou zmíněny další možnosti vývoje: obrazovka se studeným plošným emitorem elektronů – SED a laserová televize.

### 5 Použitá literatura



## INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

STARKE, L.: Grosse Bildschirme ohne Röhren. Elektrotechnik (ch), 2002, č. 3, s. 57-61.

<http://www.ewh.ieee.org/soc/cpmt/presentations/cpmt0401a.pdf>

[http://eng.625-net.ru/content/2002\\_09/refl.htm](http://eng.625-net.ru/content/2002_09/refl.htm)

### **6 Kontakt na autora**

doc. Dr. Ing. Karel Rauner

Fakulta pedagogická Západočeská univerzita v Plzni

[rauner@kmt.zcu.cz](mailto:rauner@kmt.zcu.cz)

## Odhady vzdáleností v naší sluneční soustavě

Zuzana SUKOVÁ

### 1 Úvod

Naše sluneční soustava a naše Galaxie jsou veliké, ale měli bychom mít i představu, jak moc veliké jsou. Konkrétní rozměry můžeme snadno zjistit na internetu, ale i když známe vzdálenost ve vesmíru, tak si ji mnohdy nedokážeme představit. Jak velká by asi byla Země, kdybychom Pluto zmenšili na zrnko pepře?

### 2 Modely

Přednáška si klade za cíl přiblížit žákům rozměry nejen v naší sluneční soustavě pomocí názorných modelů.

#### 2.1 Model sluneční soustavy

Při pohledu na obrázky naší sluneční soustavy snadno můžeme dojít k závěru, že Slunce je sice větší než největší planeta, ale zase ne o tolik a mezi Zemí a ostatními planetami také není žádný propastný rozdíl. Ale jsou tyto obrázky ve správném měřítku? Zkusme si představit model, kde by trpasličí planeta Pluto byla veliká jen jako zrnko pepře. Žáci dostali právě takový úkol a pomocí kulatého koření, ovoce a zeleniny měli model vytvořit. Správných hodnot se po odhadnutí doberou výpočtem. Slunce by například mělo rozměry obří dýně. (Macháček 2008)

Když už máme model poměrů velikostí, zkusíme si nejprve odhadnout a pak i vypočítat, jak daleko od sebe je třeba jednotlivé objekty v modelu umístit. I tyto hodnoty jsou pro žáky často překvapivé, protože Pluto by od Slunce v modelu bylo vzdálené 6 km. (Macháček 2008)

Kdybychom naopak zmenšili celou naši sluneční soustavu až po dráhu Neptunu tak, aby se vešla na území města Prahy, mělo by Slunce v průměru pouhé 4 metry a Zemí bychom dokonce mohli přirovnat k vlašskému ořechu. Na celém území Prahy bychom tedy měli jen 9 větších objektů (planetky by měly zanedbatelné rozměry), z nichž největší by měl pouhé 4 metry.

#### 2.2 Jak daleko je ke hvězdám

Po Slunci nejbližší je nám hvězda Proxima Centauri, která je vzdálená jen 4,22 světelného roku. Myslím si ale, že toto číslo si většina nedokáže představit. Žáci dostanou proto za úkol vypočítat, jak dlouho by k ní běžel gepard rychlostí 100 km/h a jak dlouho by šel člověk rychlostí 4 km/h. Opět je překvapivé, že k naší po Slunci nejbližší hvězdě by člověk šel více než miliardu let, což znamená, že by se na cestu musel vydat jako jedna z prvních eukaryotních buněk. (Kéhar 2012)



### 2.3 Model naší Galaxie

Po seznámení se s tvarem naší Galaxie a jejími rozměry žáci opět vypočítávají rozměry modelu. Tentokrát si celou Galaxii můžeme velmi dobře přirovnat k CD disku, protože zatímco její průměr je 90 000 světelných let, tak její tloušťka v nejširším místě dosahuje pouhých 3 000 světelných let. (Kéhar 2012)

### 3 Závěr

Na čtyřech jednoduchých modelech si žáci mohli udělat alespoň částečnou představu o rozměrech v naší sluneční soustavě (2 modely) a blízkém vesmíru (vzdálenost Proximy Centauri a tvar Galaxie).

### 4 Použitá literatura

KÉHAR, O. Hvězdy v Galaxii [online]. 2012, [cit. 28. 8. 2012] Dostupné na internetu: <http://objekty.astro.cz/nase/2236-hvezdy-v-galaxii>.

MACHÁČEK, M.: Fyzika pro gymnázia – Astrofyzika. 3. vyd. Praha 2008, nakl. Prometheus, 143 s. ISBN 978-80-7196-376-9.

### 5 Kontakt na autora

PhDr. Zuzana Suková

ZČU, FPE, katedra matematiky, fyziky a technické výchovy, Klatovská 51, Plzeň

Email: [zsukova@kmt.zcu.cz](mailto:zsukova@kmt.zcu.cz)

# OHYBOVÉ JEVY

Jitka PROKŠOVÁ

## 1 Úvodní poznámky

Úvodem se přednáška zabývá obecnými poznatky z vlnové optiky, vlastnostmi elektromagnetických vln a matematickým popisem ohybu světla na překážce.

## 2 Kategorizace ohybových jevů

Účastníci kempu (studenti SŠ různých ročníků) jsou seznámeni se situacemi z běžného života, kde se s ohybem světla mohou setkat. Jejich pohled na tuto problematiku ovlivňuje dosavadní výuka fyziky i vlastní zkušenosti.

Zmíněné situace jsou porovnávány s ohybem zvukových vln, se kterými se v praxi setkávají studenti daleko častěji. Získají tedy představu o základních rozdílech mezi světelným a zvukovým vlněním.

### 2.1 Fresnelovy ohybové jevy

Do této skupiny řadíme jevy, které vyvolává průchod světla přes překážku ze zdroje v nekonečné vzdálenosti. Znamená to, že na štěrbinu, dvojštěrbinu nebo mřížku dopadá rovinná světelná vlna. Výsledkem podrobné analýzy je pak závislost intenzity světla na úhlu, pod kterým vzniká ohybový jev na stínítku. (1)

### 2.2 Fraunhoferovy ohybové jevy

Do druhé skupiny patří jevy, které vyvolává průchod světla přes překážku ze zdroje v konečné vzdálenosti. Znamená to, že na štěrbinu, kruhový otvor, hranu nebo další typy překážek dopadá kulová světelná vlna. Fresnelův přístup pak k podrobné analýze ohybových jevů vznikajících na stínítku využívá buď aritmetické skládání amplitud z jednotlivých zón kulové plochy, nebo grafickou možnost znázornění jednotlivých příspěvků vektory. (2)

### 2.3 Optická mřížka

Jako důležitý ohybový jev je v další části přednášky prozkoumán i ohyb na mřížce – jednak z experimentálního hlediska – účastníkům kempu jsou předvedeny ohybové jevy na různých typech štěrbin a na optické mřížce, jednak z teoretického rozboru, týkajícího se nalezení základních podmínek pro určení maxim světelné intenzity na stínítku. (1)

### 3 Rozlišovací schopnost optických přístrojů

Rozlišovací schopnost optických přístrojů přináší informaci o rozměrech nejmenších vnímatelných předmětů, tudíž poskytuje kritérium kvality přístroje. Následkem ohybových jevů se objektivem přístrojů nezobrazuje bod jako bod, ale jako ploška. V této části přednášky jsou proto diskutovány podmínky, které vedou k určení rozlišovacích mezí dalekohledu, mikroskopu a dalších optických přístrojů. (1)

### 4 Závěr

Cílem přednášky je seznámit účastníky s vlastnostmi a fyzikální podstatou ohybu světla. Výklad doprovázejí konkrétní příklady a vybrané demonstrace ohybových jevů.

### 5 Použitá literatura

- (1) FUKA, B., HAVELKA, F.: Optika a atomová fyzika I. Optika, SPN Praha 1961.
- (2) MALÝ, P.: Optika, Nakladatelství Karolinum Praha 2008.

### 6 Kontakt na autora

Jitka Prokšová, RNDr. Ph.D.

OF KMT FPE ZČU

[proksovj@kmt.zcu.cz](mailto:proksovj@kmt.zcu.cz)

## Robotická vozítka na Marsu

Lumír HONZÍK

### 1. Úvod

Průzkum planety provádělo několik sond jak z orbitální dráhy, tak i přímo na povrchu. Jednalo se např. o misi Viking. Úžasné detaily přinesla i sonda MRO (*Mars Reconnaissance Orbiter*). V současné době hlavně průzkum pomocí automatických robotizovaných vozítek (Spirit, Opportunity).

### 2. Mars

#### 2.1. Mars – základní data

V pořadí čtvrtá nejbližší planeta vůči Slunci, rozměrově je až na sedmém místě.

Průměr: 6 796km

Rotace: 24,6 h

Vzdálenost: 1,52 AU (227,9 mil. km)

Doba oběhu: 1,88 roku

Hmotnost: 0,11 ( $Z=1$ )

Měsíce: 2 (Phobos, Deimos)

Prstenec: -

Povrch: pevný

Atmosféra: řídká

Průzkum: sondy, automatická vozítka

#### 2.2. Pozorování planety Mars

## INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Planeta je v určitých obdobích dobře pozorovatelná na noční obloze. Není příliš výrazná, ale je nápadná svojí načervenalou barvou (ta je způsobena chemickým složením povrchových vrstev). Vzhledem k tomu, že se jedná o vnější planetu, je nejlépe pozorovatelná při tzv. opozicích. V té době je vůči Zemi relativně blízko, je ve fázi úplňku a má největší úhlový průměr. V astronomickém dalekohledu je možné v průběhu delšího časového období zaznamenat změny úhlového průměru a jasnosti. Naopak změny ve fázi planety pozorovat ze Země takřka nelze. U planety Mars lze pozorovat tzv. klíčku planet.

### 2.3. Mars - rotace a oběžná doba

Rotace a oběžná doba planety je velmi podobná jako u Země. Mars má velmi podobnou dobu siderické rotace 24 h 34 m 23 s (Země 23 h 56 m 04 s). Mají tedy téměř stejně dlouhý den (den na Marsu se nazývá sol). Navíc má Mars téměř shodně skloněnou rotační osu jako Země. Zatímco Země má sklon rotační osy  $23^{\circ} 27'$ , u Marsu je tato hodnota  $23^{\circ} 59'$ . Z toho vyplývá, že i na Marsu se střídají jednotlivá roční období, jsou však vzhledem k době oběhu Marsu (1,88 roku) kolem Slunce skoro dvojnásobně delší.

### 2.4. Mars – albedové změny

Na Marsu i Zemi dochází ke střídání ročních období, které u Marsu pozorujeme jako změny albedových útvarů. Při pozorování planety je totiž možné zaznamenat v delším časovém období, že dochází k barevným změnám na povrchu (změna velikosti, barvy a intenzity světlých a tmavých ploch). Dalším významným albedovým útvarem a zároveň fyzickým jsou v polárních oblastech Marsu polární čepičky. Ty během Marsova roku mění svoji plošnou velikost.

### 2.5. Mars – povrchové útvary

Povrch planety je díky řídké atmosféře pro pozemské dalekohledy dostupný. Nicméně vzdálenost nedovolí rozlišit detaily na povrchu a tak vědecky použitelné materiály přinesly až průzkumné sondy. Povrch planety je rozdělen na zvlněnou a nerovnou pevninskou oblast, kterou tvoří kamenitá nebo písčité krajina s dunami a přesypy. Na severní polokouli se naopak nalézá relativně hladká oblast, která v minulosti tvořila zřejmě dno mělkého moře.

Krátery - Na povrchu Marsu je možné identifikovat některé větší impaktní krátery nejrůznějších tvarů a velikostí. Malé krátery zanikají vlivem erozivní činnosti v atmosféře. V minulosti některé z nich zřejmě zahladila i erozivní činnost vody.

Sopky - na planetě překvapivě nalezneme velké štítové vulkány (Olympus Mons – největší a nejmohutnější vulkán ve Sl. soustavě, Ascraeus Mons, Arsia Mons, Pavonis Mons, Elysium Mons a další). Nejvíce se jich nachází ve vulkanické oblasti Montes Tharsis. Většina vulkánů má mohutné vrcholové kaldery. Oblasti s vulkány vznikly v místech, kde se dostával horký materiál z nitra planety na povrch. Na rozdíl od Země nemá Mars deskovou tektoniku.

Terénní deprese – velkou depresí je na jižní polokouli pánev Hellas a deprese Argyre. Velmi zajímavá je i soustava kaňonů v údolí Valles Marineris, která je nejmohutnější ve Sl. soustavě.

## 2.6. Atmosféra a podnebí Marsu

Mars má oproti Zemi řídkou atmosférou. Ta bývá (mimo období velkých prachových bouří, oblačnosti nebo atmosférických zákalů) průzračná. V chemickém složení převažuje CO<sub>2</sub> asi 95 %, dusík 3 % a argon 1,5 %. Tlak je oproti Zemi mnohem menší. Průměrné denní teploty na Marsu jsou přijatelné kolem -30 °C (někdy vystoupí i nad 0 °C). Samozřejmě v polárních oblastech klesají až na -80 °C. V některých obdobích jsou na Marsu i lokální, či globální prachové bouře. Vytváří se i prachové víry, které mohou dosáhnout i značných rozměrů.

## 2.7. Voda na Marsu

Je otázkou, zda byla na Marsu v minulosti voda v tekutém stavu. Existují určité indicie, že ano. V některých oblastech se nachází naplaveniny, usazeniny a útvary, které mohly vzniknout pouze tekoucí vodou. V jiných oblastech (většinou na jižní polokouli planety) zase existuje rozsáhlá síť vyschlých říčních koryt. Zdá se proto, že voda se zde skutečně nacházela, ale planeta si jí nedokázala udržet.

## 3. První vozítka mimo planetu Zemi

### 3.1. Lunar Rover

První vozítka použitá mimo planetu Zemi se jmenovala LUNAR ROVER a jezdila po Měsíci v rámci programu Apollo (Apollo 15 až 17). Sloužila pro přepravu astronautů a jejich vybavení. Nejednalo se však o vozítka robotizovaná.

### 3.2. Lunochod

Další vozítka jezdící opět na Měsíci byly dva sovětské Lunochody (Lunochod 1 v r. 1970 a Lunochod 2 v r. 1973). Ty byly dálkově řízeny ze Země a lze je považovat za předchůdce robotizovaných vozítek.

## 4. Vozítka vynesena k Marsu

### 4.1. Mise Mars Pathfinder (Průkopník)

Mise Mars Pathfinder (Průkopník) byla planetární sonda určená k průzkumu čtvrté planety Mars.

Odstartovala 4. 12. 1996 a na povrchu Marsu přistála: 4. července 1997 (po 7 měsících). Přistávací manévr byl proveden přímo z meziplanetární dráhy a v konečné fázi byly použity speciální airbagy. Po přistání sonda Pathfinder roztáhla solární panely, které zajistily přísun energie ze Slunce. Mezitím došlo k vyfouknutí airbagů. Uvnitř sondy bylo umístěno malé vozítko Sojourner. To sjelo po speciálních kolejničkách a vydalo se na samostatný průzkum. Vozítko Sojourner mělo za úkol jezdit po povrchu planety a sbírat vzorky půdy a kamenů. Bylo ovládáno operátorem ze Země, což nebylo jednoduché, protože mezi příkazy operátora a jejich splněním bylo časové mnoha minutové zpoždění. Přesto se vozítku podařilo nasbírat spoustu informací.

Mise Mars Pathfinder byla úspěšná. Přestože vozítko Sojourner se od své mateřské sondy Pathfinder příliš nevzdálilo (asi 12 m), bylo během mise dosaženo skvělých výsledků a získáno velké množství informací.

Zajímavá je i plánovaná životnost. U sondy byla plánovaná: 1 měsíc, skutečná byla 3 měsíce.

U vozítka plánovaná životnost měla být jeden týden, ve skutečnosti byla víc jak 3 měsíce.

### 4.2. Mise MER (Mars Exploration Rover)

Mise MER (Mars Exploration Rover) navázaly na úspěšnou misi sondy Pathfinder, která na Marsu přistála v roce 1997 a jejíž součástí bylo i vozítko Sojourner.

Během mise Mars Exploration Rover byly na povrch Marsu postupně vysazeny dva zcela identické rovery: MER A Spirit, oblast přistání kráter Gusev, MER B Opportunity, oblast přistání plošina Meridiani. Rovy byly mnohem větší a hmotnější než vozítko Sojourner.

Každý rover musel být do sondy vložen v poskládaném stavu. Panely slunečních článků i výsuvný stožár s kamerovým systémem byly složeny.

Přistávací manévr obou misí MER byl podobný přistání sondy Mars Pathfinder. Nejprve brzdění aerodynamické, pak pomocí padáku a motorů na THP (tuhé pohonné hmoty) a v konečné fázi dopad pomocí nafouknutých airbagů.

Na palubě obou vozítek byly nainstalovány různé vědecké přístroje pro hledání důkazů o přítomnosti tekoucí vody na povrchu Marsu v minulých obdobích.

Rover měl šestikolový podvozek zajišťující pohyb vozítka v různě těžkém terénu. Přední a zadní kola byla směrově otočná, střední pevná.

V horní části vozítka se nacházely panely slunečních baterií. Ty byly během letu ve složené poloze. Po otevření přepravního pouzdra došlo k jejich vyklopení. Sloužily nejen pro pohon vozítka, ale i pro zásobování vědecké aparatury el. energií.

Na obou rovech byl také nainstalován otočný výklopný stěžeň o výšce 83 cm. Na stěžni se nacházely navigační a panoramatické kamery a periskop pro spektrometr.

V přední spodní části roveru se nacházelo výklopný mechanický manipulátor (rameno) nesoucí další přístroje jako je obušovací nástroj a mikroskopický zobrazovač.

## INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Rover měl ve výbavě i sadu různých spektrometrů pro rozličné analýzy a také sadu magnetů pro zachytávání částic z atmosféry.

V horní části každého roveru se nacházely tři antény komunikačního systému (nízkozisková, vysokozisková a v pásmu UHF).

Úkolem roverů byl geologický průzkum, pátrání po stopách tekoucí vody, případně po stopách života, fotografování, monitorování dějů v atmosféře apod.

### 4.3. Mise Mars Science Laboratory (MSL) Curiosity

Mise Mars Science Laboratory (MSL) Curiosity (Zvědavost) je zatím poslední planetární mise určenou k průzkumu planety Mars robotizovaným vozítkem Curiosity. Odstartovala 26. 11. 2011 a po devíti měsících dne 5. srpna 2012 byl uskutečněn přistávací manévř v oblasti kráteru Gale o průměru 154 km. Rover bude tuto oblast zkoumat po dobu minimálně 1 mart'anského roku.

Přistávací manévř byl tentokrát jiný. Opět nejprve bylo provedeno brždění aerodynamické a to z rychlosti 21000 km/hod. Po poklesu rychlosti následovalo brždění pomocí padáku. Poté následovalo nejprve odhození tepelného štítu a jen o něco později i horní části přepravní kapsle s padákem. V této fázi převzal brzdící manévř zcela nový systém tzv. nebeský jeřáb, který brzdil pomocí celkem 8 motorů na THP. V konečné fázi těsně nad povrchem byl rover Curiosity spuštěn na povrch pomocí 8 m dlouhých nylonových lan. Po dosednutí došlo k jejich odpojení a nebeský jeřáb provedl úhybný manévř a zřítíl se na povrch Marsu v bezpečné vzdálenosti.

Vozítko Curiosity je zatím největším průzkumným roverem. Je asi 5x větší, než dvojice roverů Spirit a Opportunity. Vozítko s plutoniovým zdrojem energie je podobné malému autu se šesti koly. Podobně jako předchozí rovery má další vybavení pro plánovaný dvouletý průzkum v oblasti kráteru Gale. Nese asi 10x více přístrojové techniky než jeho předchůdci.

System řízení. Přímé řízení roverů na Marsu není z důvodů vzdálenosti možné. Čas potřebný k výměně informací mezi řídicím střediskem na Zemi a roverem na Marsu se pohybuje v rozmezí od 8 do 42 min., proto je možné jen několikrát za den. Z toho důvodu musí řídicí středisko na Zemi naplánovat práci na celý den dopředu a pak poslat příkazy vozítku. Vozítko proto používá autonomní software schopný se rozhodovat podle údajů ze senzorů. Autonomní software je průběžně zdokonalován.

System komunikace. Rover může sice posílat přímé zprávy, ale komunikace je efektivnější pomocí kosmických lodí (Odyssey, MRO, Mars Express) rozmístěných na oběžných drahách.



## INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Podvozek. Podobně jako u předchozích misí zajišťuje pohyb vozítka šestikolový podvozek. Všechna kola jsou hnaná elektromotory. Přední a zadní kola jsou směrově otočná, střední pevná. Středová kola nejsou ve stopě s koly okrajovými.

Zdroj energie. Na rozdíl od předchozích misí, které byly vybaveny solárními články, je MSL je poháněn radioizotopovým termoelektrickým generátorem (RTGS), který byl úspěšně použitý na sondách Viking 1 a Viking 2 v roce 1976. Ukázalo se, že sluneční energie není efektivní zdroj pro operace na povrchu Marsu. Solární panely totiž nemusí účinně fungovat v zastíněných oblastech nebo v prašných podmínkách. Radioizotopový generátor poskytuje spolehlivý, stálý výkon ve dne i v noci. Odpadní teplo z radioizotopového generátoru se použije k udržování provozní teploty systémů, protože některé citlivé přístroje vyžadují stálou teplotu. Tím se ušetří el. energie potřebná pro pohon vozidla a napájení přístrojů. Generátor by měl fungovat aspoň 14 let.

Otočný sloupek s hlavicí. Nejvyšší částí roveru je výklopný stěžeň, na kterém je otočně i sklopně umístěna hlavička s přístroji. Hlavička se nachází asi 2 m nad okolním terénem. Kromě natáčení umožňuje hlavička i naklápění. V hlavičce jsou instalovány různé druhy kamer (dlouho i krátkofokálních), které umožňují kromě normálních barevných fotografií i 3D snímky a videa. Jsou určeny na mapování terénu v okolí vozítka. Pomocí těchto kamer je také prováděno řízení roveru. Kamery mohou nasnímat zajímavé jevy (pohyb oblačnosti, větrné víry. Dále je v ní umístěn laser. Přimo na sloupku jsou umístěny meteorologické přístroje.

Robotické rameno. V přední části roveru je výsuvné mechanické rameno o délce 2 m se speciální víceúčelovou hlavicí, na které je umístěno několik vědeckých přístrojů. Rameno má několik kloubů, které umožňují jeho natáčení a naklápění do požadovaného směru. Ve víceúčelové hlavičce je kromě jiného namontován obrušovací segment, Barevná kamera umožňující snímání velmi detailních záběrů horniny (digitální lupa) i fotky z větší vzdálenosti, alfa částicový rentgenový spektrometr pro určení chemického složení hornin.

Trupová část roveru. Uvnitř roveru se nachází další aparatura např.: přístroje provádějící chemické rozborů odebraných prvků nebo provádějící analýzu plynů. V zadní části je zase aparatura má za úkol pátrat po vodě. V horní části roveru je také širokoúhlý teleskop napojený na detektory energetických nabitých částic, které přicházejí z vesmíru (Slunce, exploze SN).

Curiosity má několik cílů. Lze říci, že čtyři jsou hlavní:

1. Zjistit, zda vůbec někdy vznikl na Marsu život.
2. Provést analýzu atmosféry Marsu.
3. Prozkoumat geologii Marsu.

## INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

### 4. Připravit průzkum Marsu lidmi.

Tyto čtyři cíle jsou rozpracovány do osmi hlavních úkolů:

1. Najít na Marsu organický uhlík nebo sloučeniny uhlíku.
2. Najít na Marsu základní kameny života (C, H, N, O, P, S).
3. Identifikovat cokoliv, co by mohlo připomínat stopy života.
4. Zmapovat chemickou, izotopickou a mineralogickou povahu povrchu Marsu.
5. Zjistit, jaké procesy vytvořily na povrchu Marsu horniny a půdu.
6. Objevit, jak se vyvíjela atmosféra a klima Marsu během posledních 4 miliard let.
7. Popsat, jakým způsobem funguje na Marsu koloběh vody a CO<sub>2</sub>.
8. Zmapovat změřit všechny druhy radiace na Marsu.

### 3. Závěr

Robotický průzkum těles ve Sluneční soustavě je teprve na počátku. Na Marsu existuje pouze několik let a zahrnuje tři projekty se čtyřmi vozítky. Poslední z projektů Curiosity je ambiciózní, ale reálný. Navazuje na předchozí mise a rozšiřuje je. Na jeho výsledcích bude zřejmě záviset nejen další průzkum planety Mars, ale i průzkum jiných těles ve Sluneční soustavě.

### 4. Použitá literatura

[http://www.nasa.gov/mission\\_pages/msl/index.html](http://www.nasa.gov/mission_pages/msl/index.html)

[http://en.wikipedia.org/wiki/Mars\\_Science\\_Laboratory](http://en.wikipedia.org/wiki/Mars_Science_Laboratory)

### 5. Kontakt na autora

Lumír Honzík

Hvězdárna a planetárium Plzeň

[lumir.honzik@seznam.cz](mailto:lumir.honzik@seznam.cz)

## ROZBOR ÚLOH Z MINULÝCH ROČNÍKŮ AO

Miroslav RANDA

### 1. Úvod

Úlohy astronomické olympiády nejsou zatím zveřejňovány v plném rozsahu, a tak se s nimi žáci a studenti nemohou seznámit a využít je k přípravě na astronomickou olympiádu. Protože dr. Randa je garantem všech kategorií AO, má k dispozici zadání všech uplynulých ročníků. Úlohy byly rozčleněny do typických skupin a účastníkům byly tyto úlohy zadány a ponechán účastníkům čas na řešení (cca 30 až 45 minut). Po tomto čase byly úlohy vyřešeny a vysvětleny. Zároveň byl doplněn rozbor problematiky uvedených úloh a naznačeny obdobné úlohy popisující jevy s otázkami spojené.

Workshop probíhal v typickém prostředí pro řešení astronomické olympiády, tedy v počítačové učebně, kde měl každý účastník k dispozici počítač s připojením k internetu a nainstalovaným programem Stellarium.

Rozbor úloh z minulých ročníků AO prolínal celým programem kempu a byl zařazen rovnoměrně v průběhu celého týdne.

### 2. Rozbor úloh z minulých ročníků AO

#### 2.1. Tělesa sluneční soustavy, modely sluneční soustavy, pohyb těles ve sluneční soustavě

První dvouhodinový blok rozboru astronomických úloh z minulých ročníků AO byl věnován nejtypičtějšímu tématu úloh v astronomické olympiádě pro základní školy. Skutečně ve všech ročnících se vyskytovala přibližně polovina úloh s tematikou těles sluneční soustavy, a to jak ve formě testu s výběrem odpovědí, tak i ve formě číselných úloh.

Typickou početní úlohou na téma sluneční soustava je znázornění trajektorie Země a další planety a výpočet určité hledané vzdálenosti, výpočet doby šíření světla mezi dvěma místy, vyznačení viditelnosti planety apod.

## INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Druhou typickou početní úlohou je hledání charakteristik pohybu planety či komety s využitím Keplerových zákonů, například rychlosti v perihelu či afelu, výpočet malé poloosy, periody pohybu, nebo výpočet periody oběžného pohybu tělesa.

Třetí typická početní úloha pak hledá velikost planety či vzdálenost planety v určitém modelu sluneční soustavy na základě hodnot z tabulek a jednoho rozměru (například modelové velikosti Slunce).

### 2.2. Pozorování oblohy, souhvězdí, viditelnost hvězd a objektů z různých míst na Zemi

Druhý dvouhodinový blok rozboru astronomických úloh z minulých ročníků AO byl zaměřen na druhou typickou oblast astronomických úloh: poznávání souhvězdí, orientaci na obloze a na zjištění pozorovatelnosti daných objektů z různých míst na Zemi.

I v tomto případě se úlohy vyskytují obvykle v různých formách, a to jak v testu s volbou odpovědi, tak v poznávací části, ale rovněž v „početních“ úlohách. Při rozboru úloh byla hlavní pozornost věnována orientaci na webových stránkách věnovaných souhvězdím se zvláštním zřetelem na nejkompexnější české astronomické stránky Astronomia, využití programu Stellarium při řešení úloh astronomické olympiády a rovněž úlohám početním orientovaným na hledání viditelnosti vybraného objektu z různých míst na Zemi.

### 2.3. Galaktická astronomie, mlhoviny, hvězdokupy, vznik a vývoj vesmíru

Ve třetím dvouhodinovém bloku rozboru astronomických úloh z minulých ročníků AO se obvykle vyskytují úlohy převážně v testu s výběrem odpovědí, zato tematika je velmi rozmanitá. Proto v tomto bloku byl dán velký časový prostor rozboru problematiky galaktické a extragalaktické astronomie. Organizace tohoto bloku byla odlišná od předchozích bloků: nejprve byli účastníci seznámeni se základními pojmy z oblasti galaktické a extragalaktické astronomie a teprve poté následovalo řešení úloh z minulých ročníků astronomické olympiády. V závěru dvouhodinového bloku pak po rozboru správných úloh byla zařazena informace z kosmologie o vzniku a vývoji vesmíru.

Hlavní zaměření lekce bylo na pojmy spjaté s galaktickou a extragalaktickou astronomií: galaxie spirální, eliptické, nepravidelné a čočkové, hvězdokupy kulové a otevřené, mlhoviny emisní, reflexní a absorpční, na naši Galaxii, na rozdíl mezi Galaxií a Mléčnou dráhou, strukturu Galaxie a supermasivní černou díru v jejím středu, na srážky galaxií, kvasary, reliktní záření, standardní a inflační model vesmíru, křivost vesmíru, supernovy Ia apod.

## 2.4. Vývoj hvězd, fyzikální procesy ve hvězdách

Poslední dvouhodinový blok rozboru astronomických úloh z minulých ročníků AO se zaměřil na tematiku jádra astrofyziky, tedy na učení o hvězdách, jaderných reakcích v nich, vývoji hvězd a závěrečná stadia vývoje hvězd. I v tomto případě se v astronomické olympiádě obvykle vyskytují úlohy převážně v testu s výběrem odpovědí. Tematika však na druhou stranu velmi účinně propojuje všechna dosud probíraná témata astronomických úloh.

Hlavní zaměření lekce bylo na pojmy spjaté s hvězdnou astronomií: vznik hvězd z prachoplynných mračen, vývoj hvězdy na hlavní posloupnosti a v oblasti obrů, bílý trpaslík, neutronová hvězda a černá díra, gravitační čočka, pulsar, cefeida, další proměnné hvězdy, ... Na rozdíl od předchozího tématu galaktické a extragalaktické astronomie byla větší pozornost věnována fyzikálním a chemickým procesům, ke kterým ve hvězdách dochází.

## 3. Závěr

Využitá forma prolínání samostatné práce a následné debaty a vyjasnění složitějších úloh byla velmi účinná. Střídání aktivit a získání motivace vlastním pokusem o vyřešení úloh z předchozích ročníků AO bylo velkým motivačním stimulem pro účastníky kempu.

## 4. Použitá literatura

Vanýsek, V.: Základy astronomie a astrofyziky, ACADEMIA, Praha, 1980.

Astronomie 1; V. Guth, F. Link, J. M. Mohr, B. Šternberk; vyd.: Nakladatelství Československé akademie věd, Praha 1954

Dostupné na internetu:

<http://www.astronomia.zcu.cz>

## 5. Kontakt na autora

Miroslav Randa

ZČU v Plzni

[randam@kmt.zcu.cz](mailto:randam@kmt.zcu.cz)

## ŘEŠENÍ OBTÍŽNĚJŠÍCH ÚLOH Z ELEKTŘINY A MAGNETISMU

Josef Veselý

### 1 Úvod

Elektřina a magnetismus skýtají velké množství problémů a úloh. V následujícím příspěvku vybereme jen některé.

Budeme se zabývat problematikou elektrických kyvadélek stejné, popřípadě různé hmotnosti, určováním směru indukovaného proudu bez použití Lenzova zákona a pohybem nabitých částic v magnetickém a elektrickém poli.

### 2 Vzorce a zákony pro řešení vybraných úloh z elektřiny a magnetismu

$$F_e = k \frac{Q_1 Q_2}{r^2}, F_G = mg, U = -\frac{\Delta\phi}{\Delta t}, \phi = BS \cos\varphi, I = \frac{U}{R}, r = \frac{mv}{BQ}, E_k = UQ, E_k = \frac{1}{2}mv^2$$

#### 2.1 Elektrostatika

Úloha 1. Určete hmotnost elektrických kyvadélek o délce 50 cm, která se po nabití kladnými náboji  $3 \cdot 10^{-8}$  C a  $5 \cdot 10^{-8}$  C odchýlí od svislého směru o  $6^\circ$ .

Řešení: Označíme  $Q_1 = 3 \cdot 10^{-8}$  C,  $Q_2 = 5 \cdot 10^{-8}$  C,  $\alpha = 6^\circ$ ,  $l = 50$  cm = 0,5 m,  $g = 9,8$  m·s<sup>-2</sup>,  $k = 9 \cdot 10^9$  N·m<sup>2</sup>·C<sup>-2</sup>,  $m = ?$

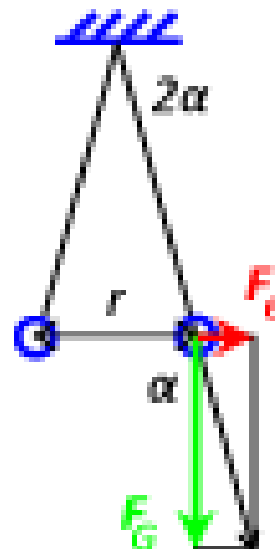
Protože se kyvadélka vychýlila o stejný úhel, mají stejnou hmotnost. Na kyvadélka působí svisle dolů tíhová síla a ve směru vodorovném vychylující elektrická síla. Z pravoúhlého trojúhelníku (viz obr.) platí:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{F_e}{F_G}$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{k \frac{Q_1 Q_2}{r^2}}{mg}$$

$$m = k \frac{Q_1 Q_2}{gr^2 \operatorname{tg} \alpha} = k \frac{Q_1 Q_2}{2gl^2 \sin^2 \alpha \operatorname{tg} \alpha} \doteq \underline{2,4 \cdot 10^{-3} \text{ kg}}$$

Hmotnost každého z kyvadélek je asi 2,4 g.



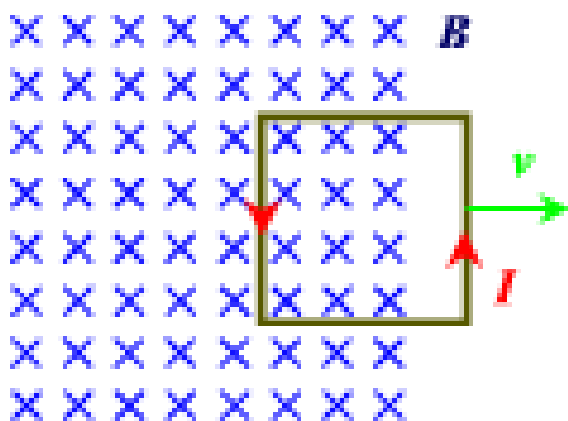
Úloha 2. Řešte předchozí úlohu pro úhly  $4^\circ$  a  $6^\circ$ . Hmotnosti kyvadélek jsou v tomto případě různé.

## 2.2 Elektromagnetická indukce

Úloha 3. Vodivý čtvercový rámeček o hraně 10 cm umístěný v ostře ohraničeném homogenním magnetickém poli o indukci 200 mT, jehož rovina je kolmá k indukčním čarám, vysouváme rychlostí  $0,6 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$  kolmo ke hranici pole. Dvě hrany rámečku jsou rovnoběžné s hranicí pole. Odpor rámečku je  $0,5 \Omega$ . Určete velikost a směr indukovaného proudu.

Řešení:  $l = 10 \text{ cm} = 0,1 \text{ m}$ ,  $B = 200 \text{ mT} = 0,2 \text{ T}$ ,  $v = 0,6 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$ ,  $R = 0,5 \Omega$ ,  $I = ?$

Situaci načrtneme:



Normálu plochy rámečku orientujeme opačně než magnetické indukční čáry. Tím je kladný směr rámečku orientován proti směru hodinových ručiček.

Nyní

$$I = \frac{U}{R} = -\frac{\Delta\phi}{R\Delta t} = -\frac{Bl^2\cos\alpha}{\frac{Rl}{v}}$$

$$I = -\frac{Blv\cos\alpha}{R} \doteq \underline{\underline{0,067 \text{ A}}}$$

Indukuje se proud o velikosti **0,067 A**

v kladném směru rámečku (červené šipky).

## 2.3 Pohyb nabité částice v magnetickém a v elektrickém poli

Úloha 4. Vypočítejte poloměr dráhy elektronu v homogenním magnetickém poli o indukci 20 mT. Elektron se pohybuje ve vakuu kolmo k indukčním čarám rychlostí  $4,5\cdot 10^7 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$ . Potřebné údaje vyhledejte v tabulkách.

Úloha 5. Jakým napětím byl z klidu urychlen elektron z předchozí úlohy?

## 3 Závěr

Při řešení úlohy (nejen obtížnější) vždy nejprve problematiku správně fyzikálně zařadíme, označíme obvyklým způsobem zadané i hledané veličiny, vybereme zákony a vzorce pro řešení, sestavíme rovnici nebo soustavu rovnic, vyřešíme a provedeme diskuzi řešení.



evropský  
sociální  
fond v ČR



EVROPSKÁ UNIE



MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ,  
MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY



OP Vzdělávání  
pro konkurenceschopnost



INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

#### 4 Použitá literatura

#### 5 Kontakt na autora

Mgr. Josef Veselý

Gymnázium J. Vrchlického, Klatovy, Národních mučedníků 347

Email. [jvesely@gymkt.cz](mailto:jvesely@gymkt.cz)



## ŘEŠENÍ OBTÍŽNĚJŠÍCH ÚLOH Z HYDROMECHANIKY

Josef Veselý

### 1 Úvod

Hydromechanika je kapitola probíraná na konci prvního ročníku gymnázia, kdy už většina žáků myslí na prázdniny, proto už nové informace příliš důkladně neukládají. Je proto vhodné tuto látku důkladně zopakovat.

Dále se budeme zabývat řešením problému, jak rychle odhadnout hustotu plovoucího tělesa, jak si vycvičit potápěče, jakou rychlostí padá kapka deště, jak velký padák zvolit pro přijatelný dopad, co umí vodní vývěva, proč větroň umí „padat“ nahoru.

### 2 Vzorce a zákony pro řešení úloh z hydromechaniky

Pascalův zákon: Tlak v kapalině v uzavřené nádobě vyvolaný silou působící na povrch kapaliny je ve všech místech kapaliny stejný.

Důsledek pro hydraulické zařízení:

$$\frac{F_1}{S_1} = \frac{F_2}{S_2}$$

Archimédův zákon: Těleso ponořené do kapaliny je nadlehčováno vztlakovou silou, jejíž velikost se rovná tíze kapaliny stejného objemu jako ponořená část tělesa.

$$F_{vz} = \rho V g$$

Rovnice kontinuity:  $S_1 v_1 = S_2 v_2$ , v užším místě je větší rychlost.

Bernoulliho rovnice:  $p_1 + \frac{1}{2} \rho v_1^2 = p_2 + \frac{1}{2} \rho v_2^2$ , kde je větší rychlost, tam je menší tlak.

Odporová síla při obtékání tělesa:  $F_o = \frac{1}{2} C \rho S v^2$ .

Všechny veličiny jsou označeny způsobem obvyklým ve středoškolské fyzice.

#### 2.1 Hydrostatika

Úloha 1. Těleso plove ve vodě tak, že  $\frac{1}{4}$  objemu tělesa vyčnívá nad hladinou. Určete jeho hustotu.

Rychlé řešení: Pod hladinou jsou  $\frac{3}{4}$  objemu, proto hustota tělesa je  $\frac{3}{4}$  hustoty vody. Hustota tělesa je  $750 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$ .

Podrobně: Hloubka ponoru je taková, aby tíhová a vztlaková síla byly stejně veliké.

$$F_G = F_{vz}$$

$$mg = \rho \frac{3}{4} V g$$

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

$$\rho_t V g = \rho \frac{3}{4} V g$$

$$\rho_t = \frac{3}{4} \rho = \underline{750 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}}$$

Úloha 2. Odkrojte několik zápalek s hlavičkou o délce 3 až 5 mm. Zkrácené zápalky vložte do úzké zkumavky naplněné až po okraj vodou. Zkumavku zakryjte palcem a silně zatlačte. Alespoň některé zápalky se začnou potápět ke dnu zkumavky. Vysvětlete.

## 2.2 Hydrodynamika

Úloha 3. Rychlost kapky padající z velké výšky se ustálí na určité velikosti, při které se odporová síla vzduchu vyrovná síle tíhové. Porovnejte rychlosti kapek, jejichž průměry jsou v poměru 1:4.

$$F_o = F_G$$

$$\frac{1}{2} C \rho S v^2 = \rho_k V g$$

$$\frac{1}{2} C \rho \pi r^2 v^2 = \rho_k \frac{4}{3} \pi r^3 g$$

$$v = \sqrt{\frac{8 \rho_k r g}{3 C \rho}}$$

$$\frac{v_1}{v_2} = \sqrt{\frac{r_1}{r_2}} = \underline{\underline{\frac{1}{2}}}$$

Úloha 4. Vypočítejte poloměr půlkulového padáku pro rychlost dopadu  $3 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ . Hmotnost výsadkáře s výstrojí je asi 80 kg, hustota vzduchu  $1,3 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$ , tvarový součinitel odporu je 1,3 a tíhové zrychlení je  $10 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$ .

Úloha 5. Na základě rovnice kontinuity a Bernoulliovy rovnice objasněte činnost vodní vývěvy.

Úloha 6. Větroň se v nehybném vzduchu díky aerodynamickému odporu pohybuje jako po nakloněné rovině. Za jakých okolností může mít výsledný pohyb větroně směr vzhůru?

## 3 Závěr

Při řešení úlohy (nejen obtížnější) vždy nejprve problematiku správně fyzikálně zařadíme, označíme obvyklým způsobem zadané i hledané veličiny, vybereme zákony a vzorce pro řešení, sestavíme rovnici nebo soustavu rovnic, vyřešíme a provedeme diskuzi řešení.

## 4 Použitá literatura



evropský  
sociální  
fond v ČR



EVROPSKÁ UNIE



MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ,  
MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY



OP Vzdělávání  
pro konkurenceschopnost



INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

## 5 Kontakt na autora

Mgr. Josef Veselý

Gymnázium J. Vrchlického, Klatovy, Národních mučedníků 347

Email: [jvesely@gymkt.cz](mailto:jvesely@gymkt.cz)

## ŘEŠENÍ OBTÍŽNĚJŠÍCH ÚLOH Z MECHANIKY

Josef Veselý

### 1 Úvod

Jsou vypočtené hodnoty reálné? Kdo zvítězí v zápase Sumo? Zrychlený otáčivý pohyb. Je rychlejší kvádr nebo válec?

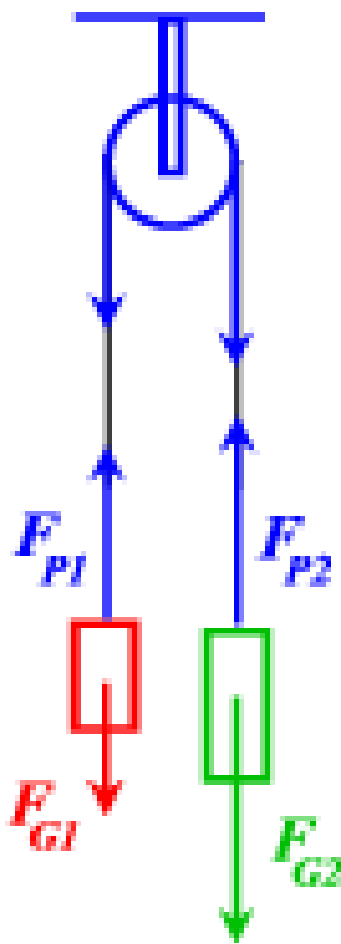
### 2 Vzorce a zákony pro řešení vybraných úloh z mechaniky

$$F_e = k \frac{Q_1 Q_2}{r^2}, F_G = mg, U = -\frac{\Delta\phi}{\Delta t}, \phi = BS \cos\varphi, I = \frac{U}{R}, r = \frac{mv}{BQ}, E_k = UQ, E_k = \frac{1}{2}mv^2$$

### 2.1 Výpočet a měření

V mechanice zpravidla řešíme úlohy za zjednodušených předpokladů. Jsou však vypočtené hodnoty reálné? Porovnejme výsledky výpočtů a měření.

Úloha 1. Tělesa o hmotnostech 30 g a 40 g jsou zavěšena přes pevnou kladku. Vypočítejte zrychlení soustavy. Tření, hmotnost kladky a provázku neuvažujte. Použijte  $g \doteq 10 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$ .



Řešení:  $m_1 = 30 \text{ g}, m_2 = 40 \text{ g}, a = ?$

$$a = \frac{F}{m} = \frac{m_2 - m_1}{m_2 + m_1} g \doteq \underline{1,4 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}}$$

Úloha 2. Řešte předchozí úlohu, ale uvažujte hmotnost kladky  $m_3 = 50 \text{ g}$ .

Řešení:  $m_1 = 30 \text{ g}, m_2 = 40 \text{ g}, m_3 = 50 \text{ g}, a = ?$

Jednotlivé části soustavy vykonávají různé druhy pohybu, proto musíme použít dílčí pohybové rovnice:

$$F_{G2} - F_{P2} = m_2 a$$

$$F_{P1} - F_{G1} = m_1 a$$

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

$$(F_{P2} - F_{P1})r = J \frac{a}{r}, \text{ kde } J = \frac{1}{2} m_3 r^2$$

Řešením soustavy:

$$a = \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2 + \frac{1}{2} m_3} g \doteq \underline{1,1 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}}$$

Úloha 3. Odhadneme opravu na tření. Budeme zvětšovat hmotnost závaží (stále s rozdílem 10 g) tak, až pohyb přestane být zrychlený.

Tato situace nastala pro závaží 80 g a 90 g (+ 50 g kladka). Třecí síla je tedy 0,1N při normálové síle 2,2 N. Součinitel tření  $f = 0,05$ .

Soustava v úloze 2 je brzděna třecí silou asi 0,06 N.

$$a = \frac{(m_2 - m_1)g - F_t}{m_1 + m_2 + \frac{1}{2} m_3} \doteq \underline{0,4 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}}$$

Zrychlení soustavy vypočtené na základě měření dráhy a času je asi  $0,5 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$ . Výpočet dle úlohy 3 nejlépe odpovídá experimentu.

## 2.2 Setrvačná odstředivá síla

Úloha 4. Dvě kuličky ze stejného materiálu jsou navlečeny na tenké osičce, po které se mohou prakticky bez tření posouvat. Dále jsou kuličky spojeny nití tak, že vzdálenost jejich středů je 12 cm. Osička je upevněna v držáku a umístěna v odstředivém stroji tak, že se otáčí okolo svého středu. Jak je třeba kuličky umístit, aby se při otáčení neposunuly? Průměry kuliček jsou v poměru 1:2.

## 2.3 Zrychlený otáčivý pohyb

Úloha 5. Jaký musí být součinitel smykového tření, aby se válec valil po nakloněné rovině se sklonem  $\alpha$  bez prokluzování?

Úloha 6. Kvádr klouže bez tření po nakloněné rovině se sklonem  $\alpha$  z výšky  $h$ . Válec se valí bez valivého odporu po nakloněné rovině se stejným sklonem a ze stejné výšky. Porovnejte rychlosti těles, kterými opustí nakloněné roviny.

## 3 Závěr

Při řešení fyzikálních úloh používáme vždy zjednodušené matematické modely reality. Čím je model více zjednodušený, tím snadněji se matematicky řeší, ale výsledky málo



evropský  
sociální  
fond v ČR



EVROPSKÁ UNIE



MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ,  
MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY



OP Vzdělávání  
pro konkurenceschopnost



INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

odpovídají realitě. Je proto vhodné volit takovou míru zjednodušení, abychom model ještě matematicky zvládli a výsledek byl použitelný (viz úloha3).

Pokud použijeme málo reálné předpoklady, bývají výsledky v rozporu s naší zkušeností (úloha 5).

#### **4 Použitá literatura**

#### **5 Kontakt na autora**

Mgr. Josef Veselý

Gymnázium J. Vrchlického, Klatovy, Národních mučedníků 347

Email: [jvesely@gymkt.cz](mailto:jvesely@gymkt.cz)



INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

## ŘEŠENÍ VYBRANÝCH ÚLOH Z OPTIKY

Jitka PROKŠOVÁ

### 1 Úvodní poznámky

Soubor příkladů, který slouží k procvičení složitějších situací z optického zobrazování, je uveden níže.

Výsledky řešení jsou vždy v závorce za příkladem.

### 2 Příklady na procvičení

1. Obraz předmětu umístěného před spojkou je vzpřímený a třikrát zvětšený. Vzdálenost mezi předmětem a obrazem je 40 cm. Určete ohniskovou vzdálenost čočky. (30 cm)

2. Vzdálenost mezi předmětem a stínítkem je 30 cm. Čočka umístěná mezi nimi dá ostrý obraz předmětu ve dvou polohách, jejichž vzdálenost je 10 cm. Určete  $Z$  obrazu v obou těchto polohách. (-2; -0,5)

3. Tenká ploskovypuklá čočka ( $R = 10$  cm) z korunového skla o indexu lomu 1,5 má být kombinována v těsném spojení s ploskodutou tenkou čočkou z flintového skla o indexu lomu 1,75 tak, aby soustava působila jako spojka s optickou mohutností 0,5 dioptrie. Jaký má mít rozptylka poloměr křivosti? Jakou má optickou mohutnost každá z obou čoček?

$$\left(-\frac{1}{6} \text{ m}, 5\text{D}, -4\frac{1}{2} \text{ D}\right)$$

4. Jak daleko je reálný předmět od spojky o ohniskové vzdálenosti 30 cm, když má od svého zdánlivého obrazu vzdálenost 40 cm? (20 cm)

5. Obraz předmětu je spojkou dvojnásobně zvětšen a je vzpřímený. Vzdálenost mezi předmětem a obrazem je 22,5 cm. Určete ohniskovou vzdálenost spojky. Ověřte konstrukci (v měřítku). (45 cm)

6. Určete polohu obrazového ohniska tlusté čočky, víte-li, že obrazová ohnisková vzdálenost první kulové plochy je 15 mm, předmětová ohnisková druhé plochy je 25 mm a tloušťka čočky je 38 mm. (18,75 cm)



## INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

7. Optická soustava je tvořena spojkou o ohniskové vzdálenosti 30 cm a rovinným zrcadlem, které je umístěno 15 cm za čočkou. Předmět se nalézá 15 cm před čočkou. Určete polohu obrazu. Ověřte konstrukci (v měřítku).

8. Pozorovatel si prohlíží určitý předmět postupně dvěma lupami. První lupa má menší ohniskovou vzdálenost než druhá. Kterou lupou vidí předmět pod větším zorným úhlem? Ověřte náčrtkem.

9. Dvě spojně čočky o ohniskových vzdálenostech 10 mm a 20 mm jsou umístěné ve vzdálenosti 120 mm. První čočka je použita jako objektiv a druhá jako okulár mikroskopu. Nalezněte jeho zvětšení. (112,5)

10. Dokažte, že nejmenší vzdálenost mezi předmětem a jeho skutečným obrazem je při zobrazování spojkou 4f.

### 3 Závěr

K řešení je možné užít i poznatky z maticové optiky, ale jednodušší je řešení pomocí zobrazovací rovnice tenké čočky a vrcholové rovnice kulových zrcadel – viz doporučená literatura.

### 4 Použitá literatura

FUKA, B., HAVELKA, F.: Optika a atomová fyzika I. Optika, SPN Praha 1961.

MALÝ, P.: Optika, Nakladatelství Karolinum Praha 2008.

### 5 Kontakt na autora

Jitka Prokšová, RNDr. Ph.D.

OF KMT FPE ZČU v Plzni

Email: proksovj@kmt.zcu.cz

## ŘEŠENÍ VYBRANÝCH ÚLOH Z TERMIKY

Jitka PROKŠOVÁ

### 1 Úvodní poznámky

Soubor příkladů, který slouží k procvičení složitějších situací z kalorimetrie, termodynamiky a molekulové fyziky je uveden níže.

Výsledky řešení jsou ve většině případů v závorce za příkladem.

### 2 Příklady na procvičení

1. Na digitálním Fahrenheitově teploměru se ukazuje číslo dvakrát větší než u Celsiova. Při jaké teplotě může tato situace nastat?
2. Do kalorimetru o tepelné kapacitě  $70 \text{ J} \cdot (\text{kg} \cdot \text{K})^{-1}$ , ve kterém se nacházela voda a ledové kostky, bylo ponořeno topné tělísko o výkonu  $50 \text{ W}$ . V čase  $5 \text{ min}$  po zapnutí proudu byla v kalorimetru stále teplota  $0^\circ\text{C}$ . V čase  $10 \text{ min}$  byla naměřena teplota  $3,1^\circ\text{C}$ , v čase  $15 \text{ min}$  teplota  $13,6^\circ\text{C}$ . Určete hmotnost  $m$  ledu a hmotnost  $M$  vody v kalorimetru na počátku děje.  
(0,077 kg, 0,247 kg)
3. Ocelová tyč má průřez  $2 \text{ cm}^2$  a její koeficient tepelné roztažnosti je  $\alpha = 12 \cdot 10^{-6} \text{ }^\circ\text{C}^{-1}$ . Tyč zahřejeme z teploty  $0^\circ\text{C}$  na teplotu  $50^\circ\text{C}$ , a pak ji prudce ochladíme na původní teplotu. Vypočtete, jakou nejmenší silou (působící ve směru osy tyče) je třeba tyč natahovat, aby se při ochlazení nezkrátila. Youngův modul pružnosti  $E$  určete z průměrné tabulkové hodnoty pro ocel (pro jednoduchost předpokládejte, že v tomto teplotním intervalu není  $E$  funkcí teploty).  
(25 kN)
4. Můžeme změřit zvětšení průměru mosazného válce způsobené zahříváním, provádíme-li měření mikrometrem, který měří přesně na  $0,01 \text{ mm}$ ? Měříme při teplotách  $5^\circ\text{C}$  a  $35^\circ\text{C}$ . Při  $5^\circ\text{C}$  byl průměr válečku  $20,45 \text{ mm}$ .
5. Mosazná koule ( $\beta = 56,2 \cdot 10^{-6} \text{ }^\circ\text{C}^{-1}$ ) má při teplotě  $15^\circ\text{C}$  průměr  $4 \text{ cm}$ . Oč je nutné zvýšit její teplotu, aby neprošla otvorem o průměru  $4,04 \text{ cm}$ ?  
(o  $540^\circ\text{C}$ )
6. Ocelová kolejnice má délku  $15 \text{ m}$ . O kolik se prodlouží při ohřátí o  $30^\circ\text{C}$ ? Kolik činí prodloužení na trati dlouhé  $100 \text{ km}$ ? (Předpokládejte, že:  $\alpha = 16,3 \cdot 10^{-6} \text{ }^\circ\text{C}^{-1}$ )  
(7,3 mm; 48,9m)
7. Ocelový předmět o hmotnosti  $0,9 \text{ kg}$  a teplotě  $300^\circ\text{C}$  byl vložen do vody o hmotnosti  $2,5 \text{ kg}$  a teplotě  $15^\circ\text{C}$ . Jaká je teplota předmětu a vody po dosažení rovnovážného stavu? Měrná tepelná kapacita oceli je  $452 \text{ J} \cdot (\text{kg} \cdot \text{K})^{-1}$ .

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

8. Parovodní potrubí průměru 60 cm a délky 1 km je vyrobeno z oceli tloušťky 1 cm. Součinitel tepelné vodivosti užitého materiálu je  $\lambda = 50 \text{ W} \cdot (\text{m} \cdot \text{K})^{-1}$ . Stanovte energetické ztráty při jeho užívání po dobu 30 dnů, víte-li, že venkovní teplota se ustálila na 17,8 °C a teplota dodávané páry byla 373 K. (2000 TJ)
9. K určení průměrné teploty tavící pece byla do ní vložena platinová koule o hmotnosti 100 g. Po vytažení byla koule ponořena do 1 kg vody o teplotě 10 °C. Jak vysoká byla teplota v peci, stoupla-li teplota vody na 14 °C a předpokládáme-li, že měrná tepelná kapacita platiny byla konstantní a rovna  $152 \text{ J} \cdot (\text{kg} \cdot \text{K})^{-1}$ . (1114 °C)
10. Kolik tepla propustí za hodinu skleněná tabule 4 mm silná o obsahu 2 m<sup>2</sup>, je-li venku –10 °C a teplota uvnitř místnosti je 20 °C? Předpokládejte, že součinitel tepelné vodivosti užitého materiálu je  $\lambda = 0,924 \text{ W} \cdot (\text{m} \cdot \text{K})^{-1}$

### 3 Závěr

K řešení je možné užít základní poznatky z kalorimetrie a termodynamiky, které obsahuje uvedená doporučená literatura.

### 4 Použitá literatura

SVOBODA, E., BAKULE, R. Molekulová fyzika. Academia Praha 1992

### 5 Kontakt na autora

Jitka Prokšová, RNDr. Ph.D.

OF KMT FPE ZČU v Plzni

Email: proksovj@kmt.zcu.cz

## ŘEŠENÍ ZAJÍMAVÝCH ÚLOH Z OPTIKY

Jitka PROKŠOVÁ

### 1 Úvodní poznámky

Soubor příkladů, který slouží k procvičení zajímavých situací z geometrické a vlnové optiky, je uveden níže.

Výsledky řešení jsou vždy v závorce za příkladem.

### 2 Příklady na procvičení

1. Jak hluboko se jeví při pohledu pod úhlem  $45^\circ$  kámen na dně řeky v místech, kde má řeka skutečnou hloubku 1 m? (62 cm)

2. Na rozhledně, vzdálené 3 km od místa, kde stojí pozorovatel, se rozsvítilo výstražné osvětlení. Současně s tím zazněl silný zvukový signál. Oba signály (světelný i zvukový) se šíří k pozorovateli bez překážek. Za jakou dobu po tom, co pozorovatel uviděl první záblesk výstražného osvětlení, uslyší zvukový signál? (Předpokládejte, že zvuk se šíří vzduchem rychlostí  $340 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ ). (9 s)

3. Monofrekvenční paprsek světla dopadá kolmo na menší odvěsnou stěnu hranolu ( $n = 1,57$ ), jehož úhly jsou  $30^\circ$ ,  $60^\circ$  a  $90^\circ$ . Na přeponové stěně hranolu je v místě dopadu paprsku kapka neznámé kapaliny. Určete index lomu kapaliny, jestliže úhel dopadu paprsku na přeponovou stěnu byl úhlem mezním. (1,36)

4. Jak široké spektrum vytvoří skleněný hranol, jehož index lomu pro červené světlo je 1,51 a pro fialové světlo je 1,53. Určete pro případy, kdy světlo dopadá pod úhly  $45^\circ$  a  $60^\circ$ , přičemž lámavý úhel hranolu je  $60^\circ$  a stínítko je postavené kolmo na červené paprsky ve vzdálenosti 1m od hranolu. (3,3 cm; 2,8 cm)

5. Paprsek monochromatického světla dopadá do průsečíku úhlopříček horní stěny skleněné krychle. Určete, při jakém úhlu dopadu už nebude lomený paprsek po průchodu krychlí dopadat na spodní podstavu, ale bude vycházet z krychle boční stěnou? (předpokládejte, že index lomu krychle je 1,49) ( $\alpha \geq 60^\circ$ )

## INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

6. Index lomu kanadského balzámu je 1,53 a index lomu islandského vápence je pro "o" 1,658 a pro "e" 1,486. Který z paprsků se úplně odrazí ve vápenci na kanadském balzámu a za jakých podmínek? (o)

7. Na olejovou skvrnu (tloušťky  $0,2 \mu\text{m}$ ) na vodní hladině dopadá kolmo bílé světlo. Určete, jaká barva se nebude odrážet a která se odrazí nejvíce. Předpokládejte, že rychlost šíření světla v oleji je  $2 \cdot 10^8 \text{ ms}^{-1}$ . (max - modrá, min - žlutá)

8. Na optickou mřížku (100 vrypů na 1 mm) dopadá kolmo svazek bílého světla. Pomocí spojky ( $f = 30 \text{ cm}$ ), kterou umístíme těsně za mřížku, se vytvoří na stínítku spektrum. V jaké vzdálenosti je od sebe červená a fialová barva ve spektru 2. řádu. (22–23 mm)

9. Stůl je osvětlen dvěma žárovkami, které jsou umístěny na závěsu ve vzájemné vzdálenosti 1 m a ve výšce 2 m nad rovinou stolu. Určete, jaké bude osvětlení v bodech pod zdroji světla, je-li svítivost každé žárovky 200 cd. (86 lx)

10. Ulice je široká 20 m a osvětlená lampami o 500 cd, zavěšenými ve výšce 4 m nad jejím středem. V jaké největší vzdálenosti mohou být dvě sousední lampy, aby osvětlení dlažby nekleslo pod 2 lx? (13m)

### 3 Závěr

K řešení je třeba užít základních zákonitostí geometrické a vlnové optiky – viz doporučená literatura.

### 4 Použitá literatura

FUKA, B., HAVELKA, F.: Optika a atomová fyzika I. Optika, SPN Praha 1961.

MALÝ, P.: Optika, Nakladatelství Karolinum Praha 2008.

### 5 Kontakt na autora

Jitka Prokšová, RNDr. Ph.D.

OF KMT FPE ZČU v Plzni

[proksovj@kmt.zcu.cz](mailto:proksovj@kmt.zcu.cz)

## SVĚT BAREV (I V NÁS)

Robert KUNESCH

### 1 Úvod

Hlavním úkolem či cílem úvodu přednášky je motivování studentů k danému tématu. Účastníci kempu jsou proto dotazováni na jejich zájmové činnosti, které mají souvislost se začínající přednáškou (filmy, móda, foto, atd.). Stejně tak na počátku prezentace je z motivačních důvodů několik kreseb Juliana Beevra.

### 2 Svět barev

Přednáška, doprovázená prezentací začíná poznámkou i barvě coby efektu, znázorněním cesty zmiňovaného efektu od jeho nositele – světlo, přes předmět, od kterého se světlo (barva) odráží, přes oko a barevné vnímání v něm, až do výslednice v mozku. Studenti jsou dotazováni na dosud nabyté vědomosti v dosavadní výuce fyziky i na vlastní zkušenosti v dané problematice.

V rychlém sledu je zopakován historický náhled na světlo, rozklad světla, spektrum, odraz světla na povrchu předmětu, lidské oko, které pro nás představuje nejdůležitější optickou soustavu a mechanismus barevného vidění.

#### 2.1 Sčítání a odčítání barev

Rozdíl mezi aditivní a subtraktivním skládáním barev. V rámci mezipředmětových vztahů vysvětlit interpretaci ve výpočetní technice přes barevné prostory RGB (PC) s CMY (tisk) a seznámení studentů s dalšími barevnými prostory, systémy apod.

#### 2.2 Barvy v nás

Pokračování na bázi mezipředmětových vztahů. Dostáváme se k psychologii barev. Studenti jsou konfrontováni se symbolickou řečí barev, s barevnými asociacemi, s vlivem barev na temperament, s ukázkami „barevných“ psychotestů a hlavně s nutností si uvědomit, že si každý z nás vytváří na základě kvantové mechaniky svojí vlastní realitu (barvy).

#### 2.3 Barvy v malířství

V mezipředmětových vztazích se dostáváme k výtvarné kultuře. Posluchači jsou vyzváni k diskuzi na téma barva a film. Následně jsou seznámeni s problematikou barev v malířství. Na uměleckém směru pointilismu je demonstrována harmonie barev. Je vysvětlena impresionní,



## INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

konstruktivní a expresivní fce barev i s příslušnými ukázkami věhlasných autorů. Dále mají studenti možnost vidět na ukázkách, jak si malíři vypomáhají při malování objemu a prostoru.

### 2.4 Barvy kolem nás

Zde se spolu s účastníky kurzu vracíme k psychologii barev. Probíhá rozprava ohledně barev, které nás obklopují v reálném životě, jejich smysl, význam a vliv na naši mysl. Ať se jedná o reklamu, módu, obchod, kadeřnictví apod. Je kladen důraz na signální fci barev.

### 3 Závěr

Zakončení přednášky i prezentace se nese v krátkém zopakování přednášeného tématu a jako odlehčení jsou uvedeny ukázky optických klamů.

### 4 Použitá literatura

PLESKOTOVÁ, P.: Svět barev. 1. vyd. Praha: Albatros, 1987. 200 s. ISBN 13-806-87.

### 5 Kontakt na autora

Robert Kunesch, Mgr.

OF KMT FPE ZČU

Email: kotal@kmt.zcu.cz

## Úlohy ze školních kol FO

Mgr. Petr Mazanec

### 1. Úvod

V přednášce bylo ukázáno řešení úloh z minulých ročníků fyzikální olympiády.

### 2. Stat'

#### Příklad 1 (51.ročník FO kategorie A – školní kolo)

Automobil (za jízdy po přímé trati)

Automobil má motor o maximálním výkonu  $P_m = 95$  kW a jeho hmotnost s jednou osobou je  $m = 1\,000$  kg. K uvedení do pohybu odbrzděného automo-

bilu se zařazeným neutrálem na vodorovné silnici musel přivolaný pomocník

”

vyvinout ve vodorovném směru sílu o velikosti  $F_0 = 120$  N. Předpokládejte, že velikost odporové síly je popsána funkcí

$$F_t = Av^2 + F_0,$$

kde  $A$  je konstanta a  $v$  je velikost okamžité rychlosti.

- Řidič provedl experiment: vyjel na vrchol kopce, z něhož se přímočará vozovka svažuje pod stálým úhlem  $\alpha = 4,0^\circ$ . Automobil po rozjezdu z kopce a po zařazení neutrálu dosáhl stálé rychlosti  $v_1 = 72$  km/h. Určete konstantu  $A$ .
- Jaký musí být výkon  $P_1$  motoru, aby se automobil pohyboval stálou rychlostí  $v_1 = 72$  km/h po vodorovné vozovce?
- Při jízdě stálou rychlostí musí motor pracovat se stálým výkonem. Sestrojte graf závislosti výkonu  $P$  motoru na rychlosti  $v$  a určete maximální rychlost  $v_m$  při výkonu  $P_m$ .

**Řešení:**



INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

- a) Auto jelo rovnoměrně přímočaře stálou rychlostí z kopce dolů, protože složka tíhové síly  $F = mgsin \alpha$  je v rovnováze s odporovou silou  $F_t$ .

$$F = F_t$$

$$mgsin \alpha = Av_1^2 + F_0$$

$$A = \frac{mgsin \alpha - F_0}{v_1^2} = 1,41 kg \cdot m^{-1}$$

- b) Okamžitý výkon  $P_1 = F_t v_1 = (Av_1^2 + F_0) \cdot v_1 = v_1 mgsin \alpha = 14 kW$

- c) Výkon motoru  $P = F_t v = (Av^2 + F_0) \cdot v = Av^3 + F_0 v$   
je kubickou funkcí rychlosti  $v$ .  
Pomocí grafu funkce a její tabulky můžeme numericky zjistit, že  
 $P = P_m = 95 kW$   
při maximální rychlosti  $v = v_m = 40 m \cdot s^{-1} = 144 km \cdot h^{-1}$ .

Příklad 2 (51.ročník FO kategorie B – školní kolo)

2. Pohyby v planetární soustavě

O planetě Mars zjistili astronomové na základě měření z povrchu Země, že siderická doba oběhu Marsu je  $T_M = 1,881$  roku. V úloze vystačíme při řešení problémů s modelem, v němž se obě planety pohybují po kružnicích, jejichž střed splývá se středem Slunce.

- a) Určete poloměr kružnice, po níž se pohybuje střed Marsu, a rychlost pohybu středů obou planet při jejich pohybu kolem středu Slunce.
- b) Z údajů o pohybu Marsu kolem Slunce určete hmotnost Slunce.
- c) Jestliže se středy Slunce, Země a Marsu dostanou přibližně do téže polopřímky, pak právě o půlnoci začneme naše pozorování. Za jak dlouho se tato situace bude opakovat? Tato doba se nazývá synodická oběžná doba.

Řešení:

- a) Podle 3. Keplerova zákona platí

$$\left(\frac{r_m}{r_z}\right)^3 = \left(\frac{T_m}{T_z}\right)^2$$

$$r_m = r_z \cdot \left(\frac{T_m}{T_z}\right)^{\frac{2}{3}} = 1,524AU$$

$$v_m = \frac{2\pi r_m}{T_m} = 24,1 km \cdot s^{-1}$$

$$v_z = \frac{2\pi r_z}{T_z} = 29,8 km \cdot s^{-1}$$

- b) Gravitační síla, kterou působí Slunce o hmotnosti  $M$  na Mars o hmotnosti  $m$  je silou dostředivou, která způsobuje pohyb Marsu po kružnici o poloměru  $r = r_m$  **stálou rychlostí**  $v = v_m$ .

$$F_g = F_d$$

$$\frac{\kappa m M}{r^2} = \frac{mv^2}{r}$$

$$M = \frac{v^2 r}{\kappa} = 1,99 \cdot 10^{30} kg$$

- c) Synodická úhlová rychlost je rovna rozdílu úhlových rychlostí Země a Marsu při oběhu kolem Slunce. Synodická oběžná doba odpovídá této úhlové rychlosti a je to perioda dvou po sobě jdoucích opozic nebo konjunkcí Marsu a Země se Sluncem, kterou naměří pozorovatel na Zemi.

$$\omega_s = \omega_z - \omega_m$$

$$T_s = \frac{T_z \cdot T_m}{T_m - T_z} = 2,135 \text{ roku}$$

### Příklad 3 (51.ročník FO kategorie C – školní kolo)

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

1. Macocha

Z okraje vyhlídkové plošiny Macochy vrhl chlapec svisle dolů kámen s počáteční rychlostí o velikosti  $5,0 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ . Za dobu  $5,20 \text{ s}$  od začátku vrhu byl slyšet dopad kamene na vodní hladinu. K vrhu došlo při teplotě vzduchu  $20^\circ \text{C}$ , při níž se zvuk ve vzduchu šíří rychlostí  $343 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ . Určete

- výšku horního okraje propasti nad vodní hladinou a dobu od začátku vrhu, za kterou dopadl kámen na vodní hladinu,
- velikost rychlosti, s jakou dopadl kámen do vody.

Odpor vzduchu zanedbejte.

**Řešení:**

Kámen při pádu s počáteční rychlostí  $v_0$  padal do propasti po dobu  $t_1$  na dráze  $s = h$  a při dopadu do vody měl rychlost  $v$ . Pro jeho dráhu a rychlost platí:

$$v = v_0 + gt_1$$

$$s = h = v_0 t_1 + \frac{gt_1^2}{2}$$

Po nárazu kamene na hladinu vody se šíří zvuk k chlapci rychlostí  $v_1$  rovnoměrně přímočaře po stejné dráze

$$s = h = v_1 \cdot t_2$$

kde  $t_2$  je doba pohybu zvukové vlny k chlapci.

Ze zadání plyne, že  $t_1 + t_2 = t = 5,20 \text{ s}$ .

Matematickým řešením výše uvedených rovnic (3 lineární a 1 kvadratická) vypočteme všechny neznámé veličiny:

$$t_1 = 4,80 \text{ s} \quad t_2 = 0,40 \text{ s} \quad h = 140 \text{ m} \quad v = 52 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} = 187 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$$



INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

### 3. Závěr

Bylo provedeno řešení tří fyzikálních úloh, zadaných v 51. ročníku této soutěže v kategoriích A, B a C ve školním kole.

### Použitá literatura:

Zadání školního kola FO v 51. ročníku této soutěže, [www-stranky ÚV FO](http://www-stranky.uvfo.cz).

### 5. Kontakt na autora

Mgr. Petr Mazanec

Gymnázium Plzeň, Mikulášské nám. 23

[pmazanec@mikulasske.cz](mailto:pmazanec@mikulasske.cz)

## Využití matematiky při řešení fyzikálních úloh - kvadratické, exponenciální a goniometrické rovnice

Petr Mazanec

### 1. Úvod

V přednášce bylo ukázáno využití matematického řešení kvadratických, exponenciálních a goniometrických rovnic při řešení fyzikálních úloh.

### 2. Stat'

#### Příklad 1

Kaskadér o hmotnosti  $m=90$  kg, přivázaný k pružnému lanu, používanému na bungee-jumping, o tuhosti  $k=50\text{N/m}$  a délce v nezátženém stavu  $l=30\text{m}$ , skáče z vrcholu mostu, který je ve výšce  $h$  nad hladinou přehrady. Určete tuto výšku, jestliže ho pružné lano při pádu zastaví těsně nad hladinou a pak ho vymrští zpět nahoru. Zanedbejte odpor vzduchu při prvním pádu a předpokládejte, že lano při deformaci vyhovuje Hookovu zákonu.

Řešení:

Úlohu vyřešíme užitím zákona zachování mechanické energie, který platí při zanedbání odporu vzduchu.

Polohová energie kaskadéra v tíhovém poli Země na začátku pádu v poloze 1 se přemění na polohovou energii deformovaného lana v nejnižší poloze 2 při pádu brzděném natahujícím se pružným lanem. Nulovou hladinu polohové energie v tíhovém poli země volíme v poloze 2. V obou polohách je kinetická energie kaskadéra nulová.

Tedy platí:

$$E_1 = E_2$$

$$mgh = \frac{kx^2}{2}$$

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Z geometrie obou poloh vyplývá vztah  $h = l + x$ , jehož dosazením do předchozí rovnice dostaneme kvadratickou rovnici pro prodloužení lana  $x$  při deformaci v poloze 2.

$$kx^2 - 2mgx - 2mgl = 0$$

Podmínka pro neznámé prodloužení  $x$  je

$$x > 0$$

Obecně můžeme řešení vyjádřit ve tvaru

$$x_{1,2} = \frac{mg \pm \sqrt{m^2 g^2 + 2mgkl}}{k}$$

Číselně vychází při dosazení  $g = 9,81 \text{ ms}^{-2}$

$$x_1 = 54,7\text{m} \quad x_2 = -19,4\text{m}$$

Záporné řešení nesplňuje podmínku pro prodloužení a nemá fyzikální smysl, protože lano se nemůže při kmitu směrem vzhůru zkracovat.

Tedy maximální prodloužení lana je  $x = 54,7\text{m}$  a výška mostu

$$h = l + x = 30\text{m} + 54,7\text{m} = 84,7\text{m} .$$

### Příklad 2

Odpor termistoru v digitálním teploměru s měřicím rozsahem  $t \in \langle 0^\circ\text{C}; 100^\circ\text{C} \rangle$

je funkcí termodynamické teploty čidla  $T$  v kelvinech podle vztahu

$$R = R_B \cdot e^{\frac{B}{T}}$$

kde  $B$  a  $R_B$  jsou konstanty pro daný polovodičový materiál. Při teplotě  $25^\circ\text{C}$  jsme naměřili odpor termistoru  $100\Omega$  a při teplotě  $25^\circ\text{C}$  odpor  $40\Omega$ . Vypočítejte :

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

- konstanty  $B$  a  $R_B$
- odpor termistoru při teplotě  $100^\circ\text{C}$
- teplotu ve  $^\circ\text{C}$ , při které má termistor odpor  $50\Omega$

Řešení:

Využijeme funkční předpis a matematického vztahu  $\ln(e^x) = x$ .

$$R_0 = R_B \cdot e^{\frac{B}{T_1}} \quad T_1 = 273,15\text{K}$$

$$R_{25} = R_B \cdot e^{\frac{B}{T_2}} \quad T_2 = 298,15\text{K}$$

$$R_{100} = R_B \cdot e^{\frac{B}{T_3}} \quad T_3 = 373,15\text{K}$$

$$R = R_B \cdot e^{\frac{B}{T}} \quad T \in (273,15\text{K}; 373,15\text{K}) \quad t = T - 273,15$$

Vydělením první a druhé rovnice dostaneme

$$\frac{R_0}{R_{25}} = e^x \quad \text{kde } x = \frac{B \cdot (T_2 - T_1)}{T_2 \cdot T_1}$$

Řešením této exponenciální rovnice logaritmováním obou stran rovnice přirozeným logaritmem podle výše uvedeného matematického vztahu dostaneme

$$x = \ln\left(\frac{R_0}{R_{25}}\right)$$

$$B = \frac{T_2 \cdot T_1}{T_2 - T_1} \cdot \ln\left(\frac{R_0}{R_{25}}\right)$$

Číselně vychází  $B = 2985\text{K}$ .

Užitím  $B$  z první rovnice vyjádříme pomocí vztahu  $\frac{1}{e^x} = e^{-x}$

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

$$R_B = \frac{R_0}{e^{\frac{B}{T_1}}} = R_0 \cdot e^{\frac{-B}{T_1}}$$

Číselně vychází  $R_B = 1,795 \cdot 10^{-3} \Omega$ .

Dosažením B a  $R_B$  do třetí rovnice vypočítáme  $R_{100} = 5,3 \Omega$ .

Z funkčního předpisu vyjádříme

$$\frac{R}{R_R} = e^x \quad \text{kde } x = \frac{B}{T}$$

Řešením této exponenciální rovnice dostáváme

$$x = \ln\left(\frac{R}{R_R}\right)$$

$$T = \frac{B}{\ln\left(\frac{R}{R_R}\right)}$$

$$t = \frac{B}{\ln\left(\frac{R}{R_R}\right)} - 273,15$$

Číselně pro  $R=50\Omega$  dostaneme  $t = 18,5^\circ\text{C}$ .

### Příklad 3

Za jakou dobu  $t$  od počátku pádu se kaskadér v příkladu 1 dostane do nejnižší polohy, jestliže opět v tomto časovém intervalu zanedbáme odpor vzduchu?



Řešení:

Pád můžeme rozdělit na 2 úseky – volný pád na dráze  $l = 30\text{m}$  než se napne lano za dobu  $t_1$  a na něj navazující část netlumeného kmitu na dráze  $x_1 = 54,7\text{m}$  za dobu  $t_2$ . Celková doba pádu  $t = t_1 + t_2$ .

Ze vztahu pro dráhu volného pádu dostaneme

$$l = \frac{gt_1^2}{2}$$

$$t_1 = \sqrt{\frac{2l}{g}} = 2,47\text{s}$$

Těsně před napnutím lana má okamžitou rychlost  $v_1 = gt_1 = 24,26\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$ .

Kmity kaskadéra se díky odporu vzduchu nakonec utlumí, a zůstane v klidu viset v rovnovážné poloze s prodloužením lana  $x_0$ . V této poloze je tíhová síla svisle dolů v rovnováze se silou pružiny svisle vzhůru. Z toho odvodíme velikost  $x_0$ .

$$F_G = F_P$$

$$mg = kx_0$$

$$x_0 = \frac{mg}{k} = 17,7\text{m}$$

V této rovnovážné poloze je okamžitá výchylka  $y$  z této polohy při kmitání nulová. Pokud orientujeme osu  $y$  svisle vzhůru, můžeme okamžitou výchylku  $y$  v čase  $t$  od začátku kmitu vyjádřit  $y = x_0 - x$ , kde  $x$  je okamžité prodloužení v čase  $t$ .

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Považujeme-li část kmitu z polohy  $x = 0$  do polohy  $x = x_1 = 54,7m$  za netlumený kmit přes rovnovážnou polohu  $x = x_0 = 17,7m$ , potom jeho amplituda výchylky je  $y_m = x_1 - x_0 = 37m$ .

Perioda netlumeného kmitu je

$$T = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{m}{k}} = 8,43s$$

a úhlová frekvence netlumených kmitů  $\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{\sqrt{5}}{3} \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$ .

Počáteční výchylka kmitajícího kaskadéra v čase  $t = 0$  je  $y_0 = x_0 = 17,7m$  a počáteční rychlost kmitání  $v_0 = -v_1 = -24,26m \cdot \text{s}^{-1}$

( $v_0$  má opačný směr než osa  $y$ , a proto je záporná!).

Amplituda rychlosti  $v_m = \omega y_m = 27,58m \cdot \text{s}^{-1}$ .

Pro okamžitou výchylku  $y$  a okamžitou rychlost  $v$  kaskadéra při netlumeném kmitání platí tyto vztahy v závislosti na čase  $t$ :

$$y = y_m \cdot \sin(\omega t + \varphi_0)$$

$$v = v_m \cdot \cos(\omega t + \varphi_0)$$

Dosažením  $t = 0$  a počátečních podmínek kmitu  $y_0$  a  $v_0$  dostaneme soustavu goniometrických rovnic pro počáteční fázi kmitu  $\varphi_0$ .

$$\sin\varphi_0 = \frac{y_0}{y_m} = 0,4784 \quad \cos\varphi_0 = \frac{v_0}{v_m} = -0,8796$$

Řešení této soustavy leží v intervalu  $(\frac{\pi}{2}; \pi)$  a je rovno přibližně  $\varphi_0 = 2,64 \text{ rad}$ .

Nyní již můžeme počítat dobu kmitu  $t_2$  od okamžiku  $t = 0$  do nejnižší polohy, kde  $y = -y_m = -37m$  a  $v = 0$ . Pro tyto hodnoty okamžité výchylky a rychlosti dostáváme soustavu goniometrických rovnic s neznámou  $t$  a  $t_2$  je nejmenší kladné řešení libovolné z těchto rovnic. Pro jednodušší výpočet si vybereme okamžitou rychlost, která je nulová v nejnižší poloze. Proto platí:

$$\cos(\omega t + \varphi_0) = 0$$

$$\omega t + \varphi_0 = \frac{\pi}{2} + k\pi \quad k \in \mathbb{Z}$$

Nejmenší kladné řešení dostaneme pro  $k = 1$ :

$$\omega t_2 + \varphi_0 = \frac{3\pi}{2}$$

$$t_2 = \frac{3\pi - 2\varphi_0}{2\omega} = 2,78s$$

Celková doba pádu do nejnižšího bodu je  $t = t_1 + t_2 = 2,47s + 2,78s = 5,25s$ .

### 3. Závěr

Ve třech příkladech bylo ukázáno využití matematického řešení kvadratických, exponenciálních a goniometrických rovnic ve fyzikálních úlohách.

### 4. Použitá literatura:

ŠEDIVÝ, P.: Teplotní závislosti fyzikálních veličin, knihovnička FO, studijní text.

### 5. Kontakt na autora

Mgr. Petr Mazanec

Gymnázium Plzeň, Mikulášské nám. 23

[pmazanec@mikulasske.cz](mailto:pmazanec@mikulasske.cz)

## Využití matematiky při řešení fyzikálních úloh - součet nekonečné řady a určitý integrál ve fyzice

Petr Mazanec

### 1. Úvod

V přednášce byla ukázána na několika úlohách souvislost součtu nekonečné řady a určitého integrálu.

### 2. Stať

#### Příklad 1

Závislost okamžité rychlosti rovnoměrně zrychleného pohybu na čase je lineární funkcí

$$v = v_0 + at$$

V čase  $t = 0$  jsou počáteční podmínky  $v = v_0$  a  $s = 0$ .

Odvoďte funkční závislost dráhy  $s$  na čase  $t$ .

Řešení:

a) Součtem nekonečné řady

Časový interval

$\{0; t\}$  rozdělíme na  $n$  intervalů o délce  $\Delta t = \frac{t}{n}$  ( $n \in \mathbb{N}$ ).

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Pokud je  $n$  dostatečně velké přirozené číslo ( $n \rightarrow \infty$ ), pak můžeme předpokládat že v těchto krátkých intervalech se rychlost téměř nezmění. Označme  $k$  pořadí intervalu od začátku pohybu ( $k \in \{1, 2, 3, \dots, n\}$ ).

Určíme rychlosti  $v_k$  a dráhy  $s_k = v_k \cdot \Delta t$  v těchto intervalech.

$$k = 1 \quad t = \Delta t \quad v_1 = v_0 + a\Delta t \quad s_1 = v_1 \cdot \Delta t$$

$$k = 2 \quad t = 2\Delta t \quad v_2 = v_0 + 2a\Delta t \quad s_2 = v_2 \cdot \Delta t$$

$$k = k \quad t = k\Delta t \quad v_k = v_0 + ka\Delta t \quad s_k = v_k \cdot \Delta t$$

.

.

.

$$k = n \quad t = n\Delta t \quad v_n = v_0 + na\Delta t \quad s_n = v_n \cdot \Delta t$$

Celkovou dráhu  $s(n)$  v intervalu  $(0; t)$  pro zvolené dělení  $n$  intervalu vypočteme

$$s(n) = s_1 + s_2 + \dots + s_k + \dots + s_n = \sum_{k=1}^n s_k = \Delta t \cdot \sum_{k=1}^n v_k$$

$$\sum_{k=1}^n v_k = \sum_{k=1}^n (v_0 + ka\Delta t) = \sum_{k=1}^n v_0 + a\Delta t \cdot \sum_{k=1}^n k = n v_0 + a\Delta t \cdot \frac{n(n+1)}{2}$$

Při výpčtu předchozího součtu jsme využili známý vzorec pro součet přirozených čísel od 1 do  $n$  :

$$\sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}$$

Z výše odvozených vztahů plyne:

$$s(n) = nv_0\Delta t + a(\Delta t)^2 \cdot \frac{n(n+1)}{2}$$

Po dosazení za  $\Delta t = \frac{t}{n}$  a úpravě dostaneme

$$s(n) = v_0 t + at^2 \cdot \frac{n+1}{2n}$$

Výsledek bude tím přesnější, čím bude číslo  $n$  větší (v limitě se musí blížit k  $\infty$ ).

Tedy celková dráha  $s = \lim_{n \rightarrow \infty} s(n) = v_0 t + at^2 \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{2n} = v_0 t + at^2 \cdot \frac{1}{2}$

Matematicky jsme provedli součet nekonečné řady pomocí limity poslounosti

$$f(n) = \frac{n+1}{2n} = \frac{1 + \frac{1}{n}}{2}$$

Z předchozí úpravy a z toho, že  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$  vyplývá, že  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(n) = \frac{1}{2}$ .

**Závěr:**  $s = v_0 t + \frac{at^2}{2}$

Tato úvaha o součtu nekonečných řad velmi malých kladných čísel blížících se k nule dovedla Isaaca Newtona k objevu integrálního počtu.

b) Pomocí určitého integrálu

V zápise určitého integrálu je  $dt = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \Delta t$ . Určitý integrál funkce  $v(t)$  v mezích od 0 do  $t$  (v intervalu  $\{0; t\}$ ) je roven součtu nekonečné řady v řešení a).

$$s = \int_0^t v \cdot dt = \int_0^t (v_0 + at) \cdot dt = v_0 \cdot \int_0^t dt + a \cdot \int_0^t t \cdot dt = v_0 \cdot [t]_0^t + a \cdot \left[ \frac{t^2}{2} \right]_0^t$$

**Závěr:**  $s = v_0 t + \frac{at^2}{2}$

Využili jsme pravidla a vzorce pro výpočet určitého integrálu, při jejichž znalosti velmi rychle dojdeme ke stejnému výsledku.

## Příklad 2

Tenká tyč o hmotnosti  $m$  a délce  $l$  leží na ose  $x$  s levým krajním bodem v počátku soustavy souřadnic a začne se otáčet kolem osy  $z$  úhlovou rychlostí  $\omega$  tak, že je stále kolmá na osu  $z$  ( $z$  je pevná osa otáčení a počátek je pevný bod tyče při otáčení). Určete kinetickou energii tyče při otáčení.

### a) Součtem nekonečné řady

Délkový interval tyče  $x \in \{0; l\}$  rozdělíme na  $n$  intervalů o délce  $\Delta x = \frac{l}{n}$  ( $n \in N$ ).

Pokud je  $n$  dostatečně velké přirozené číslo ( $n \rightarrow \infty$ ), pak můžeme předpokládat že jsme tyč rozdělili na  $n$  hmotných bodů o stejné hmotnosti  $\Delta m = \frac{m}{n}$ . Označme  $k$  pořadí hmotného bodu od počátku soustavy souřadnic ( $k \in \{1, 2, 3, \dots, n\}$ ).

Určíme rychlosti  $v_k$  a poloměry otáčení  $r_k$  a kinetické energie  $E_k$  těchto hmotných bodů.

$$k = 1 \quad r_1 = \Delta x \quad v_1 = r_1 \omega \quad E_1 = \frac{\Delta m v_1^2}{2}$$

$$k = 2 \quad r_2 = 2\Delta x \quad v_2 = r_2 \omega \quad E_2 = \frac{\Delta m v_2^2}{2}$$

$$k = k \quad r_k = k\Delta x \quad v_k = r_k \omega \quad E_k = \frac{\Delta m v_k^2}{2}$$

·  
·  
·

$$k = n \quad r_n = n\Delta x \quad v_n = r_n \omega \quad E_n = \frac{\Delta m v_n^2}{2}$$

Celkovou kinetickou energii  $E(n)$  tyče

vypočteme jako součet

$$E(n) = \sum_{k=1}^n E_k = \frac{\Delta m}{2} \cdot \sum_{k=1}^n v_k^2 = \frac{\Delta m \omega^2}{2} \cdot \sum_{k=1}^n r_k^2 = \frac{\Delta m \omega^2 \cdot (\Delta x)^2}{2} \cdot \sum_{k=1}^n k^2$$

Pro součet druhých mocnin přirozených čísel od 1 do  $n$  platí vzorec

$$\sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$



Užitím vzorce dostaneme

$$E(n) = \frac{\Delta m \omega^2 \cdot (\Delta x)^2 \cdot n(n+1)(2n+1)}{12}$$

Po dosazení za  $\Delta m$  a  $\Delta x$  z výše uvedených vztahů dostaneme po úpravě:

$$E(n) = \frac{m\omega^2 l^2}{12} \cdot \frac{(n+1)(2n+1)}{n^2}$$

Výsledek bude tím přesnější, čím bude číslo  $n$  větší (v limitě se musí blížit k  $\infty$ ).

Tedy celková kinetická energie  $E = \lim_{n \rightarrow \infty} E(n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{m\omega^2 l^2}{12} \cdot \frac{(n+1)(2n+1)}{n^2}$

$$E = \frac{m\omega^2 l^2}{12} \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)(2n+1)}{n^2} = \frac{m\omega^2 l^2}{12} \cdot 2 = \frac{m\omega^2 l^2}{6}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)(2n+1)}{n^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right) \left(2 + \frac{1}{n}\right) = (1+0)(2+0) = 2$$

**Závěr:**  $E = \frac{m\omega^2 l^2}{6}$

b) Pomocí určitého integrálu

Poloměr otáčení hmotného bodu o hmotnosti  $dm = \lim_{\Delta m \rightarrow 0} \Delta m$  a délce

$dx = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta x$  v poloze o souřadnici  $x$  je  $r = x$ . Jeho rychlost  $v = r\omega = x\omega$ .

Diferenciál hmotnosti můžeme vyjádřit vztahem  $dm = \frac{m}{l} \cdot dx$  pomocí diferenciálu délky.

Diferenciál kinetické energie  $dE = \lim_{\Delta E \rightarrow 0} \Delta E$  můžeme vyjádřit pomocí diferenciálu hmotnosti:

$$dE = \frac{dm \cdot v^2}{2}$$

Po dosazení výše uvedených vztahů a úpravě dostaneme vztah mezi diferenciály  $dE$  a  $dx$ .

$$dE = \frac{m\omega^2}{2l} \cdot x^2 \cdot dx$$

Určitý integrál diferenciálu  $dE$  v mezích od 0 do  $l$  ( v intervalu  $x \in \{0; l\}$  ) je roven součtu nekonečné řady v řešení a) a tedy celkové kinetické energii tyče.

$$E = \int_0^l dE = \frac{m\omega^2}{2l} \cdot \int_0^l x^2 \cdot dx = \frac{m\omega^2}{2l} \cdot \left[ \frac{x^3}{3} \right]_0^l = \frac{m\omega^2}{2l} \cdot \frac{l^3}{3} = \frac{m\omega^2 l^2}{6}$$

Opět jsme velmi rychle došli ke správnému výsledku pomocí určitého integrálu.



INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

### 3. Závěr

Bylo provedeno řešení dvou fyzikálních úloh, na kterých byl ilustrován určitý integrál jako součet konvergentní nekonečné řady, pomocí které je definován v matematické analýze.

### 4. Použitá literatura

Časopis Kvant, číslo 10, ročník 1983

### 5. Kontakt na autora

Mgr. Petr Mazanec

Gymnázium Plzeň, Mikulášské nám. 23

Email: pmazanec@mikulasske.cz

## ZÁKLADY ZPRACOVÁNÍ FYZIKÁLNÍCH MĚŘENÍ

Robert KUNESCH

### 1 Úvod

Hlavním úkolem či cílem úvodu přednášky je motivování studentů k danému tématu. Účastníkům kempu je proto podrobně vysvětleno, proč je nutné naučit se protokolovat naměřené výsledky fyzikálních (i jiných) měření, kontinuita s budoucími vědeckými pracemi, apod. V laboratořích si mají možnost prohlédnout praktické úlohy, kterými jsou úkolováni vysokoškolští studenti.

### 2 Elaborát, protokol...

Studenti jsou dotazováni na dosud nabyté vědomosti v dosavadní výuce fyziky či v jiných předmětech. Jsou jim ukázány různé druhy zpracování výsledků měření, jsou upozorněni na mnohá úskalí, která na ně mohou čekat při vytváření protokolu nebo i při samotném předchozím

#### 2.1 Náležitosti protokolu

Na konkrétních příkladech jsou ukázané nejdůležitější formální náležitosti, které musí řádný elaborát obsahovat, jako je úvod, čísla přístrojů, použité vztahy, atd. Je vysvětlen zásadní význam závěru u každého protokolu, opět s ohledem na další praktické možnosti.

#### 2.2 Tabulky

Studenti jsou konfrontováni se svými znalostmi a zkušenostmi z dosavadního studia při práci s programy Word a Excel. Jsou jim ukázány různé metody zpracování a následná tabelování výsledků s důrazem na přehlednost.

#### 2.3 Grafy

Účastníkům kurzu jsou ukázány nejvýhodnější a nejhodnější metody zpracování pomocí grafů. Vše s ohledem na speciální potřeby fyziky. Je jim zdůrazněna funkce grafu pro výsledek samotného měření a motivace k jejich co možná nejpresnějšímu provedení. Jsou zasvěceni do dalších důležitých údajů, které mohou grafy poskytovat, jako je spojnice trendu, rovnice křivky v grafu, hodnotu spolehlivosti, apod.



INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

### 3 Závěr

Na závěr je vše se studenty zopakováno na jednoduché praktické ukázky v laboratořích.

### 4 Použitá literatura

[HAVEL, Václav; PETŘÍK, Josef; RAUNER, Karel. Fyzikální praktikum I: Určeno stud. 1. a 2. roč. učitelství VVP \[všeobecně vzdělávací předměty\]. Plzeň: Západočeská univerzita, 1992. ISBN 80-7043-047-8.](#)

### 5 Kontakt na autora

Robert Kunesch, Mgr.

OF KMT FPE ZČU

Email: kotal@kmt.zcu.cz

## Zatmění Slunce a Měsíce

Lumír HONZÍK

### 1. Úvod

Problematika zatmění a fází Měsíce se týká tří těles. Prvním a největším tělesem je Slunce, které představuje přirozený zdroj světla (samozřejmě i tepla). Slunce má průměr necelých 1 400 000 km a nachází se v průměrné vzdálenosti od země 149,6 miliónu km, což je 1 AU (astronomická jednotka). Z této vzdálenosti se Slunce jeví pod úhlem přibližně  $0,5^\circ$ .

Druhým tělesem je Měsíc, což je přirozená družice Země. Měsíc nesvítí vlastním světlem, ale pouze odráží světlo od Slunce. Jeho průměr dosahuje 3476 km a od Země se pohybuje v průměrné vzdálenosti kolem 385 000 km. I on se z této vzdálenosti jeví pod úhlem kolem  $0,5^\circ$ , tedy přibližně stejným jaké má Slunce. Dráha Měsíce je velmi komplikovaná. Nejen že je excentrická, ale je i skloněna pod úhlem  $5,2^\circ$ .

Třetím tělesem je planeta Země, pátá největší planeta sluneční soustavy. Její průměr dosahuje 12 756 km.

Tím jak Měsíc obíhá Zemi, dostává se geometricky do různých poloh a mohou nastat některé pozorovatelné úkazy. Jedním z nich je pravidelné střídání měsíčních fází. Dalším úkazem mohou být zatmění Slunce nebo Měsíce, které však nastanou jen při splnění některých podmínek.

### 2. Zatmění Slunce a Měsíce

#### 2.1. Zatmění Měsíce

Nepříliš často dochází k úkazu, kterému říkáme zatmění Měsíce. Během něho dochází na určitou dobu k potměnění jeho povrchu.

Zatmění Měsíce je možné z těchto důvodů:

1. Planeta Země vrhá do prostoru sbíhavý kužel plného stínu a rozbíhavý kužel polostínu.
2. Kužel plného stínu má délku kolem 1 380 000 km, což je dostatečnou hodnotu proto, aby byl stín v úrovni dráhy Měsíce dosti široký a tudíž se do něj mohl celý Měsíc ponořit.
3. Měsíční dráha má sklon vůči ekliptice  $5,2^\circ$ .
4. Dráha Měsíce protíná ekliptiku ve dvou bodech – vzestupném a sestupném uzlu.
5. Spojnice vzestupného a sestupného uzlu se v prostoru pomalu stáčí.

## INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Aby zatmění Měsíce mohlo nastat, musí být splněno několik podmínek:

1. Měsíc se musí nacházet za planetou Zemí, tedy na opačné straně než je Slunce.
2. Je jasné, že v tu chvíli je ve fázi úplňku.
3. Spojnice obou jeho uzlů musí být natočena ke Slunci.
4. Měsíc se musí zároveň nacházet v blízkosti jednoho z uzlů na straně od Slunce, tedy za Zemí.

U měsíčních zatmění nastávají tři typy:

1. Polostínové zatmění Měsíce – nastává v okamžiku, kdy Měsíc vstoupí do rozbíhavé-ho kužele polostínu. V praxi nemá význam, protože je nepozorovatelné. Lze ho zaznamenat pouze přístrojovou technikou.
2. Částečné zatmění Měsíce – nastává v okamžiku, kdy sbíhavý kužel plného stínu do-padne na část měsíčního povrchu. Tento typ lze pozorovat i okem.
3. Úplné zatmění Měsíce – nastává v okamžiku, kdy se celý Měsíc ponoří do plného stínu Země. Je pozorovatelné pouhým okem. Během úplného zatmění bývá Měsíc někdy velmi tmavý, jindy dostává různě intenzivní cihlově oranžové zbarvení. Zabarvení Měsíce během úplné fáze zatmění je závislé na znečištění atmosféry Země, neboť ta část paprsků pohlcuje a část paprsků rozptyluje.

Zatmění Měsíce jsou méně častá než sluneční. Lze je však pozorovat z celé přivrácené polokoule (pokud není zataženo), takže je většina lidí již viděla. Pro vědecké účely nemají již žádný praktický význam.

## 2.2. Zatmění Slunce

Nepříliš často dochází i k dalšímu úkazu, kterému říkáme zatmění Slunce. Během něho dochází k postupnému překrývání slunečního disku Měsícem. V případě úplného zatmění se disk Slunce na určitou dobu schová za disk Měsíce.

Zatmění Slunce je možné z těchto důvodů:

1. Měsíc vrhá do prostoru sbíhavý kužel plného stínu a rozbíhavý kužel polostínu.
2. Kužel plného stínu má dostatečnou délku, aby dopadl až na zemský povrch.
3. Měsíc má na obloze přibližně stejný úhlový průměr jako Slunce (úhlové průměry závisí na okamžité vzdálenosti Slunce – Země, Země – Měsíc).
4. Měsíční dráha má sklon vůči ekliptice  $5,2^\circ$ .
5. Dráha Měsíce protíná ekliptiku ve dvou bodech – vzestupném a sestupném uzlu.
6. Spojnice vzestupného a sestupného uzlu se v prostoru pomalu stáčí.

Aby zatmění Slunce mohlo nastat, musí být splněno několik podmínek:

## INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

1. Měsíc se musí nacházet mezi Sluncem a planetou Zemí.
2. Je jasné, že v tu chvíli je ve fázi novu.
3. Spojnice obou jeho uzlů musí být natočena ke Slunci.
4. Měsíc se musí zároveň nacházet v blízkosti jednoho z uzlů na straně u Slunce.

Rovněž u slunečních zatmění nastávají tři typy:

1. Částečné zatmění Slunce – nastává v okamžiku, kdy Měsíc začne zakrývat sluneční disk. V praxi nemá celkem žádný vědecký význam, pro cvičnou odbornou činnost lze řešit některé matematické úlohy. Je dobře pozorovatelné i okem přes vhodný filtr. Během částečné fáze ale lze pozorovat pokles osvitů, pokles teploty, změny v barvách okolní krajiny. Těchto změn si ale povšimneme až po určité době při větší fázi zatmění.
2. Prstencové zatmění Slunce – jedná se o speciální typ částečného zatmění Slunce, kdy Měsíc nedokáže zcela zakrýt sluneční disk a na krátkou dobu (několik sekund) je pozorovatelný pouze světlý kroužek. Tento typ zatmění nastane, je-li Země vůči Slunci v relativně malé vzdálenosti a tím má na obloze o něco větší úhlový průměr. Zároveň ale Měsíc je vůči Zemi v relativně velké vzdálenosti a tím má na obloze o něco menší úhlový průměr. Nedokáže proto zcela zakrýt disk Slunce. Prstencové zatmění začíná a končí jako částečné. Podobně jako částečné, nemá ani prstencové zatmění žádný vědecký význam a hodí se spíše pro cvičné úlohy.
3. Úplné zatmění Slunce – nastává v okamžiku, kdy Měsíc zcela zakryje disk Slunce. I tento typ zatmění začíná a končí částečným zatměním. Úplné zatmění Slunce je pozorovatelné pouze v místě, kam dopadá kužel plného stínu. Tato stopa se nazývá stopou totality. Její šířka se pohybuje kolem 150 až 250 km, délka několik tisíc km. Tento typ zatmění trvá jen několik minut (max. 7,5 min.) a je pozorovatelný pouhým okem. Během úplné fáze je viditelná horní vrstva sluneční atmosféry – koróna, v dalekohledu i protuberance. V průběhu jsou viditelné i jasné hvězdy a planety.

V okamžiku před a těsně po úplném zatmění lze pozorovat po krátký čas i další úkazy jako jsou Bayliho perly, efekt diamantového prstenu, letící stíny apod. Na částečnou a hlavně úplnou fázi zatmění může reagovat příroda (fauna i flóra).

Zatmění Slunce) jsou sice častější než měsíční, ale jejich sledování (hlavně úplná zatmění) jsou omezená pouze na oblast pásu tzv. totality. Proto je sleduje jen malý počet lidí. Úplné zatmění pro jedno místo na Zemi nastává v průměru jednou za 200 let. Pro vědecké účely mají dodnes velký význam.

### 2.3. Perioda saros





## INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Po určité době dochází k opakování stejných typů slunečních i měsíčních zatmění. Tato perioda se nazývá saros a trvá 223 synodických měsíců, což odpovídá 18 rokům a 10 dnům.

### 3. Závěr

Zatmění Slunce a Měsíce jsou zajímavé astronomické úkazy, které měly význam hlavně v minulosti. V současné době důležitost zatmění již není tak významná jako v minulosti. Zatmění Měsíce již z vědeckého hlediska významná nejsou. U slunečních zatmění mají i v dnešní době zatmění úplná. V každém případě patří zatmění Slunce a Měsíce mezi nejzajímavější a nejnápadnější astronomické úkazy které mohou pozorovat nejen odborníci, ale i laická veřejnost. Tyto úkazy jsou sledovatelné i bez složitějších pozorovacích pomůcek.

### 4. Použitá literatura

Astronomie 1; V. Guth, F. Link, J. M. Mohr, B. Šternberk; vyd.: Nakladatelství Československé akademie věd, Praha 1954

Hvězdářský zeměpis; V. Vanýsek, Nakl.: Orbis, Praha, 1953

Atlas Měsíce; A. Rühl; vyd.: Aventinum, Praha 1991, ISBN 80-85277-10-7

Dostupné na internetu:

<http://www.astro.zcu.cz/old/slunce99/publikace/index.html>

<http://www.astro.cz/rady/ukazy/zatmeni/slunce/>

<http://astro.sci.muni.cz/zatmeni/>

### 5. Kontakt na autora

Lumír Honzík

Hvězdárna a planetárium Plzeň

[lumir.honzik@seznam.cz](mailto:lumir.honzik@seznam.cz)

## ZÁVISLOST ODPORU NA TEPLITĚ

Robert KUNESCH

### 1 Úvod

Hlavním úkolem či cílem úvodu laboratorního cvičení je motivování studentů k danému tématu. Účastníkům kempu je tedy ukázána praktická ukázka laboratorní úlohy „Závislost odporu termistoru na teplotě“, ke které se v průběhu cvičení procvičí matematicko-fyzikální aparát. Zatím studenti nechají rozpustit led ve vodě, aby dosáhli pokud možno nejmenší možné teploty.

### 2 Závislost odporu na teplotě

Studenti jsou dotazováni na dosud nabyté vědomosti v dosavadní výuce fyziky i na vlastní zkušenosti v dané problematice.

Pokud ještě nemají ve své domovské třídě probrány základní vztahy, je nutné je s nimi seznámit a vysvětlit zobecněné závislosti.

#### 2.1 Cvičení

Pokus o dosažení nejnižší teploty trvá poměrně dlouho a studenti u pokusu nemusí dlít nepřetržitě. Proto je možné v nabytém čase vypočítat několik příkladů s použitím vztahu na závislost odporu na teplotě. Vzhledem k jednoduchosti vztahu, je možné zkusit všechny modifikace a studenti si tím nacvičí různá vyjádření ze vztahu.

#### 2.2 Termistor

Studenti jsou obeznámeni s pro ně dosud povětšinou neznámou součástí. Jsou jim vysvětleny vlastnosti a praktické použití. Vzhledem k praktické laboratorní ukázce si mohou pochopitelně termistor dostatečně podrobně prohlédnout.

#### 2.3 Závislost odporu termistoru na teplotě

## INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Je ještě dostatečný časový prostor pro představení speciální modifikace vztahu závislosti odporu na teplotě. Posluchači se seznámí s metodou výpočtu „zlogaritmováním“, která je v případě této laboratorní úlohy nezbytná. Jsou obeznámeni s grafickým vyjádřením požadované závislosti i s grafickým řešením neznámých konstant. Je jim vysvětlen pojem extrapolace (případně interpolace).

### 2.4 Laboratorní cvičení

Studenti si vyzkoušejí samostatně pracovat při laboratorní úloze. V závislosti na zbývajícím čase, odečtou z ohmmetru a z teploměru naměřené údaje, pokusí se vytvořit tabulku, případně graf.

### 3 Závěr

Zakončení laboratorní úlohy i cvičení se nese v krátkém zopakování přednášeného tématu. Studenti se snaží vědecky popsat závěr své laboratorní úlohy na základě nově nabytých znalostí.

### 4 Použitá literatura

BROŽ, J. a kol.: Základy fyzikálních měření I, SPN, Praha 1983, čl. 4.5.2.5, 4.5.3.5

### 5 Kontakt na autora

Robert Kunesch, Mgr.

OF KMT FPE ZČU

kotal@kmt.zcu.cz