



INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Podpora talentovaných žáků v Plzeňském kraji Reg. č. CZ.1.07/1.2.03/02.0001

SBORNÍK

ODBORNÝ KEMP PŘÍRODOVĚDNÝCH OBORŮ

22.-26. SRPNA 2011

Tento projekt je spolufinancován z prostředků ESF a státního rozpočtu České republiky.

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Obsah:

Biologie

Luboš Zelený, Makrozoobentos a jeho význam ve vodách	4
Jindřich Duras, Eutrofizace a její projevy	9
Michal Merl, Tři zajímavosti o našich motýlech	12
Veronika Kaufnerová, Tomáš Č. Kučera, Planktonní organismy a jejich význam ve vodách	17
Jindřich Duras, Tomáš Č. Kučera, Samočištění v tekoucích vodách	24
Zdeňka Chocholoušková, Obecně rozšířené invazní rostliny	36

Chemie

Jana Brichtová, Jak rychle a jednoduše pracovat v kreslicím programu CHEMSKETCH	39
Jan Hrdlička, Kvalitativní analýza	46
Jan Hrdlička, Stanovení složení roztoků	49
Milan Kraitr, Nerosty a hornická činnost ve stříbrském rudním revíru	52
Vladimír Nápravník, Stanovení čísla a kyselostí tuku	55
Vladimír Sirotek, Základní způsoby přípravy anorganických látek	57
Jitka Štrofová, Stanovení reakčního řádu	61
Jitka Štrofová, Atraktivní chemický experiment	66

Matematika

Josef Kubeš, Netradiční řešení rovnic	70
Josef Kubeš, Rovnice vyšších řádů, numerické řešení rovnic	72
Josef Kubeš, Úvod do fraktální geometrie	74
Josef Kubeš, Důkazové techniky-nerovnosti, celá část čísla	76
Josef Kubeš, Důkazové techniky-planimetrie	80
Josef Kubeš, Zlatý řez – matematický diamant	82
Petr Zrostlík, Důkazové úlohy	87
Petr Zrostlík, Geometrie v pohybu	89
Petr Zrostlík, Planimetrie	93
Petr Zrostlík, Řešení komplexních úloh I + II	95
Petr Zrostlík, Dynamika v Geogebře	98
Jaroslav Hora, Konečné součty a nekonečné řady	101
Jaroslav Hora, O (ne)rozložitosti polynomů	106
Jaroslav Hora, Soustavy polynomiálních rovnic	109
Jaroslav Švrček, Jak řešit úlohy olympijského typu?	112
Jiří Potůček, Komplexní číslo	114
Světlana Tomiczková, Zajímavá geometrie (Desarguesova věta o trojúhelnících)	115
Naděžda Kubešová, Exkurze do Národního technického muzea v Praze	122
Petr Tomiczek, Nerovnosti	125
Josef Křišťan, Funkcionální rovnice	137
Josef Křišťan, Diofantovské rovnice	144

Fyzika

Ota Kéhar, Využití katalogů hvězd	148
Marek Česal, Tomáš Meiser, Astronomie v experimentech	150
Václav Havel, Setrvačníky a jejich užití	152

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Lumír Honzík, Zajímavé astronomické objekty a úkazy na obloze	154
Jakub Schwarzmeier, Počítačové modelování galaxií a jejich interakcí	157
Josef Jíra, Praktická cvičení z astrofotografie a zpracování astrofotografií	159
Václav Kohout, Algoritmy numerické matematiky. Náhrada funkce speciálním polynomem	162
Pavel Masopust, Využití excelu k řešení fyzikálních úloh	165
Petr Mazanec, Využití matematiky při řešení fyzikálních úloh – kvadratické, exponenciální a goniometrické rovnice	169
Petr Mazanec, Úlohy ze školních kol FO	174
Josef Petřík, Inteligentní měřicí přístroje	178
Jan Plzák, Fyzika ve vědeckofantastickém filmu	181
Jan Plzák, Základy zpracování fyzikálních měření	183
Jitka Prokšová, Fyzika a počítače. Některé jevy vlnové optiky – holografie	185
Ondřej Trnka, Největší teleskopy	187
Martin Bucháček, Mezinárodní fyzikální olympiáda	190
Marek Česal, Stellarium	195
Eva Jírová, Josef Jíra, Spektroskopie hvězd – úvod	196
Ota Kéhar, LED televize	199
Václav Kohout, Historie a elementární základy teorie barev	201
Zdeňka Kielbusová, Zajímavé experimenty s Camerou obscurou	207
Václav Kohout, Algoritmy numerické matematiky. Nulové body funkce, polynomu	210
Martin Tomáš, Současná kosmologie	214
Pavel Masopust, Kirchohoffovy zákony 2	216
Petr Mazanec, Diferenciální rovnice vedoucí k exponenciální závislosti veličin	217
Petr Mazanec, Využití matematiky při řešení fyzikálních úloh – součet nekonečné řady a určitý integrál ve fyzice	221
Petr Mazanec, Řešení obtížnějších úloh z termiky	226
Jitka Prokšová, Řešení vybraných úloh z termiky 2	230
Jitka Prokšová, Řešení vybraných úloh z optiky 1	232
Jitka Prokšová, Řešení vybraných úloh z optiky 2	234
Miroslav Randa, Fáze Měsíce	236
Miroslav Randa, Keplerovy zákony	238
Miroslav Randa, Pohybové rovnice a jejich využití při řešení úloh	239
Miroslav Randa, Zákony zachování ve fyzikálních úlohách	240
Karel Rauner, Fyzika v pohádkách	241
Karel Rauner, Fyzikální odhad a některé paradoxní případy	244
Karel Rauner, Nové principy zobrazovačů	246
Václav Soukup, Chemie ve fyzice aneb fyzika v chemii	248
Václav Soukup, Fyzikálně-chemické experimenty a výpočty	251
Zuzana Suková, Řešení fyzikálních úloh – elektřina a magnetismus 1	254
Josef Veselý, Řešení fyzikálních úloh – elektřina a magnetismus 2	255
Jakub Toman, Sonda SDO a aktivita Slunce	257
Josef Veselý, Řešení fyzikálních úloh z mechaniky 1	259
Josef Veselý, Řešení fyzikálních úloh z mechaniky 2	262
Josef Veselý, Řešení fyzikálních úloh z hydromechaniky 1	265

ODBORNÝ KEMP PŘÍRODOVĚDNÝCH OBORŮ BIOLOGIE

MAKROZOOBENTOS A JEHO VÝZNAM VE VODÁCH

Luboš ZELENÝ

1 Co jsou to bentické organismy

Bentos je biocenóza vázaná na podklad. Bentos tekoucích vod tvoří nejrůznější mikroorganismy (bakterie, houby), autotrofní organismy (sinice, řasy, mechorosty, cévnaté rostliny) a živočichové (zoobentos). Sinice a řasy, případně mechy spolu s dalšími organismy vytvářejí nárostová společenstva – perifyton (epilíton). Jejich složení a umístění na povrchu podkladu se liší podle světelných, proudových, teplotních a dalších existenčních nároků. Perifyton podstatně neovlivňuje proudové a průtokové poměry toku, na rozdíl od vodních makrofyt, které se podílejí na mechanismech přetvářejících dno. Makrofyta rovněž vytváří vhodné podmínky pro přichycení a úkryt jiných organismů.

2 Klasifikace bentosu

Bentos lze dělit podle velikosti (Příkryl 1998) na mikrobentos (do velikosti 0,1 mm), mesobentos (0,1 až 2 mm) a makrobentos (nad 2 mm). Systematicky jej dělíme na fytobentos a zoobentos.

Zoobentos můžeme dělit rovněž podle charakteru substrátu dna (http://hgf10.vsb.cz/546/Ekologicke%20aspekty/loticky_system/biotopy.htm) na zoobentos lithoreofilní (kamení), psammofilní (písek), pelloreofilní (bahno), argiloreofilní (hlína).

3 Zoobentos stojatých vod

Výskyt zoobentosu ve stojatých vodách je ovlivněn několika faktory, tím nejzásadnějším je distribuce potravy. Klíčový je přísun potravy z pelagiálu (volná hladina). Jako potrava slouží nejrůznější řasy a mrtvý zooplankton, který padá na dno. Nízká diverzita bývá na dně hlubokých jezer a nádrží, neboť mrtvý plankton je cestou mineralizován. Rovněž velmi málo oživené je i dno mělkých nádrží a rybníků, kde díky masovému výskytu velkých perlooček došlo k výraznému snížení biomasy fytoplanktonu.

Dalším limitujícím faktorem pro výskyt zoobentosu ve stojatých vodách je množství kyslíku u dna. Nejhlubší partie jezer a nádrží jsou zpravidla bez kyslíku, což se významně projevuje na složení biocenózy dna.

Mezi nejčastější zástupce zoobentosu stojatých vod patří larvy pakomárů a máloštětinatců (naidky, nítěnky, žízalice), dále se mohou vyskytovat vodní měkkýši a korýši.

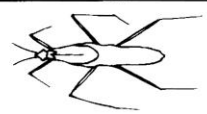
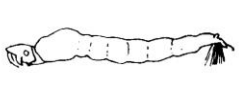
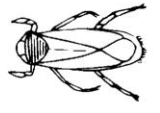
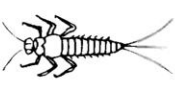



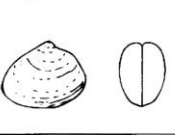
4 Zoobentos tekoucích vod

Druhové složení zoobentosu tekoucích vod je daleko pestřejší. Rozhodujícím faktorem, který určuje druhové složení a dynamiku zoobentosu je rychlost vodního proudu. Životu v rychlém proudu jsou živočichové různě adaptováni. Čím prudší je proud, tím dokonalejší jsou různé orgány a zařízení umožňující život i v nejprudších peřejích a vodopádech. Dokonalými tělními orgány jsou různé přísavky (zástupci rodu *Liponeura*),

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

lepivé žlázy muchniček, někteří živočichové si staví různé schránky a trubičky (chrostíci a pakomáři), mnohé jepice mají uzpůsobený proud i celkový tvar těla. Naproti tomu živočichové žijící v klidné vodě za kameny, pod kameny a v trsech vodních rostlin nebo v profilu dna se bez adaptací na proudění obejdou.

Obr. 1 Nejobvyklejší formy bezobratlých a jejich adaptace k životu ve vodě

<p>1. Bruslaři (syn. <i>pleuston</i>, např. bruslařka) žijí na povrchu vody a loví organismy vyskytující se na hladině</p>	
<p>2. Plankton* (např. koretry, komáří larvy), žijící ve volné stojaté až mírně tekoucí vodě</p>	
<p>3. Různí živočichové (např. znakoplavka, potápníci) žijící v pomalu tekoucích vodách a tůních čerpají kyslík na vodní hladině, v případě vyrušení plavou a potápějí se</p>	
<p>4. Plavci (např. některé jepice) se obvykle přidržují kamenů nebo vegetace, jsou také schopni přeplavat krátké úseky</p>	
<p>5. Přidržovači (např. některé jepice, muchničky, pijavky, kamomil), jejichž morfologické a další uzpůsobení pro udržení se v rychlém proudění – zploštění těla, lepivá vlákna, drápky, přísavky aj. – umožňuje připevnit se v rychle tekoucích tocích na podklad</p>	
<p>6. Lezci (např. mnoho šidélek, larvy vážek, některé jepice) obývají povrch makrofyt nebo povrch jemných sedimentů</p>	
<p>7. Šplhači (např. vážky) obývají vegetaci, kořeny stromů a ve vodě ponožené větve a pohybují se po jejich povrchu</p>	
<p>8. Hrabáci (např. červi, mlži, některé jepice, pakomáři) žijí v sedimentu, mohou ale také tunelovat chodbičky v rostlinných pletivech i dřevě</p>	
<p>* Pozn.: V obvyklém pojetí jsou typickými představiteli planktonu perloočky a buchanky.</p>	

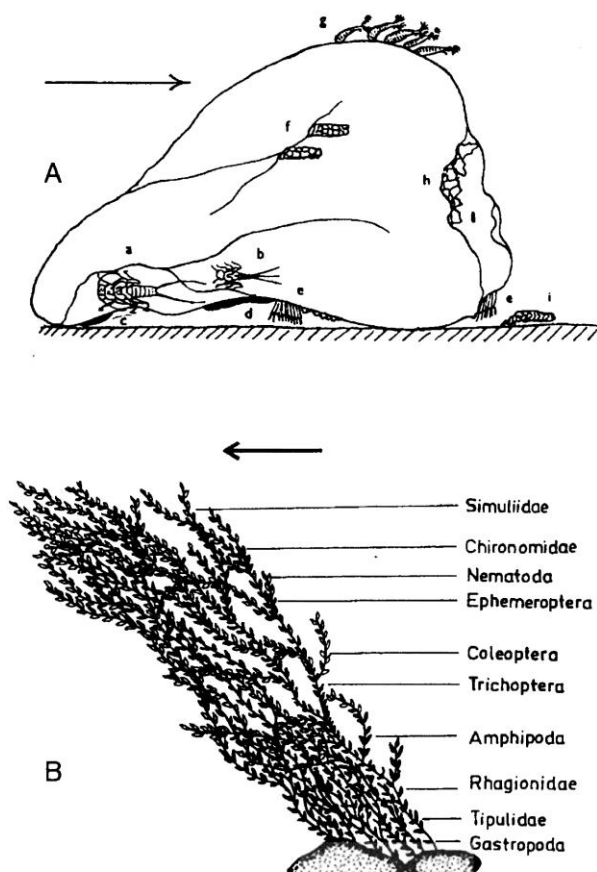
Zdroj: http://hgf10.vsb.cz/546/Ekologicke%20aspekty/loticky_system/biotopy.htm

Nejvíce jsou osídlené kameny o průměru 15-20 cm. Makrozoobentos povrchu kamenů tvoří larvy jepic (*Baetis*, *Oligoneuriella*), muchniček, pakomárů, chrostíků (*Anabolia*, *Silo*), plži (*Ancylus*, *Bythinia*), přísavky, brouci (čeleď *Elmidae*). Spodní část kamenů osídlují prvoci, ploché kolonie hub, mechovky, ploštěnky, pijavice, plži, korýši (*Asellus*, *Gammarus*), jepice (*Ecdyonurus*, *Epeorus*), pošvatky (*Perlidae*, *Leuctridae*), chrostíci (*Hydropsychidae*, *Rhyacophilidae*), ploštice, vodule. Některé druhy žijí na obou stranách kamenů, jiné přelézají

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

na horní stranu v noci nebo při nedostatku světla. Zoocenózy písčitého dna jsou druhově i početně nejhudší.

Obr. 2 Rozmístění bentických organismů



A) na kameni v proudu:

a larva pošvatky, **b** larva jepice, **c** ploštěnka, **d** pijavky, **e** larvy pakomárů v rourkách z bahna, **f** larvy chrostíků, **g** larvy muchniček, **h** kukly chrostíků, **i** lezoucí larva chrostíka v písčivé schránce

B) na porostech mechu prameničky (*Fontinalis*)

Zdroj: http://hgf10.vsb.cz/546/Ekologicke%20aspekty/loticky_system/biotopy.htm

Zástupci makrozoobentosu nalezení v řece Úslavě:

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Bryozoa (mechovky)

Kolonie zooidů na spodní straně kamenů v tekoucí vodě.

Annelida (kroužkovci)

Oligochaeta (máloštětinatci)

Eiseniella tetraedra (žížala obojživelná) - žije ve vlhké půdě, močálech, na břehu řek i přímo ve vodě

Hirudinea (píjavice)

Erpobdella octoculata (hltanovka bahenní) - pomalu tekoucí a stojaté vody, pod kameny; jedna z nejhojnějších píjavic

Erpobdella vilnensis – v tekoucích vodách, snese vyšší úroveň znečištění

Mollusca (měkýši)

Sphaerium corneum (okružanka rohovitá) - výskyt v živinami bohatších (často i organicky znečištěných) vodních tocích, kanálech, tůních a rybnících. Odolný proti organickému znečištění.

Pisidium sp. (hrachovka) - v tekoucích vodách pod kameny

Ancylus fluviatilis (kamomil říční) - rychle tekoucí vody, na kamenech; adaptace ulity pro život v proudu

Crustacea (korýši)

Asellus aquaticus (beruška vodní) - velmi běžný druh tekoucích i stojatých vod, požírá rostlinné zbytky, snese vyšší úroveň organického znečištění

Diptera (dvoukřídli)

Simulium sp. (muchnička) – žijí často v koloniích, lepivé žlázy; v dospělosti značně nepříjemný hmyz

Chironomidae gen. sp. (pakomáři) – početná skupina druhů, obtížná determinace; oblíbená potrava ryb; vyšší úroveň znečištění toku

Tipula sp. (tiplice) – larvy žijí v bahně nebo v detritu, značná ekologická valence larev většiny druhů

Trichoptera (chrostíci)

Lepidostoma hirtum – čtverhranné schránky z rostlinného materiálu, potoky a řeky



INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Hydropsyche angustipennis – běžný druh v potocích a řekách pahorkatin a nížin, nestaví si schránku; snese vyšší organické znečištění

Hydropsyche pellucidula – výskyt podobný předešlému druhu; vytváří sítě v proudných úsecích toku, do kterých chytá potravu

Ephemeroptera (jepice)

Baetis vernus - běžný druh pod kameny v tekoucích vodách

5 Použitá literatura

HARTMAN P, PŘIKRYL I. a ŠTĚDRONSKÝ E. Hydrobiologie. 2. vyd. Praha: Informatorium, 1998, 335 s.

LELLÁK J. a KUBÍČEK, F. Hydrobiologie. 1. vyd. Praha: Karolinum, 1992, 258 s.

ROZKOŠNÝ a kol. Klíč larev vodního hmyzu. 1. vyd. Praha, Academia, 1980, 524 s.

6 Kontakty na autory

Mgr. Luboš Zelený

Povodí Vltavy, státní podnik

lubos.zeleny@pvl.cz

ODBORNÝ KEMP PŘÍRODOVĚDNÝCH OBORŮ BIOLOGIE

EUTROFIZACE A JEJÍ PROJEVY

Jindřich DURAS

1 Jak jsme na tom s čistotou vody?

Kvalita vody v našich potocích, řekách a nádržích se v posledních zhruba 20 letech radikálně zlepšila. V naprosté většině vod je už dnes minulostí masivní znečišťování organickými látkami, těžkými kovy, ropnými látkami, saponáty. Co však zatím vyřešeno nemáme, je nadměrný vstup živin do vod. Přísun živin znamená zvyšování úživnosti vody, a to vysoko (deseti až stonásobně!) nad úroveň, jaká je v přirozených podmínkách. Tak velké obohacení živinami znamená, že jsme všem vodním organismům vytvořili naprosto odlišné podmínky, než na jaké byli adaptováni. Proto je logické, že ve vodách došlo k výrazným změnám zejména po stránce hydrobiologické.

2 Eutrofizace - její příčiny a důsledky

Eutrofizace je proces obohacování vod živinami. Důsledkem zvýšení obsahu živin je především rozvoj autotrofních organismů. Ve stojatých vodách masově roste fytoplankton, kam patří i obávané sinice. V tekoucích vodách se na horním a středním toku vyvíjejí především bohaté nárosty na ponořených podkladech a na dolních tocích řek opět zejména fytoplankton (dolní část Berounky, Vltava, Labe, Dunaj). Dostatek živin ale může podpořit i růst vodních rostlin, hlavně v mělkých vodách. Naprostá většina našich povrchových vod - přehradních nádrží, řek, rybníků - trpí eutrofizací nebo je jí alespoň silně ohrožena.

Zatímco samotné živiny s výjimkou extrémně vysokých koncentrací dusičnanů pro nás přímé riziko nepředstavují, důsledky jejich přítomnosti ve vodách, tedy intenzivní růst biomasy autotrofů už mohou být rizikem zásadního významu. V současnosti největší problémy řešíme v případě stojatých vod. Silný rozvoj fytoplanktonu totiž výrazně komplikuje život vodárnám, kde se snaží z vody tzv. vodárenských nádrží udělat pitnou vodu. Nejen že se úprava vody prodražuje, ale často mohou i v pitné vodě zůstat stopy nepříjemného pachu či chuti, a někdy dokonce i zbytky škodlivých látek. To platí zejména v případech, kdy ve společenstvu fytoplanktonu převládají sinice, neboli cyanobakterie. Sinice se staly středem pozornosti pro svoji schopnost vytvářet velkou biomasu a produkovat látky negativně působící na lidské zdraví, tzv. cyanotoxiny (toxin = jed). Tyto látky při požití postihují hlavně nervovou soustavu a játra, ale mohou způsobovat i alergické reakce.

Důsledky procesu eutrofizace samozřejmě zhoršují také podmínky pro rekreaci. Voda získává tzv. vegetační zákal, jenž je zbarven podle typu fytoplanktonu. Rozsivky způsobují zákal hnědý, zelené řasy zelený a sinice obvykle hráškově zelený nebo nepříjemně modrozelený. Sinice mají schopnost vytvářet tzv. vodní květ, tedy pouhým okem viditelné shluky ve tvaru vloček, hrudek, jehliček či kuliček. V každém případě je voda neprůhledná, tedy ke koupání neatraktivní. Navíc se vytváří i rybníční pach vody, v případě sinic pach trávní. Bouřlivá fotosyntetická aktivita řas a sinic v živinami bohatém prostředí vede ke zvyšování pH vody - voda se stává zásaditou. Je to proto, že autotrofové spotřebovávají CO₂ rozpuštěný ve vodě,

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

čímž vychylují tzv. uhličitánovou (acidobazickou) rovnováhu. V eutrofních vodách nacházíme hodnotu pH až 10, nebo dokonce 11! Problém je v tom, že naší pokožce a sliznicím vyhovuje naopak pH kyselé, v oblasti zhruba mezi 5 a 6. Když se koupeme ve vodě silně zásadité, mají citlivější lidé potíže s pokožkou (hlavně na obličeji), ale také se sliznicemi (např. oční spojivky). Pokud jsou přítomny ve velkém množství také sinice, existuje riziko, že ve vodě budou i cyanotoxiny, které při koupání nejčastěji způsobují dráždivé či alergické reakce - zarudnutí a svědění očí či pokožky, vyrážku. Vyrážka se obvykle objevuje za plavkami, kde se sinice při plavání nahromadí, na slunci odumřou a jedovaté látky obsažené v jejich buňkách se vylijí přímo na pokožku. Proto je užitečné se po koupání ve vodě se sinicemi osprchovat a převlékat.

Vždycky jsou ve vodách zmiňovány dvě hlavní živiny, a to dusík a fosfor. Správně bychom měli uvádět také uhlík, ovšem toho je ve vodě obvykle dostatek v podobě oxidu uhličitého (CO₂), a tak o něm obvykle nehovoříme. Z paušálně uváděné dvojice dusík a fosfor je ale v praxi pouze fosfor prvkem, jenž určuje míru rozvoje fytoplanktonu obecně a sinic zvláště. Fosfor je pro rozvoj eutrofizace klíčovým prvkem, protože je pro tvorbu jakékoli biomasy nenahraditelný a zároveň se ve vodách často vyskytuje i v množství, které může fytoplanktonu hrozit nedostatkem.

Limitace rozvoje řas nedostatkem dusíku připadá v úvahu pouze za jeho velmi nízkých koncentrací. Ve vodním prostředí jsou ovšem v současnosti řasami využitelné sloučeniny dusíku přítomny ve vysokém nadbytku, jenž odpovídá obvykle deseti- až stonásobku koncentrace, která by mohla růst řas omezovat. Navíc sinice tvořící vodní květy mají většinou schopnost vázat vzdušný dusík podobně jako některé bakterie, takže případný nedostatek dusíku ve vodě je rozhodně nezaskočí. Běžně se vyskytující sinice (rody *Aphanizomenon*, *Anabaena*) jsou vybaveny buňkami zvanými heterocyty, kde může probíhat proces vázání vzdušného dusíku. Je to konkurenční výhoda, kterou mají sinice oproti ostatnímu fytoplanktonu. pokud by se nám tedy podařilo docílit v nějaké vodě silný nedostatek dusíku, nahrávali bychom tím vlastně sinicím, které by se zbavily nepříjemné konkurence ostatního fytoplanktonu.

3 Zdroje živin

Zdrojem dusíku je u nás výhradně zemědělství, a to smy v dusíkatých hnojiv z orné půdy. V některých případech mohou významně přispět i odpadní vody z měst či průmyslu v poslední době je poměrně hodně dusíku obsaženo také v dešťové vodě, ale ten se do potoků a řek obvykle nedostane, protože je spotřebován suchozemskou vegetací.

Nejdůležitějším zdrojem fosforu jsou odpadní vody z měst a obcí, případně z velkochovů hospodářských zvířat (keřda). V odpadních vodách ze sídel je fosfor jednak z lidské moči a výkalů (zejména moč je na fosfor velmi bohatá) a jednak z mycích prostředků, a to především z přípravků používaných do myček nádobí. Tyto přípravky totiž obsahují hojně fosforečnanů - i více než polovinu své hmotnosti! Proto je velmi důležité, aby se u nás podařilo i proti obchodním zájmům vlivné skupiny podnikatelů prosadit úplný zákaz používání pracích a mycích prostředků s fosforem. Zároveň je důležité používat k čištění odpadních vod takové technologické postupy, které fosfor z čištěné odpadní vody s vysokou účinností odstraňují.



INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

4 Nádrž České údolí v Plzni terénní pozorování

Na řece Radbuze byla v roce 1973 dokončena výstavba nádrže České údolí. Nádrž byla postavena výhradně proto, aby se občané Plzně měli kde koupat. Rozhodnutí to bylo čistě politické a tehdejší funkcionáři si s kvalitou vody nedělali starosti. A tak dnes máme na okraji Plzně nádrž, kde se po celou letní sezónu koupání nedoporučuje, a to pro nadměrnou přítomnost řas a sinic a také pro vysoké pH

V rámci exkurze jsme pozorovali vločky vodního květu tvořeného několika druhy sinic rodu *Microcystis* – hráškově zelené rozpadavé hrudky naváté ke břehu větrem.

Z nádrže jsme odebrali vzorek planktonní sítě, neboli planktonkou. Plankton zahuštěný v síťce jsme vypouštěcím kohoutem převedli do polyetylenové vzorkovnice a nafixovali etanolem.

Při pozorování naloveného planktonu v ploché skleněné kyvetě jsme viděli, že zooplankton byl velmi drobný. Příčinou byla velmi hustá rybí obsádka v nádrži, která vyvíjí na zooplankton silný predanční tlak. Hovoříme o tzv. velikostně selektivní predaci, protože planktonožravé ryby si přednostně vybírají největší jedince. Tak dochází rychle k vyhubení velkých druhů planktonních korýšů, zejména perlooček, a ve společenstvu zooplanktonu pak převládají drobné perloočky a také buchanky, které mají schopnost rychlé únikové reakce.

5 Kontakt na autora

RNDr. Jindřich Duras, Ph.D.

Povodí Vltavy, státní podnik

durasj@seznam.cz

ODBORNÝ KEMP PŘÍRODOVĚDNÝCH OBORŮ BIOLOGIE

TŘI ZAJÍMAVOSTI O NAŠICH MOTÝLECH

Michal MERGL

1 Úvod

Motýli jsou jedinečnou a atraktivní složkou naší entomofauny, které je věnována řada našich i zahraničních knih a atlasů (Moucha 1972; Reichhol-Riehmová 1996; Zahradník 1997). Vybral jsem pro tři méně známé kapitoly o jejich způsobu života: hibernaci, migraci a teritoriální chování. Pro zájemce o problematiku bionomie a ochrany motýlů doporučuji publikace Nováka a Spitzera (1982), Beneše a Konvičky (2002) a Konvičky et al. (2005). Vynikající atlas evropských motýlů s rozsáhlým komentářem k ekologii motýlů najde čtenář v anglické publikaci Chinery (1989).

2 Hibernující motýli

Jen třináct evropských druhů denních motýlů je schopno přežít zimu ve stadiu dospělce. S výjimkou žluťáka řešetlákového z čeledi běláskovitých (Pieridae), všichni ostatní hibernující motýli vyskytující se na našem území patří do čeledi babočkovitých (Nymphalidae).

Pokud motýl přezimuje jako dospělec, je nesmírně důležité mít dobré maskování. V průběhu hibernace trvající až půl roku je totiž velmi pravděpodobné, že motýla narazí jeho predátor. Dokonalá kamufláž spodní strany křídel je tedy absolutní nezbytností, jinak se motýl stane snadnou kořistí. Ideální maskování je hnědě skvrnitá spodní strana křídel a rozdřípené okraje křídel, napodobující strukturu starého dřeva. Takovou spodní stranu křídel najdeme u všech našich zimujících baboček. Je to proto, že babočky se na zimu schovávají do štěrbin a dutin ve starých stromech. Běžně je nalezneme mezi poleny dřeva, ve skulinách mezi okenicemi a ve starých kůlnách. Hibernujícími babočkami na našem území jsou babočka paví oko (*Inachis io*), babočka osiková (*Nymphalis antiopa*), babočka kopřivová (*Aglais urticae*), babočka jilmová (*Nymphalis polychloros*) a babočka bílé c (*Polygonia c-album*). V našich podmínkách je jen problematicky schopna přezimovat i babočka admirál (*Vanessa atalanta*), která však běžně zimuje v teplejších oblastech Evropy. Ostatní babočky (bělopásci, batolci, perleťovci, hnědásci) přežívají zimu ve stadiu kukly nebo housenky.

Žluťásek řešetlákový (*Gonepteryx rhamni*) také přezimuje jako dospělec. Jeho spodní strana křídel skvěle napodobuje barvou i strukturou žilek zažloutlý list. Motýl přezimuje mezi listy neopadavých keřů nebo je schován mezi napadanými listy na zemi.

Nástup do hibernace není podmíněn jen klesající teplotou. Motýli se schovávají již v době, kdy je ještě teplota dostatečně vysoká a je dostupný i nektar v květech. Výjimkou je babočka kopřivová, která létá ještě v pozdních podzimních dnech. Je pravděpodobné, že hlavním impulsem pro vyhledání úkrytu na zimu je zkracování délek dne.

Hibernující motýli, i když jsou již dospělci, nejsou schopni páření před zimním obdobím a v té době také samečci nevyhledávají samičky. Mají také nedovyvinuté pohlavní orgány. Ty se dostatečně vyvinou až ke konci hibernace. Sameček vyhledává samičku již za prvních slunečných jarních dnů a páření a vykladení vajíček se uskutečňuje na počátku jara.

Hibernace je spojena se změnami ve složení tělních tekutin. Před hibernací se zvyšuje množství nemrznoucích složek v tělních tekutinách. Pokud bychom vzali motýla v létě z umístili ho do ledničky, tak rychle uhynie. Naproti tomu je v zimním období schopen přežít i podstatně nižší teploty.

Zimující babočky jsou schopny se stát aktivními za teplých dnů i v zimě. Pokud v zimním období narazíme na aktivního motýla (např. mezi okny), je vhodné mu nabídnout roztok cukru nebo medu v sacím papíru, ale motýla není dobré vypustit do ven do zahrady ani ve velmi slunném zimním dnu. Motýl není schopen letu v chladném počasí a nepochybně by zahynul.

Přezimování dospělců některých druhů vysvětluje, proč se již velmi brzy na jaře setkáváme s velkými a nápadnými babočkami a žluťáskem řešetlákovým, zatímco s dospělci dalších druhů motýlů se setkáváme až později.

3 Migrace motýlů

Je již dlouhou dobu známo, že někteří běžní motýli každoročně migrují z jihu na sever Evropy. Odlétají se Středomoří, především ze severní Afriky, jihu Itálie, Španělska, Francie a Řecka a dolétají do Velké Británie, Skandinávie a dokonce až na Island. Tito migranti zakládají další jednu nebo více generací v průběhu migrace. Původně se myslelo, že tyto migranti na konci cesty hynou, ale pečlivé sledování prokázalo, že i když v menší míře, většina druhů na podzim opět zamíří k jihu.

Nejnámějšími migranty na velké vzdálenosti jsou babočka admirál (*Vanessa atalanta*) a babočka bodláková (*Vanessa cardui*). Tito motýli opouštějí severní Afriku a s prodlužujícími se dny a se zvyšující se teplotou táhnou k severu. Ve střední Evropě zakládají novou generaci. Babočka admirál zalétá až na Island, i když z vykladených vajíček nová generace nedosáhne dospělosti. Ve vrcholném létě se vlna migrantů obrací a babočky opět táhnou k jihu. Část populace babočky admirál ve střední Evropě však zůstává a její dospělci jsou schopni přežít i zimu. Babočka bodláková je citlivější a není schopna přežít zimu ve střední Evropě v žádném stadiu. Populace tohoto druhu je tak každoročně obnovována z jedinců zalétajících z jihu Evropy. Podobně migrují i některé můry létající za slunečného dne. Migranty jsou i lišajové, z nichž mnohé velké druhu, např. lišaj smrtihlav (*Acherontia atropos*) nejsou schopny přežít zimu na našem území.

Vlny migrantů se každoročně liší v počtu migrantů a v termínech přechodu migračních vln. V červnu je běžné, že přes naše území přechází vlna migrantů babočky bodlákové. Velmi silná migrační vlna byla v roce 2009. Ve vrcholném létě lze zaznamenat migrujícího lišaje dlouhozobku svizelovou (*Macroglossum stellatarum*).

Za hlavní příčiny migrace se považuje vyhledávání vhodných živných rostlin pro housenky a květů s nektarem pro dospělé. Motýli, jejichž housenky využívají zcela odlišnou rostlinu nežli dospělec, vyhledávají tuto rostlinu pro vykladení vajíček a současně vyhledávají i kvetoucí rostliny, které jsou zdrojem nektaru pro dospělého motýla. V době, kdy ve Středomoří takové rostliny mizí a usychají, stejné nebo podobné rostliny se objevují

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

více na severu. Housenky nejběžnějších evropských migrantů, tedy bělásků a baboček, také využívají více živných rostlin, které jsou v běžné přírodě střední a severní Evropy, např. kopřivy, bodláky, chmel a různé brukvovité rostliny. Motýli, kteří jsou úzce vázáni na jedinou a navíc vzácnou rostlinu, např. na hořce, proto nemigrují a mají jen méně početné a lokální populace. V hlediska ochrany populací motýlů jsou takové nemigrující druhy (zejména modrásci a okáči) mnohem citlivější na změny prostředí a snadno mohou být ohrazeny vyhynutím, nežli druhy migrující. Podzimní kvetoucí zahrady a parky poskytují migrantům občerstvovací stanice, neboť zde naleznou velké množství kvetoucích rostlin v době, kdy květu s nektarem ve volné přírodě je již nedostatek.

Migranti jsou schopni přeletět obrovské vzdálenosti. U baboček se uvádí až 3500 km dlouhý přelet a dosažení výšky až 3000 m n. m. Schopnost migrace je vrozená. Migranti se orientují podle polohy slunce, i když i další faktory, např. vliv magnetického pole, směr větru nebo teplota mohou hrát roli. Bylo prokázáno, že babočka paví oko, která na podzim migrovala k jihu, po zimní hibernaci migrovala k severu. Pro podrobnou navigaci motýli využívají liniové struktury. Polní cesty, silnice, toky a rozhraní mezi lesem, poli a loukami jsou často využívány k orientaci za letu. Samotný let se uskutečňuje v malé výšce nad terénem, obvykle do dvou metrů nad zemí.

4 Teritoriální chování motýlů

Nejlepším příkladem teritoriálního chování mezi našimi motýly je chování okáče pýrového (*Pararge aegiria*). Je chování bylo detailně studováno více entomology. Motýl osídluje smíšené lesy, ve kterých vyhledává malé osvětlené plošky s nižší bylinnou vegetací. Zde sedí na vyvýšeném stanovišti, např. na listu nebo větvičce vyšší rostliny osvětlené sluncem asi jeden metr nad zemí. Pokud se k této osvětlené plošce přiblíží jiný sameček, sedící sameček vyletí proti němu, a prudkým máváním křídel se vetřelce snaží vytlačit z osvětleného prostoru. Pokud samotný výpad proti vetřelci nestačí, oba samečci v proudu světla víří ve spirále směrem vzhůru. Vetřelec je téměř vždy z osvětleného prostoru vytlačen a „majitel“ plošky se vrací na své místo. V lesích, ve kterých je málo osvětlených plošek, je soupeření intenzivnější, s delším spirálovitým letem vzhůru nežli v lese s dostatkem osvětlených ploch. Velikost hlídané osvětlené plošky je asi 14 m². Je-li plocha větší, na stejné ploše může být i více samečků, ale jen v takové vzdálenosti, aby si navzájem nepřekáželi a nevěděli o sobě. Samičky jsou přitahovány na spíše větší osvětlené plochy; proto je soupeření samečků na větších plochách zanedbatelné. Ploška je obsazena jedním samečkem jednu či dvě hodiny, pak sameček odlétá do korun stromů za potravou nebo vyhledává jinou plošku. Opuštěná ploška je pak rychle zabrána jiným samečkem. Pokud vznikne nová ploška, je rychle obsazena samečkem dosud poletujícím v korunách stromů. Bylo pozorováno, že pokud do neobsazené plošky vletí současně dva samečci, oba se považují za oprávněné majitele plošky a jejich souboj trvá déle nežli je obvyklé. Protože se plošky v průběhu dne i dnů mění, je pravděpodobné, že dříve či později se sameček stane majitelem plošky. Ne všichni samečci se při hlídání plošky se setkají se samičkou. Je proto pravděpodobné, že většina samečků se páří se samičkami mimo osvětlenou plošku, protože zmíněné teritoriální chování je možné jen za určitého počasí a jen v určitém lesním prostředí. Pokud se k hlídkujícímu samečku přiblíží samička, chování samečka se zcela změní. Motýli přisednou k sobě, navzájem se dotýkají tykadly a je-li samička připravená k páření, usedá na zem nebo vylétají společně na vyšší vegetaci a páří se.

Pozice osvětlené plošky se vzhledem k pohybu Slunce, množství oblačnosti a pohybu stromů neustále mění. Je-li zataženo, je-li vyšší teplota nebo je-li les více otevřený s většími

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

pasekami, samečci si nehlídají svoji osvětlenou plošku a patrolují a vyhledávají samičky nízkým letem nad vegetací.

Je také zajímavé, že v jižní Evropě, kde převládají otevřená prostranství, jsou tímto druhem podobným způsobem hájeny zastíněné plošky.

Teritoriální chování je známé také u otakárka fenyklového (*Papilio machaon*) a otakárka ovocného (*Iphiclides podalirius*). Sameček si chrání teritorium o velikosti až 5000 m², které je ohraničené vegetací. Jeho pozorovatelnou je vyvýšená větvička nebo květ, odkud pozoruje svoje teritorium. Občas se nad teritoriem proletí. Pokud se objeví konkurenční sameček, vylétá proti němu a vytlačuje ho z prostoru.

U nás nežijící velká středomořská babočka *Charaxes jasius* vyletuje proti malým ptákům a dokonce i proti přibližujícím se lidem.

Teritoriální chování mají i naše běžné babočky. Babočka paví oko si hlídá z vyvýšené pozorovatelné, listu nebo větvičky, plochu o velikosti asi 50 m². Tato plochu obsazuje okolo poledne, až po ranním prohřátí, nakrmení se nektarem a po vyhledání vhodné plošky. Teritoriem jsou obvykle osluněné loučky, okraje lesů a cest. Pokud do takové prostoru vletí konkurenční sameček, sameček se jen nejprve snaží zahnat prudkým výletem proti a pokud to nestačí, pak spolu víří po dobu 10-15 vteřin v prudkých spirálách nahoru a dolů. I potom je veřelec pronásledován a až po vytlačení až 200 metrů daleko od hlídaného místa se původní sameček vrací na pozorovatelnou ve svém teritoriu. Pokud se objeví samička, po krátké kontrole spolu sletí na zem k páření. Po páření sameček odletí a vyhledá si jiné teritorium, které bývá i několik kilometrů daleko.

Podobným způsobem si hájí teritorium i babočka admirál. Teritorium si však vymezuje až v pozdních odpoledních hodinách a brání ho asi 150 minut, během kterých vykoná asi 30 přeletů nad svým teritoriem.

Babočka kopřivová si vybere jedno teritorium okolo poledne, které hájí podobně jako babočka paví oko. Pokud do tohoto teritoria nezaletí během jedné až dvou hodin samička, toto teritorium sameček opouští a vyhledá si teritorium nové. Ke konci odpoledne se chování samečků babočky kopřivové mění. Na dříve bráněné ploše a na stejném místě, odkud dosud sameček kontroloval svoje teritorium, se mohou usadit i 3-4 samečci, kteří se již navzájem nevytlačují. Pokud se v bráněném teritoriu objeví samička, sameček k ní slétne na zem, sedne si proti ní, dotýká se jí tykadly a pak se ve skrytu páří.

5 Použitá literatura

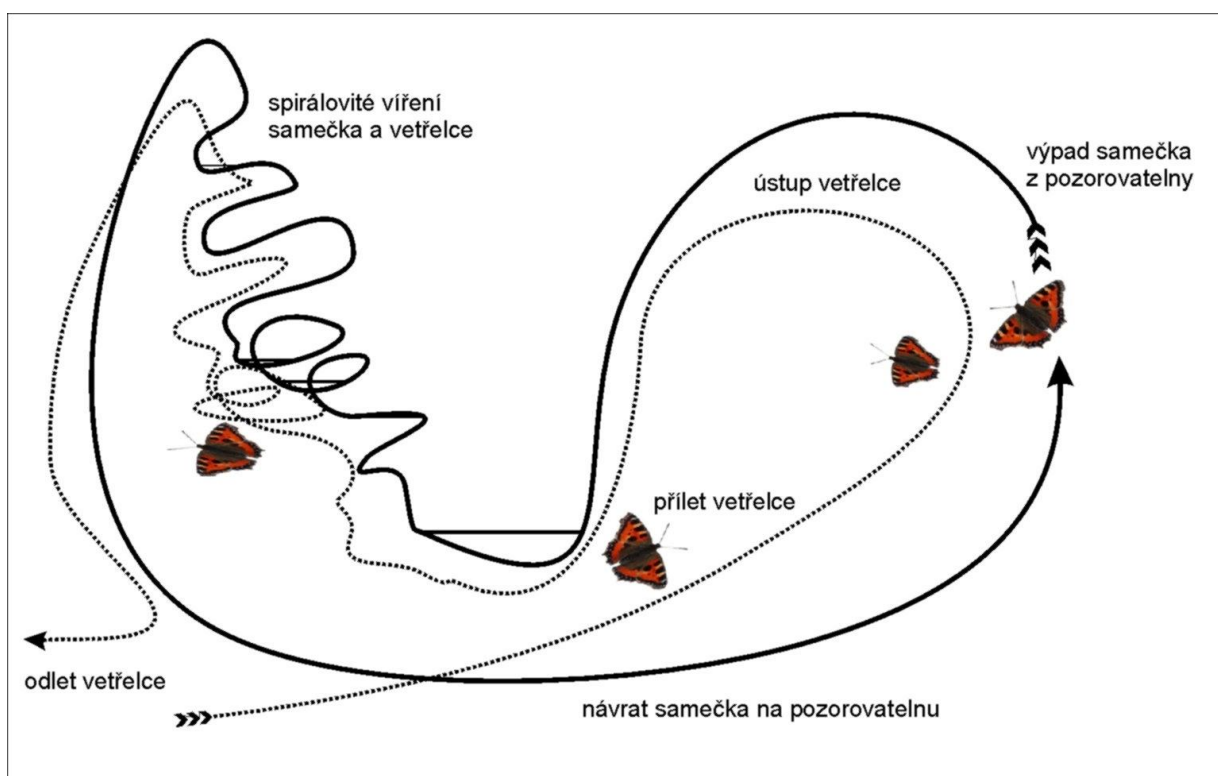
- BENEŠ J., KONVIČKA, M. Motýli České republiky: Rozšíření a ochrana I, II. Praha: Společnost pro ochranu motýlů, 2002. 857 s. ISBN 80-903212-0-8.
- CHINERY, M. Butterflies and day-flying moths of Britain and Europe. London: Harper Collins Publishers. 1989. 315 s. ISBN 0-00-219787-1.
- KONVIČKA, M., BENEŠ, J., ČÍŽEK, L. Ohrožený hmyz nelesních stanovišť: ochrana a management. Praha: Sagittaria, 2005. 118 s. ISBN 80-239-6590-5.
- MOUCHA, J. Sbíráme motýly. Praha: Práce, 1972. 236 s. ISBN 24-104-72.
- NOVÁK, I., SPITZER, K. Ohrožený svět hmyzu. – Praha: Academia, 1982. 138 s. ISBN 03/16-4584-21-025-82.
- REICHHOL-RIEHMOVÁ, H. Motýli. Praha: Ikar, 1996. 287 s. ISBN 80-85944-93-6.
- ZAHRADNÍK, J. Naši motýli. Praha: Albatros, 1997, 458 s. ISBN 80-00-00524-7.

6 Kontakt na autora

doc. RNDr. Michal Mergl, CSc.

Katedra biologie, Fakulta pedagogická, Západočeská univerzita v Plzni, Klatovská 51, 30619,
PLZEŇ

mmergl@kbi.zcu.cz



ODBORNÝ KEMP PŘÍRODOVĚDNÝCH OBORŮ BIOLOGIE

PLANKTONNÍ ORGANISMY A JEJICH VÝZNAM VE VODÁCH

Veronika KAUFNEROVÁ a Tomáš Č. KUČERA

1 Co jsou to planktonní organismy

Jako plankton (planktonní organismy) jsou označovány všechny organismy volné vody (pelagiálu), které nejsou schopny aktivního pohybu a pasivně se vznášejí (nebo omezeně plavou) ve vodním sloupci. Tím se liší od druhé významné pelagické skupiny – aktivně plovoucího nektonu. V závislosti na své příslušnosti k systematické skupině organismů se liší i způsob získávání látek a energie – buď jsou významnými producenty (fytoplankton – získávají energii ze slunce a přijímají převážně látky v minerální formě) nebo jsou filtrátory či dravci (zooplankton – energii i stavební látky získávají v organické formě z těl jiných organismů).

2 Klasifikace planktonních organismů

Nejčastějším způsobem klasifikace planktonních organismů je tedy dělení na fytoplankton a zooplankton. Zástupci fytoplanktonu jsou organismy s převážně autotrofním způsobem výživy. Jde nejčastěji o sinice a řasy, tedy organismy schopné fotosyntetické asimilace. Někteří fytoplanktoni mají schopnost omezeného pohybu – např. zelení bičíkovci či obrněnky, jiné skupiny se pasivně vznášejí – např. sinice nebo centrické rozsivky.

Zooplankton se žíví heterotrofně. Zástupci zooplanktonu jsou obvykle pohyblivější než fytoplankton, a také obvykle větší. Najdeme mezi nimi zástupce korýšů (buchanky či perloočky), vířníků nebo prvoků.

Kromě výše uvedeného hlediska je možné organismy volné vody rozdělit podle velikosti (Lellák a Kubiček 1992) na megaplankton (> 2mm), mezoplankton (200-2000 μm), mikrop plankton (20-200 μm), nanoplankton (2-20 μm) a pikoplankton (< 2 μm, někdy též označovaný jako ultrananoplankton).

2.1 Fytoplankton a jeho adaptace na život v pelagiálu

Fytoplankton se vyskytuje ve vodním sloupci buď ve formě jednotlivých buněk, nebo se může shlukovat v drobné vločky. Pak hovoříme o vodním květu. Vodní květ může být tvořen jak sinicemi, tak řasami; jeho vločky mohou být rozptýleny ve vodním sloupci nebo mohou vytvářet povlak na hladině. Všichni zástupci fytoplanktonu jsou významnými producenty organické biomasy. V některých vlastnostech se však sinice a řasy odlišují.

2.1.1 Sinice

Sinice jsou autotrofní prokaryotické organismy. Nemají tedy, stejně jako bakterie, vytvořené pravé jádro, jsou však schopné fotosyntézy – stejně jako rostliny či řasy. Nejsou schopny aktivního pohybu, přesto mají některé sinice možnost ve vodním sloupci putovat ve vertikálním směru. To jim umožňují plynové měchýčky – aerotopy, patrně pod mikroskopem jako zrnka uvnitř buněk.

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Podle tvaru buněk můžeme rozlišit vláknité sinice (např. *Planktothrix* či *Anabaena*) a sinice s kulovitými buňkami (*Microcystis*, *Chroococcus*). Obvykle se jednotlivé buňky sinic shlukují v kolonie.

Významnou vlastností sinic je jejich schopnost vázat (fixovat) atmosférický dusík – převádět ho z nereaktivních molekul N_2 na formu dostupnou i jiným organismům. Tím dochází k obohacování prostředí o tuto významnou živinu. Fixace dusíku probíhá ve specializovaných útvarech – heterocytech. Ty jsou patrné pod mikroskopem na vláknitých sinicích jako silnostěnné útvary větší, než běžné buňky.

Některé ze sinic produkují biologicky aktivují látky, označované jako cyanotoxiny. Jsou sem řazeny látky nejrůznější chemické povahy, které mohou u lidí působit i vážnější zdravotní komplikace, v krajním případě i smrt.

Zástupci sinic pozorovaní v planktonu VN České údolí

Anabaena – vláknité, řetizkovitě uspořádané sinice s patrnými heterocyty, častá součást vodních květů.

Microcystis – častý původce vodního květu, významný producent cyanotoxinů; má kulovité buňky uspořádané do kolonií uložených ve slizovém obalu; nejčastější druhy jsou *M. aeruginosa*, *M. viridis*.

Planktothrix – vláknitá sinice s výraznými aerotopy; vytváří cyanotoxiny.

2.1.2 Řasové organismy

Jako řasy, přesněji řasové organismy, označujeme širokou skupinu převážně autotrofních organismů, z pohledu moderní biologie vzájemně nepříbuzných. Nejčastějšími příslušníky planktonu jsou zelení bičíkovci, zelené řasy žijící ve vícebuněčných celcích – cenobiích, a pak rozsivky.

Zelené bičíkaté řasy mají podobnou kombinaci fotosyntetických barviv, jako vyšší rostliny. Díky bičíku jsou schopné samostatného pohybu. V blízkosti báze bičíku se nachází červeně zbarvená světločivná skvrna – stigma.

Řasy žijící v cenobiích. Cenobia jsou útvary tvořené několika buňkami jedné generace (v počtu 2^n), často geometricky uspořádanými.

Rozsivky jsou řasy s podobnými barvivy, jako mají např. chaluhy. Jejich buňky jsou uloženy v dvoudílné křemité schránce (frustule). V planktonu se nejčastěji setkáme s tzv. centrickými rozsivkami, jejichž schránka má paprscitou souměrnost. Mohou se vyskytovat jednotlivě nebo tvořit vláknité kolonie. Duhou skupinou jsou rozsivky penátní, jejichž frustula je souměrná obvykle podle dvou rovin souměrnosti.

Zástupci řas pozorovaní v planktonu VN České údolí

Chlamydomonas, *Phacotus lenticularis* – bičíkaté řasy

Pediastrum – vytváří cenobia tvaru ozubeného kola

Desmodesmus, *Scenedesmus* – cenobia s obvykle 4 buňkami; oba rody se od sebe liší přítomností výběžků buněčné stěny – „rohů“ (*Scenedesmus* tyto výběžky nemá).

Botryococcus – zelená řasa produkující olej

Coelastrum – vytváří cenobia kulovitěho tvaru

Gonium pectorale – plochá cenobia tvořená šestnácti bičíkatými buňkami

Krásivky – buňky jsou tvořeny dvěma semicelami („polobuňkami“); pozorovali jsme zástupce rodu *Closterium* a *Micrasterias*.

Rozsivky – centrické vláknitě uspořádané rozsivky *Aulacoseira*, *Melosira*; zástupce penátních rodů *Nitzschia*, *Navicula*, *Cocconeis* aj.

2.2 Zooplankton a jeho adaptace na život v pelagiálu

Zástupci zooplanktonu patří do několika systematických skupin živočichů. Liší se rovněž způsobem získávání potravy či velikostí. Někteří zooplanktoni mají vytvořené orgány pohybu (nožky či tykadla), u jiných jsou přítomny útvary zvětšující plochu těla a tím zpomalující pád (nejrůznější trny a výběžky). Potravu získávají aktivně – buď dravě nebo filtrováním vody. Zooplankton je významnou složkou potravy ryb. Ve vzorku z VN České údolí byly pozorovány pouze drobnější zástupci zooplanktonu, což svědčí o velkém predačním tlaku ryb.

2.2.1 Prvoci

Z nezelených jednobuněčných organismů nalezneme v planktonu zástupce nálevníků, kořenonožců a nezelených bičíkovců. Pohyb umožňují brvy, panožky nebo bičíky. Jako potrava jim slouží drobnější mikroorganismy.

Zástupci pozorovaní ve VN České údolí: *Codonella cratera* – nálevník s pevnou schránkou, dále nezelení bičíkovci.

2.2.2 Planktonní korýši

Korýši používají k pohybu buď nožek (buchanky) nebo tykadel či tykadélek (buchanky a perloočky).

Perloočky jsou obvykle filtrátoři, živí se zejména jednobuněčnými řasami. Filtrace probíhá za pomoci hrudních končetin, opatřených filtračními brvami. Orgánem zpomalujícím pád jsou tykadla druhého páru (anteny). V hlavě perlooček jsou viditelné dvě oči – pohyblivé složené oko, a jednoduché tzv. naupliové oko.

Buchanky jsou oproti perloočkám dravci. Během života procházejí několika vývojovými stádii: nauplius – kopepodit – dospělec. Nejmladší, tedy naupliová stádia se živí drobnými zástupci zooplanktonu, např. vířníky. Sami pak slouží jako potrava svým starším stádiím. Orgánem pohybu jsou hrudní končetiny a tykadla prvního páru – anteny. Buchanky mají v dospělosti pouze jedno (tzv. naupliové) oko.

Pozorování zástupci planktonních korýšů:

Leptodora kindtii – velká dravá perloočka s průsvitným tělem

Daphnia – jeden z mnoha zástupců filtrujících perlooček; na VN České údolí se vyskytuje zejména druh *Daphnia cucullata*.

Bosmina longirostris – nosatička – perloočka s charakteristickým chobůtkovitým rastrem.

Cyclopidae (buchanky) – dospělci mají dvě dlouhé anteny (tykadélka), na zadní části těla samiček jsou umístěny dva vaječné vaky (ovisaky), čímž se liší od podobných vznášivek (mají jen jeden vak). Ve VN České údolí byla přítomna zejména naupliová, méně pak kopepoditová stádia, vzácně dospělci.

2.2.3 Vířníci

Vířníci jsou zvláštní skupinou bezobratlých živočichů. Ačkoli jsou velikostí srovnatelní s prvky, jde o mnohobuněčné organismy. Potravu získávají filtrováním pomocí vířivého aparátu, uloženého v blízkosti ústního otvoru. Tento aparát slouží i jako orgán pohybu, některé skupiny mají specializované ploutvičky (např. rod *Polyarthra*). Rody jako

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Brachionus či *Keratella* vytvářejí pevné schránky s charakteristickými trnovitými výběžky, které znesnadňují jejich pozření predátory. V závislosti na predačním tlaku se může délka těchto výběžků u jednotlivých generací vířníků lišit.

Pozorování zástupci vířníků:

Asplanchna – velký vířník s vakovitým tělem

Brachionus, *Keratella* – mají pevnou schránku s výběžky

Polyarthra – na povrchu těla má výběžky umožňující pohyb (ploutvičky)

3 Závěr

Plankton tedy představuje významnou složku vodních ekosystémů. Slouží jednak jako potrava dalším organismům (fyto- i zooplankton), jednak je významným producentem a fixátorem živin (fytoplankton). V neposlední řadě sem patří tak sinice, produkující významné cyanotoxiny, které mohou v případě přemnožení sinic (vodní květ) působit zdravotní komplikace koupajícím se lidem nebo znesnadňovat úpravu vody na pitnou.

4 Použitá literatura

LELLÁK J. a KUBÍČEK, F. Hydrobiologie. 1. vyd. Praha: Karolinum, 1992, 258 s. ISBN 80-7066-530-0

5 Kontakty na autory

Mgr. Veronika Kaufnerová

Katedra biologie FPE ZČU

veronika_kaufnerova@atlas.cz

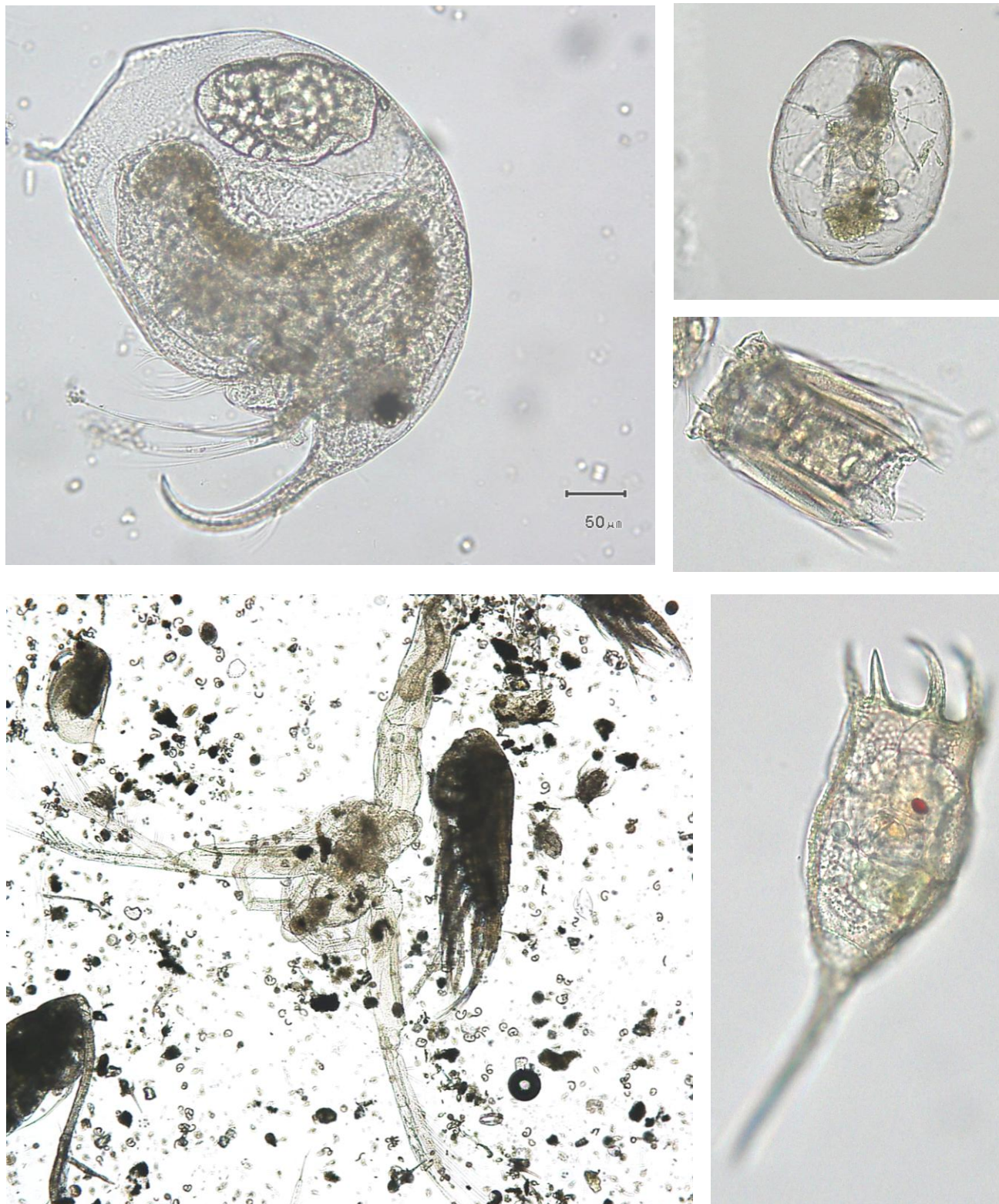
Mgr. Tomáš Č. Kučera

Povodí Vltavy, státní podnik

tomas.kucera@pvl.cz

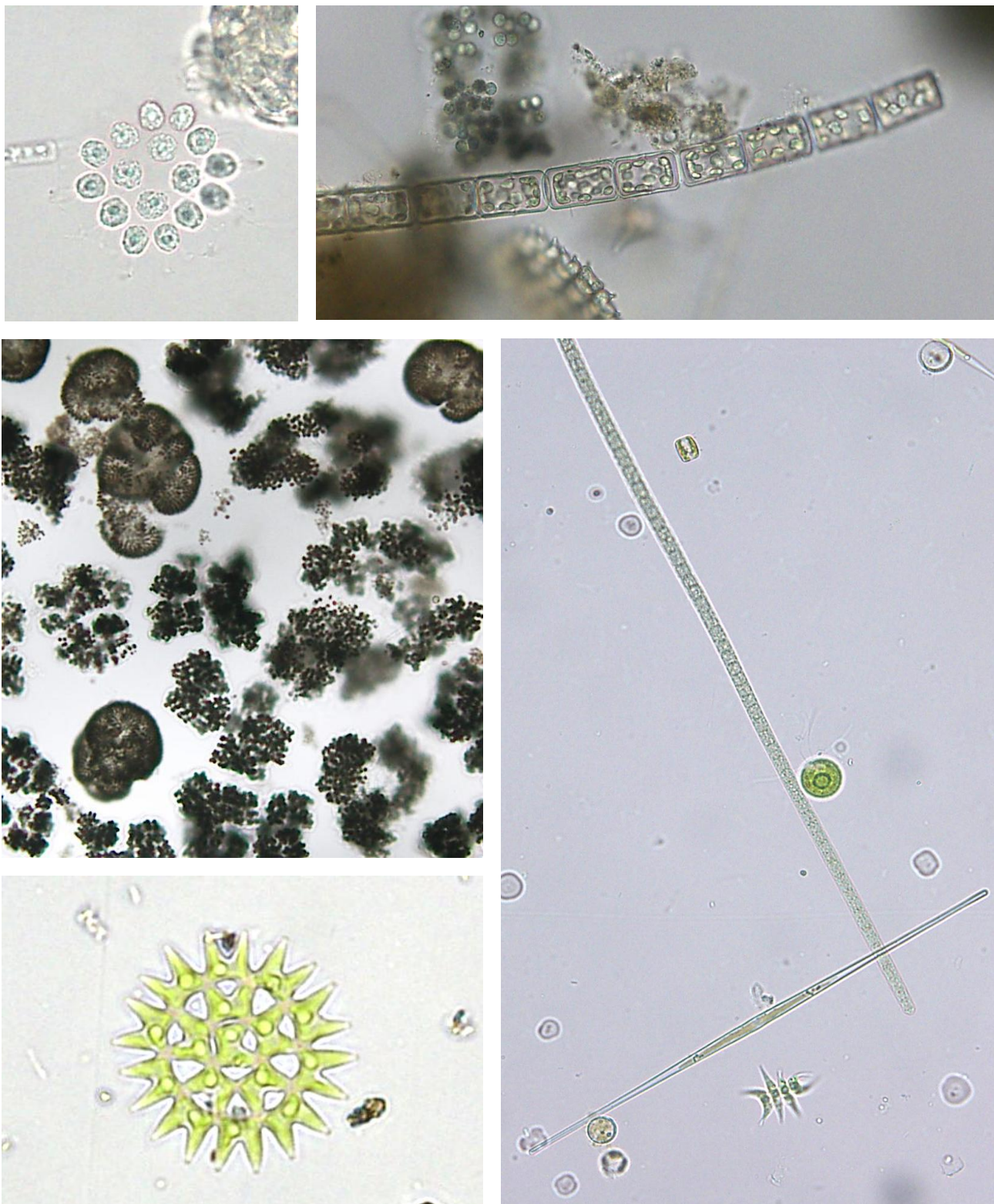
Plankton – obrazová příloha

Foto: T.Č. Kučera



Tab. 1 – Zástupci zooplanktonu. Vlevo nahoře: perloočka nosatička (*Bosmina longirostris*), vpravo nahoře vířník rodu *Asplanchna*, vpravo uprostřed vířník *Polyarthra*, vlevo dole dravá perloočka *Leptodora kindtii*, vpravo dole vířník *Keratella*.

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ



perloočka *Leptodora kindtii*, vpravo dole vířník *Keratella*.

Tab. 2 – Zástupci fytoplanktonu. Vlevo nahoře cenobiální zelená řasa *Gonium pectorale*, vpravo nahoře rozsivka *Melosira*, uprostřed vlevo sinicový vodní květ s dominantním zastoupením *Microcystis viridis* (shluky uspořádané do čtveřic) a *Woronichinia* (kulovité kolonie); vpravo dole (v obrázku diagonálně) vláknitá sinice *Planktothrix* (zrníčka uvnitř jsou



INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

aerotopy), kulovitá buňka patří bičíkaté řase *Chlamydomonas*, dlouhá buňka je penátní rozsivka *Synedria* a cenobium tvořené čtyřmi měsíčitými buňkami je *Scenedesmus*. Na obr. vlevo dole je cenobium *Pediastrum duplex*.

ODBORNÝ KEMP PŘÍRODOVĚDNÝCH OBORŮ BIOLOGIE

SAMOČIŠTĚNÍ V TEKOUCÍCH VODÁCH

Jindřich DURAS a Tomáš Č. KUČERA

1 Úvod: Co je samočištění?

Voda v přírodě má přirozenou schopnost sama se zbavovat znečišťujících látek – hovoříme o samočisticích procesech, neboli samočištění. Samočištění se uplatňuje ve všech typech vod: podzemních a povrchových, tekoucích i stojatých.

Samočištění má obrovský význam, protože umožňuje regeneraci vodních ekosystémů, které se musí vyrovnávat se znečištěním všeho druhu.

Na průběhu samočištění se podílejí procesy:

- fyzikální

sorpce (zachycování) na částice zejména jílových minerálů může odstranit z vody do sedimentu např. těžké kovy, ropné látky, některé pesticidy

odvětrání z hladiny nebo provzdušnění zbavuje vodu těkavých látek (např. benzín)

- chemické

chemická oxidace a redukce – ale pozor, většina z těchto dějů není čistě chemických, ale je zprostředkovávána biologicky, zejména činností bakterií

neutralizace kyselých nebo zásaditých látek

- biologické – nejdůležitější a neúčinnější

oxidace organických látek až na CO_2 a H_2O

oxidace anorganických látek, např. redukovaných sloučenin železa, manganu, síry a také tzv. nitrifikace, tedy oxidace amonných iontů na ionty dusičnanové

redukce, např. tzv. denitrifikace, tedy redukce dusičnanových iontů na plynný dusík, který se tím vrací zpět do atmosféry

Samočisticích procesů se využívá běžně při čištění odpadních vod z měst a obcí i z některých druhů výrob, zejména v potravinářském průmyslu (pivovary, mlékárny...). K tomu jsou ovšem přirozené procesy intenzifikovány – odpadní vody se míchají a provzdušňují.

2 Jaké znečištění musí samočisticí procesy zvládat?

V současné době je čištění odpadních vod u nás sice na velmi dobré úrovni, ale zapojení přírodních procesů ve vodách je stále nesmírně důležité. Problém dnes spatřujeme jednak u malých zdrojů znečištění – například většina z obcí do 500 obyvatel nečistí své odpadní vody, jak by bylo třeba. Drobné potoky a rybníky se pak musejí s tímto znečištěním vyrovnávat (obr. 1).

Druhým okruhem problémů je skutečnost, že žádná běžná technologie čištění odpadních vod nepracuje se stoprocentní účinností, takže i s dobře vyčištěnou odpadní vodou se do řek a potoků dostává i tzv. zbytkové znečištění. Součástí tohoto znečištění jsou například živiny,

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

zejména fosfor, který podporuje ve stojatých vodách masový rozvoj sinic. V odpadních vodách se také nachází široké spektrum chemických látek, s nimiž běžně ve svých domácnostech zacházíme. Jedná se například o léčiva – antibiotika, hypnotika („prášky na spaní“), antidepresiva a nejpoužívanější ze všech – analgetika (tlumení bolesti), z nichž populárních přípravků na bázi ibuprofenu (Ibuprofen, Ibalgin, Nurofen..) se v České republice za jediný rok spotřebuje 200 tun! Kromě léčiv je velmi nebezpečná tzv. domácí chemie, kam patří úklidové prostředky – mnohdy velmi agresivní, přípravky na mytí nádobí, na osobní péči a hygienu (sprchové gely, šampony, deodoranty, zubní pasty a ústní vody, kosmetika), prostředky na praní, včetně aviváží, a další. Všechny tyto látky nakonec skončí v odpadní vodě, přičemž ale jejich odstranění běžnou čistírenskou technologií není dokonalé. V řekách a potocích, kam vyčištěné odpadní vody nakonec tečou, tak vzniká pestrý koktejl látek, který může být pro vodní organismy značně nebezpečný. Je proto velmi důležité, aby samočistící procesy co nejlépe a co nejrychleji dokončily odstraňování znečišťujících látek, které by jinak poškozovaly celý vodní ekosystém.

3 Kdo se na samočištění podílí?

Samočistících procesů se zúčastňují všechny organismy, které ve vodě žijí. Zásadní význam mají bakterie, které dokážou být vysoce metabolicky aktivní a jejich mnohohodnová společenstva jsou schopna rozložit v zásadě jakékoli organické látky. Bakterie žijí v sedimentech na dně, jsou unášeny ve vodním sloupci a kolonizují ve vodě všechny dostupné podklady – povrchy kamenů i zrněk písku, stonky a listy vodních rostlin, povrch mrtvého dřeva. Jejich biomasa a aktivita je závislá především na teplotě (maximum aktivity kolem 20 °C) a také na množství přinášeného znečištění. Pod kanalizační výústí přinášející nečištěné odpadní vody můžeme pozorovat husté trásnitě bakteriální nárosty šedé barvy (obr. 2).

Spolu se společenstvy bakterií osidlují ponořené povrchy také autotrofní organismy¹. Na jaře a na podzim jsou dobře patrné sytě hnědé povlaky (nárosty) rozsivek, po celou vegetační sezónu se vyskytují různé typy zelených vláknitých řas (obr. 3-6). Autotrofní organismy zachycují například živiny, včetně fosforu, produkují ve vodě kyslík, jenž je třeba k bakteriálnímu rozkladu, a jsou základním článkem potravních řetězců.

Na samočištění se podílejí i ostatní organismy, jako například prvoci (obr. 7), červi (obr. 12), vířníci, mlži, larvy vodního hmyzu. Velký význam mají ponořené vodní rostliny (obr. 8) a u malých potůčků i kořeny stromů, které mohou z vody odčerpávat živiny. Všechny tyto organismy jsou součástí komplexního společenstva, které se v samočištění uplatňuje mnohem efektivněji, než by mohly populace jednotlivých organismů samostatně. Teprve vyvážené a druhově pestré společenstvo může mít optimální efekt při odbourávání znečištění v povrchových vodách. Narušená společenstva účinné samočistící procesy zajistit nedokážou.

¹ organismy, které obvykle s využitím slunečního záření vytvářejí z anorganických látek (živiny) látky organické (např. sacharidy)

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

4 Co je k účinnému samočištění třeba?

Vysvětlili jsme si, že k efektivnímu průběhu samočištění je třeba (i) pestré společenstvo vodních organismů, včetně rostlin, kde zásadní roli mají bakterie. Toto společenstvo musí mít ale dostatečnou biomasu, aby dokázalo kvalitu protékající vody významněji ovlivnit. A protože dominantní úlohu hrají organismy vytvářející nárosty na ponořených podkladech, je zřejmé, že potřebná biomasa se může vytvořit jediné tam, kde je k dispozici (ii) dostatek kolonizovatelných povrchů, aby se biologické nárosty mohly vytvořit. Přírodní procesy vyvíjející se miliardy let se po celý svůj vývoj učily rozkládat pouze látky, které vznikly přímo v přírodě. Proto rozklad látek, které člověk nově syntetizoval (např. léčiva), je i pro velmi přizpůsobivé bakterie mnohem obtížnější. Sice stále v zásadě platí, že nakonec je rozložitelná každá látka, ale důležité je, za jak dlouho. Samočištění procesy tedy potřebují také (iii) dostatek času.

Všechny tři zásadní podmínky pro úspěšný průběh samočištění procesů může splňovat pouze hydromorfologicky zdravý vodní tok. Hydromorfologie je věda o utváření koryta i okolí vodních toků, která zahrnuje i hodnocení vodního režimu.

5 Co je hydromorfologické zdraví?

Hydromorfologické zdraví řek a potoků zahrnuje přirozený vývoj toku (např. meandrování), přirozený materiál dna i charakter břehů, včetně doprovodné vegetace a přirozeně kapacitní koryto. To jsou zároveň podmínky nutné ke správnému vodnímu režimu v říčním údolí.

- Přirozený vývoj toku (meandrování, větvení apod.) je důležitý zejména pro: Zpomalení odtoku vody z krajiny. Koryto toku se zákrutami a meandry je zhruba 1,2-2,5 krát delší (podle množství a tvaru meandrů), než by bylo koryto přímé (obr. 9). Zároveň zvlněná trasa toku výrazně zpomaluje rychlost proudu, protože oproti přímému korytu má na jednotku délky menší spád. To znamená, že voda protéká daný úsek údolí, mnohem déle. Tím získávají samočištění procesy jednak tolik potřebný čas, a jednak mají v daném úseku vodní organismy k osídlení 1,2-2,5 krát větší plochu dna, než v toku napříměném. Získáváme tedy zároveň mnohem vyšší biomasu organismů, které rozklad znečišťujících látek provádějí. Rozmanitost příčné i podélné struktury říčního koryta. Zákruty znamenají, že voda přirozeně vytváří hluboké partie (tůně) poblíž nárazového břehu a mělčiny u protilehlého. V podélném profilu jsou v zátočinách tůně a mezi jednotlivými meandry naopak mělká místa (brody). Vodní tok tak získává přirozeně vysokou pestrost stanovišť (biotopů). A protože pestrost společenstev organismů je zásadně závislá právě na pestrosti stanovišť, která mají k dispozici, získávají tím samočištění procesy onu důležitou druhovou pestrost. Výměna vody s krajinou. Břeh, do něhož tekoucí voda naráží (vnější okraj zákrutu), je vystaven tlaku této vody. To obecně znamená, že voda zde má tendenci zasakovat (infiltrovat) do krajiny. Na vnitřní straně zákrutu se naopak voda do toku vrací (infiltruje zpět). Dochází ke komunikaci povrchové a mělké podzemní vody (obr. 10). Z pohledu samočištění procesů vidíme především to, že voda se při průchodu průlinčným dnem údolí filtruje. Filtrace zde ovšem neznamená pouze prosté mechanické odstraňování nečistot z infiltruje vody. Na drobných částicích písku a štěrku, kterými mělká podzemní voda pomalu protéká, jsou tenké biofilmy bakterií – a ty se aktivně zapojují do rozkladu znečišťujících látek.

- Přirozený materiál dna a břehů Velká plocha kolonizovatelných povrchů. Pokud je dno vodních toků tvořeno kameny v kombinaci se štěrky a pískem, pak se pod 1 m² plochy hladiny může nacházet až 9 m²

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

plochy biologicky využitelných povrchů, což je z hlediska samočištění velmi významné. Naproti tomu vybetonované dno poskytuje organismům pod 1 m² hladiny pouze 1 m² plochy k osídlení. Kolonizovatelné povrchy představují rovněž ponořené vodní rostliny.

Aktivní podříční dno (hyporeál). V přirozených podmínkách voda infiltruje nejen do břehů v říčních obloucích, ale také pod říční dno. Výborné podmínky k takové infiltraci představují šterkopískové lavice (obr.11). Tak vzniká pod říčním dnem zajímavý bohatě osídlený prostor, který může běžně zasahovat desítky cm hluboko. Průchodem šterkopísky je opět voda aktivně čištěna společenstvy mikroorganismů. Betonové dno samozřejmě jakoukoli infiltraci vylučuje.

- Přirozeně kapacitní, nepřehloubené koryto.

Přirozené rozlivy. Běžná přirozená koryta řek a potoků pojmu tzv. jednoletou vodu. V zásadě to znamená, že alespoň jednou do roka by voda měla z koryta vystoupit. Z pohledu samočištění získáváme při rozlivu vody důležitý bonus – usazování unášených látek v říční nivě. Tím jednak předcházíme zanášení vodních nádrží níže po toku, ale také zachycujeme živiny unášené na částech, které by jinak podporovaly v přehradních nádržích rozvoj sinic. Výměna vody s krajinou. Přehloubené dno, které vodohospodáři při technických úpravách vodních toků často vytvářejí (obr. 13), slouží pouze jako jednosměrná drenáž – podzemní voda přechází do vodoteče, ale nikoli naopak.

6 Jaké postavení mají v těchto procesech vodní rostliny?

Vodní rostliny (makrofyta) jsou důležitou součástí výše uvedených samočisticích procesů. Zapojují se do nich dvěma způsoby – přímo a nepřímo:

- Přímou – tím, že z vody odčerpávají minerální látky (živiny), které zabudovávají do svých těl. Takto fungují jak rostliny ponořené (submerzní makrofyta), tak rostliny ve vodě pouze kořenující (emerzní rostliny). V obou případech je hlavním místem vstupu živin do rostlinného organismu kořen; ponořené rostliny navíc část živin přijímají z vody celým povrchem těla.
- Nepřímo – představují kolonizovatelné povrchy, na nichž se mohou zachytit vlastní realizátoři čistících procesů – společenstva bakterií a dalších mikroorganismů, ale také představují stanoviště pro bezobratlé živočichy.

Mezi ponořené rostliny, které mají pro samočisticí procesy význam, patří stolístek klasnatý (*Myriophyllum spicatum*), růžkatce (*Ceratophyllum*), ale také rdesty – například rdest kadeřavý (*Potamogeton crispus*). Některé jiné ponořené rostliny se však na čistících procesech podílejí jen málo, nebo vůbec ne – např. vodní mor kanadský (*Elodea canadensis*). Důvodem je jejich nízká tolerance vůči vyššímu obsahu rozpuštěných látek, tedy vůči znečištění. Limitujícím faktorem pro výskyt ponořených rostlin je zejména průhlednost vody.

Ve vodě kořenující rostliny (emerzní makrofyta) rostou v mělkých vodách, např. v pobřežních porostech či rákosinách. Vytvářejí obvykle velké množství biomasy, na což samozřejmě spotřebují velké množství živin – a to je velkým přínosem pro samočištění. Příkladem těchto rostlin je rákos obecný (*Phragmites australis*), chrastice rákosovitá (*Phalaris arundinacea*), orobince (*Typha*) či některé ostřice (*Carex*). Pro schopnost odebírat z prostředí živiny a současně poskytovat své orgány jako kolonizovatelné povrchy mikroorganismům jsou tyto rostliny rovněž využívány v tzv. kořenových čistírnách odpadních vod.



INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

7 Shrnutí

Samočistící procesy jsou stále nesmírně důležité pro zachování dobré kvality vody. Pro zachování dobře fungujícího samočištění je nezbytné druhově pestré a biomasou bohaté společenstvo organismů, jehož existence je podmíněna zachováním zdravých hydromorfologických poměrů ve vodních tocích. Napřímené a zahloubené koryto, někdy dokonce se zpevněným dnem a břehy, je třeba jednoznačně považovat za degradovaný tok a ekologicky znehodnocené stanoviště. Z pohledu samočištění se jedná o bezcenný úsek, kde byla zbytečně promarněna příležitost přispět k dobré kvalitě vody a celého životního prostředí.

8 Kontakt na autory

RNDr. Jindřich Duras, Ph.D.
Povodí Vltavy, státní podnik
durasj@seznam.cz

Mgr. Tomáš Č. Kučera
Povodí Vltavy, státní podnik
tomas.kucera@pvl.cz

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ



Obr. 1 a 2: I dnes je ještě časté znečišťování drobných vodních toků nečištěnými splaškovými vodami, zvláště z malých obcí. V toku se pak vytváří bohatý bakteriální nárost hustě osídlený prvoky, který znečištění intenzivně rozkládá. Jiné organismy však v takovém potoce nepřežijí...



Obr. 3-7: Dobře vyvinuté nárosty na kamenech mělké části říčního dna. Jedná se převážně o různé druhy zelených vláknitých řas a bohaté společenstvo rozsviek (rody *Gomphonema*, *Rhoicosphaenia*, *Cymbella*, *Cocconeis*...) v němž mají důležitou pozici také prvoci, zvláště nálevníci (na obr. je vířenka

Vorticella sp.)



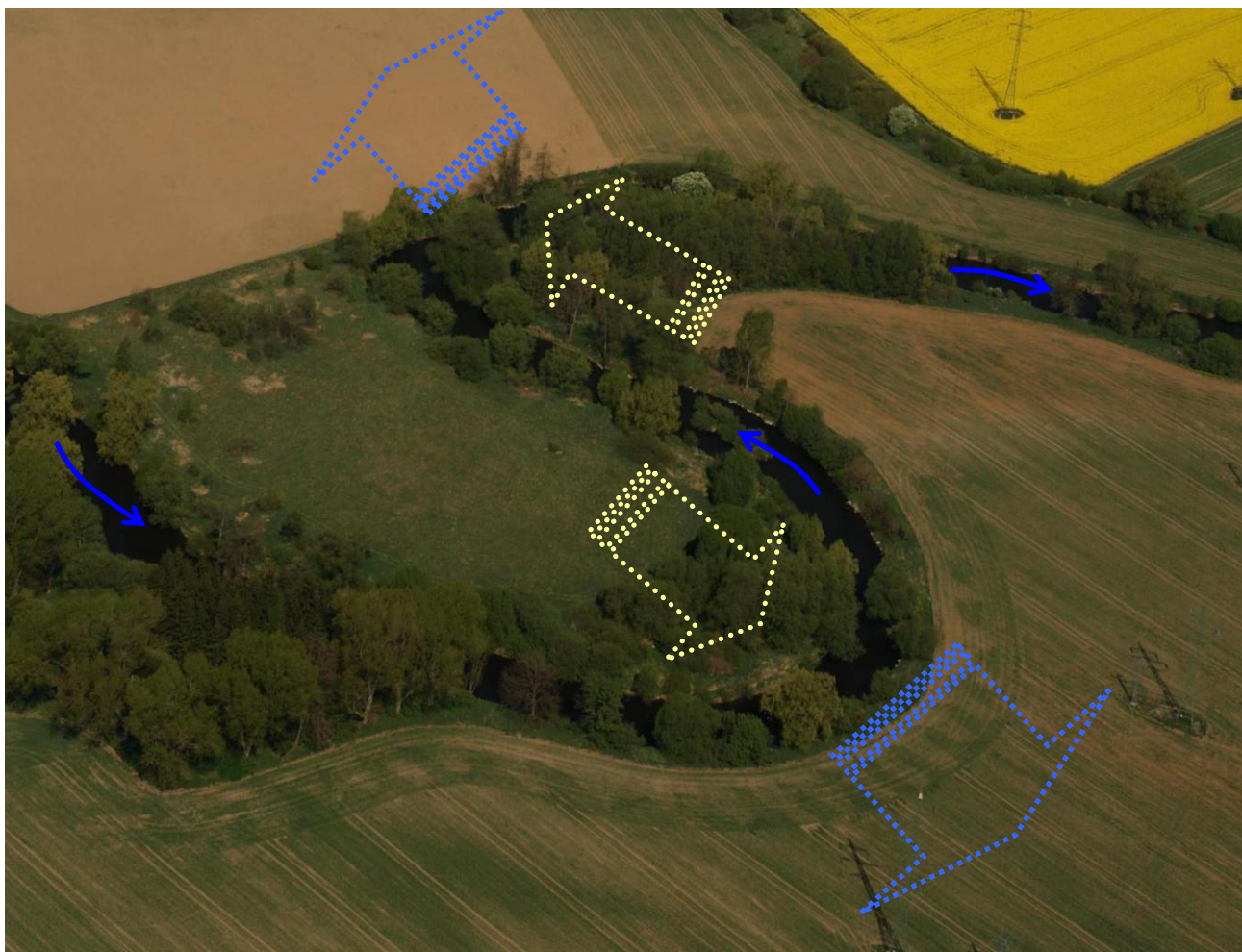
Obr. 8: Vodní rostliny vytvářejí bohatou strukturu vodního prostředí, poskytují útočiště četným organismům a i samy se podílejí aktivně na samočisticích procesech. Snímek RNDr. J. Hess.

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ



Obr. 9: Řeka Klabava široce meandrující nivou před ústím do Berounky. Trať meandrujícího toku je 2,4 krát delší, než je přímá spojnice mezi začátkem prvního ohybu a ústím. Proud vody je zpomalený a společenstva organismů zapojených do samočištění mají k dispozici 2,4 krát větší plochu dna, než kdyby byl tok Klabavy napřímený technickou úpravou. Snímek V.Šoltys, archiv státního podniku Povodí Vltavy.

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ



Obr. 10: Komunikace tekoucí vody s mělkou podzemní vodou říční nivy na příkladu meandru řeky Mže. Do břehu, kam proud naráží, má voda tendenci infiltrovat (modrá široká šipka) na opačném břehu se voda infiltrací vrací zpět do toku (žlutá široká šipka). Tenká modrá šipka – směr toku řeky. Snímek V.Šoltys, archiv státního podniku Povodí Vltavy.



Obr. 11 a 12: Dobře vyvinutá štěrkopísková lavice bývá místem intenzivní infiltrace tekoucí vody. Uvnitř v prostoru mezi kamínky žije bohaté společenstvo bakterií a bezobratlých živočichů (na obr. máloštětinatý červ rodu *Aelosoma*), kteří se aktivně podílejí na samočisticích procesech. Snímky RNDr. J. Hess.

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ



Obr. 13: Ukázka zcela degradovaného koryta vodního toku, kde se setkaly všechny tři typy fatálních zásahů: napřimění, zahloubení a opevnění dna i břehů. Voda teče velmi rychle nejkratší možnou dráhou, přičemž biologicky kolonizovatelných povrchů je minimum. Společenstvo vodních organismů je zde velmi chudé, tvořené odolnými druhy. Nelze předpokládat jakékoli samočistící procesy. Podobné úpravy u nás postihují zejména drobné vodoteče, které jsou ovšem z pohledu samočištění nejdůležitější, protože představují kolem 90% délky celé říční sítě a přijímají nejen odpadní vody z drobných obcí, ale také např. splachy pesticidů z polí a další.

Pokud není uvedeno jinak, je autorem snímků dr. Duras

ODBORNÝ KEMP PŘÍRODOVĚDNÝCH OBORŮ BIOLOGIE

OBECNĚ ROZŠÍŘENÉ INVAZNÍ ROSTLINY

Zdeňka CHOCHOLOUŠKOVÁ

1 Úvod

V posledních desítkách let zaznamenáváme velký nárůst počtu invazních druhů na našem území. Děje se tak hlavně v souvislosti s rozvojem dopravy a možností cestovat na velké vzdálenosti. Často dochází k přesunu částí rostlin, ze kterých se mohou na novém stanovišti množit. Spousta druhů, které jsou ve svém původním areálu součástí místní flóry a nikterak neškodí, v novém areálu vytlačují ze svých stanovišť původní druhy. Například opuncie, které v Americe zdobí místní suché biotopy, na Kanárských ostrovech vytlačují místní flóru (endemická eonia či pryšce). Stěžejní úlohu v tomto procesu nezřídka hraje člověk. Některé druhy se k nám dostávají neúmyslně (např. s osivem – pět'oury, chundelka metlice, aj.), ale jiné zcela záměrně (např. bolševník velkolepý, který byl dovezen z Kavkazu do obory pro bažanty do zámecké zahrady v Lázních Kynžvartu, nebo křídlatky, které se nabízely k pěstování na zahradách jako okrasné rostliny) (Pyšek, 1996, Boersma, Reichard et Buren, 2006).

Na druhé straně, pouze některé druhy, které jsou u nás nepůvodní, se chovají invazně. Za **invazní druhy** tedy považujeme ty **nepůvodní druhy, jejichž počet v místě a čase nekontrolovatelně roste** (Pyšek, 1996).

Invazní proces (Weber, 2004) začíná **introdukcí diaspor** do nového areálu. Následuje fáze **kolonizace** a **reprodukce**. Je známo, že narušovaná a člověkem ovlivňovaná stanoviště jsou více náchylná k invazi, než přirozené biotopy. Následuje fáze intenzivního **šíření** druhu a pronikání do polopřirozených a přirozených biotopů. Poslední fází je **expanzní šíření** do různých biotopů. V invazním procesu jsou úspěšnější druhy s širokou ekologickou valencí, které dokáží lépe využít stanovištní podmínky v novém areálu.

2 Rozšířené invazním druhy v naší flóře

2.1 Invazní druhy šířící se podél vodotečí

Rada invazních druhů se šíří podél vodotečí. K tomu používají různé mechanismy využívající činnosti vodního toku. Dokonce i jednoleté rostliny jako např. netýkavky, mohou tak být úpornými invazními druhy.

2.1.1 Křídlatka japonská (*Reynoutria japonica*)

Vytrvalá bylina z čeledi rdesnovitých, vyznačuje se botkami na uzlinách na lodyze (vznikají srůstem palistů), dosahuje až 2 – 2,5 m výšky. Čepele listové jsou zakončeny uťatou bází a jsou lysé. Velikost listů je do 15 cm. Kvete bíle nebo narůžověle. Plody u nás obvykle nedozrávají, a proto se množí převážně vegetativně. Tento asijský druh má výbornou regenerační schopnost (je schopen regenerovat z 10 cm části stonku). Intenzivně se šíří podél vodotečí, kde vytváří souvislé polykormony. Např. v Plzni, která leží na soutoku 4 řek, patří k nejrozšířenějším invazním druhům. Likviduje se postřikem herbicidu (Roundup Forte nebo Roundup Rapid) na listy na konci vegetační sezóny (tedy na přelomu srpna a září) (Mlíkovský et Stýblo, 2006).

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

2.1.2 Křídlatka sachalinská (*Reynoutria sachalinensis*)

Narozdíl od předchozího druhu jsou čepele listové zakončeny srdčitou bází a jsou hustě chlupaté. Velikost přes 20 cm. Tento druh se více drží původních výsadeb a neutíká tak ochotně, jako předchozí.

2.1.3 Křídlatka česká (*Reynoutria x bohemica*)

Je křížencem předchozích dvou druhů. Má intermediální znaky mezi oběma rodiči, takže listy jsou buď lysé, velké se srdčitou bází, nebo menší s uťatou bází (ty se někdy obtížněji determinují), na rubu s několika chlupy ohraničenými chrupavčítým lemem. Často se vyskytuje na opuštěných plochách či podél vodotečí. V současné době se velmi intenzivně šíří. Hubí se stejně jako *R. japonica*.

2.1.4 Netýkavka žláznatá (*Impatiens glandulifera*)

Jednoletá až 2 m vysoká bylina s růžovými vonnými květy z čeledi netýkavkovitých. Šíří se podél vodotečí. Vytváří souvislé porosty. Semena této rostliny jsou uvolňovány z tobolek, neplavou, ale padají na dno řeky či potoka a při větší vodě jsou unášena se zrnky písku a deponována v tišinách, kde později vyklíčí. Dále jsou rozšiřována vodním ptactvem. Uvádí se rychlost šíření až 38 km za rok (Mlíkovský et Stýblo, 2006). Druh je rozšířen po celém území republiky vyjma nejvyšších poloh.

2.1.5 Štětinatc laločnatý (*Echinocystis lobata*)

Okrasná liána původem ze Severní Ameriky z čeledi dýňovitých, pěstovaná často na plotech či pergolách. Ozdobná velkými listy a později ostnatými bobulemi. V současné době se intenzivně šíří na divokých skládkách v lidských sídlech nebo se pne po pobřežních křovinách.

2.2 Invazní druhy šířící se v lidských sídlech mimo vodotečí

Invazní druhy, které nacházíme běžně v sídlech, ať už podél komunikací, na neudržovaných plochách, v trávnicích, apod.

2.2.1 Bolševník velkolepý (*Heracleum mantegazzianum*)

Vzrostlá dvouletá až vytrvalá bylina z čeledi miříkovitých, která k nám byla v roce 1862 (Mlíkovský et Stýblo, 2006) zavlečena ze Západního Kavkazu zahradníkem hraběte Metternicha do bažantnice zámecké zahrady v Lázních Kynžvartu. Vyskytuje se v příkopech podél silnic, v okolí železničních tratí, na loukách, v lidských sídlech. Intenzivně se rozmnožuje hlavně pomocí semen. Tento druh je hojně medializován i z toho důvodu, že obsahuje furanokumariny, které ve styku s lidskou pokožkou za iniciace slunečním zářením způsobují na kůži člověka obtížně se hojící puchýře. Rostlina se likviduje pomocí intenzivního sečení, spásání porostů a s použitím herbicidů.

2.2.2 Netýkavka malokvětá (*Impatiens parviflora*)

Jednoletá žlutě kvetoucí bylina z čeledi netýkavkovitých, původní v Asii, která se k nám šířila z botanických a zámeckých zahrad. Počátek pěstování je datován do roku 1844 (Mlíkovský et Stýblo, 2006). S odsunem německých vojsk s východu na západ našeho území bylo zaznamenáno další šíření tohoto druhu. V současné době vytlačuje bylinný podrost z listnatých lesů, ale najdeme ji podél komunikací, v parcích apod.

2.2.3 Turanka kanadská (*Conyza canadensis*)

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Jednoletá nebo ozimá až 1,5 m vysoká rostlina z čeledi hvězdnicovitých. Původní v Severní Americe. Dnes je obecně rozšířena v lidských sídlech. Nacházíme buď jednotlivé rostliny při okrajích trávníků, při bázích chodníků, ale často vytváří spolu s locikou kompasovou (*Lactuca serriola*) porosty na deponiích stavebních materiálů či stavebních sutí.

2.3 Invazní druhy dřevin

Invazní druhy nenacházíme jen mezi bylinami, ale i mezi dřevinami. Často se jedná o stromy dorůstající velkých rozměrů, které ochotně zmlazují a vytvářejí odnože, které mohou porušovat i zídky či budovy.

2.3.1 Javor jasanolistý (*Acer negundo*)

Opadavý strom z čeledi javorovitých původem ze Severní Ameriky. Strom je často vysazován do parků, podél cest nebo do stromořadí. Osidluje opuštěné plochy v sídlech i mimo ně.

2.3.2 Pajasan žláznatý (*Ailanthus altissima*)

Vzrostlý opadavý strom z čeledi simarubovitých původem z východní Asie. Opět hojně vysazován do parků, podél cest či do stromořadí.

2.3.3 Trnovník akát (*Robinia pseudacacia*)

Opadavý strom z čeledi bobovitých původem ze Severní Ameriky. Zpočátku byl vysazován na strmé železniční násypy pro jejich zpevnění. Později se vysazoval i do lesních porostů i do sídel. Ochotně zmlazuje a hustý zmlazený porost se stává téměř neprostupným, protože je porostlý trny. V podrostu akátin, které se vysazovali hlavně v teplejších polohách, na místa původních habřin a dubohabřin, často najdeme již zmiňovanou netýkavku malokvětou.

3 Závěr

V naší přírodě je tolik nepůvodních druhů, že jakákoliv snaha o jejich eliminaci je předem prohraná. Lze tedy pouze doporučit hubení rozsáhlých porostů invazních druhů.

4 Použitá literatura

- BOERSMA, P. D., REICHARD, S. H. et VAN BUREN A. N. Invasive species in the Pacific Northwest. University of Washington Press, China, 2006. 285 s. ISBN 0-295-98596-8.
- JEHLÍK, V. [ed.]. Cizí expanzivní plevely České republiky. 1. vyd. Praha: Academia, 1998. 506 s. ISBN 80-200-0656-7.
- PYŠEK, P. Synantropní vegetace. Vysoká škola báňská – Technická univerzita Ostrava. 1996, 52-71 s.
- WEBER, E. Invasive plant species. Zurich: CABI Publishing, 2003. 548 s. ISBN 0-85199-695-7.

5 Kontakt na autora

RNDr. Zdeňka Chocholeušková, Ph.D.

Katedra biologie, Fakulta pedagogická, Západočeská univerzita v Plzni, Chodské nám. 1, 306 14 Plzeň – Bory
chochol@kbi.zcu.cz

ODBORNÝ KEMP PŘÍRODOVĚDNÝCH OBORŮ CHEMIE

JAK RYCHLE A JEDNODUŠE PRACOVAT V KRESLICÍM PROGRAMU CHEMSKETCH

Jana BRICHTOVÁ

1 Úvod

Hlavním cílem odpoledního setkání účastníků chemického kempu bylo seznámit se se základními nástroji kreslicího chemického programu ChemSketch.

Největším přínosem programu ChemSketch je jeho jednoduchost, snadná ovladatelnost, možnost optimalizace a vizualizace nakreslených struktur a v neposlední řadě může ještě více motivovat zájem o hlubší studium chemie.

Nejzajímavější částí kreslicího programu ChemSketch je podprogram 3DViewer, který převádí strukturální vzorec sloučeniny na její 3D model s tím, že uživatel si může vybrat, s jakým druhem modelu bude v prostoru otáčet a předvádět ho z různých stran.

V dalším textu jsou pouze naznačeny některé možnosti kreslicího programu a vybrané úkoly, které účastníci chemického kempu měli během odpoledne vyřešit. Podrobnější návody s názornými ukázkami měli samozřejmě studenti k dispozici a tyto návody si také mohli odnést s sebou domů.

2 POPIS prostředí programu ChemsSketch

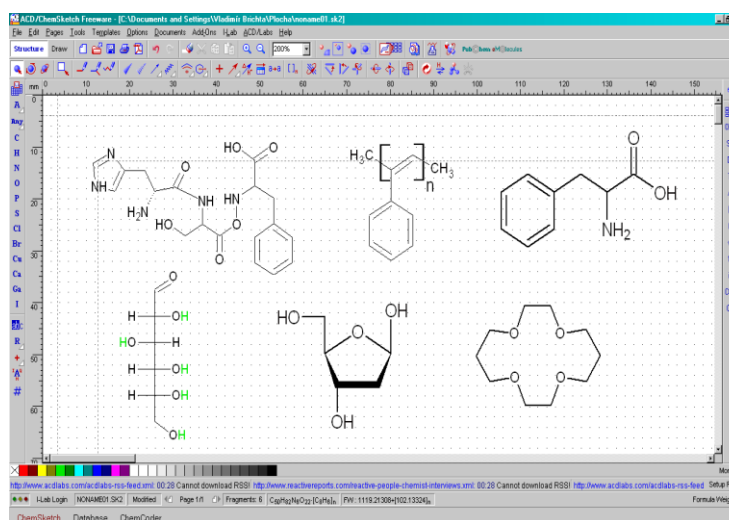
Program ChemSketch je nejjednodušší kreslicí chemický program, který můžeme získat zdarma. Je produktem firmy Advanced Chemistry Development a v současné době je uživatelům k dispozici již verze č. 12.0.

S programem ChemSketch se pracuje ve dvou základních režimech.



2.1 Režim Structure

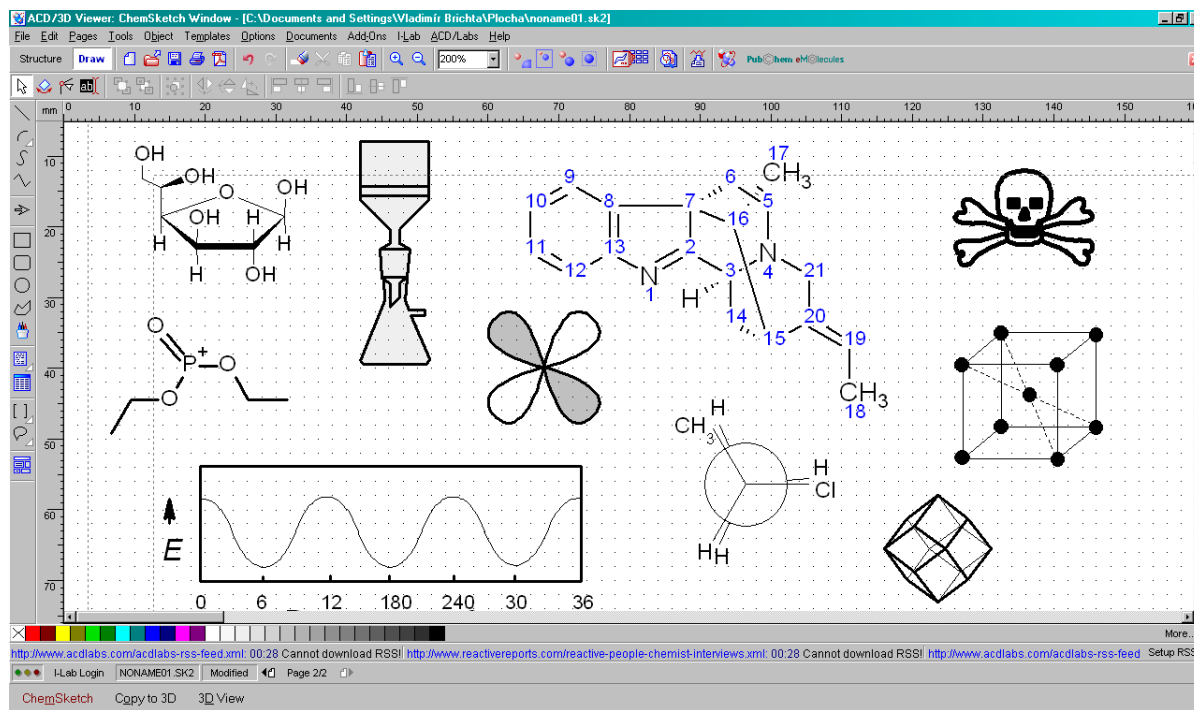
Režim „**Structure**“ je určený pro pohodlné kreslení chemických struktur a pro výpočty některých vlastností molekul (molární hmotnost, hustota, procentové složení a jiné). Navíc program umožňuje vytvořené struktury molekul i pojmenovat. V programu lze dobře kreslit také sloučeniny s kovalentní, koordinační i iontovou vazbou, vytvářet reakční schémata, ale nejvíce využíváný je program pro kreslení struktur organických a přírodních sloučenin.



2.2 Režim Draw

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

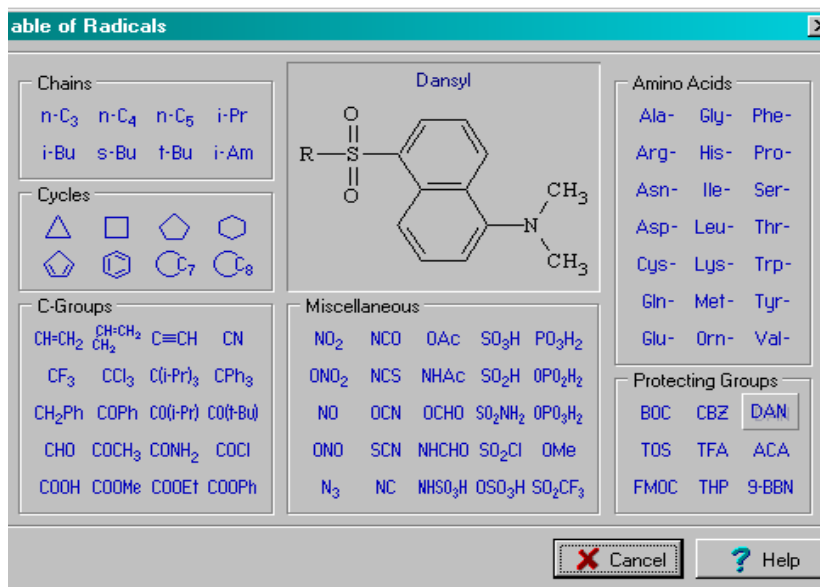
Režim „**Draw**“ je určený pro grafickou činnost, jako je nákres chemických aparatur, náročnějších a složitějších molekul, orbitalů, krystalických struktur nebo třeba grafů.



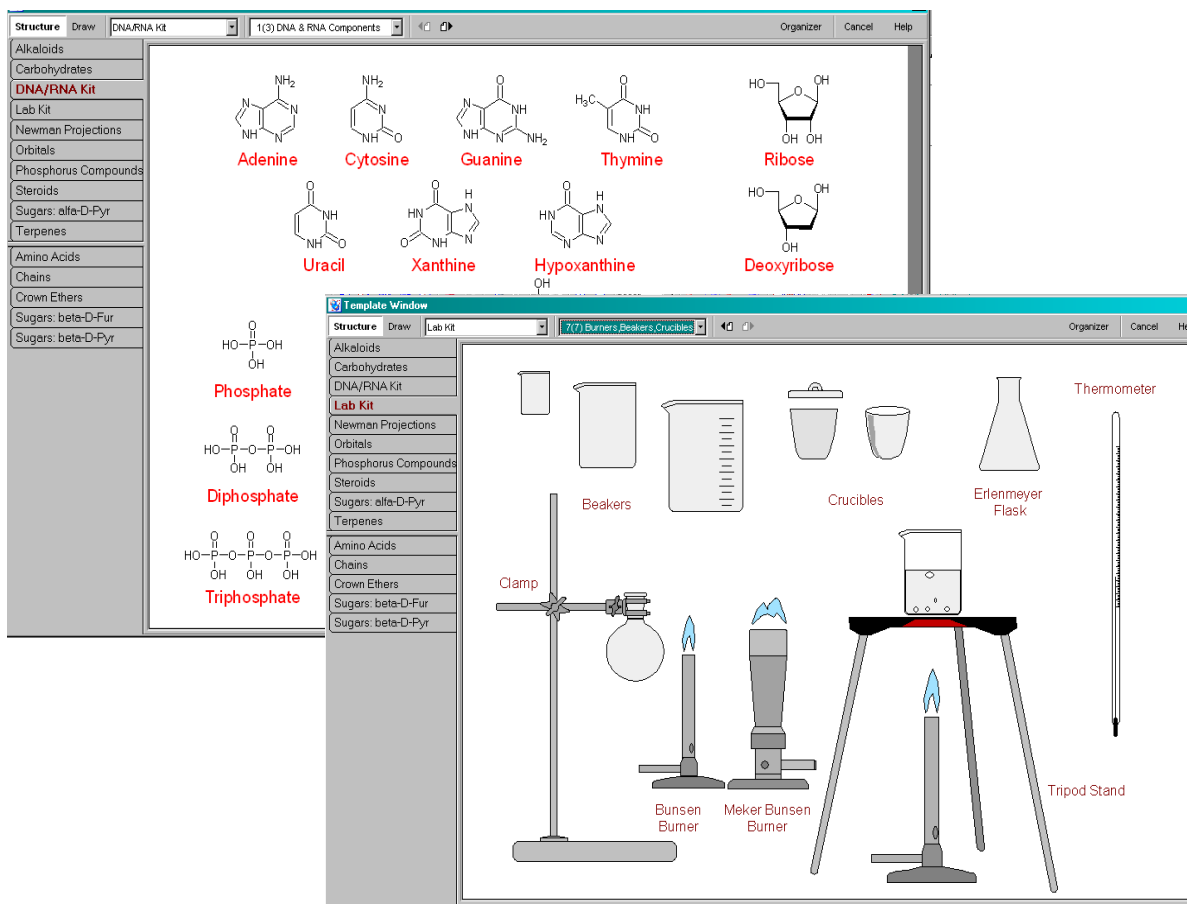
Velkou výhodou programu je velice široká nabídka již hotových struktur (funkčních skupin, sacharidů, uhlovodíků, aminokyselin, vitamínů, cyklických sloučenin, steroidů, atd.) v podobě nástroje „Table of Radicals“ nebo šablon „Templates“.

Po zakreslení dané struktury se na dolní liště objeví informace o této sloučenině. Uvidíme např. sumární vzorec, relativní molekulovou hmotnost, hustotu, molární objem apod.

Pod nabídkou „**Templates**“ jsou umístěny šablony s obrovským množstvím sloučenin, které je možné kopírovat, editovat. Navíc zde najdeme i tabulky s laboratorním nádobím, ze kterého můžeme sestavovat různé laboratorní aparatury.

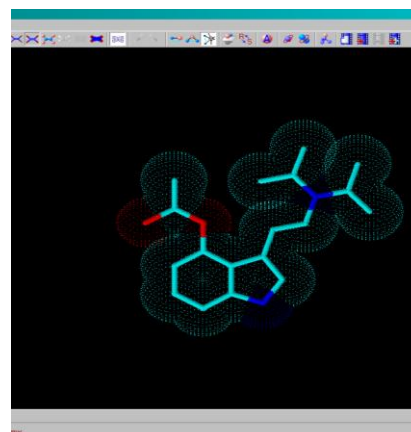
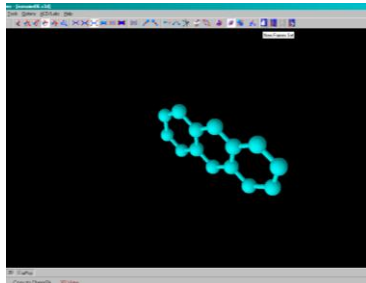
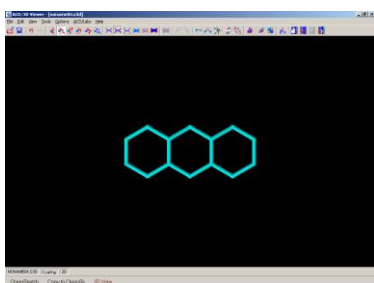


INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ



Nakreslené sloučeniny je možné uložit, vytisknout nebo převést do jiného dokumentu, např. do Wordu, Excelu a poslední verze umožní dokonce uložit vytvořený soubor v PDF formátu.

Nespornou výhodou je možnost optimalizace kreseb molekul v podobě 2D nebo 3D a navíc pro variantu 3D je program ChemSketch doplněn podprogramem ACD/3DViewer. V tomto podprogramu můžeme libovolně otáčet nakreslenými strukturami v podobě drátových, tyčinkových nebo třeba kalotových



modelů. Navíc je v tomto podprogramu možné s modely v prostoru otáčet nebo nechat změřit vazebné úhly, meziatomové vzdálenosti, aj.

Tato funkce je jednou z nejhezčích aplikací programu ChemSketch.

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

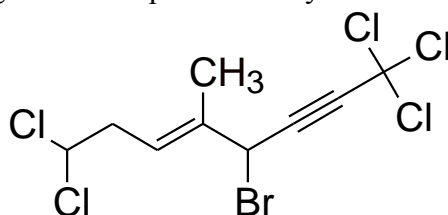
2.3 Cvičení a úkoly

Po seznámení s programem měli studenti možnost vyzkoušet si některé základní postupy při kreslení vybraných chemických struktur a procvičit si je s dopomocí podrobnějších návodů. Na závěr odpoledne studenti samostatně kreslili vybrané chemické sloučeniny, převáděli je do podprogramu 3D Viewer a zkoušeli jeho možnosti. Využívali samozřejmě i režim Draw a vytvářeli jednoduché chemické aparatury a reakční schémata. Pro lepší představu, co všechno účastníci chemického kempu zvládli, uvádím některé z úkolů.

Cvičení s návodem – Tabulka substituentů a nepřetržitě kreslení

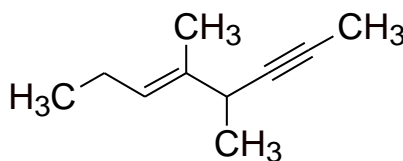



Úkol: Nakreslete vzorec halogenderivátu podle ukázky




Návod:

- Nakreslete pomocí nástroje nepřetržitěho kreslení daný uhlíkatý řetězec, tak jak vidíte na ukázce (4,5-dimethylokta-5-en-2-yn).
- Vytvořte dané nenasycené vazby.




- Přidejte si na lištu atomů z tabulky  chlor a brom (pokud tam již nejsou z předchozích postupů).
- Vyměňte potřebné atomy vodíku za atomy chloru:

- Aktivujte atom chloru na liště.
- Na horní liště vyberte ikonu .
- Opakovaným dvojklikem na příslušný atom uhlíku ve skupině CH₃ vyměňte v poslední methylové skupině dva atomy vodíku za dva atomy chloru.
- Totéž opakujte pro druhý methyl na konci řetězce, ale vyměňte tři atomy.

- Vyměňte jen pouhou výměnou atom bromu.

(ikona Draw Normal, výběr Br na liště a kliknutím na atom C v postranním methylu)

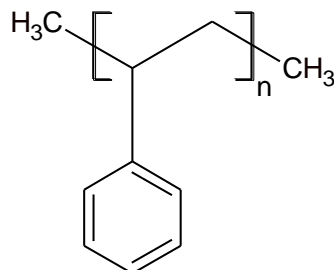
- Strukturu vyčistěte.

- Pojmenujte vytvořený derivát pomocí nástroje .



INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Cvičení s návodem – Kreslení polymerů a zakomponování do dokumentu

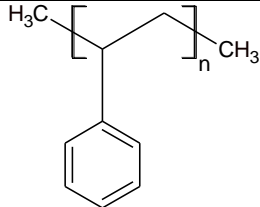
Úkol: Nakreslete vzorec polystyrenu a vložte jej do tabulky v dokumentu WORD



Návod:

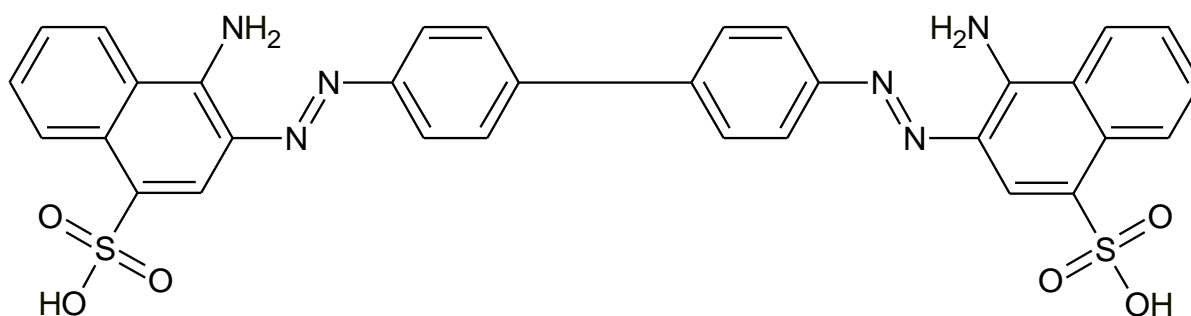
- Nakreslete uhlíkatý řetězec se 4 atomy uhlíku.
- Vložte z tabulky substituentů na plochu do blízkosti 2. uhlíku vzorec benzenu.
- Pomocí nástroje Draw Normal spojte tahem myši oba příslušné uhlíky.
- Nakreslete dvojnou vazbu mezi 2. a 3. uhlík.
- Pomocí nástroje Select/Move vyberte nakreslenou strukturu a vyčistěte ji nástrojem Clean.
- Aktivujte ikonu „Polymer“ .
- Klikněte na vazbu mezi prvním a druhým uhlíkem a potom na vazbu mezi 3. a 4. uhlíkem
a kliknutím myši někam na plochu mimo nakreslenou strukturu ukončíte nástroj „Polymer“.
- Pomocí nástroje Select/Move nebo „Lasso“ vyberte daný polymer.
- Na horní liště nástrojů označte ikonu „Copy“  a přejděte do dokumentu Word.
- Na určené místo uložíme daný polymer použitím kombinace CTRL + V.

Příklad tabulky:

Polymer	zkratka	Vzorec
Polystyren	PS	

Úkol: Nakreslete vzorec methyloranže.

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

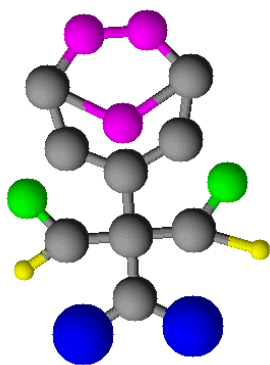


Úkol: Najděte ke sloučenině Acylpyrin řetězec Smiles a pak vykreslete jeho strukturu.

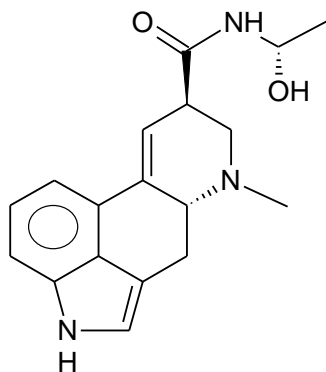
Návod:

- Otevřete internetové stránky „Wikipedie“ a najděte stránky o Acylpyrinu (v angličtině).
- V tabulce na pravé straně je jeden z řádků právě označen jako „SMILES“. Jedná se o řetězec znaků, které pečlivě zkopírujte.
- Podle návodu přeneste na pracovní plochu programu ChemSketch

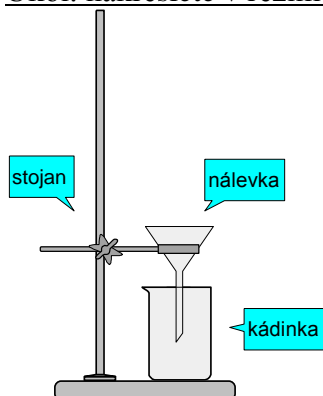
Úkol: Nakreslete danou strukturu, převed'te ji do podprogramu 3D Viewer a vyzkoušejte si pomocí příslušného nástroje změny barev.



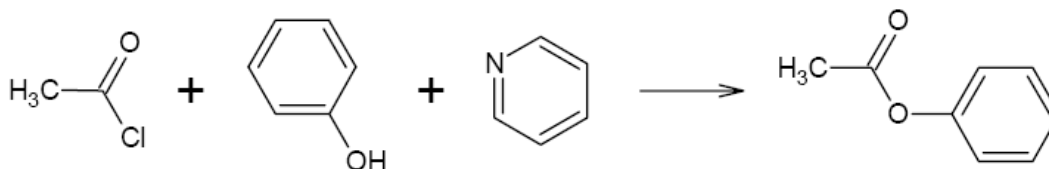
Úkol: Vytvořte s použitím nástrojů prostorových vazeb uvedené sloučeniny.



Úkol: nakreslete v režimu Draw obrázek chemické aparatury i s popiskami jednotlivých částí.



Úkol: Vytvořte zápis následující chemické reakce.



3 Závěr

Studenti během semináře získali stručný přehled o možnostech a využití chemického kreslicího programu ChemSketch. Jeho absolvováním mají účastníci kempu základní schopnost orientovat se v problematice kreslicího programu a pracovat s ním jak v přípravách podkladů na vyučování, např. protokolů, seminárních prací, prezentací, zpracování projektů, tak třeba i jen pro svoji zábavu. Účastníci se také naučili, jak jednoduše si lze vytvořit vybrané vzorce již hotových chemických sloučenin a vyhnout se tak někdy problematickým autorským pravidlům.

4 Použitá literatura

DRAŠAR, P. ACD/ChemSketch – verze 10.0 pro Microsoft Windows, učební pomůcka, kreslení chemických struktur a grafiky. [online]. 2007 [cit. 2010-7-27]. 131 s. Dostupné z: http://www.vscht.cz/lam/new/chemsk_t_v10_CZa.pdf

5 Kontakt na autora

Mgr. Jana Brichtová
Masarykovo gymnázium, Petáková 2, Plzeň
janabrichtova@atlas.cz

ODBORNÝ KEMP PŘÍRODOVĚDNÝCH OBORŮ CHEMIE

KVALITATIVNÍ ANALÝZA

Jan HRDLIČKA

1 Úvod

Pokud se budeme zajímat o složení libovolného vzorku, máme několik možností, jak k problému přistoupit. Buď nás bude zajímat množství některé ze složek vzorku (analýza kvantitativní) a nebo to, z jakých součástí je vzorek složen (analýza kvalitativní). Dnes jsou tyto problémy obvykle řešeny s pomocí různých přístrojů. V dobách, kdy ještě chemie neměla takovéto možnosti, byly využívány především různé chemické reakce. Tyto postupy jsou samozřejmě využitelné i dnes.

Zaměříme-li se na stanovení složení anorganického vzorku, je třeba provést důkazové reakce, tj. chemické reakce, jejichž výsledek nás bude informovat o přítomnosti či nepřítomnosti některých složek ve vzorku. Pro jednotlivé reakce se používají různé typy činidel. Obvykle mluvíme o činidlech (nebo reakcích) skupinových, selektivních a specifických. Skupinová činidla poskytují pozitivní reakci s celou skupinou iontů (např. H_2S , NaOH , HCl). Selektivní činidlo je takové, které ve vzorku s omezeným počtem složek prokáže přítomnost jednoho iontu (např. roztok K_2CrO_4 při důkazu stříbrných iontů v tzv. první analytické třídě kationtů) a specifické činidlo prokáže přítomnost jednoho iontu v libovolné směsi (např. diacetylglyoxim jako činidlo pro důkaz nikelnatých iontů).

Když máme v neznámém vzorku dokázat nějaký prvek, respektive jeho kation či anion, musí být důkaz jednoznačný. K tomu v chemii velmi dlouho sloužily především reakce, při kterých vznikaly různě zbarvené sraženiny, nebo docházelo k výrazným změnám barvy roztoku.

2 Postup analýzy

Pokud máme před sebou roztok obsahující neznámé kationty, prvními kroky jsou popisy základních vlastností vzorku, jako je barva nebo pH. Už tyto informace jsou určitými indiciemi, které nám poskytnou základní informace, protože sole některých kationtů poskytují barevné roztoky. Pokud je roztok zásaditý ($\text{pH} > 8$), nemůže obsahovat kationty, které se srážejí jako nerozpustné hydroxidy. Další možností je využití tzv. plamenové zkoušky, neboť některé prvky jsou schopny zbarvit plamen kahanu. Často se využívají tzv. skupinová činidla, která poskytují různě zbarvené sraženiny s větší skupinou kationtů. Pokud je vzorek jednoduchý, lze obvykle už na základě těchto informací usoudit na jeho složení. Pokud je vzorek složitější, je třeba použít systematický postup dělení kationtů a jednotlivé obsažené kationty postupně oddělit od původní směsi a pak je teprve dokázat.

2.1 Provádění srážecích reakcí

Důkazové reakce nejnadhěji provádíme ve zkumavkách, v případě malých množství roztoku vzorku je možné používat tzv. kapkovací destičku, nebo důkaz provádíme v kapce vzorku nanesená filtračním papíru.

Obvykle postupujeme tak, že do zkumavky odlijeme opatrně asi 1 ml vzorku a k němu buď pomocí kapátka nebo opatrným přiléváním postupně přidáváme roztok činidla. Přitom sledujeme, zda dochází v roztoku ke změnám, např. tvorbě sraženiny, nebo barvy roztoku. V

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

některých případech může dojít k tomu, že vzniklá sraženina se dalšími přídavky činidla opět rozpustí. Všechny pozorované změny pečlivě zapisujeme.

2.2 Provádění plamenové zkoušky

K plamenové zkoušce potřebujeme vhodnou sondu, na které vnášíme analyzovaný roztok do plamene. Nejlépe poslouží platinový drátek, ale lze též použít tuhu do verzatilky (u té je ale potřeba vždy po zkoušce odlomit použitou část), nebo i obyčejný železný drátek. Platinový drátek vždy nejdříve zbavíme všech případných nečistot vyžiháním v plameni. Pokud i po několikátém žihání sledujeme záblesky barvy při vložení do plamene, je potřeba drátek namočit do kyseliny chlorovodíkové a vyžihat znovu, dokud jej nezbavíme všech stop předchozích vzorků. Takto připravený drátek ponoříme do roztoku vzorku a pak vložíme do nesvítivé části plamene. Pozorujeme, zda vzniká zbarvení. Některé kationty zbarví plamen jen velmi krátce a nepříliš intenzivně, jiné naopak "svítí" velmi výrazně a dlouho (to je např. sodík).

2.3 Provádění čichové zkoušky

V některých případech je velmi citlivým detektorem lidský čich. Pokud chceme provádět čichovou zkoušku, je potřeba postupovat velmi opatrně, neboť pracujeme s látkami, které mohou být potenciálně jedovaté. Proto k prvnímu přičichnutí opatrně přivaneeme vzduch od ústí zkumavky rukou. Pokud nic necítíme, opatrně zkumavkou přejedeme poblíž nosu. Teprve pokud ani teď nezaznamenáme žádný pach, je možné s největší opatrností přičichnout ke zkumavce přímo.

3 Dokazování kationtů

Studenti měli k dispozici stojánek se zkumavkami, které obsahovaly kationty Ag^+ , Pb^{2+} , Cu^{2+} , Fe^{3+} , Ni^{2+} , Ca^{2+} , Na^+ , NH_4^+ . S každým z těchto kationtů studenti prováděli reakci s každým z těchto kationtů prováděli reakci s kyselinou chlorovodíkovou, hydroxidem sodným, a sulfidem sodným. Ke každé reakci si zapisovali poznámky, zda reakce probíhala, respektive jaký byl její výsledek (zda vznikala sraženina, jaké barvy atp.).

Pro kationty Cu^{2+} , Ca^{2+} a Na^+ pak provedli plamenovou zkoušku. Přitom byl kladen důraz na správné provedení zkoušky, především vložení platinového drátku do vnější části plamene a jeho dostatečné vyžihání před dalším použitím.

Dále pro každý vzorek byla navržena jedna selektivní reakce, které v dané skupině kationtů jednoznačně určovala, o který kation se jedná.

Jako příklady lze uvést důkaz iontů Ni^{2+} pomocí tzv. Čugajovova činidla (ethanolového roztoku acetylglyoximu) za vzniku červené sraženiny, důkaz iontů Fe^{3+} reakcí s thiokynatanem za vzniku tmavě červené komplexní sloučeniny nebo důkaz iontů NH_4^+ vytěsněním amoniaku v silně alkalickém prostředí. Všechny výsledky reakcí byly studenty opět zaznamenány do zápisků.

Každý ze studentů pak obdržel zkumavku s jedním z testovaných iontů. Jejich úkolem pak bylo s neznámým vzorkem provést podle svého uvážení důkazové reakce a na základě provedených reakcí pak jednoznačně určit, o jaký kation ze zadaných se jedná.



evropský
sociální
fond v ČR



EVROPSKÁ UNIE



MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ,
MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY



OP Vzdělávání
pro konkurenceschopnost



INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

4 Závěr

Studenti se naučili pracovat s malými množstvími vzorku při provádění důkazů ve zkumavkách, provádět bezpečně čichovou zkoušku a provádět správně plamenovou zkoušku. Zároveň si ve zjednodušené formě vyzkoušeli postup, který byl využíván v chemické analýze k jednoznačnému určení stanovovaného kationtu.

5 Použitá literatura

KRAITR, M. Příručka pro laboratorní cvičení z analytické chemie. PF Plzeň, 1965.

6 Kontakt na autora

Ing. Jan Hrdlička, PhD.
Katedra chemie FPE ZČU v Plzni
hrdlicka@kch.zcu.cz

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

ODBORNÝ KEMP PŘÍRODOVĚDNÝCH OBORŮ CHEMIE

STANOVENÍ SLOŽENÍ ROZTOKŮ

Jan HRDLIČKA

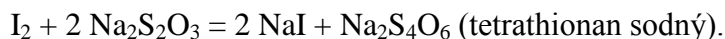
1 Úvod

Titrace, jinak také odměrná analýza, patří ke klasickým postupům pro stanovení obsahu vybrané látky. Je při nich využíváno měření objemu roztoku činidla právě potřebného k úplnému zreagování stanovované složky ve známém objemu analyzovaného roztoku. Známe-li přesnou molární koncentraci roztoku činidla, můžeme na základě stechiometrie reakce vypočítat množství nebo koncentraci stanovované složky v roztoku.

Správnost stanovení je závislá na co nejpřesnějším určení bodu ekvivalence, tj. okamžiku, kdy sledovaná reakce proběhne přesně podle reakční stechiometrie. K tomuto účelu jsou obvykle využívány látky, které v bodě ekvivalence výrazně změny svoji barvu.

2 Jodometrické titrace

Skupina titračních stanovení, při kterých je k indikaci bodu ekvivalence využíváno výrazné a velmi citlivé reakce jodu se škrobem, jsou obecně nazývány titracemi jodometrickými. Stanovení je založeno na reakci jodu s thiosíranem podle rovnice



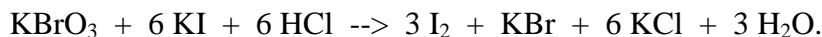
Vzhledem k velmi přesnému určení bodu ekvivalence této reakce je často využívána při nepřímých nebo zpětných titracích, kdy této titraci předchází oxidace jodidu na jod nebo naopak redukce nadbytku jodu sledovanou látkou. Oba tyto případy byly využity při použitých stanoveních a zároveň byl na těchto případech ukázán postup výpočtu.

2.1 Určení titru odměrného roztoku thiosíranu sodného

Studenti si do litrové zábrusové Erlenmayerovy. baňky navážili přibližně 2 g KI na technických vahách, k tomu přidali 25 cm³ HCl (zředěné vodou v poměru 1:4) kvůli udržení kyselého prostředí a do této směsi odpipetovali 25 cm³ standardního roztoku KBrO₃ (o přesné koncentraci 0,01 mol.dm⁻³). Baňku poté zazátkovali, roztok promíchali a nechali ji stát v temnu ve stole 5 minut. Po uplynutí reakční doby pak vyjmuli zátku a roztok zředili 150 cm³ destilované vody odměřené válečkem.

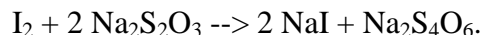
K roztoku pak přidávali Na₂S₂O₃ (o koncentraci asi 0,05 mol.dm⁻³) z byrety tak dlouho, až byl roztok slabě nažloutle zbarven. Pak teprve přidáme 5 cm³ škrobového mazu, čímž se roztok zbarvil tmavě modře.

Modře zbarvený roztok pak po kapkách dotitrovali, až se přidavkem jediné kapky odbarvil. Stanovení je založeno na kvantitativním vyloučení jodu z přebytku KI přesně určeným množstvím KBrO₃ podle reakce:



INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Vyloučený jod pak při titraci reaguje s roztokem thiosíranu za vzniku jodidu a tetrathionanu sodného:



2.2 Určení titru roztoku jodu

Při tomto stanovení si do stejné, destilovanou vodou vypláchnuté zábrusové Erlenmeyerovy baňky odměřili válečkem asi 200 cm³ destilované vody, pipetou odměřili 25 cm³ roztoku jodu o koncentraci přibližně 0,025 mol.dm⁻³ a 10 cm³ zředěné HCl (1:4). Po promíchání připravený roztok titrovali thiosíranem (c = 0,05 mol.dm⁻³) při stálém míchání až do slabě žlutého zbarvení. Po přidání 5 cm³ škrobového mazu a pak po kapkách opatrně dotitrovali do zmizení modrého zbarvení. Reakce jodu s thiosíranem je vyčíslena v předchozím odstavci.

2.3 Navážení vzorku siřičitanu

Protože siřičitan je v roztoku nestabilní, protože hrozí jeho reakce se vzdušným kyslíkem, navazuje se vzorek jako pevná krystalická látka. K tomuto účelu byly využity dvoumiskové poloautomatické analytické váhy. Studenti byli poučeni o základních pravidlech pro práci s takto citlivými vahami, především s nutností provádět jakoukoliv manipulaci na vahách v zaaretovaném stavu a provádět dávkování vzorku na lodičku mimo prostor vah. Díky viditelnému mechanismu se mohli také přesvědčit o principu práce těchto vah, a to včetně některých specifických úprav typických pro celmi citlivé váhy, jako jsou například tlumiče kmitání.

Poté si navázili vzorek siřičitanu diferenčním způsobem. Nejdříve zváží lodičku se vzorkem, navážku vzorku pak vysypali do připravené Erlenmeyerovy baňky a zváží vysypanou lodičku. Z rozdílu (diference) těchto dvou zjištěných hmotností pak přesně určili hmotnost navážky siřičitanu v baňce.

2.4 Stanovení siřičitanu zpětnou titrací

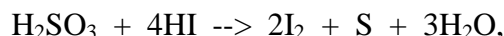
K navážce vzorku siřičitanu o hmotnosti asi 0,06 g naváženého s přesností na desetitisíciny gramu v Erlenmeyerově baňce se zábrusovou zátkou studenti odměřili 50 cm³ roztoku jodu (c = 0,025 mol.dm⁻³). Do baňky pak přidali 1 cm³ H₂SO₄ (1:4), baňku zazátkovali a asi 3 min. mírně promíchávali její obsah. Potom přebytečný jod titrovali odměrným roztokem thiosíranu (c = 0,05 mol.dm⁻³) do slabého žlutého zbarvení a po přidání škrobového mazu dotitrovali do odbarvení.

Reakci jodu s kyselinou siřičitou, která se vylučuje v roztoku účinkem kyseliny sírové, lze zapsat rovnicí



Reakce nezreagovaného jodu při titraci thiosíranem pak probíhá podle rovnice v kap. 2.1.

Při tomto stanovení je třeba dbát na dostatečný přebytek jodu, jinak může docházet k vedlejší reakci



INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

takže by kyselina siřičitá místo spotřebování jodu naopak jod uvolňovala. Je nutno též zamezit oxidaci siřičitanu vzdušným kyslíkem, což provádíme přidáváním navážky tuhého siřičitanu přímo do přebytku jodového roztoku.

2.5 Vyhodnocení přesnosti práce

Vzhledem k tomu, že v prvním i druhém úkolu studenti používali stejné roztoky a odměřit měli i stejné množství standardu, bylo možné porovnávat mezi sebou přímo spotřeby při provedených titracích, kterých jednotliví studenti dosáhli. Z těchto hodnot pak byly po vyloučení odlehlých výsledků vypočteny průměrné hodnoty pro koncentraci roztoku jodu a thiosíranu, které pak byly využity pro modelový výpočet zpětné titrace siřičitanu s jednou vybranou hodnotou navážky siřičitanu a spotřeby thiosíranu.

3 Závěr

Studenti si během práce v laboratoři vyzkoušeli základní operace v odměrné analýze, především pak odměřování roztoků pomocí různých typů odměrného nádobí. Při přípravě vzorku siřičitanu si osvojili základy práce na analytických vahách. Při vyhodnocování výsledků mohli zhodnotit přesnost své práce a zároveň si osvojit postup výpočtu při nepřímé a zpětné titraci.

4 Použitá literatura

KRAITR, M. Příručka pro laboratorní cvičení z analytické chemie. PF Plzeň, 1965.

5 Kontakt na autora

Ing. Jan Hrdlička, Ph.D.
Katedra chemie FPE ZČU v Plzni
hrdlicka@kch.zcu.cz

ODBORNÝ KEMP PŘÍRODOVĚDNÝCH OBORŮ CHEMIE

NEROSTY A HORNICKÁ ČINNOST VE STŘÍBRSKÉM RUDNÍM REVÍRU

Milan KRAITR

1 Úvod

Těžba a využití nerostných surovin je významným interdisciplinárním tématem týkajícím se především chemických a geologických věd. Mimořádný význam má problematika těžby rudních nerostů, která vytváří surovinovou základnu pro metalurgii, chemický průmysl a další výrobní odvětví. V současné době se těžba rud v České republice neprovádí, v minulosti však naše země v tomto směru zaujímala přední místo ve světovém měřítku. K nejvýznamnějším rudním revírům na území Plzeňského kraje patří stříbrský rudní revír, kde těžba probíhala až do 2. poloviny 20. století. Zdejší zrudnění je nejdůležitějším reprezentantem pozdněvariské polymetalické asociace s Pb-Zn mineralizací v západních Čechách a v celé České republice. Těžba zde byla zaměřena především na olovo (stříbronosný galenit), v novější době i na zinek (sfalerit).

2 Stříbrský rudní revír

2.1 Geologickomineralogická charakteristika

Zdejší žíly pronikají silně zvrásněnými horninami svrchního proterozoika, metamorfózou změněných na sericitické a chloritické fylity. Ve stříbrském obvodu je známo celkem asi 50-60 rudních žil různé kvality. Tvoří systém dvou hlavních směrů, S-J (SZ-JV) s úklonem k Z (JZ) a směru Z-V (JZ-SV) s úklonem k J (JV). Dosahují max. délky 2,4 km a jejich mocnost kolísá od několika cm do 50 cm, výjimečně v místech nadušení přesahuje i 3 m. Typická je brekciovitá, páskovitá a drúzovitá textura žilné výplně. Zrudnění má nepravidelný čočkovitý ráz.

Stříbrský rudní obvod, rozkládající se na ploše přibližně 4x6 km, se dělí na 4 revíry. V jv. části Stříbra se rozkládá tzv. centrální revír. Hlavní žilou obvodu i celého stříbrského obvodu je Dlouhá žíla, tvořící složité žilné pásmo směru SSZ-JJV o sklonu 60-75° k Z, otevřená v délce přes 2,4 km (polovina této délky je zrudněná). Druhou nejdelší žilou je Bohaté požehnání (1,8 km). Z dalších žil revíru jmenujme Barboru, Nového Prokopa, Antonína, Josefa aj.

Jz. od města se nachází revír Všech Svatých (Milíkov), kde byly těženy žíly Vojtěch a Josef (směr Z-V, úklon 60° k J, mocnost kolem 50 cm). Na j. a jz. svahu kopce Jirná (3 km jjv. od Stříbra) se rozkládá Jirenský revír. Posledním revírem je Kladrubský (3 km j. od Stříbra).

Minerální složení žil není příliš rozmanité, minerály jsou však velmi často vyvinuty ve velkých drúzových dutinách ve formě pěkných krystalů. V žilovině převládá křemen více generací nad barytem a karbonáty. Mezi rudními nerosty převažuje galenit a sfalerit, častý je pyrit s markazitem, vzácné jsou zrnitý chalkopyrit a arzenopyrit. Galenit tvoří v dutinách objemu desítek m³ až 20 cm velké krystaly. Obsahuje malé množství stříbra (v Milíkově 0,05-0,1 %, v Jirném kolem 0,01 %). Nehojnými žilnými nerosty byly dolomit, siderit a fluorit.

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Jedním z nejmladších minerálů je harmotom, tvořící bílé povlaky a kůry na sfaleritu. Mineralogický význam má zdejší oxidační zóna, vyvinutá až do hloubky kolem 130 m. Jejím nejvýznamnějším nerostem je cerusit, který se v minulosti vyskytoval na žilách zcela běžně. Byl popsán už v roce 1791 J. T. Lindackerem. Dalším typickým minerálem zdejší oxidační zóny je pyromorfit. Zajímavá je jeho vápnitá odrůda, původně popsána jako nový minerál miesit, která tvoří šedé ledvinité agregáty se stébelnatou či miskovitou stavbou. Část olova je v něm zastoupena až 9 % CaO. Velmi vzácně se vyskytoval anglesit a další sekundární minerály (Pauliš 2002).

Soupis nalezených minerálů: anglesit, ankerit, aragonit, argentit, arzenopyrit, azurit, baryt, barytokalcit, beudanit, bindheimit, brochantit, cerusit, dolomit, epsomit, fluorit, galenit, gibbsit, goslarit, greenockit, harmotom, hematit, chalcedon, chalkopyrit, chryzokol, kalcit, křemen, limonit, linarit, malachit, markazit, melanterit, minium, opál, palygorskit, pyrotin, pyrit, pyromorfit, sádrovec, sfalerit, siderit, stříbro, uranit, wurtzit.

2.2 Historie těžby a využití

O počátcích zdejší těžby nejsou přesné údaje, spadají však zřejmě již do 12. století. První dokument, vztahující se ke zdejším stříbrným dolům, pochází z roku 1186. Německé pojmenování Mies bylo odvozeno od keltského Misa označující řeku Mži. Nynější název Stříbro se objevuje v listinách až od roku 1469. Z počátku se zde těžilo stříbro, po vytěžení povrchových partií však obsahy tohoto kovu klesly natolik, že se po roce 1410 již většina autorů zmiňuje výhradně o dolech na olovo. Během 700 let existence zdejších dolů lze vydělit 4 různě dlouhá období konjunktury.

První bylo ukončeno husitskými válkami. Druhé v letech 1500-1650 bylo charakteristické tím, že zdejší olovo bylo využíváno především při hutnění stříbrných rud ve Velharticích, Českém Krumlově, Kutné Hoře a od roku 1558 v jáchymovské huti hraběte Šlika. V roce 1513 se začalo s ražbou dědičné štoly Prokop. Třetí a nejdelší období rozvoje hornického podnikání ve Stříbře započalo brzy po třicetileté válce a skončilo až v první polovině 20. století. Doly s kratšími přestávkami prosperovaly i v 18. a 19. století. Na počátku 20. století se těžba olovených rud rozvinula během 1. světové války v důsledku velké poptávky po olovu. V roce 1916 byla vojenskou správou znovuotevřena na levém břehu Mže štola Vojtěch. Začátkem dvacátých let zde bylo těženo 6-8,8 tisíc t Pb rud ročně. Ve dvacátých letech 20. století byla otevřena některá další důlní díla a v roce 1925 se začalo u Svinného s hloubením nové jámy Leo, která o rok později dosáhla hloubky 250 m. Kovnatost těžené rudy dosáhla 8,4 % Pb. Přes moderní vybavení byl provoz na tomto dole v roce 1930 zastaven.

Poslední etapu důlní činnosti zahájily v roce 1950 Středočeské rudné doly průzkumem Dlouhé žíly a žíly Bohaté požehnaní, na které navázal v roce 1952 Západočeský rudní průzkum prospekci celého revíru. Jako otvírková díla byly rekonstruovány především jáma I (dříve Langenzug a jámy III (dříve Leo). Dlouhá žíla byla prozkoumána do hloubky 350 m. Během těžebních prací v letech 1957-1975 bylo vytěženo přibližně 615 tis. t rudy (nejvíc 63 tis. t v roce 1965) o obsahu 2-3,7 % Pb, 0,1-1,5 % Zn a 10-40 g/t Ag. Ruda se zpracovávala v úpravně na Březových Horách v Příbrami. Vedle toho byla v těsné blízkosti Dlouhé žíly vyhloubena 100 m hluboká jáma Antonín, ze které byla sledována stejnojmenná žíla. Práce zde byly ukončeny v roce 1959. Na pravém břehu Mže, asi 250 m od Stříbra, byla v roce 1953 vyzmáhána jáma Brokárna, hluboká 275 m. Těžena byla především žíla Bohaté požehnaní, sledovaná směrně v délce 1 km. V letech 1960-65 se z ní získalo 41,5 tis. t rudy, zpracované na úpravně Stříbro. V letech 1961-72 probíhala těžba i na lokalitě Milíkov, kde se jamou Vojtěch vytěžilo ze žil Vojtěch a Josef 189 tis. t rudy. Poslední vůz rudy byl vytěžen 22. 12. 1974.



INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

3 Závěr

Pozůstatky po těžbě rud z 12. – 20. století poskytují stále výborné příležitosti pro poznávací činnost. Ideální způsob poznávání stříbrského revíru představuje kombinace návštěvy hornického skanzenu ve Stříbře s dědičnou štolou Prokop a terénní práce spojené s hledáním a určováním nerostů na pozůstatcích důlních odvalů.

4 Použitá literatura

PAULIŠ, P. Nejzajímavější mineralogická naleziště Čech II. Kutná Hora: Kuttna, 2003. s.111-114.

BERNARD, J. H. a kol. Mineralogie Československa. Praha: Academia, 1981. s.271-274.

5 Kontakt na autora

Prof. Ing. Milan Kraitr, CSc.

Katedra chemie FPE ZČU v Plzni

kraitr@kch.zcu.cz

ODBORNÝ KEMP PŘÍRODOVĚDNÝCH OBORŮ CHEMIE

STANOVENÍ ČÍSLA KYSELOSTI TUKU

Vladimír NÁPRAVNÍK

1 Úvod

V biochemii jsou velice zajímavé náměty na experimenty a laboratorní cvičení zaměřené na identifikaci sacharidů a bílkovin (Barthová, Sofrová, Tichá, 1980), stanovení některých parametrů u tuků, izolaci látek z přírodních materiálů (kasein a laktosa z mléka, mannan z droždí aj.) a na studium enzymatických reakcí včetně přístrojových metod stanovení.

2 Biochemická praktika

Tématem biochemických praktik letošního Chemického kempu byly lipidy. Nejčastější stanovení, která se provádí v biochemických praktikách ve školní praxi, jsou určení čísla zmydelnění, čísla kyselosti a bodu tání tuku.

2.1 Charakteristika lipidů

Lipidy (z řec. *lipos* = tuk) jsou přírodní látky živočišného i rostlinného původu. Lipidy jsou estery vyšších mastných kyselin (karboxylové kyseliny, nasycené i nenasycené) a alkoholu. Přestože jsou lipidy funkčně i chemicky navzájem velice rozličné látky, jejich společnou charakteristickou vlastností je hydrofobnost - tedy jsou nerozpustné ve vodě, nicméně dobře rozpustné v organických rozpouštědlech a jsou energeticky velmi bohaté (1 gram tuku obsahuje 39 kJ = 9,3 kcal.) V organismu proto velice často slouží jako zdroj a zásoba energie. Mnohé druhy lipidů jsou však významné i z jiných hledisek, jsou součástí biomembrán nebo jinými stavebními složkami, mají ochranné a izolační funkce a slouží i jako rozpouštědlo některých lipofilních látek.

Mezi tzv. jednoduché lipidy se řadí tuky a vosky. Tuky jsou estery vyšších karboxylových kyselin a trojmocného alkoholu glycerolu. Zpravidla jsou esterifikovány všechny tři hydroxyskupiny glycerolu, proto jde o triacylglyceroly. Triacylglyceroly mohou obsahovat tři shodné acylové zbytky, nebo může být každá hydroxyskupina esterifikována rozdílnými kyselinami. Přírodní tuky jsou tvořeny hlavně třemi mastnými kyselinami, a to kyselinou olejovou, linolovou a palmitovou. Dalšími častými kyselinami jsou kyselina stearová, arachová, lignocerová a myristová. Podle skupenství rozlišujeme pevné tuky, u nichž převažují zejména *nasycené mastné kyseliny*, a oleje, jejichž skupenství je kapalné a které obsahují větší množství *nenasycených mastných kyselin*. Vlivem vlhkosti a katalýzou přítomnými lipasami dochází k částečnému zmydelňování tuků, čímž se zvyšuje jejich kyselost. Nenasycené mastné kyseliny, přítomné v olejích, snadno podléhají oxidaci. Dvojná vazba nenasycených mastných kyselin mohou být též hydrogenovány, čímž dochází ke vzniku polotuhých a tuhých tuků. Tento proces se nazývá ztužování. Vosky jsou estery vyšších alifatických kyselin a primárních, případně sekundárních alifatických alkoholů. Nejčastěji obsahují kyselinu laurovou, myristovou, palmitovou, z alkoholů pak karnaubylalkohol (24 uhlíků), cerylalkohol (26 uhlíků) a myricylalkohol (30 uhlíků).

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Chemicky jsou vosky stálé, obtížně hydrolyzovatelné, působením lipas nezmýdelňují. Při normální teplotě jsou pevné, při vyšších teplotách měknou a tají.

2.2 Stanovení čísla kyselosti

Číslo kyselosti značí počet miligramů hydroxidu draselného KOH, potřebných k zneutralizování volných kyselin, obsažených v 1 g tuku [1 ml KOH o koncentraci 0,1 mol/l odpovídá 0,005611 g KOH]. Stupeň kyselosti pak označuje počet spotřebovaných mililitrů hydroxidu. Pro stanovení čísla kyselosti se použily následující pomůcky a chemikálie: 3 Erlenmayerovy baňky (o objemu 250 ml), 2 byrety (o objemech 10 ml a 25 ml), odměrný válec (o objemu 100 ml), vzorek tuku (sádlo), etanol, ether, fenolftalein, hydroxid draselný KOH (o koncentraci $c = 0,1 \text{ mol/l}$).

Účastníci pracovali po dvojicích. Každá dvojice si připravila 150 ml směsi rozpouštědel smícháním stejných dílů (75 ml) ethanolu a etheru. Protože již pouhá směs obou rozpouštědel reagovala kyselé, nejprve si směs rozpouštědel zneutralizovali roztokem hydroxidu draselného KOH o koncentraci 0,1 mol/l (za použití byrety o objemu 25 ml). Jako indikátor sloužil fenolftalein, proto titrace probíhala do bodu ekvivalence, tedy až do začínajícího slabě červeného zbarvení. Pak si odvážili na analytických vahách v baňce o objemu 250 ml množství 10 g tuku, který nechali rozpustit lehkým zahřátím na vodní lázni. Po krátkém vychladnutí tuk rozpouštěli v neutralizované směsi rozpouštědel a titrovali roztokem hydroxidu draselného KOH o koncentraci 0,1 mol/l do vzniku slabě červeného zbarvení stálého po dobu nejméně 15 sekund (za použití byrety o objemu 10 ml). Na závěr vypočítali číslo kyselosti podle následujícího vztahu:

$$\text{číslo kyselosti} = \frac{\text{spotřeba KOH [ml]} \times 5,611}{\text{navážka vzorku [g]}}$$

3 Závěr

Všichni účastníci se úkolu zhostili s umem jejich vlastním a prokázali svoji obratnost v experimentální činnosti. Získali nové informace a zkušenosti z této oblasti chemického experimentu.

4 Použitá literatura

BARTHOVÁ, J., SOFROVÁ, D., TICHÁ, M. Základní praktikum z biochemie. 1. vyd. Praha: SPN, 1980.

5 Kontakt na autora

Mgr. Vladimír Nápravník, Ph.D.
Katedra chemie FPE ZČU v Plzni
napravni@kch.zcu.cz

ODBORNÝ KEMP PŘÍRODOVĚDNÝCH OBORŮ CHEMIE

ZÁKLADNÍ ZPŮSOBY PŘÍPRAVY ANORGANICKÝCH LÁTEK

Vladimír SIROTEK

1 Úvod

Moderní pojetí chemie klade důraz na teorie doložené fakty, získané studiem vlastností a reakcí chemických látek. Smyslem práce v laboratoři je praktické poznávání chemických látek na základě experimentů a porovnávání těchto poznatků s teoretickými principy. Při přípravě anorganických látek se využívají základní preparační metody, jejichž podstatou jsou acidobazické, redoxní, srážecí, komplexotvorné nebo i další reakce.

Účastníci letošního chemického kempu si vyzkoušeli z těchto základních způsobů přípravy anorganických látek neutralizační a srážecí postupy.

2 Neutralizace

Princip:

Celou řadu ve vodě rozpustných solí minerálních kyselin a zásad lze připravit v laboratoři neutralizací. Neutralizace je reakce oxoniových iontů H_3O^+ s hydroxidovými ionty OH^- za vzniku vody. Současně s vodou vzniká při neutralizaci sůl příslušné kyseliny.



Jedná se o silně exotermní reakce, při kterých dochází k uvolňování reakčního tzv. *neutralizačního* tepla, při čemž hodnota tepelného zabarvení reakce nezávisí na chemické povaze reagujících látek. U silných kyselin a zásad je hodnota neutralizačního tepla vyšší, u slabých kyselin a zásad je toto teplo ovlivněno vedlejšími reakcemi (hydratací iontů, disociačním stupněm apod.) a je obvykle menší. Při praktickém provádění neutralizační reakce je nutné pracovat s dostatečně zředěnými roztoky, které pohltnou uvolněné neutralizační teplo, aniž by došlo k jejich přehřátí.

Sůl, která vzniká při neutralizaci, má ve vodném roztoku neutrální reakci pouze tehdy, vzniká-li ze stejně silné kyseliny a zásady (NaCl , KI , KNO_3 , Na_2SO_4). Nejsou-li kyselina a zásada stejně silné, reagují roztoky solí kyseliny nebo zásaditě v důsledku hydrolyzy (Na_2CO_3 , KCN , NH_4Cl).

Postup práce:

Pomocí hustoměru zjistíme hustotu příslušné kyseliny, kterou máme k dispozici. Z rovnice vypočítáme potřebná stechiometrická množství kyseliny (objem) a hydroxidu (hmotnost). Vypočtené množství odměříme (resp. odvážíme) a připravíme asi 10% roztoky. Vážení hydroxidu proveďte rychle, neboť se jedná o silně hygroskopickou látku). Neutralizaci provedeme postupným smísením obou roztoků za stálého míchání (ponecháme si stranou po 5 % z objemu obou roztoků). Po slítí roztoků se přesvědčíme zjištěním pH univerzálním indikátorovým papírkem o proběhlé neutrální reakci. Případnou chybu (způsobenou vážením, nečistotami apod.) napravíme přidáním malého ponechaného množství roztoku kyseliny nebo zásady, aby roztok skutečně reagoval neutrálně. (pH v rozmezí 6 až 8). Není-li připravený roztok čirý, zfiltrujeme ho. Zfiltrovaný roztok zahustíme na vodní lázni ke krystalizaci. Zahuštěný roztok ochladíme proudem studené vody a vyloučené krystaly

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

odsajeme a usušíme v sušárně (pozor na bod tání). Suchý preparát rozmělníme v třecí misce, zvážíme, vypočítáme výtěžek reakce. Matečný louh zahustíme k nové krystalizaci a celý postup pak opakujeme.

Neutralizací lze připravit např.:

NaCl – jemný, bílý (příp. bezbarvý), krystalický prášek, krystaluje v krychlové soustavě. v teplé vodě jen o málo rozpustnější než ve studené. Má slanou chuť. V přírodě se vyskytuje jako minerál [halit](#).

KCl – vlastnostmi podobný NaCl, bílá krystalická látka, slané chuti, dobře [rozpustná](#) ve vodě, v ethanolu obtížněji rozpustný. V přírodě se vyskytuje jako minerál [sylvín](#).

NH₄Cl – bílá [krystalická](#) látka, krystaluje v drobných, bezbarvých osmistěnech, chutná slaně, po zahřátí snadno sublimuje, ve vodě dobře rozpustný, v ethanolu jen nepatrně, vodný [roztok](#) je slabě [kyselý](#). Vyskytuje se jako [nerost salmiak](#).

Na₂SO₄·10 H₂O (Glauberova sůl) – bezbarvé, průhledné krystaly jednodělné soustavy. Na vzduchu rychle větrá – na krystalech vzniká bílý povlak. Ochotně tvoří přesycené roztoky.

K₂SO₄ – krystaluje v bezbarvých, průhledných krystalech kosočtverečné soustavy. Na vzduchu velmi stálý, ve vodě trochu méně rozpustný, nerozpustný v ethanolu.

(NH₄)₂SO₄ – bezbarvé krystaly kosočtverečné soustavy, chutná slaně.

NaNO₃ – krystaluje v šesterečné soustavě. Na vzduchu vlhne, při zahřátí se redukuje na dusitan (silné oxidační činidlo), ve vodě je velmi dobře rozpustný.

KNO₃ – bezbarvé krystaly kosočtverečné soustavy, chutná slaně, na vzduchu stálý (nevlhne), silné oxidační činidlo. Při jeho rozpouštění ve vodě dochází k silnému ochlazení roztoku.

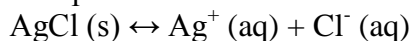
NH₄NO₃ – izomorfní s KNO₃, na vlhkém vzduchu se rozplývá, ve vodě velmi dobře rozpustný po zahřátí (250 °C) se rozkládá na oxid dusný a vodu.

3 Srážení

Princip:

Děje, při kterých dochází ke vzniku málo rozpustných sloučenin, vylučujících se z roztoku jako sraženiny, nazýváme *srážecí reakce*. Málo rozpustné látky ve vodě (absolutně nerozpustné neexistují) jsou takové, které mají velmi nízké *součiny rozpustnosti*.

Přidávkem srážedla převedeme rozpuštěnou látku na látku, která je v daném prostředí nerozpustná. Mezi pevnou fází a jejími ionty v roztoku se ustavuje v souladu s Guldberg-Waagovým zákonem rovnováha. Např.:



Součín rozpustnosti vyjadřuje vztah:

$$K = \frac{[\text{Ag}^+] \cdot [\text{Cl}^-]}{[\text{AgCl}]} = 1,6 \cdot 10^{-10}$$

U málo rozpustných sloučenin je koncentrace nedisociovaných molekul v nasyceném roztoku malá a pro danou teplotu konstantní, $[\text{AgCl}] = \text{konst.}$ Pak lze součín rozpustnosti S_{AgCl} zapsat:

$$S_{\text{AgCl}} = [\text{Ag}^+] \cdot [\text{Cl}^-]$$

Součín rozpustnosti vyjadřuje součín koncentrací iontů v nasyceném roztoku při dané teplotě.

Obecně pro sloučeninu A_xB_y disociovanou na xA⁺ a yB⁻ platí:

$$S = [\text{A}^+]^x \cdot [\text{B}^-]^y$$

Čím menší je hodnota součínu rozpustnosti, tím je látka ve vodě méně rozpustná. Roztok je nasycený, jestliže při dané teplotě dosáhl součínu rozpustnosti. Překročí-li součín rozpustnosti, začne se z roztoku vylučovat málo rozpustná látka.

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Součin rozpustnosti je důležitou charakteristikou málo rozpustných sloučenin. Ze vztahu pro výpočet součinu rozpustnosti plyne, že srážení je dokonalejší, použijeme-li malý přebytek srážedla, které má společný ion se sraženinou. Velký nadbytek srážedla však může někdy způsobit vznik rozpustnější komplexní sloučeniny.

Vlastnosti sraženin do značné míry závisí na podmínkách a způsobu srážení. Snahou je, aby sraženina byla co nejčistší a dobře filtrovatelná. Výhodné vlastnosti mají sraženiny, které obsahují dobře vyvinuté a málo znečištěné částice. Toho lze dosáhnout:

- srážením ze zředěných roztoků, sraženina se vylučuje pomaleji a částice jsou větší
- srážením za horka pomalým přidáváním srážedla, vzniklou sraženinu ještě za stálého míchání povařit
- vyloučenou sraženinu necháme po určitou dobu „zrát“ ve styku s původním roztokem, nejlépe za tepla a občasného promíchání

Některé látky, málo rozpustné ve vodě, se při srážení nevylučují ve formě sraženiny, ale vytvářejí velmi jemné částičky rozptýlené v roztoku, jako tzv. *koloidní disperze – soly*, ve vodném roztoku *hydrosoly*, které jsou nefiltrovatelné. Každá částice solu má elektrický náboj, který je schopen zachycovat nabitě částice z roztoku (adsorbovat je). Je nutné je tzv. *zkoagulovat* (přidáním elektrolytu), aby byly snáze filtrovatelné.

Postup práce:

Připravíme odděleně asi 10% roztoky obou solí v množství udaném stechiometrickým výpočtem. Roztoky zfiltrujeme, zahřejeme téměř k varu a za stálého míchání postupně přiléváme jeden roztok do druhého. Malé množství srážedla (asi 5 % objemu jednoho roztoku) si ponecháme stranou. Sraženinu necháme usadit, do čirého roztoku nad sraženinou přidáme několik kapek ponechaného roztoku srážedla a pozorujeme, zda se ještě tvoří sraženina. Po ukončení srážení sraženinu v roztoku rozmícháme, necháme stát a několikrát dekantujeme horkou destilovanou vodou a pak zfiltrujeme nebo odsajeme. Sraženinu na filtru promyjeme vlažnou vodou, abychom ji zbavili iontů vedlejší zplodiny srážecí reakce a dáme sušit do sušárny. Před sušením je nutné zjistit v tabulkách (podle bodu tání), při jaké teplotě lze preparát v sušárně sušit. Vysušený preparát zvážíme a vypočítáme výtěžek reakce.

Srážením lze připravit např.:

AgCl - bílý amorfni prášek, účinkem světla šedne až fialoví (rozklad na subchlorid a chlor).

Ve vodě nerozpustný, rozpouští se v roztoku NH_3 na komplex, v roztoku thiosíranu sodného (ustalovač ve fotografii).

$\text{CaSO}_4 \cdot 2 \text{H}_2\text{O}$ (sádrovec) – jemný bílý amorfni prášek, ve vodě nepatrně rozpustný, zahříváním na 100°C (130°C) ztrácí částečně (úplně) krystalovou vodu.

BaSO_4 (baryt) – bílý prášek, ve vodě i v kyselinách prakticky nerozpustný, rozpustný v koncentrované kyselině sírové.

BaCrO_4 – jemný, žlutý prášek ve vodě téměř nerozpustný (barytová žlut')

BaCO_3 – bílý, těžký prášek, ve vodě téměř nerozpustný

HgI_2 – jemný červenooranžový prášek, ve vodě nerozpustný, rozpustný v jodidu draselném na komplex

Al(OH)_3 – bílý amorfni prášek v suchém stavu, ve vlhkém stavu průhledná rosolovitá hmota. Zahříváním dehydratuje a přechází na oxid hlinitý.

Fe(OH)_3 – hnědočervená (rezavá) sraženina, která již při mírné teplotě nad 30°C dehydratuje a postupně se mění na hydratovaný až bezvodý oxid železitý.

PbCl_2 – bílý prášek, ve vodě málo rozpustný

PbBr_2 – bílý až trochu nažloutlý prášek, ve vodě málo rozpustný

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

PbI_2 – žlutý prášek, méně rozpustný ve vodě než chlorid olovnatý. Rozpouští se v horkém roztoku KI na komplex (podvojný jodid) $K_2[PbI_4]$.

$PbCrO_4$ (chromová žlut') - jemný, žlutý prášek, nerozpustný ve vodě

$PbCO_3$ – bílý prášek

$PbSO_4$ – bílý prášek, ve vodě nepatrně rozpustný, dobře rozpustný v organických kyselinách

PbS – černý prášek, ve vodě i alkoholu téměř nerozpustný

Celá řada dalších sulfidů např.:

SnS , CuS , HgS , Ag_2S , CdS , Bi_2S_3 , Sb_2S_3 , As_2S_3 , FeS , CoS , NiS , MnS , ZnS

Tyto sulfidy se odlišují svou barvou a využívají se v analytické chemii.

Další možné metody přípravy anorganických látek:

Rozpouštění kovů (oxidů kovů) v kyselinách

Oxidačně-redukční reakce

Reakce spojené s tvorbou komplexu

Rozkladné reakce a tavicí procesy

Hydrolýza

4 Závěr

Účastníci kempu se v tomto případě seznámili se základními postupy přípravy anorganických látek. Prakticky si vyzkoušeli přípravu vybrané látky neutralizací nebo srážením. Na konci cvičení shrnuli dílčí výsledky (s jakým výtěžkem pracovali) a zformulovali společný závěr.

5 Použitá literatura

SÝKOROVÁ, D., J., MASTNÝ, L. Návody pro laboratoře z anorganické chemie 2. vyd. Praha: FIRMA-JK, 2001. 249 s. ISBN 80-7080-452-1.

6 Kontakt na autora

PaedDr. Vladimír Sirotek, CSc.

Katedra chemie, FPE ZČU v Plzni

sirotek@kch.zcu.cz

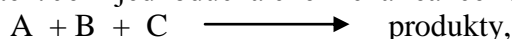
ODBORNÝ KEMP PŘÍRODOVĚDNÝCH OBORŮ CHEMIE

STANOVENÍ REAKČNÍHO ŘÁDU

Jitka ŠTROFOVÁ

1 Chemická kinetika

Studiem rychlostí chemických reakcí a reakčních mechanismů se zabývá chemická kinetika. Jedním ze základních pojmů je rychlost chemické reakce, která závisí na teplotě a koncentraci výchozích látek. Je-li jednoduchá chemická reakce zapsána chemickou rovnicí



kde A, B, C jsou výchozí látky, produkty nejsou blíže specifikovány, lze rychlost této reakce vyjádřit tzv. *kinetickou rovnicí*:

$$r = k \cdot c_A^\alpha \cdot c_B^\beta \cdot c_C^\gamma,$$

kde r je rychlost reakce, k rychlostní konstanta, c_A , c_B , c_C koncentrace výchozích látek, α , β , γ dílčí reakční řády vzhledem k jednotlivým složkám. Vliv koncentrace je patrný přímo z kinetické rovnice, závislost na teplotě je skryta v rychlostní konstantě. Tuto závislost vyjadřuje Arrheniova rovnice

$$k = Ae^{-E^*/(RT)},$$

kde A je předexponenciální faktor nezávislý na teplotě, E^* aktivační energie, R univerzální plynová konstanta a T teplota. (Malijevský, 2000, s. 153-155).

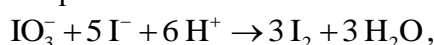
2 Stanovení reakčního řádu reakce jodičnanových iontů s jodidovými v kyselém prostředí

Úkolem účastníků chemického kempu bylo určit dílčí reakční řády reakce jodičnanových iontů s jodidovými v kyselém prostředí. Každá skupina řešila jednu z úloh:

- Určení reakčního řádu reakce jodičnanových iontů IO_3^- s jodidovými ionty I^- v kyselém prostředí vzhledem k jodičnanovým iontům.
- Určení reakčního řádu reakce jodičnanových iontů IO_3^- s jodidovými ionty I^- v kyselém prostředí vzhledem k jodidovým iontům.
- Určení reakčního řádu reakce jodičnanových iontů IO_3^- s jodidovými ionty I^- v kyselém prostředí vzhledem k vodíkovým iontům.

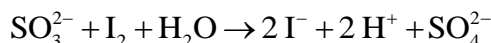
2.1 Rozbor úlohy

V odměrné analýze se často používá reakce



citlivým indikátorem na jod je škrobový maz. Jestliže však přidáme ke směsi jodidu a jodičnanu v kyselém prostředí škrobový maz, zmodral by hned na počátku prvním vytvořivším se jodem. Proto přidáváme ještě látku, která tvořící se jod odčerpává tak dlouho, dokud se všechna sama nezoxiduje. Touto látkou je siřičitan, jehož reakci s jodem popisuje rovnice:

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

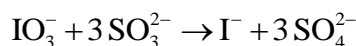


Přidáme-li siřičitanu vždy stejné množství, pak se modré zbarvení objeví tím dříve, čím dříve se vytvoří nadbytek jodu, tj. čím rychleji probíhá reakce jodičnanu s jodidem v kyselém prostředí na jod.

Abychom zjistili reakční řád vzhledem k dané složce, měníme pouze její koncentraci a koncentrace zbývajících látek zůstávají stejné. Kinetická rovnice pak přejde na tvar $r = k \cdot c_A^\alpha$. Měříme dobu τ , za kterou se objeví modré zbarvení. Tvoří-li se jod konstantní rychlostí, je doba, za kterou vznikne vždy stejné množství jodu, nepřímo úměrná této rychlosti.

$$\tau = \frac{1}{r},$$

z doby τ , pak můžeme určit řád reakce vzhledem k látce, jejíž koncentraci měníme. (Novák, 2001, s. 106). Požadavek konstantní rychlosti tvorby jodu je totožný s požadavkem konstantní koncentrace výchozích látek a je splněn na počátku reakce. Musíme tedy roztok pufrovat a zvolit nadbytek iontů IO_3^- a I^- proti iontům SO_3^{2-} . Siřičitan však reaguje také s jodičnanem



Aby jodičnan reagoval především s jodidem na jod a zanedbatelně málo se siřičitanem na jodid, musíme zvolit nadbytek iontů I^- proti IO_3^- .

Řád reakce např. vůči složce A zjistíme ze závislosti

$$\log r = \alpha \cdot \log c_A$$

resp. $\log \tau = -\alpha \cdot \log c_A$

2.2 Postup

Ze zásobních roztoků připravíme odměrné roztoky reagujících látek (vždy 250 cm³):

- $c(\text{KIO}_3) = 0,025 \text{ mol dm}^{-3}$
- $c(\text{KI}) = 0,25 \text{ mol dm}^{-3}$
- $c(\text{CH}_3\text{COOH}) = 0,5 \text{ mol dm}^{-3}$
- $c(\text{CH}_3\text{COONa}) = 0,5 \text{ mol dm}^{-3}$

Roztok siřičitanu sodného musí být vždy čerstvě připraven!

Nejprve připravíme 500 cm³ roztoku Na₂SO₃ o $c = 0,05 \text{ mol dm}^{-3}$ a poté naředíme 250 cm³ o $c = 0,005 \text{ mol dm}^{-3}$.

Z odměrných roztoků připravujeme do odměrných válců (50 cm³) roztoky **I** a **II**, které prudce smísíme (provádíme pomocí elektromagnetické míchačky) a měříme dobu τ od smísení do objevení modrého zbarvení. Z reakčního mechanismu je zřejmé, že jodid a jodičnan nesmějí přijít do téhož roztoku. Koncentraci vodíkových iontů budeme udržovat acetátovým pufrem. Tento druh pufru slouží k nastavení a udržování pH, ovšem v určité mezi přesnosti asi na 0,1 jednotky pH. Pufry připravujeme ze dvou zásobních roztoků, které smísíme v určitých poměrech. Pro různé obory pH volíme různé směsi roztoků; např. pro přípravu acetátového pufru užíváme roztok CH₃COOH a roztok CH₃COONa, oba o koncentraci 0,5 mol/dm³.

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Složení roztoků I a II je uvedeno v tabulkách 1A – 1C:

Tabulka 1 A (reakční řád vzhledem k jodičnanovým aniontům)

Měření č.	ROZTOK I.		ROZTOK II.	
1	KIO ₃	14	KI	12
	CH ₃ COOH	5	Na ₂ SO ₃	15
	CH ₃ COONa	10	škrob	1
	H ₂ O		H ₂ O	
2	KIO ₃	12	KI	12
	CH ₃ COOH	5	Na ₂ SO ₃	15
	CH ₃ COONa	10	škrob	1
	H ₂ O		H ₂ O	
3	KIO ₃	10	KI	12
	CH ₃ COOH	5	Na ₂ SO ₃	15
	CH ₃ COONa	10	škrob	1
	H ₂ O		H ₂ O	
4	KIO ₃	7	KI	12
	CH ₃ COOH	5	Na ₂ SO ₃	15
	CH ₃ COONa	10	škrob	1
	H ₂ O		H ₂ O	

Tabulka 1 B (reakční řád vzhledem k jodidovým aniontům)

Měření č.	ROZTOK I.		ROZTOK II.	
5	KIO ₃	7	KI	12
	CH ₃ COOH	5	Na ₂ SO ₃	15
	CH ₃ COONa	10	škrob	1
	H ₂ O		H ₂ O	
6	KIO ₃	7	KI	14
	CH ₃ COOH	5	Na ₂ SO ₃	15
	CH ₃ COONa	10	škrob	1
	H ₂ O		H ₂ O	
7	KIO ₃	7	KI	16
	CH ₃ COOH	5	Na ₂ SO ₃	15
	CH ₃ COONa	10	škrob	1
	H ₂ O		H ₂ O	
8	KIO ₃	7	KI	18
	CH ₃ COOH	5	Na ₂ SO ₃	15
	CH ₃ COONa	10	škrob	1
	H ₂ O		H ₂ O	

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Tabulka 1 C (reakční řád vzhledem k pH)

Měření č.	ROZTOK I.		ROZTOK II.	
9	KIO ₃	7	KI	12
	CH ₃ COOH	5	Na ₂ SO ₃	15
	CH ₃ COONa	10	škrob	1
	H ₂ O		H ₂ O	
10	KIO ₃	7	KI	12
	CH ₃ COOH	7,5	Na ₂ SO ₃	15
	CH ₃ COONa	7,5	škrob	1
	H ₂ O		H ₂ O	
11	KIO ₃	7	KI	12
	CH ₃ COOH	10	Na ₂ SO ₃	15
	CH ₃ COONa	5	škrob	1
	H ₂ O		H ₂ O	
12	KIO ₃	7	KI	12
	CH ₃ COOH	3	Na ₂ SO ₃	15
	CH ₃ COONa	12	škrob	1
	H ₂ O		H ₂ O	

Měníme množství látky pouze jedné ze složek! Množství siřičitanu ponecháváme stále stejné, vodu doplňujeme vždy do 50 cm³.

Jeden roztok v kádince intenzivně mícháme elektromagnetickou míchačkou a za stálého míchání naráz přilijeme druhý.

2.3 Zpracování výsledků

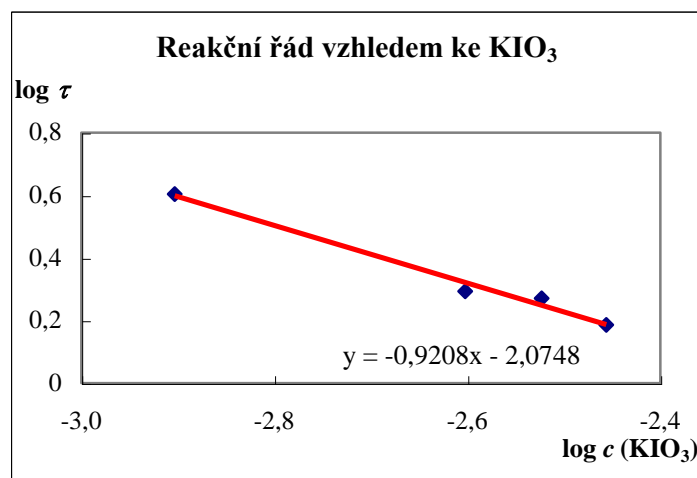
Při měření zaznamenáváme vždy složení roztoku (koncentrace látek ve výsledném roztoku) a dobu τ . Data zapíšeme do tabulky a do grafu zaznamenáváme závislost logaritmu doby τ na logaritmu koncentrace c příslušných iontů, odečteme směrnici – řád reakce vzhledem k příslušné látce.

Naměřená data uložíme do tabulky v Excelu, vytvoříme graf, na jehož základě určíme směrnici přímký – řád reakce vzhledem k dané složce je číslo opačné k této směrnici. Jako vzor pro zpracování slouží tabulka 2 a ilustrační graf na obr. 1.

Tabulka 2 Řád reakce vzhledem ke koncentraci KIO₃

V(KIO ₃) [cm ³]	c(KIO ₃) [mol/dm ³]	τ_A □ [min]	log c(KIO ₃)	log □ τ_A
7				
10				
12				
14				

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ



Reakční řád vzhledem ke koncentraci jodičnanových anionů je 0,9208.

Obr. 1 Ilustrační graf k určení reakčního řádu ze závislosti $\log \tau$ na $\log c$.
(reakční řád vzhledem ke koncentraci IO_3^-)

3 Závěr

Účastníci kempu řešili v tomto případě praktickou úlohu z reakční kinetiky. Byli rozděleni do tří skupin, každá stanovovala dílčí reakční řád vzhledem k jedné složce. Na konci cvičení shrnuli dílčí výsledky a formulovali společný závěr. Kromě metodiky měření reakčního řádu se seznámili i s možnostmi zpracování experimentálních dat na počítači.

4 Použitá literatura

MALIJEVSKÝ, A. Breviář z fyzikální chemie. 1. vyd. Praha: VŠCHT, 2000. ISBN 80-7080-403-3.

NOVÁK, J. Fyzikální chemie II. 1. vyd. Praha: VŠCHT, 2001. ISBN 80-7080-436-X.

5 Kontakt na autora

Mgr. Jitka Štrofová, Ph.D.

Katedra chemie, FPE ZČU v Plzni

strofova@kch.zcu.cz

ODBORNÝ KEMP PŘÍRODOVĚDNÝCH OBORŮ CHEMIE

ATRAKTIVNÍ CHEMICKÝ EXPERIMENT

Jitka ŠTROFOVÁ

1 Úvod

Experimentální činnost v laboratoři je neodmyslitelnou součástí chemie. Bohužel k vlastní experimentální práci se žáci základních a středních škol dostanou sporadicky. Proto jsme pro úspěšné řešitele chemické olympiády připravili řadu praktických úloh. V programu kempu byly mimo jiné zařazeny také atraktivní pokusy, které jsou doprovázeny výraznými barevnými změnami nebo zvukovými a světelnými efekty.

Pod vedením lektorů z katedry chemie FPE ZČU si účastníci chemického kempu prakticky vyzkoušeli tyto pokusy:

- Duha z rajčatové šťávy
- Faraónův had - modifikace
- Hořící bankovka
- Hořící pěna
- Hořlavý gel
- Chameleon mineralis
- Chemické hodiny
- Chromatografie
- Indikátor vlhkosti
- Indikátor ze zelí
- Kouzlení s barvami
- Model hasicího přístroje
- Ohnivá koule
- Platinová spirála s methanolem
- Plnění balonku CO₂
- Reakce jodu se škrobovým mazem
- Samozápalný papír
- Tajné písmo
- Termobarvy
- Tříbarevný inkoust
- Vznik a vlastnosti acetylenu
- Zubní pasta pro slony

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Účastníci obdrželi materiály s kompletními pracovními návody ke všem uvedeným pokusům. V následujícím textu jsou velmi stručně popsány jen vybrané experimenty.

2 Hoření

Hoření je reakce, při níž látky reagují s kyslíkem za současného vývoje tepla a světla. Při hoření látek, které obsahují uhlík, vodík případně kyslík, vzniká oxid uhličitý a vodní pára. Jako příklad lze uvést ethanol, propan, butan či acetylen.

2.1 Hořící bankovka

Jak zapálit bankovku, aby neshořela a zůstala neporušená? Bankovka, která byla předem celá namočená ve směsi ethanolu a vody v objemovém poměru 1:1, hoří tak dlouho, dokud neshoří veškerý ethanol. Voda, která na bankovce zůstane, vše uhasí.

2.2 Hořlavý gel

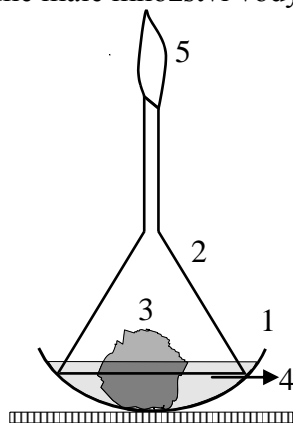
K vodnému roztoku octanu vápenatého přidáme pár kapek fenolftaleinu a roztok hydroxidu sodného do alkalické reakce. Po přilítí ethanolu se vytvoří tuhý gel, který hoří. Octan vápenatý je méně rozpustný v ethanolu než ve vodě, proto vzniká gel. Podobně jako v předchozím pokusu hoří ethanol. (Roesky, 1994, s. 276).

2.3 Ohnivá koule

Tento pokus je založen na hořlavosti propanu a butanu. Samotný butan či ve směsi s propanem lze koupit jako plyn do zapalovačů. V ní jsou uhlovodíky pod vysokým tlakem, proto jsou kapalné. V okamžiku, kdy malou část z náplně přepustíme do zkumavky, začne kapalina vřít, i když je její teplota pod bodem mrazu. Důvodem je snížení tlaku, za něhož jsou oba uhlovodíky plynné. Přelijeme-li kapalinu ze zkumavky do velké kádinky, po chvíli se kapalina zcela vypaří. Protože je propan i butan těžší než vzduch, zůstane plyn u dna kádinky. Z ní jej můžeme nalít do šikmo skloněného plechového žlábkem, který ústí těsně nad hořící svíčku. Od ní vzplane plyn tekoucí žlábkem.

2.4 Vznik a vlastnosti acetylenu

Acetylen C_2H_2 (systematickým názvem ethyn) lze připravit reakcí karbidu vápníku CaC_2 s vodou. Malý kousek karbidu položíme na porcelánovou misku, přiklopíme obrácenou nálevkou, kolem níž přilijeme malé množství vody (viz obr. 1).

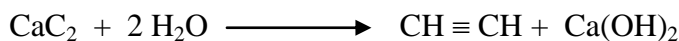


- 1 – porcelánová miska
- 2 – skleněná nálevka
- 3 – karbid vápníku
- 4 – voda
- 5 – hořící acetylen

Obr. 1 Aparatura na přípravu acetylenu

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Okamžitě dochází k reakci



U ústí stonku nálevky můžeme vznikající acetylen zapálit. Hoří silně čadivým plamenem, protože obsahuje velké množství uhlíku. Přilitím další dávky vody se zvýší vývoj acetylenu, plamen se zvětší. V okamžiku, kdy plamen skočí dovnitř nálevky, dojde k malému výbuchu, protože acetylen tvoří se vzduchem výbušnou směs. Fenolftaleinem prokážeme vznik alkalického roztoku (hydroxid vápenatý). (Richtr, 1995, s. 33).

3 Indikátory

Indikátory jsou látky, které mění své zbarvení v závislosti na prostředí. Mohou být citlivé na pH, teplotu, vlhkost aj.

3.1 Indikátor ze zelí

Jednoduchý acidobazický indikátor, tedy látku citlivou na pH roztoku, si může každý připravit sám z výluhu z červeného zelí. Antokyany v něm obsažené se v kyselém prostředí (pH < 7) barví purpurově červeně. S rostoucím pH se zbarvení mění k fialovému (pH 7-8) a přes odstíny modré (pH 9-10) k lahově zelené (pH 12). Celá barevná škála je na obr. 2. Výluhem ze zelí můžeme napustit filtrační papír, který po vysušení na vzduchu nastříháme na proužky. Takto připravené indikátorové papírky mají delší životnost než roztok indikátoru. (Richtr, 2008, s. 65).



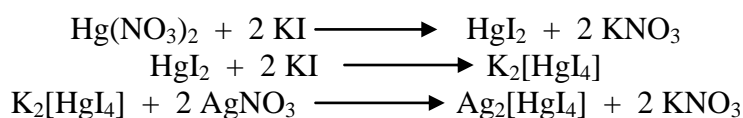
Obr. 2 Orientační barevná škála indikátoru z červeného zelí

3.2 Indikátor vlhkosti

Najemno rozetřenou směs hexahydrátu chloridu kobaltnatého $\text{CoCl}_2 \cdot 6 \text{H}_2\text{O}$ a thiokyanatanu draselného KSCN rozpustíme v ethanolu. Tímto roztokem napustíme kousek čistého bílého hadříku. Suchý je modrý, namočíme-li jej, zrudne. Po vysušení opět zmodrá. Podstatou indikátoru je skutečnost, že bezvodé kobaltnaté kationty jsou modré a hydratované růžové. Tohoto principu se využívá k barvení silikagelu do exikátorů. (Škoda, 2006, s. 79).

3.3 Termobarvy

Termobarvy lze také považovat za indikátory. Jsou to látky, které mění své zbarvení v závislosti na teplotě. (Richtr, 1996, s. 49). Příkladem může být tetrajodortuřitan stříbrný $\text{Ag}_2[\text{HgI}_4]$, který je žlutý, ale při teplotě vyšší než 70°C oranžový, po ochlazení opět zežloutne. Příprava $\text{Ag}_2[\text{HgI}_4]$ je poměrně náročná a lze ji vystihnout následujícími rovnicemi:





INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

4 Závěr

Uvedené experimenty je možné využít na základní a střední škole v různých fázích výuky. Vysvětlení principu musí být adekvátní věku a znalostem žáků. V rámci chemického kempu bylo možné mechanismus jednotlivých dějů objasnit mnohem podrobněji. Účastníci také ocenili, že většinu experimentů mohli provádět samostatně.

5 Použitá literatura

RICHTR, V., KRAITR, M. Atraktivní pokusy ve výuce chemie II. In: CHEMIE XV. Sborník Pedagogické fakulty ZČU v Plzni. Plzeň: Pedagogická fakulta ZČU, 1995. s. 33.

RICHTR, V., KRAITR, M., ŠTROFOVÁ, J. Atraktivní pokusy ve výuce chemie III. In: CHEMIE XVI. Sborník Pedagogické fakulty ZČU v Plzni. Plzeň: Pedagogická fakulta ZČU, 1996. s. 49.

RICHTR, V., ŠTROFOVÁ, J., KRAITR, M. Atraktivní pokusy ve výuce chemie V. In: CHEMIE XXII. Sborník katedry chemie FPE ZČU. Plzeň: ZČU, 2008. s. 65. ISBN 978-80-7043-683-7.

ROESKY, H.W., MÖCKEL, K. Chemische Kabinettstücke. Weinheim: VCH, 1994. s. 276. ISBN 3-527-29220-9.

ŠKODA, J., DOULÍK, P. Chemie 8. Učebnice pro základní školy a víceletá gymnázia. 1. vyd. Plzeň: Nakladatelství Fraus, 2006. s. 79. ISBN 80-7238-442-2.

6 Kontakt na autora

Mgr. Jitka Štrofová, Ph.D.

Katedra chemie, FPE ZČU v Plzni

strofova@kch.zcu.cz

ODBORNÝ KEMP PŘÍRODOVĚDNÝCH OBORŮ MATEMATIKA

NETRADIČNÍ ŘEŠENÍ ROVNIC

Josef KUBEŠ

1 Úvod

Řešení rovnic patří k základním matematickým dovednostem. K řešení rovnic vede i velké množství praktických úloh a problémů. Některé typy rovnic uměli řešit již ve starověkých civilizacích.

2 Netradiční řešení rovnic

Následující úlohy jsou určeny studentům, kteří se umí na problematiku podívat trochu z jiného úhlu. Nestáčí použít pouze nacvičený algoritmus, je třeba provést analýzu zadání a použít netradiční postup.

2.1 V oboru reálných čísel řešte rovnici

$$\frac{3x+3}{\sqrt{x}} = 4 + \frac{x+1}{\sqrt{x^2-x+1}}$$

Porovnáme obory hodnot levé strany a pravé strany rovnice a zjistíme, že se překrývají právě pro jednu hodnotu, která vede k řešení.

2.2 Určete všechny dvojice $[x, y]$ přirozených čísel, které vyhovují rovnici

$$4^{x+1} = 2^x + y^3$$

Upravíme tak, aby výraz s neznámou x byl na jedné straně a s y na druhé straně. Využijeme dělitelnost.

2.3 Určete všechny dvojice $[x, y]$ celých čísel, které vyhovují rovnici

$$2x^3 + xy - 7 = 0$$

Úloha je jednoduchá, využijeme dělitelnost

2.4 V oboru reálných čísel řešte soustavu rovnic

$$\begin{aligned}x + \frac{1}{x} &= \frac{2}{y^2} \\ y + \frac{1}{y} &= \frac{2}{z^2}\end{aligned}$$

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

$$z + \frac{1}{z} = \frac{2}{x^2}$$

Stanovíme obor každé proměnné. Všechny tři rovnice sečteme a vhodnou úpravou stanovíme řešení.

2.5 V oboru reálných čísel řešte soustavu rovnic

$$\sqrt{\sqrt{x} + 2} = y - 2$$

$$\sqrt{\sqrt{y} + 2} = x - 2$$

Ukážeme, že $x = y$. Tím se podaří převést soustavu na řešení jedné rovnice. Dále pokračujeme vhodnou substitucí.

3 Závěr

Vybrané úlohy slouží jako příprava pro řešení podobných úloh v soutěžních kolech matematické olympiády. Cílem bylo navodit takový pohled na postup řešení, který pomůže zvládnout právě takové typy v soutěžních kolech.

4 Použitá literatura

ŠVRČEK, J., CALÁBEK, P. Sbíрка netradičních matematických úloh. 1. vyd. Praha: Prométheus, spol. s r. o., 2007. 186 s. ISBN 978-80-7196-341-7

5 Kontakt na autora

PaedDr. Josef Kubeš

Gymnázium, Plzeň, Mikulášské nám. 23

Josef.Kubes@mikulasske.cz

ODBORNÝ KEMP PŘÍRODOVĚDNÝCH OBORŮ MATEMATIKA

ROVNICE VYŠŠÍCH ŘÁDŮ, NUMERICKÉ ŘEŠENÍ ROVNIC

Josef KUBEŠ

1 Úvod

Způsoby řešení rovnic vyšších řádů propracovávali matematikové řadu století. Ve školské látce se vyskytuje úplné řešení kvadratické rovnice a speciálních typů rovnic vyšších řádů – binomické rovnice, okrajově reciproké rovnice.

2 Rovnice vyšších řádů, numerické řešení rovnic

Řešení rovnic vyšších řádů je další oblíbené téma, které slouží k nácvičku netradičních přístupů k řešení zadaných rovnic. Obvykle je zadána podmínka pro kořeny, či lze jedno z řešení odhadnout. Další velkou oblastí, která se rozvíjí v souvislosti s nástupem výpočetní techniky, je numerické řešení rovnic. To se skládá z části separace kořenů a části určení kořene s předem stanovenou přesností.

2.1 Necht' p je takové reálné číslo, že rovnice

$$2x^3 + (2p - 5)x^2 + (p^2 - 5p)x + 2p = 0$$

o neznámé x má tři různé reálné kořeny, přičemž dva z nich jsou navzájem převrácená čísla. Určete číslo p a všechny kořeny dané rovnice.

Použijeme vztahy mezi kořeny a koeficienty a podmínku pro kořeny uvedenou v zadání. Úloha vede na řešení tří rovnic o třech neznámých, které vhodným postupem dořešíme.

2.2 Řešte kvadratickou rovnicí

$$x^2 - (2p + 3q)x + pq^2 = 0$$

s neznámou x a s celočíselnými parametry p ($p \neq 0$) a q , jejíž kořeny jsou tvaru $\frac{c}{p}$ a c , kde c je celé číslo. Zjistěte všechny možné číselné hodnoty kořenů.

Opět použijeme vztahy mezi kořeny a koeficienty. Další řešení vede přes sestavení soustavy dvou rovnic a třech neznámých. Vhodnými úpravami najdeme vztah mezi proměnnými a pomocí tabulky najdeme všechna řešení.

2.3 V oboru reálných čísel řešte

$$x^3 - 2x + 5 = 0$$

V tomto případě nelze nalézt žádné netradiční řešení. Můžeme použít velmi náročné vzorce pro řešení kubické rovnice, což je velmi nepraktické. Vzhledem k tomu, že se jedná o

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

speciální postup, není pro naše účely zajímavý. Z tohoto vyřešíme rovnici numericky. Separaci kořenů provedeme graficky a dořešení s přesností například na tři desetinná místa zvládneme metodou půlení intervalů.

2.4 V oboru reálných čísel řešte

$$2x^3 - 9x^2 - 14x + 60 = 0$$

Grafickou metodou provedeme separaci kořenů. K jejich upřesnění tentokrát použijeme metodu postupného přibližování. K výpočtům lze s výhodou použít tabulkový procesor, například Excel.

3 Závěr

Cílem setkání nad řešením rovnic vyšších řádů je navázat na látku z hodin matematiky a prohloubit znalosti žáků. První dvě úlohy slouží k přípravě na rozvoj analytického a logického myšlení žáků. Numerický způsob řešení má ukázat na provázanost klasického řešení s použitím postupů, které se používají v reálné praxi.

4 Použitá literatura

ŠVRČEK, J., CALÁBEK, P. Sbíрка netradičních matematických úloh. 1. vyd. Praha: Prométheus, spol. s r. o., 2007. 186 s. ISBN 978-80-7196-341-7

5 Kontakt na autora

PaedDr. Josef Kubeš

Gymnázium, Plzeň, Mikulášské nám. 23

Josef.Kubes@mikulasske.cz

ODBORNÝ KEMP PŘÍRODOVĚDNÝCH OBORŮ MATEMATIKA

ÚVOD DO FRAKTÁLNÍ GEOMETRIE

Josef KUBEŠ

1 Úvod

Koncem 19. století se začaly objevovat zvláštní matematické konstrukce, které se značně lišily od ideálních matematických objektů, označované za podivné matematické výjimky. Později se ukázalo, že mnohem přesněji popisují objekty reálného světa. Mezi nejznámější „výjimky“ patří Cantorova množina, která neobsahuje žádný izolovaný bod, ale ani žádnou úsečku, Kochova křivka nekonečné délky, ohraničující konečnou plochu, Peanova křivka, vyplňující celou rovinu a mnoho dalších.

2 Dělení fraktálů

Na základě generování fraktálů rozeznáváme některé jejich typy:

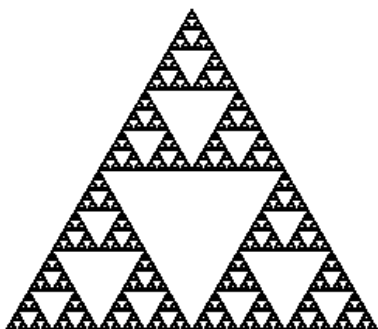
L-Systemy
Iterační funkční systémy (IFS)
Polynomicke fraktály(TEA)
Náhodné fraktály

2.1 L-Systemy

L-systém nebo Lindenmayerův systém jsou nejlépe použitelné k modelování růstu rostlin, ale také umožňují modelovat morfologii různých organismů. L -systémy mohou být také použity pro generování fraktálních útvarů. Byly zavedeny a rozvíjeny od roku 1968 maďarským teoretickým biologem a botanikem Aristidem Lindenmayerem (1925-1989).



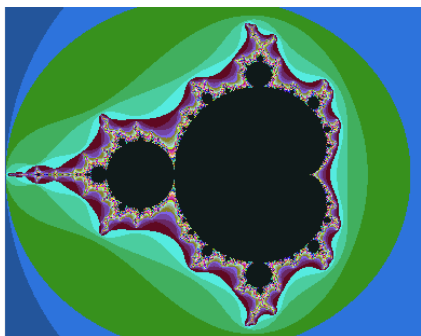
2.2 Iterační funkční systémy (IFS)



Jedná se o prostě iterační metodu. Spočívá v tom, že máme nějaký základní obrazec (trojúhelník, čtverec...) a na něj aplikujeme nějaké geometrické pravidlo. Jako příklad vezměme Sierpinského trojúhelník. Nejprve tedy máme obecný, nejlépe ale rovno -straný, -ramenný nebo pravoúhlý trojúhelník. Nyní označíme středy jeho stran a spojíme je úsečkou (narýsujeme střední příčky). Počáteční trojúhelník je rozdělen na 4 části a my prostřední vyjme. Získáme tři trojúhelníky (zmenšeniny toho původního) a na ně aplikujeme stejné pravidlo. Po dostatečném počtu iterací (nekonečném) dostaneme fraktální útvar.

2.3 Polynomické fraktály

V soustavě souřadnic (často komplexních) testujeme různé hodnoty, které dosazujeme do původní rovnice. Na její výsledek aplikujeme iterativně stejné pravidlo. Pravou stranu dosadíme do levé a tak stále pokračujeme. Z toho vyplývá, že výsledku bychom se dobrali až v nekonečném čase. V praxi se tedy stanoví limitní hranice pro počet iterací.



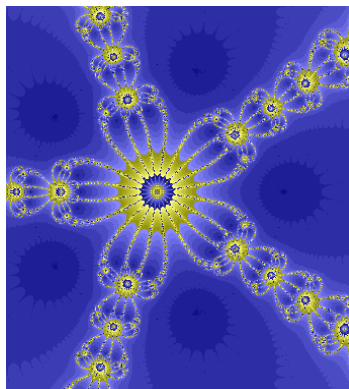
Příkladem takového fraktálu je Mandelbrotova množina. Vzniká iterativně a je definována rovnicí $z = z^2 + c$, kde z i c jsou komplexní čísla. Je to potvrzení teorie, že i velice jednoduché systémy mohou vykazovat chaotické chování. V m-set, jak se zkráceně Mandelbrotova množina nazývá, je c konstanta a zároveň pozice vykreslovaného bodu.

2.4 Náhodné fraktály

Mezi náhodné fraktály rozhodně nepatří všechny ostatní. Je to ale velmi rozsáhlá a neuspořádaná skupina. Používá se hlavně pro zobrazování a modelování přírodních objektů a dějů. Některé vznikají velice jednoduše, např. náhodným přesouváním bodu, který zanechává za sebou stopu (Brownův pohyb).

3 Závěr

Místo závěru si zobrazíme fraktál Newton.



4 Použitá literatura

<http://www.root.cz/clanky/obsah-jednotlivych-casti-serialu-a-galerie-fraktalu-ii/>

<http://chaos.fraktaly.sweb.cz/>

<http://www.fractals.webz.cz/fraktaly.htm>

<http://martin.hinner.info/math/Fraktaly/>

5 Kontakt na autora

PaedDr. Josef Kubeš

Gymnázium, Plzeň, Mikulášské nám. 23

Josef.Kubes@mikulasske.cz

ODBORNÝ KEMP PŘÍRODOVĚDNÝCH OBORŮ MATEMATIKA

DŮKAZOVÉ TECHNIKY – NEROVNOSTI, CELÁ ČÁST ČÍSLA

Josef KUBEŠ

1 Úvod

Znalost důkazových technik patří k základnímu vybavení každého řešitele matematické olympiády. Ověřování platnosti zadaných nerovnic vždy vyžaduje originální přístup, určitý nadhled a zkušenost.

2 Nerovnosti a jejich ověřování

Základním stavebním kamenem je nerovnost vyplývající z druhé mocniny dvojčlenu $(x - 1)^2$. Pro libovolné reálné číslo platí, že $(x - 1)^2 \geq 0$. Odtud plyne $x + \frac{1}{x} \geq 2$.

Další důležitá nerovnost je vztah mezi geometrickým a aritmetickým průměrem. Pro libovolnou n -tici reálných kladných čísel x_1, x_2, \dots, x_n platí: $\sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_n} \leq \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}$.

Poslední nerovností, se kterou se budeme zabývat je Cauchyova nerovnost. Pro libovolné dvě n -tice reálných čísel x_1, x_2, \dots, x_n a y_1, y_2, \dots, y_n platí $(x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots + x_n y_n)^2 \leq (x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2)(y_1^2 + y_2^2 + \dots + y_n^2)$.

2.1 Dokažte, že obsah obdélníka o stranách a, b je menší než polovina obsah u čtverce sestrojeného nad jeho úhlopříčkou.

Vhodnou úpravou přejdeme na druhou mocninu dvojčlenu.

2.2 Dokažte, že pro každý ostrý úhel α platí

$$\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{cotg} \alpha \geq 2$$

Použijeme vztah mezi funkcemi tangens a kotangens a upravíme na druhou mocninu dvojčlenu.

2.3 Dokažte, že pro libovolnou trojici kladných čísel a, b, c platí

$$(a + b)(b + c)(c + a) \geq 8abc$$

Roznásobíme a použijeme nerovnost mezi aritmetickým a geometrickým průměrem.

2.4 Dokažte, že pro libovolnou trojici kladných čísel a, b, c platí

$$\left(1 + \frac{a}{b+c}\right) \left(1 + \frac{b}{c+a}\right) \left(1 + \frac{c}{a+b}\right) \geq \frac{27}{8}$$

Upravíme a použijeme nerovnost mezi aritmetickým a geometrickým průměrem pro členy $a+b, b+c, c+a$.

2.5 Dokažte, že pro libovolné přirozené číslo $n > 1$ platí:

$$n! < \left(\frac{n+1}{2}\right)^n$$

Využijeme rovnost: Pro libovolné přirozené číslo n větší než jedna platí: $1 + 2 + 3 + 4 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$. Dále je potřeba použít vztah mezi aritmetickým a geometrickým průměrem.

2.6 Dokažte, že pro všechna $x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbb{R}^+$ platí:

$$\left(\sum_{i=1}^n x_i\right)^2 \leq n \sum_{i=1}^n x_i^2$$

Dosadíme do Cauchyovy nerovnosti za y_1, y_2, \dots, y_n číslo 1.

2.7 Dokažte, že pro každé reálné číslo a platí:

$$3(1 + a^2 + a^4) \geq (1 + a + a^2)^2$$

2.8 Necht' $x, y, z \in \mathbb{R}_0^+$. Dokažte, že platí:

$$\sqrt{xy + yz + zx} \leq \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

Obě nerovnosti dokážeme aplikací Cauchyovy nerovnosti.

2.8 Dokažte, že pro libovolnou trojici reálných čísel a, b, c platí:

$$(a + b - c)^2 + (b + c - a)^2 + (c + a - b)^2 \geq ab + bc + ca$$

Upravíme levou stranu a opět šikovně použijeme Cauchyovu nerovnost.

2.10 Dokažte, že pro libovolnou trojici kladných reálných čísel a, b, c platí:

$$\frac{1}{b(a+b)} + \frac{1}{c(b+c)} + \frac{1}{a(c+a)} \geq \frac{9}{2(a^2 + b^2 + c^2)}$$

Důkaz nerovnosti je poměrně náročný. Výchozí nerovností je tentokrát vztah mezi harmonickým a aritmetickým průměrem. V dalším řešení pochopitelně budeme potřebovat Cauchyovu nerovnost.

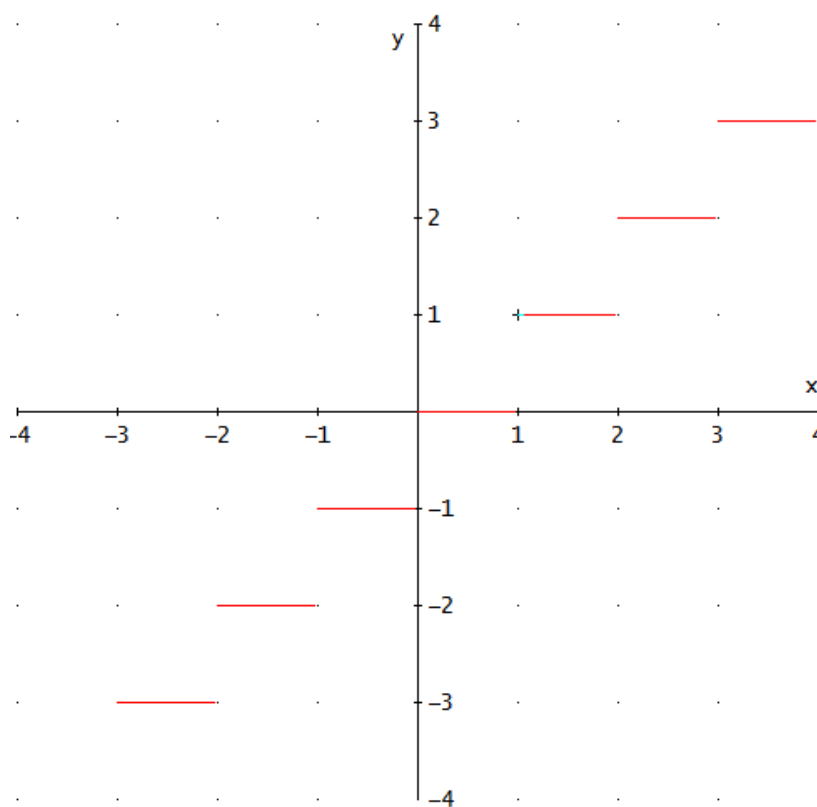
2.11 V oboru reálných čísel řešte soustavu rovnic

$$10x[y] = 1492$$

$$10y[x] = 1776$$

Výraz $[a]$ znamená celou část z reálného čísla a . Je rovna nejbližšímu nižšímu celému číslu. Tedy $[1] = 1$, $[3,5] = 3$, $[-6,2] = -7$. Graf funkce $y = [x]$ má tvar:

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ



Řešení každé úlohy s celou částí neznámé je vždy originální a není na ně univerzální pravidlo. Zadaná soustava se převede na soustavu dvou nerovnic

$$\begin{aligned} [x][y] &\leq 149 \\ ([y] + 1)[x] &\geq 178. \end{aligned}$$

Odtud stanovíme podmínky pro obě proměnné a dosadíme všechny možné případy. Soustava má čtyři řešení.

2.12 V oboru reálných čísel řešte rovnici

$$[3x - 5] = 5x - 8$$

2.13 Určete všechna reálná čísla, která vyhovují rovnici $4x - 2[x] = 5$

2.14 Zjistěte, kolik řešení má v oboru reálných čísel rovnice

$$x = [x] + \frac{x}{2004}$$

Ve všech úlohách využijeme definici celé části, tedy $[x] = x + k$, kde $0 \leq k < 1$.

3 Závěr

Uvedené úlohy z velké části přesahují rozsah základního středoškolského učiva matematiky. Pro řešení příkladů matematické olympiády jsou však základní a navazuje se na ně ve vyšších kolech. Řešitele zdokonaluje ve strategii a důslednosti řešení. Důkazové úlohy uvedeného typu také vyžadují precizní znalost v upravování algebraických výrazů.



evropský
sociální
fond v ČR



EVROPSKÁ UNIE



MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ,
MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY



OP Vzdělávání
pro konkurenceschopnost



INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

4 Použitá literatura

ŠVRČEK, J., CALÁBEK, P. Sbíрка netradičních matematických úloh. 1. vyd. Praha: Prométheus, spol. s r. o., 2007. 186 s. ISBN 978-80-7196-341-7

KUFNER, A. Nerovnosti a odhady. 1. vyd. Praha: Mladá fronta 1975. 120 s. 508/21/82.6

5 Kontakt na autora

PaedDr. Josef Kubeš

Gymnázium, Plzeň, Mikulášské nám. 23

Josef.Kubes@mikulasske.cz

ODBORNÝ KEMP PŘÍRODOVĚDNÝCH OBORŮ MATEMATIKA

DŮKAZOVÉ TECHNIKY - PLANIMETRIE

Josef KUBEŠ

1 Úvod

Planimetrie, tedy rovinná geometrie, je velmi stará disciplína, která svou náročností potrápí řadu studentů. Vyžaduje představivost a určitou schopnost si zadanou situaci dobře načrtnout. Každá úloha je vlastně originální, a proto její řešení vyžaduje značnou míru kreativity. Znalost planimetrie je využitelná v běžném životě i v profesní kariéře u řady oborů. Obvykle si školské postupy nepamatujeme, zůstávají v našem podvědomí a přiřazujeme si je k dalším životním zkušenostem.

2 Důkazové úlohy v planimetrii

Důkazové úlohy jsou velkým balíkem úloh. Pomáhají k ujasnění vzájemných vztahů a geometrických pouček. Aplikujeme kromě geometrických znalostí také poznatky matematické logiky. Pro snazší vyjadřování využijeme poznatky z teorie množin.

2.1 Označme S střed strany AB ostroúhlého trojúhelníku ABC a V průsečík jeho výšek. Obraz bodu V ve středové souměrnosti se středem S označme U . Dokažte, že úhly ACV a BCU jsou shodné.

První krok k řešení je důkaz, že čtyřúhelník $AUBC$ je tětivový čtyřúhelník. Shodnost velikostí obou úhlů dokážeme pomocí věty o obvodových úhlech a podobnosti vhodných trojúhelníků.

2.2 Je dán libovolný vnitřní bod P pravoúhlého rovnoramenného trojúhelníku ABC s přeponou AB . Dokažte, že z úseček délek $|AP|$, $|BP|$ a $|CP|\sqrt{2}$ lze sestrojit trojúhelník.

Po přečtení úlohy bychom předpokládali použití trojúhelníkové nerovnosti. To by byla cesta nesprávným směrem. Zobrazíme trojúhelník BPC v rotaci se středem v bodě C a úhlem otočení -90° . V obrázku vyhledáme zadané úsečky a zjistíme, že mohou tvořit trojúhelník.

2.3 Necht' S značí střed kružnice vepsané danému ostroúhlému trojúhelníku ABC . Označme dále A' , B' , C' obrazy bodu S v osových souměrnostech po řadě podle přímek BC , AC , AB . Dokažte, že trojúhelníky ABC , $A'B'C'$ jsou podobné, právě když ABC je rovnostranný trojúhelník.

Využijeme trojúhelník sestrojený ze středních příček trojúhelníku ABC . Jedná se o důkaz ekvivalence, tento fakt si musíme dobře uvědomit.

2.4 Na kružnici k jsou dány dva různé body X a Y tak, že přímka XY neprochází středem kružnice k . Úsečka XY je průměrem kružnice l . Na větším oblouku XY kružnice k leží bod P a

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

na kružnici l bod Q tak, že čtyřúhelník $PXQY$ je konvexní a přitom $PX \parallel QY$. Dokažte, že velikost úhlu PYQ nezávisí na poloze bodu P (za podmínky existence bodu Q).

Ukážeme, že úhly PXQ a XQY jsou vždy pravé a úhel XPY nezáleží na poloze bodu P (obvodový úhel).

2.5 Označme K, L, M, N středy stran AB, BC, CD a DA konvexního čtyřúhelníku $ABCD$. Dokažte, že z úseček KL, KM a KN lze sestavit trojúhelník a vyjádřete jeho obsah pomocí obsahu čtyřúhelníku $ABCD$.

Úloha není složitá, stačí použít podobnost trojúhelníků a vlastnosti střední příčky. Při řešení použijeme úhlopříčky čtyřúhelníka.

3 Závěr

Planimetrické úlohy včetně důkazových jsou vděčným tématem matematických soutěží a obvykle patří k těm, které oddělují úspěšné řešitele od neúspěšných. Uvedené příklady reprezentují vždy velkou skupinu úloh, proto každá je řešena jiným způsobem.

4 Použitá literatura

ŠVRČEK, J., CALÁBEK, P. Sbíрка netradičních matematických úloh. 1. vyd. Praha: Prométheus, spol. s r. o., 2007. 186 s. ISBN 978-80-7196-341-7

5 Kontakt na autora

PaedDr. Josef Kubeš

Gymnázium, Plzeň, Mikulášské nám. 23

Josef.Kubes@mikulasske.cz

ODBORNÝ KEMP PŘÍRODOVĚDNÝCH OBORŮ MATEMATIKA

ZLATÝ ŘEZ – MATEMATICKÝ DIAMANT

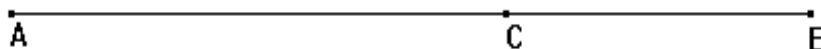
Josef KUBEŠ

1 Úvod

Zlatý řez definuje již Eukleidés v 6. knize *Základů*. Můžeme se s ním setkat v matematice i řadě dalších oborů. Lze jej vyzorovat v rostlinné i živočišné říši. Se zlatým řezem pracovala řada malířů, architektů, fotografů a v dnešní době jej lze také nalézt v oblasti tvorby webových stránek a designu.

2 Definice zlatého řezu

Je dána úsečka AB a její vnitřní bod C, který leží tak, že délka delšího úseku v poměru k délce kratšího úseku se rovná poměru délky celé úsečky a délky delšího jejího úseku.



Jestliže tento vztah vyjádříme algebraicky, získáme rovnici:

$$\frac{|AB|}{|AC|} = \frac{|AC|}{|BC|} \text{ po dosazení za } |AB| = a, |AC| = x, |BC| = a-x, \text{ dostaneme vztah:}$$

$$\frac{a}{x} = \frac{x}{a-x}$$

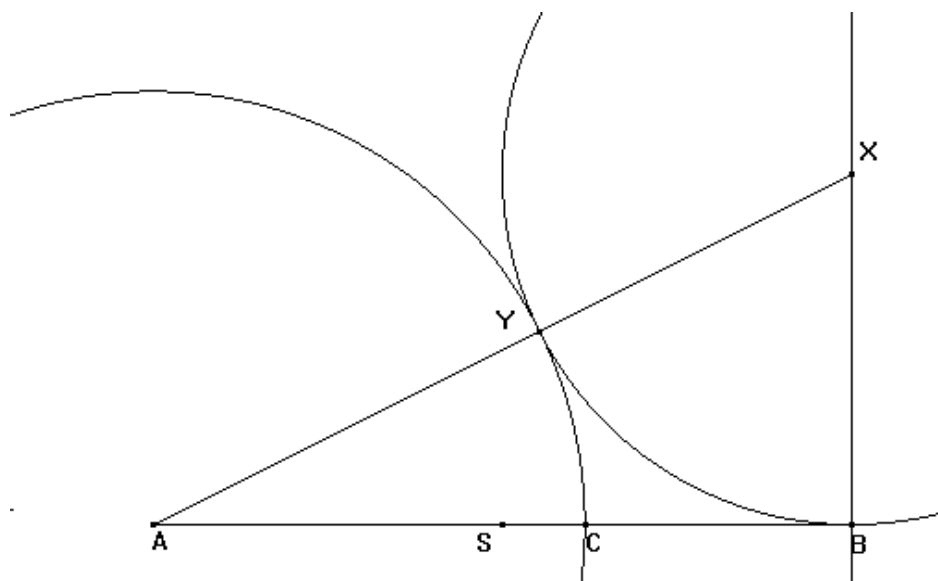
Poměr celé úsečky a její větší části označíme jako ϕ , vyjádříme a pomocí ϕ a pokračujeme v úpravách až ke kvadratické rovnici, kterou vypočteme (za výsledek můžeme prohlásit jen ten větší nule, protože hledáme poměr mezi délkami úseček).

Hledaný výsledek je vyjádřený hodnotou 1,618033988728.

2.1 Konstrukce zlatého řezu

Je dána úsečka AB a její střed S. V bodě B narýsujeme kolmici na úsečku AB. Na tuto kolmici nanese délku úsečky AS, tak vznikne bod X, který spojíme s bodem A. V bodě X opišeme kružnici o poloměru $|AS|$, v průsečíku s úsečkou AX vzniká bod Y. Tímto bodem vedeme kružnici se středem v bodě A. Tato kružnice protíná úsečku AB v bodě C, který dělí úsečku AB ve zlatém řezu.

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ



2.2 Zlatý obdélník

Zlatý obdélník je takový obdélník, pro který platí, že poměr jeho délky a šířky odpovídá číslu φ , tedy zlatému poměru.

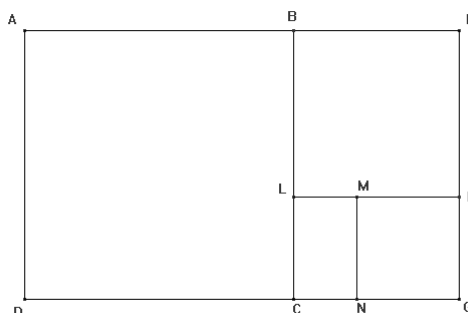


Obdélník, jehož strany jsou vzájemně ve zlatém poměru je považován za nejestetičtější obdélník.

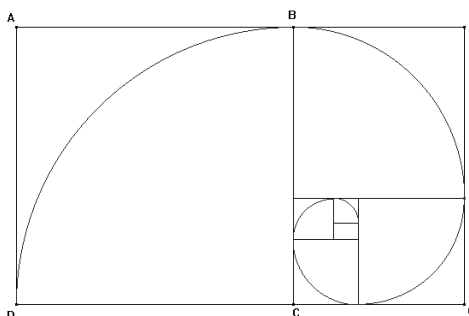
Jestliže zlatý obdélník vepíšeme do čtverce, rozdělí jeho vrcholy strany čtverce ve zlatém poměru.

Oddělíme-li z původního zlatého obdélníku čtverec, zbude nám obdélník, který je opět zlatým. Koeficient podobnosti mezi původním a nově vzniklým menším obdélníkem je φ . Tento postup můžeme opakovat v podstatě do nekonečna, stále nám budou vznikat podobné zlaté obdélníky s rozměry násobků φ .

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ



Spojením předních rohů, popř. středů čtverců hladkou nepřerušenou křivkou získáme zlatou spirálu, která je velmi podobná spirále logaritmické.



2.3 Zlatý trojúhelník

Zlatým trojúhelníkem nazýváme takový rovnoramenný trojúhelník, pro který platí, že poměr délky ramene a základny se rovná číslu ϕ , úhly ležící při základně mají velikost 72° a úhel při vrcholu má velikost 36° .

2.4 Fibonacciho posloupnost

Uvažujme následující posloupnost: 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233,... Snadno zjistíme, že počínaje třetím členem, je každý následující člen součtem dvou předcházejících. Tato posloupnost byla první známou rekurzivní posloupností v Evropě. Posloupnost nazval francouzský matematik Edouard Lucas Fibonacciho posloupností. V roce 1634 byl pro Fibonacciho posloupnost matematikem Albertem Girardem zaveden zápis:

$$F_{n+2} = F_{n+1} + F_n.$$

Jedna ze zajímavých vlastností Fibonacciho posloupnosti, kterou objevil Johannes Kepler, se týká druhých mocnin čísel náležejících posloupnosti. Druhá mocnina kteréhokoli jejího členu se liší nanejvýš o jedničku od součinu dvou členů, které sousedí s umocňovaným číslem. Vezmeme-li například šestý člen posloupnosti – číslo 8 – potom jeho druhá mocnina je rovna 64; $8^2 = 64$. Součin jeho okolních členů je $5 \cdot 13 = 65$. Tento postup bychom mohli opakovat pro libovolný člen Fibonacciho posloupnosti se stejným výsledkem.

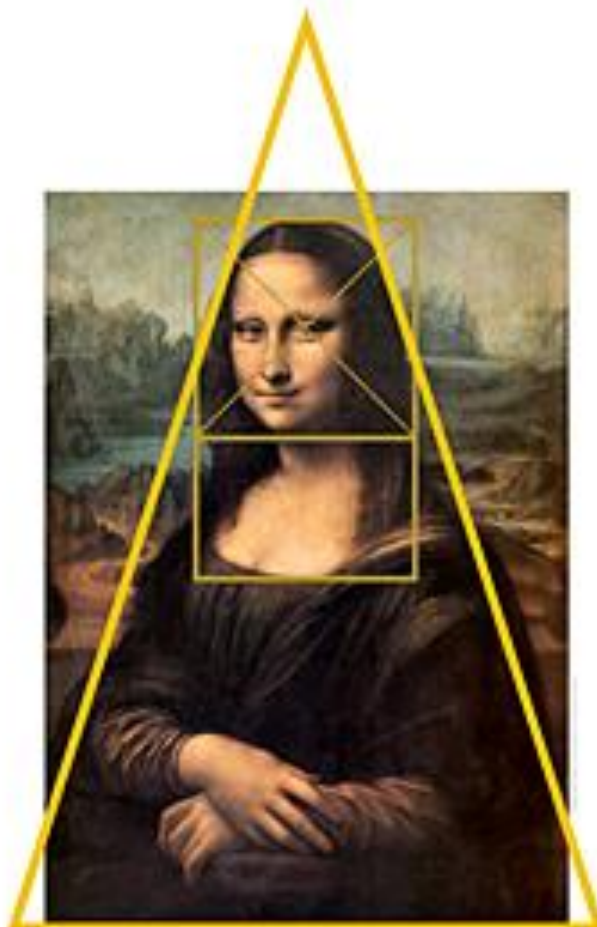
Proslulost Fibonacciho posloupnosti tkví ve skutečnosti, že její stopy můžeme nalézt i v dalších přírodních úkazech. Například světelné paprsky se při průchodu skleněnými

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

deskami v podstatě řídí Fibonacciho posloupností. Nejznámějším příkladem přírodního úkazu, který lze Fibonacciho čísla popsat, je způsob růstu listů na rostlinách. Přechod od jednoho listu ke druhému má charakter šroubovitého výstupu a jejich rozmístění odpovídá právě číslům Fibonacciho posloupnosti. Totéž platí i pro uspořádání šupin borové šišky, semínek slunečnic a šupin ananasu, ty vyrůstají ve spirálách po směru a proti směru hodinových ručiček, jejich počty odpovídají výše uvedeným číslům. Dalším velmi známým příkladem jsou ulity měkkýšů, např. loděnky. Jestliže porovnáme průměr dvou sousedních spirál (které kopírují zlatou spirálu), dostaneme opět Fibonacciho čísla a průměr mezi nimi blíží se číslu 1,618.

3 Závěr

Na závěr ukažme na jednom příkladu užití zlatého řezu v malířství. Nejznámějším dílem Leonarda da Vinci dílem je portrét Mona Lisa. O tom, že portrét je umístěn do trojúhelníkové (nebo pyramidové) kompozice není sporu. Kolem postavy lze sestavit zlatý trojúhelník. Dále lze nakreslit zlatý obdélník, který ohraničí oblast od vrcholku hlavy až po živůtek, a v jeho horní části vytvořit čtverec. Pokud se podíváme na obraz poprvé, zřejmě utkvíme pohledem v levém oku modelu. Toto oko nazýváme „dominantním okem“ a leží v průsečíku úhlopříček čtverce vzniklého ve výše popsaném zlatém obdélníku. Všechny předchozí konstrukce ukazuje následující obrázek.





evropský
sociální
fond v ČR



EVROPSKÁ UNIE



MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ,
MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY



OP Vzdělávání
pro konkurenceschopnost



INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

4 Použitá literatura

VRÁTNÍKOVÁ, K. Krása skrytá v číslech. Práce SOČ 2008

<http://www.volny.cz/zlaty.rez/>

5 Kontakt na autora

PaedDr. Josef Kubeš

Gymnázium, Plzeň, Mikulášské nám. 23

Josef.Kubes@mikulasske.cz

ODBORNÝ KEMP PŘÍRODOVĚDNÝCH OBORŮ MATEMATIKA

DŮKAZOVÉ ÚLOHY

Petr ZROSTLÍK

1 Úvod

Důkazové úlohy se každoročně objevují v jednotlivých kolech matematické olympiády, proto je vhodné se těmito typy úloh zabývat. Tyto úlohy činí studentům velké potíže a studenti se v nich velice často se dopouští řady chyb jako je např. důkaz „kruhem“.

2 Řešené příklady

2.1 Příklad č. 1

Dokažte pomocí řetězce implikací $\forall n \in \mathbb{N} : 2|n \Rightarrow 2|n^2$

2.2 Příklad č. 2

Dokažte pomocí věty obměněné a sporem $\forall n \in \mathbb{N} : 2|n^2 \Rightarrow 2|n$

2.3 Příklad č. 3

Dokažte matematickou indukcí $\forall n \in \mathbb{N} : 81|5^{n+1} + 6^{2n-1}$

2.4 Příklad č. 4

Bez numerických výpočtů odmocnin dokažte $\sqrt{13+\sqrt{12}} \leq 1 + \sqrt{13-\sqrt{12}}$

2.5 Příklad č. 5

Dokažte $\forall n \in \mathbb{N}_0 : 3|n \Rightarrow 7|2^n - 1$

2.6 Příklad č. 6

Dokažte $\forall n \in \mathbb{N} : 81|10^n \cdot (9n-1) + 1$

2.7 Příklad č. 7

(MO-55-A-I-2) Necht' $ABCD$ je tětívný čtyřúhelník s navzájem kolmými úhlopříčkami. Označme po řadě p, q kolmice z bodu D, C na přímkou AB a dále X průsečík přímek AC a p a Y průsečík přímek BD a q . Dokažte, že čtyřúhelník $XYCD$ je kosočtverec nebo čtverec.

2.8 Příklad č. 8

(MO-47-B-S-2) Necht' obě úsečky spojující středy protilehlých stran konvexního čtyřúhelníka $ABCD$ mají stejnou délku. Dokažte, že úhlopříčky AC a BD jsou navzájem kolmé, a že platí rovnost

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

$$|AB|^2 + |CD|^2 = |BC|^2 + |DA|^2$$

2.9 Příklad č. 9

V trojúhelníku ABC známe $a = |BC|$, poloměr ρ kružnice vepsané a poloměr ρ_a kružnice vně připsané straně BC . Dokažte, že vzdálenost středů obou kružnic se rovná $\sqrt{a^2 + (\rho_a - \rho)^2}$.

3 Závěr

V příkladech č.1 – 4 bylo cílem zopakovat základní typy matematických důkazů. Poté již následovaly příklady, které se vyskytovaly v předchozích letech matematické olympiády. Tyto úlohy, díky své vyšší obtížnosti, pak studentům mohou posloužit jako ukázka možných postupů řešení důkazových úloh.

4 Použitá literatura

ŠEDIVÝ J. O podobnosti v geometrii 1. vyd, Praha: ÚV Matematické olympiády a ÚV ČSM, 1963, 77 s.

ŠEDIVÝ J. Shodnost a podobnost v konstrukčních úlohách 1. vyd, Praha: ÚV Matematické olympiády a ÚV ČSM, 1980, 160 s.

HORÁK S. Kružnice 1. vyd, Praha: ÚV Matematické olympiády a ÚV ČSM, 1966, 128 s.

NIEDERLE A. Zajímavé dvojice trojúhelníků. 1. vyd, Praha: ÚV Matematické olympiády a ÚV ČSM, 1980, 267 s.

ZHOUF J. Písemné maturitní zkoušky do gymnaziálních tříd se zaměřením na matematiku. 1. vyd. Praha: UK, 2007. 209 s. ISBN 978-80-7290-288-0

VRBA, A., Horák K. Vybrané úlohy matematické olympiády. 1. vyd. Praha: SPN, 1988. 182s.

5 Kontakt na autora

Mgr. Petr Zrostlík

Gymnázium, Plzeň, Mikulášské nám. 23

petr.zrostlik@mikulasske.cz

ODBORNÝ KEMP PŘÍRODOVĚDNÝCH OBORŮ MATEMATIKA

Geometrie v pohybu

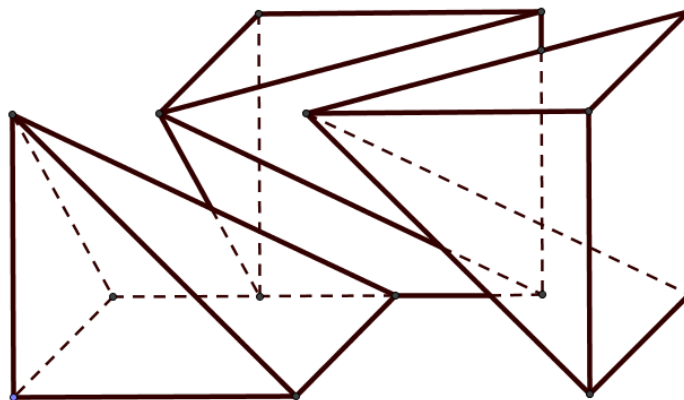
Petr ZROSTLÍK

1 Úvod

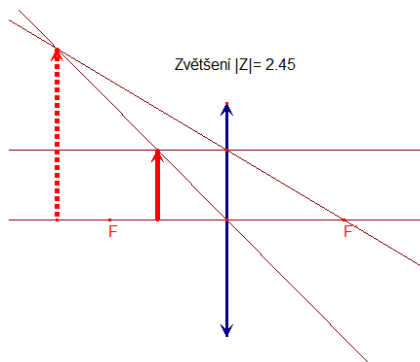
Program na dynamickou geometrii můžeme s úspěchem použít pro simulaci řady jevů a vytvořit tím velice zajímavé animace.

Příklady:

- Rozklad krychle na jehlany

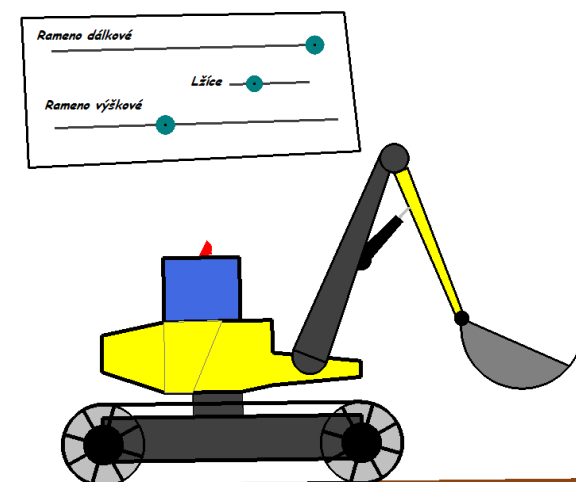


- geometrická optika

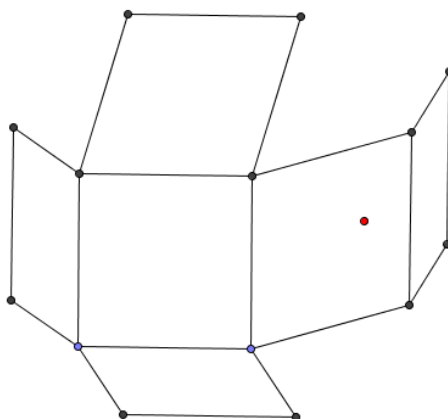


- pohybující se bagr

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ



- síť krychle



2 Řešené úlohy

2.1 Základní pohyby

Studenti měli za úkol najít princip simulací nakreslených na obrázcích a realizovat tyto pohyby pomocí programu Geogebra. (např. pro B...pokud se nějakým bodem pohybujeme nahoru, tak druhý bod se musí pohybovat dolů a naopak)

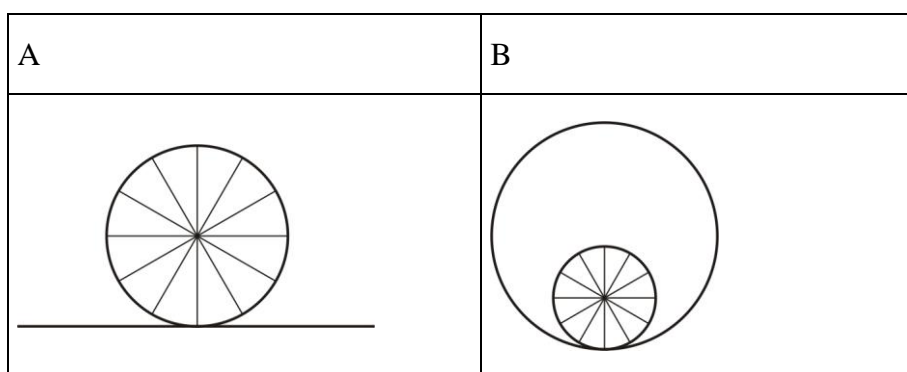
A	B	C

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Řešení:

- A užití osové souměrnosti
- B užití středové souměrnosti
- C užití stejnolehlosti

2.2 Simulace pohybu kola

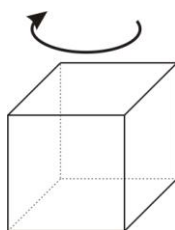


Řešení:

Pro simulaci pohybu použijeme rotaci o středový úhel příslušný oblouku kružnice, který má stejný obvod, jako „uražená“ vzdálenost na polopřímce nebo na kružnici.

2.3 Rotace krychle

Pomocí programu Cabri geometrie realizujete simulaci rotace krychle kolem osy procházející středem podstavy.



Řešení:

Pro obraz krychle použijeme osovou afinitu, v které sestrojíme obraz podstavy (čtverce) krychle a následně pomocí translace nalezneme její obraz. Vyšetřit dynamicky viditelnost, je však již podstatně složitější. Viditelnost je nutno řešit pro každou polohu krychle zvlášť. Vždy se řeší vzájemná poloha dvou hran, které jsou ve skutečnosti mimoběžné, ale promítnou se jako dvě různoběžky. Tím dostaneme bod, který se nám postupně objevuje a zase mizí.

2.4 Růžice

Sestrojte růžici, která se bude plynule měnit.



Řešení:

Sestrojíme libovolný čtyřúhelník a pomocí rotace jej několikrát „zkopírujeme“.

3 Závěr

Co napsat závěrem - „Geometrie je krásná“.

4 Použitá literatura

Zdroje na internetu:

<http://www.akermann.cz/standardni-it/software-cabri.html>

<http://www.geogebra.org>

<http://www.pf.jcu.cz/cabri/temata/dynamgeo/dyngео.htm>

5 Kontakt na autora

Mgr. Petr Zrostlík

Gymnázium, Plzeň, Mikulášské nám. 23

petr.zrostlik@mikulasske.cz

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

ODBORNÝ KEMP PŘÍRODOVĚDNÝCH OBORŮ MATEMATIKA

PLANIMETRIE

Petr ZROSTLÍK

1 Úvod

„K pochopení geometrie nevede žádná královská cesta“ – Euklides

2 Řešené příklady

V rámci semináře byly řešeny následující příklady.

Příklad č. 1

(MO 47-B-II-2) Sestrojte trojúhelník ABC , v němž při obvyklém označení platí:

- $t_a = 9 \text{ cm}$
- $t_b = 12 \text{ cm}$
- $3 \cdot c = 2 \cdot t_c$.

Nápověda:

Vztah $3 \cdot c = 2 \cdot t_c$ upravíme na $\frac{t_c}{3} = \frac{c}{2}$. Z toho je vidět, že

těžiště trojúhelníku ABC leží na Thaletově kružnici nad průměrem AB . Tím jsem úlohu převedli na konstrukci trojúhelníka ABT podle věty sus.

Příklad č. 2

(MO 49-B-II-4) Je dán obdélník $KLMN$ $|KN| > |KL|$. Sestrojte rovnoramenný trojúhelník ABC se základnou AB délky $|KL|$ tak, aby jeho výšky v_a obsahovala body K, N , výška v_b bod L a výška v_c bod M . (výškami zde rozumíme přímky)

Nápověda:

V rámci rozboru užitje osovou souměrnost s osou v_c .

Příklad č. 3

Jsou dány dva různé body A, B a číslo $k > 0; k \neq 1$. Vyšetřete množinu všech bodů X roviny, pro které platí $|AX| = k \cdot |BX|$.

Řešení:

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Množinou bodů je Apolloniova kružnice..

Příklad č. 4

Sestrojte trojúhelník ABC, je-li dáno a , v_a , $\frac{v_b}{v_c} = 2$.

Nápověda:

Poměr $\frac{v_b}{v_c} = 2$ převedeme vhodnou úpravou na $\frac{c}{b} = 2a$

využijeme Apolloniovu kružnici.

Příklad č. 5

Na přímce p jsou dány body A, B, C, D (ležící v tomto pořadí). Najděte bod X tak, aby z tohoto body byly vidět úsečky AB, BC a CD pod stejnými zornými úhly.

Nápověda:

Užijeme Apolloniovu kružnici..

3 Závěr

Studenti se v rámci semináře seznámili s řešením obtížnějších konstrukčních úloh a „užitečnou“ množinou bodů daných vlastností..

4 Použitá literatura

ŠEDIVÝ J. O podobnosti v geometrii 1. vyd, Praha: ÚV Matematické olympiády a ÚV ČSM, 1963, 77 s.

ŠEDIVÝ J. Shodnost a podobnost v konstrukčních úlohách 1. vyd, Praha: ÚV Matematické olympiády a ÚV ČSM, 1980, 160 s.

HORÁK S. Kružnice 1. vyd, Praha: ÚV Matematické olympiády a ÚV ČSM, 1966, 128 s.

NIEDERLE A. Zajímavé dvojice trojúhelníků. 1. vyd, Praha: ÚV Matematické olympiády a ÚV ČSM, 1980, 267 s.

5 Kontakt na autora

Mgr. Petr Zrostlík

Gymnázium, Plzeň, Mikulášské nám. 23

petr.zrostlik@mikulasske.cz

ODBORNÝ KEMP PŘÍRODOVĚDNÝCH OBORŮ MATEMATIKA

ŘEŠENÍ KOMPLEXNÍCH ÚLOH I+II

Petr ZROSTLÍK

1 Úvod

Při řešení příkladů matematické olympiády se mohou studenti setkat s úlohami, pro jejichž řešení již nestačí jen znalost jedné matematické partie, ale je zapotřebí mít určitý nadhled nad větším rozsahem, případně se na úlohu „podívat“ z jiné strany.

2 Řešené příklady

V rámci semináře studenti řešili následující příklady.

2.1 Příklad č. 1

Je dána funkce $f(x) = \sqrt{x + \sqrt{2x-1}} + \sqrt{x - \sqrt{2x-1}}$

- Určete definiční obor
- Řešte rovnici $f(x) = \sqrt{a}$ s parametrem a .
- Nakreslete graf funkce $y = f^2(x)$

2.2 Příklad č. 2

Najděte součet prvních 2010 členů posloupnosti 1; 11; 111; 1111; 11111; ...

Nápověda:

Vyjádríme si členy posloupnosti v desítkové soustavě a při hledání součtu zadané posloupnosti využijeme znalost součtu první n členů geometrické posloupnosti.

2.3 Příklad č. 3

Je dána následující posloupnost. První člen je 49, každý další člen vznikne z předchozího členu tak, že do jeho středu vložíme dvojčíslí 48. (49; 4489; 444889; 444448889; ...). Dokažte, že každý člen této posloupnosti je druhou mocninou přirozeného čísla.

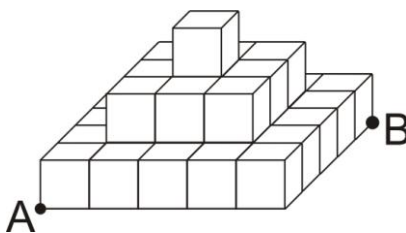
Nápověda:

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Vyjádříme si n -tý člen posloupnosti v desítkové soustavě a využijeme znalost součtu první n členů geometrické posloupnosti.

2.4 Příklad č. 4

Je dána pyramida z jednotkových krychlí s 3 vrstvami. Najděte nejkratší spojnicí protějších vrcholů A, B podstavy, která vede po povrchu pyramidy a neprochází vnitřkem podstavy.

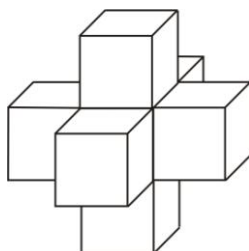


Nápověda:

Body A, B jsou umístěny symetricky vůči rovině, která prochází středem úsečky AB a kolmo na ní. Sestrojíme řez touto rovinou a následně rozvineme část pyramidy do roviny.

2.5 Příklad č. 5

Na obrázku je znázorněn stavebnicový díl složený ze 7 krychlí. Dokažte, že s těmito díly lze vyplnit beze zbytku celý prostor.



Nápověda:

Na těleso na obrázku nahlédneme jako na útvar, který má tři vrstvy. V první je jedna krychle, v druhé je „kříž“ tvořený pěti a v poslední opět jedna krychle. Prostor si rozdělíme na rovnoběžné vrstvy krychlí, stejné velikosti jako u daných dílů. Zvolíme si jednu vrstvu a označíme si ji 0, vrstvu nad ní +1 (a pod ní -1). Nyní se snažíme najít takové rozmístění v jednotlivých vrstvách, abychom vyplnili celý prostor.

		1		0					
	0		-1						
-1			1		0				
1		0		-1					
	-1			1		0			

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

	1		0		-1			
0		-1			1		0	
		1		0		-1		
	0		-1			1		0
-1			1		0		-1	

2.6 Příklad č. 6

Na deskách 3×3 , 4×4 , 5×5 , 7×7 hrajeme hru loď. Nachází se na nich vždy jen jedna loď 2×3 . Můžeme se zeptat na libovolné políčko desky, a pokud loď zasáhne, hra končí. Pokud ne, ptáme se znovu. Určete nejmenší počet otázek, které potřebujeme, abychom jistě loď zasáhli.

2.7 Příklad č. 7

Na šachovnici 8×8 nakresleme obdélník $2 \times l$ a označíme k počet černých polí šachovnice, jejichž vnitřní bod je v tomto obdélníku. Jaké největší hodnoty může nabývat číslo k .

2.8 Příklad č. 8

V krabici tvaru krychle mají být umístěny dvě koule se stejnými průměry d . Jedna z nich se dotýká dna a dvou sousedních stěn, druhá víka krabice a zbývajících bočních stěn. Určete rozměry krabice (neuvažujeme deformace koulí a krabice).

3 Závěr

V rámci semináře se studenti seznámili s řešením úloh komplexnějšího charakteru.

4 Použitá literatura

- HRADECKÝ F., KOMAN M., VYŠÍN J. Několik úloh z geometrie jednoduchých těles. 1. vyd, Praha: ÚV Matematické olympiády a ÚV ČSM, 1961, 90 s.
- JARNÍK J. Posloupnosti a řady. 1. vyd, Praha: ÚV Matematické olympiády a ÚV ČSM, 1979, 138 s.
- VRBA, A., Horák K. Vybrané úlohy matematické olympiády. 1. vyd. Praha: SPN, 1988. 182s.
- ZHOUF J. Písemné maturitní zkoušky do gymnaziálních tříd se zaměřením na matematiku. 1. vyd. Praha: UK, 2007. 209 s. ISBN 978-80-7290-288-0

5 Kontakt na autora

Mgr. Petr Zrostlík
Gymnázium, Plzeň, Mikulášské nám. 23
petr.zrostlik@mikulasske.cz

ODBORNÝ KEMP PŘÍRODOVĚDNÝCH OBORŮ MATEMATIKA

DYNAMIKA V GEOGEBŘE

Petr ZROSTLÍK

1 Úvod

Pro výuku geometrie na střední škole je možné použít různé geometrické programy. Podle mého názoru je nejrozšířenější Cabri geometrie a Geogebra. Druhá zmiňovaná má však jednu nespornou výhodu a to, že je šířena zcela zdarma. Tyto produkty se řadí mezi programy dynamické geometrie.

2 Dynamická geometrie

Programy dynamické geometrie nám dovolují postupným vytvářením objektů na pracovní ploše obrazovky (body, kružnice, přímky, množiny bodů...) a definováním geometrických vztahů mezi těmito objekty (kolmost, rovnoběžnost,...) provádět běžné geometrické konstrukce použitím stejných znalostí, které používáme na papíře s užitím pravítka a kružítko. Některými z vytvořených objektů lze následně po ploše pohybovat a tím měnit tvar výsledné konstrukce.

Základní nástroje používané v dynamických konstrukcích:

- pohyb objektů
- stopa
- množiny

3 Řešené příklady

Pro ukázkou využití programu dynamické geometrie a výuku základního ovládnutí programu Geogebra, řešili studenti v matematickém kempu následující příklady.

3. 1 Užití pohybu objektu

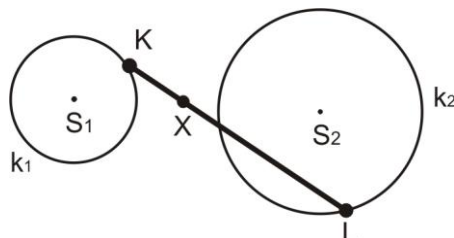
Je dán rovnoběžník ABCD, kde bod K je středem strany CD a bod L je středem strany BC. Dokažte, že úhlopříčka BD je přímkami AK a AL rozdělena na tři stejně dlouhé části.

3. 2 Užití pohybu objektu

Je dán lichoběžník ABCD. Označte S průsečík úhlopříček AC a BD. Dokažte, že obsahy trojúhelníků ASD a BCS jsou shodné.

3. 3 Užití stopy, množiny bodů a pohybu více objektů

Vyšetřete množinu bodů X v rovině, pokud se bod K pohybuje po kružnici k_1 . a následně vyšetřete množinu bodů X v rovině, pokud se bod K pohybuje po kružnici k_1 a současně bod L po kružnici k_2 .



3. 4 Praktické užití – simulace mechanismů

Po jakých křivkách se budou pohybovat koncové body tyčí v zadaných mechanismech.

Mechanismus č.1	Mechanismus č.2
Mechanismus č.3	Mechanismus č.4

4 Závěr

Zařazení programů dynamické geometrie do výuky je velice efektivní neboť tyto programy umožňují studentům snazší pochopení a větší názornost probírané látky.

5 Použitá literatura

Zdroje na internetu:

<http://www.geogebra.org>

<http://www.akermann.cz/standardni-it/software-cabri.html>

<http://www.pf.jcu.cz/cabri/temata/dynamgeo/dyngeo.htm>



INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

6 Kontakt na autora

Mgr. Petr Zrostlík

Gymnázium, Plzeň, Mikulášské nám. 23

petr.zrostlik@mikulasske.cz

ODBORNÝ KEMP PŘÍRODOVĚDNÝCH OBORŮ MATEMATIKA

Konečné součty a nekonečné řady

Jaroslav HORA

1 Užitečnost konečných součtů a nekonečných řad

Proč se konečné součty a nekonečné řady studují? Je kupříkladu dobré se zamyslet nad tím, jak je možné, že běžná kalkulačka vydá po stisku jednoho či několika tlačítek hodnoty mnoha důležitých funkcí (např. funkcí goniometrických, cyklometrických, logaritmických či exponenciálních (o různém základu)).

Vaši kamarádi na technických a přírodovědných oborech VŠ již asi vědí, že pro všechna $x \in \mathbb{R}$ platí $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$. K čemu je takový poznatek dobrý?

Volme kupř. $x = 1$, máme pak $e = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$. Vlevo je Eulerovo číslo $e = 2,718\ 281\dots$. Jak rozumět symbolu vpravo? Zřejmě jde o jakýsi nekonečný součet, matematici hovoří o nekonečné číselné řadě. Budete znát její zvláštní případ, tzv. geometrickou řadu. V daném případě si můžeme spočítat několik prvních částečných součtů této řady. Pro $n = 0$ máme $s_0 = 1$, dále $s_1 = 1 + \frac{1}{1!} = 2$, $s_2 = 1 + 1 + \frac{1}{2!} = 2,5$, $s_3 = s_2 + \frac{1}{3!} = 2\frac{2}{3}$, $s_4 = s_3 + \frac{1}{4!}$
 $\square 2,708\ 333$. Dále je $s_4 \square 2,716\ 667$ a vidíme, že posloupnost částečných součtů řady $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$

se skutečně rychle blíží číslu e .

Nyní již tušíme, jakým způsobem pracují kalkulačky. Jenže to byli matematici, kteří museli ty „chytré“ řady najít. Cesta k tomu, aby lidé zvládli i nekonečné řady, byla plná omylů.

2 Algebraický důkaz existence Boží

Popřemýšlejme nad nekonečnou řadou $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} = 1 - 1 + 1 - 1 + \dots$ a ozávkujme její členy dvěma způsoby:

a) $(1 - 1) + (1 - 1) + (1 - 1) + \dots = 0$,

b) $1 + (-1 + 1) + (-1 + 1) + (-1 + 1) + \dots = 1$, neboť součet v každé ze závorek je 0.

Tím jsme ale „dokázali“, že $0 = 1$. Stvořili jsme z nuly jedničku, což kdysi mohlo být vnímáno jako algebraický důkaz existence Boží.

Je zřejmé, že v našich úvahách je nějaká podstatná chyba (nebo chyb více). První je nečekaná: v případě konečných součtů si můžeme ozávkovat sčítance libovolným způsobem. Jde o tzv. zobecněný asociativní zákon, tj. o důsledek běžného asociativního zákona, platného pro každou trojici reálných čísel. Nikdo nám však nedal právo zobecnit asociativní zákon na nekonečný počet sčítanců.

Druhá chyba je v tom, že jsme řádně neprostudovali posloupnost částečných součtů. Pripomeňme si odpovídající teorii.

Posloupnost $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$, kde $s_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n$, $n \in \mathbb{N}$, nazýváme posloupností částečných součtů nekonečné řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ a s_n , $n \in \mathbb{N}$, se nazývá n -tý částečný součet řady

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Má-li posloupnost $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ limitu (ať vlastní nebo nevlastní), nazýváme tuto limitu součtem nekonečné řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ a značíme ji obvykle písmenem s . Píšeme $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = s$.

Pokud je posloupnost $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ konvergentní, tj. když existuje vlastní limita $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = s \in \mathbb{R}$, pak říkáme, že nekonečná řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je konvergentní.

Je-li posloupnost $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ divergentní, říkáme analogicky, že řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je divergentní. (To nastává, jestliže $s = +\infty$, $s = -\infty$, resp. s neexistuje).

Příklad: Řada $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} = 1 - 1 + 1 - 1 + \dots$ je divergentní. Její posloupnost částečných součtů je $\{1, 0, 1, 0, \dots\}$ a tato posloupnost nemá limitu, čili číslo s neexistuje. Říkáme též, že řada $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1}$ osciluje.

3 Geometrická řada – opakování

Definice: Nekonečná číselná řada tvaru $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_1 \cdot q^{n-1}$ se nazývá geometrická řada s kvocientem q .

Známe vzorec pro součet prvních n členů geometrické řady: $s_n = a_1 \cdot \frac{1 - q^n}{1 - q}$ pro $q \neq 1$ a platí následující věta.

Věta: Jestliže je první člen řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_1 \cdot q^{n-1}$ roven nule, tj. $a_1 = 0$, pak je tato nekonečná geometrická řada konvergentní pro každé $q \in \mathbb{R}$ a má součet $s = 0$. Je-li $a_1 \neq 0$, pak řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_1 \cdot q^{n-1}$ konverguje, právě když je $|q| < 1$. Její součet je pak dán vzorcem $s = \frac{a_1}{1 - q}$.

4 Achilles a želva

Dohoní rychlonohý Achilles desetkrát pomalejší želvu, která před ním má náskok 100 m (a pohybuje se po přímce)?

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Starořecký filosof Zenón z Eley (asi 490 – 430 př. n. l.) tvrdil, že ne: „pronásledující musí dříve dojít tam, kde byl prchající, takže pomalejší je vždy nutně o něco napřed“. I dnes se tento paradox nepodaří vysvětlit těm, kteří neznají středoškolskou matematiku...

Těm, kteří znají teorii geometrických řad, je vše jasné: je třeba sečíst řadu $100 + 10 + 1 + 1/10 + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} 100 \cdot \left(\frac{1}{10}\right)^{n-1}$, tedy geometrickou řadu s $a_1 = 100$, $q = \frac{1}{10}$. Je $s = \frac{a_1}{1-q} = \frac{100}{1-\frac{1}{10}} = \frac{1000}{9}$. Želva bude dostižena ve vzdálenosti $111\frac{1}{9}$ metrů od startu.

4 Umíme sečíst i některé jiné řady

Úkolem je určit součet řady $1 + \frac{2}{3} + \frac{3}{9} + \frac{4}{27} + \dots$. Je zřejmé, že se nejedná o řadu geometrickou a klasické řešení vyžaduje trochu matematického důvtipu. Jestliže označíme

$$s_n = 1 + \frac{2}{3} + \frac{3}{9} + \frac{4}{27} + \dots + \frac{n-1}{3^{n-2}} + \frac{n}{3^{n-1}},$$

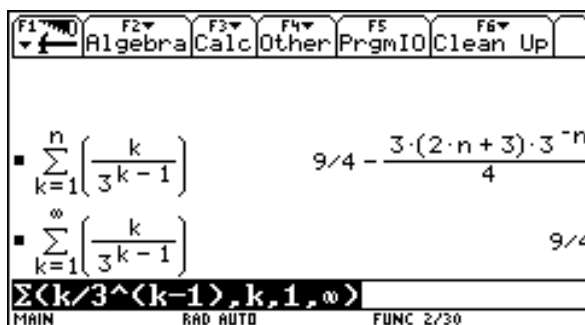
pak $\frac{1}{3}s_n = \frac{1}{3} + \frac{2}{9} + \frac{3}{27} + \frac{4}{81} + \dots + \frac{n-1}{3^{n-1}} + \frac{n}{3^n}$.

Odečteme-li druhý řádek od prvního, ale tak, že ponecháme číslo 1 a odečítáme zlomky se stejným jmenovatelem, převedeme úlohu na tvar, kdy lze použít vzorec pro součet prvních n členů geometrické řady:

$$\frac{2}{3}s_n = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27} + \frac{1}{81} + \dots + \frac{1}{3^{n-1}} - \frac{n}{3^n} = \frac{3}{2} \left(1 - \frac{1}{3^n}\right) - \frac{n}{3^n}.$$

Proto $\frac{2}{3}s_n = \frac{3}{2} \left(1 - \frac{1}{3^n}\right) - \frac{n}{3^n}$; $s_n = \frac{9}{4} \left(1 - \frac{1}{3^n}\right) - \frac{n}{2 \cdot 3^{n-1}}$, nakonec $s = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \frac{9}{4}$.

Výsledek, k němuž jsme došli klasickým způsobem, souhlasí s tím, co lze vidět např. na obrazovce grafického kalkulatoru TI-92 Plus, obr. 1.



Obr. 1– Grafický kalkulator TI-92 Plus

5 Teleskopická metoda

Určete součet řady $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \dots$.

Obdobné příklady se řeší tzv. teleskopickou metodou. Název metody má naznačit, že je třeba „vidět daleko“ a umět odhadnout, že se podaří zjednodušit částečné součty.

Nejprve analogicky s rozkladem na parciální zlomky pišme $a_n = \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$

a tento fakt užijme při zápisu částečných součtů řady:

$$s_1 = a_1 = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2},$$

$$s_2 = a_1 + a_2 = \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3},$$

$$s_3 = s_2 + a_3 = \frac{2}{3} + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4},$$

...

$$s_n = s_{n-1} + a_n = \left(1 - \frac{1}{n}\right) + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = 1 - \frac{1}{n+1} = \frac{n}{n+1}.$$

Nalezli jsme posloupnost částečných součtů $\{s_n\}_1^{\infty} = \left\{\frac{n}{n+1}\right\}_1^{\infty}$. Nakonec připomeňme, že součet s nekonečné řady je limitou posloupnosti částečných součtů $\{s_n\}_1^{\infty}$, tj. $s = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n$. Je tedy $s = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+1} = 1$. Daná řada konverguje a má součet 1.

Určete součet řady $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)(2n+5)}$.

Snadno zjistíme, že lze psát $a_n = \frac{1}{(2n-1)(2n+5)} = \frac{1}{6} \left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+5} \right)$. Nyní již vidíme, že „teleskopická metoda“ bude v tomto případě úspěšná. Je

$$s_1 = a_1 = \frac{1}{6} \left(1 - \frac{1}{7} \right),$$

$$s_2 = s_1 + a_2 = \frac{1}{6} \left(1 - \frac{1}{7} \right) + \frac{1}{6} \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{9} \right) = \frac{1}{6} \left(1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{7} - \frac{1}{9} \right),$$

$$s_3 = s_2 + a_3 = \frac{1}{6} \left(1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{7} - \frac{1}{9} \right) + \frac{1}{6} \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{11} \right) = \frac{1}{6} \left(1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} - \frac{1}{9} - \frac{1}{11} \right),$$

$$s_4 = s_3 + a_4 = \frac{1}{6} \left(1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} - \frac{1}{9} - \frac{1}{11} \right) + \frac{1}{6} \left(\frac{1}{7} - \frac{1}{13} \right) =$$

$= \frac{1}{6} \left(1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{9} - \frac{1}{11} - \frac{1}{13} \right)$ [„anihilace“ zlomků $\frac{1}{7}$ je prvním úspěchem „teleskopické metody“],

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

$$\begin{aligned} s_5 &= s_4 + a_5 = \frac{1}{6} \left(1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{9} - \frac{1}{11} - \frac{1}{13} \right) + \frac{1}{6} \left(\frac{1}{9} - \frac{1}{15} \right) = \\ &= \frac{1}{6} \left(1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{11} - \frac{1}{13} - \frac{1}{15} \right), \\ s_n &= \frac{1}{6} \left(1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+3} - \frac{1}{2n+5} \right). \end{aligned}$$

Určili jsme posloupnost částečných součtů $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ a nakonec ještě vypočteme $s =$
 $= \lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \frac{1}{6} \left(1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} \right) = \frac{23}{90}$.

5 Kontakt na autora

Doc. RNDr. Jaroslav Hora, CSc.

katedra matematiky FPE ZČU, Klatovská 51, Plzeň, 306 14.

horajar@kmt.zcu.cz

ODBORNÝ KEMP PŘÍRODOVĚDNÝCH OBORŮ MATEMATIKA

O (NE)ROZLOŽITELNOSTI POLYNOMŮ

Jaroslav HORA

1 Úvod

Umět rozložit polynom (v jedné či více neurčitých) je v matematice velice důležité při různých algebraických úpravách, řešení rovnic a nerovnic atd. Proto se studenti seznamují s klasickými vzorci pro rozklady výrazů typu $A^2 - B^2$, $A^3 - B^3$, $A^n + B^n$, $A^n - B^n$. Je tedy např. $x^2 - 9 = (x - 3)(x + 3)$, $x^3 + 125 = (x + 5)(x^2 - 5x + 25)$, $x^4 - 16y^4 = (x^2 - 4y^2)(x^2 + 4y^2) = (x - 2y)(x + 2y)(x^2 + 4y^2)$.

Povšimněme si, že rozložitelnost polynomu je relativní záležitost: velmi totiž záleží na tom, v jakém číselném oboru se provádí. Můžeme např. psát $x^2 - 5 = (x - \sqrt{5})(x + \sqrt{5})$, ale v tomto rozkladu jsme potřebovali prvky $\pm \sqrt{5}$, patřící do tělesa reálných čísel. Pokud se ale omezíme výhradně na celočíselné koeficienty, nebude zřejmě polynom $p(x) = x^2 - 5$ možné rozložit v součin polynomů s celočíselnými koeficienty ani z něj vytknout celočíselnou konstantu. Říkáme, že $p(x) \in \mathbb{Z}[x]$ je nerozložitelný (ireducibilní).

Poznamenejme ještě, že pouhé vytknutí konstanty je triviální záležitost. V dalším se soustředíme na hledání rozkladů ve tvaru $f(x) = g(x) \cdot h(x)$, $f, g, h \in \mathbb{Z}[x]$, $\text{st } f = n$, $0 < \text{st } g < n$. Nejprve se zastavíme u hledání lineárních faktorů. Z Vaší početní praxe budete vědět, že pokud má polynom $f(x)$ nulový bod α , je polynom f dělitelný beze zbytku tzv. kořenovým činitelem $(x - \alpha)$, tj. pro jistý polynom $q(x)$ platí $f(x) = (x - \alpha) \cdot q(x)$. Samozřejmě, že platí i věta obrácená: pokud je polynom $f(x)$ dělitelný faktorem $(x - \alpha)$, je nutně α nulový bod polynomu f (platí $f(\alpha) = 0$).

2 Racionální či celočíselné nulové body

Naučíme se zjišťovat, kdy má polynom s celočíselnými koeficienty racionální či dokonce celočíselné nulové body. Platí následující věta:

Nechť $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ je polynom s celočíselnými koeficienty a $\alpha = \frac{p}{q}$ nulový bod tohoto polynomu, přičemž $p \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{N}$ jsou čísla nesoudělná. Potom $p \mid a_0$, $q \mid a_n$.

Je-li speciálně α celočíselný nulový bod polynomu $f(x)$, pak je α dělitel absolutního členu.

Příklad: Polynom $f(x) = x^3 - 3x^2 + 4x - 12$ může mít jako celočíselný nulový bod pouze některý z dělitelů čísla 12, tj. některé z čísel $\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \pm 6, \pm 12$. Dalo by dost práce prověřit tyto možnosti. Existuje jedno schéma, které tuto prověrku usnadní.

3 Hornerovo schéma

představuje vlastně zkrácený zápis dělení polynomu $f(x)$ lineárním dvojčlenem $x - \alpha$. Vyjde (algoritmus dělení) $f(x) = (x - \alpha)q(x) + f(\alpha)$, kde

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0,$$

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

$$q(x) = b_{n-1}x^{n-1} + b_{n-2}x^{n-2} + \dots + b_1x + b_0,$$

$$a_n = b_{n-1},$$

$$a_{n-1} = b_{n-2} - \alpha b_{n-1}$$

...

$$a_i = b_{i-1} - \alpha b_i,$$

...

$$a_1 = b_0 - \alpha b_1,$$

$$a_0 = f(\alpha) - \alpha b_0.$$

Odtud postupně vypočteme $b_{n-1} = a_n$, $b_{n-2} = a_{n-1} + \alpha b_{n-1}$, ..., $b_{i-1} = a_i + \alpha b_i$, ..., $b_0 = a_1 + \alpha b_1$, $f(\alpha) = a_0 + \alpha b_0$. To znamená, že koeficienty b_i polynomu $q(x)$ můžeme rekurentně vyjádřit pomocí koeficientů polynomu $f(x)$. Celý postup se zapisuje pomocí tzv. Hornerova schématu:

$$\begin{array}{cccccc} a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \dots & a_1 & a_0 \\ \alpha & \alpha b_{n-1} & \alpha b_{n-2} & \dots & \alpha b_1 & \alpha b_0 \\ \hline b_{n-1} & b_{n-2} & b_{n-3} & \dots & b_0 & f(\alpha) \end{array}$$

Příklad: $f(x) = x^5 - 2x^4 - 8x^3 + x - 7$ dělíme dvojčlenem $x - 4$

$$\begin{array}{cccccc} 1 & -2 & -8 & 0 & 1 & -7 \\ 4 & 4 & 8 & 0 & 0 & 4 \\ \hline 1 & 2 & 0 & 0 & 1 & -3 \end{array} \quad f(4) = -3, \quad q(x) = x^4 + 2x^3 + 1.$$

Komentář: Zjistili jsme, že číslo 4 není nulovým bodem polynomu $f(x)$, protože $f(4) \neq 0$. Dělení polynomu $f(x)$ lineárním dvojčlenem $x - 4$ tudíž poskytuje neúplný podíl $q(x)$, jehož koeficienty jsme rovněž získali z Hornerova schématu. Zbytek přitom tomto dělení je -3 , zapíšeme

$$f(x) = (x - 4)(x^4 + 2x^3 + 1) + (-3).$$

Příklad: Polynom $f(x) = x^3 - 3x^2 + 4x - 12$ má celočíselný nulový bod $x = 3$. Je totiž

$$\begin{array}{cccc} 1 & -3 & 4 & -12 \\ 3 & 3 & 0 & 12 \\ \hline 1 & 0 & 4 & 0 \end{array} \quad f(3) = 0, \quad q(x) = x^2 + 4.$$

4 Složitější rozklady

Zvládáme již hledání celočíselných a racionálních nulových bodů polynomů s celočíselnými koeficienty. Tím bychom nacházeli případné lineární faktory polynomu $f(x)$. Jenže např. polynom pátého stupně s celočíselnými koeficienty může být možná rozložit v součin dvou celočíselných polynomů druhého a třetího stupně a zde Hornerovo schéma nepomůže, to funguje jen pro dělení polynomu lineárním dvojčlenem $x - \alpha$. Odpovídající algoritmus je popsán v článku Hora, J.: Kroneckerův algoritmus. Rozhledy matematicko-fyzikální, roč. 69, (1990-91), č. 5, str. 199-202 a jedno kritérium pro ireducibilitu polynomů nalezne zájemce v Hora, J.: Eisensteinovo kritérium ireducibility, Rozhledy matematicko-fyzikální, roč. 68, (1989-90), č.10, str. 434-435.



INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

5 Kontakt na autora

Doc. RNDr. Jaroslav Hora, CSc.

katedra matematiky FPE ZČU, Klatovská 51, Plzeň, 306 14.

horajar@kmt.zcu.cz

ODBORNÝ KEMP PŘÍRODOVĚDNÝCH OBORŮ MATEMATIKA

Soustavy polynomiálních rovnic

Jaroslav HORA

1 Úvodní pojmy

Řešte soustavu rovnic $x^3 + x y^2 = 10$
 $y^3 + x^2 y = 5$.

Dříve než se pustíme do řešení, konstatujme, že umíme řešit jednodušší soustavy lineárních rovnic, ale v dané soustavě se vyskytují i vyšší mocniny neznámých a součiny neznámých. Nejde tedy o problém patřící do lineární algebry. Hovoříme o soustavách algebraických či polynomiálních rovnic a pro jejich řešení se jste se žádnou obecnou teorií neučili, i když se s obdobnými úlohami často setkáváme např. v zadáních různých kol matematické olympiády. Je nutné mnohdy postupovat případ od případu různě a nebát se využít svou fantazii (a také znát některé typické „finty“).

Budeme tedy řešit jisté soustavy rovnic tvaru

$$f_1(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0$$

$$f_2(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0$$

.....

$$f_r(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0,$$

kde f_1, f_2, \dots, f_r jsou polynomy v neurčitých x_1, x_2, \dots, x_n .

Řešením této soustavy budeme rozumět každou n – tici tvaru $[a_1, a_2, \dots, a_n] \in C^n$, pro kterou platí $f_i(a_1, a_2, \dots, a_n) = 0$ pro všechna $i = 1, 2, \dots, r$.

Nyní se vrátíme k řešení úvodního příkladu. Jestliže od první rovnice odečteme dvojnásobek druhé, budeme řešit soustavu

$$x^3 - 2y^3 + x y^2 - 2x^2 y = 0$$

$$y^3 + x^2 y = 5,$$

kterou upravíme na tvar

$$(x^2 + y^2)(x - 2y) = 0$$

$$y^3 + x^2 y = 5.$$

Jak se může stát, že součin je roven nule? Rozebereme dva případy.

I. Činitel $x^2 + y^2$ je roven nule právě tehdy, když $x = y = 0$, ale dvojice $[0, 0]$ není řešením druhé rovnice.

II. Zbývá proto možnost $x = 2y$. Dosazením této podmínky do druhé rovnice soustavy dostaneme binomickou rovnici $y^3 = 1$ a pak je již snadné dospět k oboru pravdivosti soustavy a též původní ekvivalentní soustavy, totiž $P = \{[2, 1], [-1 + \sqrt{3}i, -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i], [-1 - \sqrt{3}i, -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i]\}$.

Shrňme. V řadě případů je výhodné „připravit si“ některou z rovnic soustavy v anulovaném tvaru. Pokud se ještě podaří provést rozklad polynomu na součin netriviálních

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

činitelů, dostáváme obvykle „jednodušší“ soustavu algebraických rovnic, ze které bývá možné získat řešení původní soustavy. Pokud soustavu řešíme např. v množině přirozených čísel, nebývá ani nutné mít rovnici v anulovaném tvaru.

Příklad: Řešte v celých kladných číslech soustavu rovnic

$$x + y = z t$$

$$z + t = x y. \quad (\text{Galperin, Tolypo 1986, s. 94}).$$

Řešení: Sečtením obou rovnic a úpravou dostaneme $x y - x - y + z t - z - t = 0$. Odtud máme $(x - 1)(y - 1) + (z - 1)(t - 1) = 2$.

Vzhledem k tomu, že jsou jednotliví činitelé nezáporní, lze schématicky popsat možnosti, jak získat číslo 2, jako a) „1.1 + 1.1“ b) „0.(y - 1) + 1.2“, zde se záměnami pořadí členů. Samozřejmě, že přitom musíme vždy ověřit zkouškou, zda nalezená čtveřice vyhovuje původním rovnicím, resp. z nich určit y .

Máme pak v případě a) $x = y = z = t = 2$ a zkouškou zjistíme, že $[2, 2, 2, 2] \in P$.

b) Nyní známe hodnoty $x = 1, z = 2, t = 3$ a z první rovnice $x + y = z t$ vyjde $y = 5$. Čtveřice $[1, 5, 2, 3]$ vyhovuje i druhé rovnici, tj. $[1, 5, 2, 3] \in P$.

Záměnami pořadí získáme ještě 7 dalších řešení, takže úloha má celkem 9 řešení.

2 Jednodušší příklad: dosazení

Příklad: Řešte soustavu rovnic

$$y^3 + z^3 = 7 x^3$$

$$y + z = 3 x$$

$$y - z = -x.$$

Řešení: Je zřejmé, že předložená soustava algebraických rovnic je poměrně snadná, neboť poslední dvě rovnice soustavy jsou lineární. Jejich sečtením získáme vztah $y = x$, odečtením třetí rovnice od druhé $z = 2x$. Dosazením získaných vyjádření do první rovnice máme

$$x^3 + 8 x^3 = 7 x^3.$$

Odtud plyne $x = 0$ a je zřejmé, že jediným řešením soustavy je trojice $[0, 0, 0]$.

3 Typická substituce

Příklad: V množině $C \times C$ řešte soustavu

$$x^2 + y^2 + x + y = 8$$

$$x + y + x \cdot y = 5.$$

Řešení: Označme $u = x + y, v = x \cdot y$. Protože $x^2 + y^2 = (x + y)^2 - 2 x y = u^2 - 2v$, budeme po provedené substituci řešit soustavu

$$u^2 - 2v + u = 8$$

$$u + v = 5.$$

Přičtením dvojnásobku druhé rovnice k rovnici první získáme rovnici

$$u^2 + 3u = 18, \text{ resp. } u^2 + 3u - 18 = 0.$$

Jejími kořeny jsou čísla $u_1 = 3, u_2 = -6$. Snadno dopočteme $v_1 = 2, v_2 = 11$, takže soustava vzniklá substitucí má dvě řešení $[3, 2]$ a $[-6, 11]$. Nyní zbývá nalézt dvojice $[x, y]$, vyhovující původní soustavě.

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

I. Řešením soustavy $x + y = 3$, $x \cdot y = 2$ jsou uspořádané dvojice $[1, 2]$ a $[2, 1]$.

II. Řešení soustavy $x + y = -6$, $x \cdot y = 11$ lze kupř. provést tak, že ze druhé rovnice vyjádříme $y = \frac{11}{x}$ a dosadíme do první rovnice. Po malé úpravě získáme kvadratickou rovnici $x^2 + 6x + 11 = 0$ s diskriminantem $D = 36 - 44 = -8$. Tato rovnice má kořeny $-3 \pm i\sqrt{2}$ a řešeními příslušné soustavy jsou uspořádané dvojice $[-3 - i\sqrt{2}, -3 + i\sqrt{2}]$ a $[-3 + i\sqrt{2}, -3 - i\sqrt{2}]$. Celkově je tedy obor pravdivosti původní soustavy roven množině $P = \{ [1, 2], [2, 1], [-3 - i\sqrt{2}, -3 + i\sqrt{2}], [-3 + i\sqrt{2}, -3 - i\sqrt{2}] \}$.

Příklad: V množině $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ řešte soustavu

$$\begin{aligned}x^3 + y^3 &= 19 \\(x + y)(x \cdot y + 8) &= 2.\end{aligned}$$

Řešení: Užijeme opět substituci $u = x + y$, $v = x \cdot y$. Jelikož $x^3 + y^3 = (x + y)^3 - 3x \cdot y(x + y) = u^3 - 3uv$, budeme řešit soustavu

$$\begin{aligned}u^3 - 3uv &= 19 \\u(v + 8) &= 2.\end{aligned}$$

Ze druhé rovnice vyjádříme $uv = 2 - 8u$ a po dosazení do první rovnice a menší úpravě získáme pro neznámou u kubickou rovnici

$$u^3 + 24u - 25 = 0.$$

Je naštěstí ihned vidět, že jedním kořenem této rovnice je číslo 1, takže $u^3 + 24u - 25 = (u - 1)(u^2 + u + 25)$. Zjišťujeme, že rovnice $u^2 + u + 25 = 0$ má záporný diskriminant a tedy nemá reálné kořeny. Takovéto kořeny nám nevyhovují z toho důvodu, že původní soustavu řešíme v množině $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Bude -li ale $u = x + y$ komplexním a nikoli reálným číslem, nemohou již být oba sčítanci x, y reálnými čísly.

Budeme tedy studovat pouze případ, kdy $u = 1$. Pak ale $v = -6$. Abychom našli řešení původní soustavy, musíme vyřešit soustavu $x + y = 1$, $x \cdot y = -6$. Snadno zjistíme, že $P = \{[-2, 3], [3, -2]\}$.

4 Použitá literatura

Galperin G. A., Tolypov, A. K.: Moskovskije matematičeskije olympiady, Moskva, Prosveščeniye 1986.

5 Kontakt na autora

Doc. RNDr. Jaroslav Hora, CSc.

katedra matematiky FPE ZČU, Klatovská 51, Plzeň, 306 14.

horajar@kmt.zcu.cz

ODBORNÝ KEMP PŘÍRODOVĚDNÝCH OBORŮ MATEMATIKA

JAK ŘEŠIT ÚLOHY OLYMPIJSKÉHO TYPU?

Jaroslav ŠVRČEK

1 Úvod

Cílem zamětnání bylo seznámit účastníky kempu s vybranými metodami řešení nadstandardních matematických úloh, které lze uplatnit především při řešení úloh MO a dalších matematických soutěží pro žáky středních i základních škol.

Uvedená problematika byla rozdělena do tří tematických celků:

- *Metody a prostředky syntetické geometrie* (metoda shodnosti a shodných zobrazení v rovině, metoda podobnosti a podobných zobrazení, metody důkazu koncykličnosti čtyř a více bodů v rovině, metody důkazů konkurentnosti tří a více přímek v rovině).
- *Metody řešení rovnic a jejich soustav* (metoda ekvivalentních úprav, metoda důsledkových úprav a speciálně pak metoda substituce, aditivní a multiplikatívni metoda, metoda extrémálního prvku, metoda nerovnosti a odhadů a metoda druhých mocnin).
- *Základní kombinatorické principy a jejich využití při řešení kombinatorických úloh* (princip bijekce, princip součtu, princip součinu, Dirichletův princip a princip inkluze a exkluze).

V průběhu všech zamětnání měli účastníci možnost samostatně řešit také některé zadané úlohy týkající se především výše uvedené problematiky. Na ukázkou dále uvádíme několik kombinatorických úloh, které byly zadány v průběhu zamětnání účastníkům kempu.

2 Vybrané kombinatorické úlohy

První dvě uvedené úlohy se týkají aplikací kombinatoriky v teorii čísel, poslední tři úlohy lze řešit užitím Dirichletova principu. Všechny pět úloh zde uvádíme bez řešení, v rámci kempu je účastníci řešili samostatně a na závěr jim byla uvedena vzorová řešení.

- Číslice 1, 2, 3, ..., 9 desítkové soustavy rozdělte disjunktním způsobem do dvou skupin a pak z číslic v každé skupině sestavte dvě přirozená čísla A , B tak, aby jejich součin $A \cdot B$ byl největší možný.
- Na jednom řádku jsou vedle sebe (bez mezer) napsána všechna přirozená čísla od 1 do 100, která tak tvoří číslo $C = 12345678910121314\dots9899100$. Vyškrtněte právě některých 100 číslic čísla C tak, abychom po vyškrtnutí zvolených 100 číslic získali co největší přirozené číslo.

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

- Dokažte, že z libovolných 101 přirozených čísel menších nebo rovných 200 lze vždy vybrat dvě (různá) tak, že jedno z nich je dělitelem druhého.
- Šachista se 77 dnů připravoval na turnaj. V rámci přípravy odehrál každý den aspoň jeden zápas. Celkově však nesehrál více než 132 partií. Dokažte, že v několika po sobě jdoucích dnech odehrál dohromady právě 21 partií.
- Uvnitř jednotkového čtverce leží 51 navzájem různých bodů. Dokažte, že existuje kružnice o poloměru $1/7$, uvnitř které leží aspoň tři z těchto bodů.

3 Použitá literatura

ŠVRČEK, J., VANŽURA, J. Geometrie trojúhelníka. SNTL, Praha 1988, 248 s.

ŠVRČEK, J., CALÁBEK, P. Sbíрка netradičních matematických úloh. Prométheus, Praha 2007, 186 s., ISBN 978-80-7196341-7.

ŠVRČEK, J. Úvod do kombinatoriky. Skriptum PřF UP v Olomouci, 2. vyd., UP Olomouc 2008, 83 s., ISBN 978-80-244-2169-8.

4 Kontakt na autora

RNDr. Jaroslav Švrček, CSc.

Přírodovědecká fakulta UP v Olomouci (Katedra algebry a geometrie)

17. listopadu 12

Olomouc 771 46

E-mail: jaroslav.svrcek@upol.cz

ODBORNÝ KEMP PŘÍRODOVĚDNÝCH OBORŮ MATEMATIKA

KOMPLEXNÍ ČÍSLA

Jiří POTŮČEK

1 Úvod

Soubor tří na sebe navazujících přednášek sleduje rozšíření znalostí studentů o číselném oboru o komplexní čísla (jejich součástí jsou jako speciální případ studentům již známá čísla reálná). V první přednášce jsou zařazeny i některé důležité historické skutečnosti dokumentující vývoj a postupné rozšiřování číselného oboru.

2 Cesta ke komplexním číslům

První znalosti o počítání, které jsou písemně doloženy, pocházejí již ze 4. a 3. tisíciletí př. n. l. z doby existence tzv. vodních říší. Od původně nepozičních číselných soustav se přešlo k nedokonalé soustavě poziční a v 7. století n. l. byla v Indii vytvořena dnešní desítková poziční soustava, která byla v souvislosti s arabskou expanzí rozšířena do celého tehdy známého světa. V souvislosti s řešením kubických rovnic na universitě v Bologni na přelomu 6. a 7. století se objevila potřeba komplexních čísel, jejich počátky formuloval Rafael Bombelli. V současné škole zavádíme komplexní čísla jako uspořádané dvojice čísel reálných s tím, že definujeme rovnost komplexních čísel a základní početní operace s nimi.

3 Algebraický a goniometrický tvar komplexního čísla

Znázorňování komplexních čísel v Gaussově rovině, další charakteristiky komplexního čísla vedoucí ke goniometrickému tvaru komplexního čísla (amplituda, absolutní hodnota). Početní operace s komplexními čísly v algebraickém a následně v goniometrickém tvaru. Moivreova věta a její využití pro násobení, umocňování a dělení komplexních čísel. Úlohy o grafickém znázorňování komplexních čísel, řešení jednoduchých rovnic v oboru komplexních čísel.

4 Řešení binomických rovnic

Definice binomické rovnice a její řešení v goniometrickém tvaru. Ukázky řešení binomických rovnic v algebraickém tvaru. Užití Moivreovy věty k odvození některých goniometrických vzorců, souvislost teorie komplexních čísel s dalšími oblastmi matematiky zejména s analytickou geometrií.

5 Použitá literatura:

Šedivý J. a kol.: Experimentální učební text pro 3. ročník gymnázia, SPN.Praha, 1981



evropský
sociální
fond v ČR



EVROPSKÁ UNIE



MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ,
MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY



OP Vzdělávání
pro konkurenceschopnost



INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

6 Kontakt na autora

RNDr. Jiří Potůček, CSc.

Pedagogická fakulta ZČU v Plzni

potucek@kmt.zcu.cz

ODBORNÝ KEMP PŘÍRODOVĚDNÝCH OBORŮ MATEMATIKA

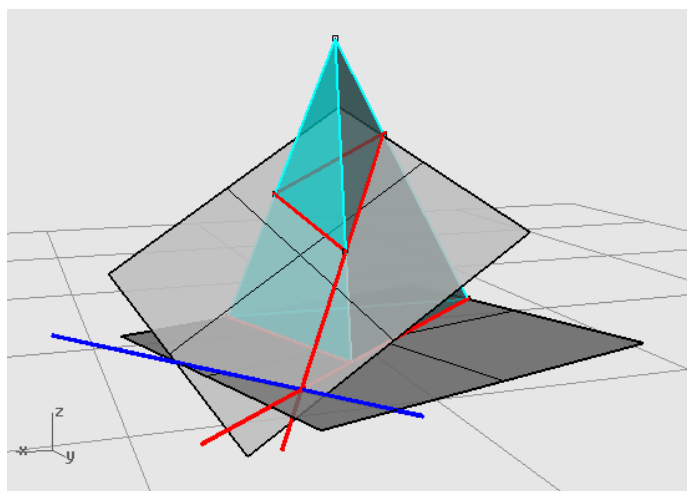
ZAJÍMAVÁ GEOMETRIE (DESARGUESOVA VĚTA O TROJÚHELNÍCÍCH)

Světlana Tomiczková

1 Úvod

Cílem této přednášky je seznámit nadané studenty středních škol s pojmy dělicí poměr, dvojpoměr, projektivní čtveřice bodů a přímek a s pojmy pól a polára. Klíčovou větou tohoto textu je Desarguesova věta o trojúhelnících.

Všechny věty a definice byly převzaty z knihy Zajímavé dvojice trojúhelníků (Niederle 1980). Historická fakta byla čerpána z knih Worlds Out of Nothing (Gray 2007) a Matematika v 16. a 17. století (Bečvář, Fuchs 1997).



2 Girard Desargues (1591-1661)

Girard Desargues pocházel z bohaté rodiny, otec byl královským notářem. Původním povoláním byl G. Desargues vojenský inženýr a architekt, později se stal technickým poradcem kardinála Richelieu a francouzské vlády.

Byl členem vědeckého kroužku společně s dalšími významnými matematiky, jako byli René Descartes, Entienne Pascal, Blaise Pascal. S nimi konzultoval výsledky své práce a možná byli jediní, kteří v té době jeho práce pochopili.

Práce byly založeny na uplatnění nevlastních elementů (bodů a přímek v nekonečnu), studoval involuci na přímce a přímek ve svazku, na svých poznátcích o involuci založil i

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

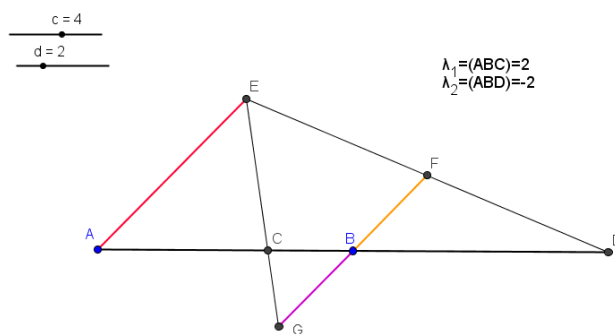
studium kuželoseček, našel řadu vět o pólech a polárách. Navázal na něj B. Pascal a P. De la Hire.

Uznání se G. Desargues nedočkal, jeho spis zapadl a la Hirův přepis jeho práce byl znovu nalezen až v roce 1845 a v roce 1950 Pierre Moisy našel originál jeho práce v Národní knihovně v Paříži. Mezi tím (bez znalosti jeho díla) "objevili" projektivní geometrii G. Monge, L. Carnot a J. Poncelet.

3 Základní pojmy

3.1 Dělicí poměr (viz obr. 1)

Jsou-li A, B, C tři různé body na jedné přímce, potom **dělicím poměrem** nazýváme reálné číslo $\lambda = (ABC) = AC/BC$, které je kladné, jestliže bod C je vnější bod úsečky AB a záporné, když bod C je vnitřní bod úsečky AB .



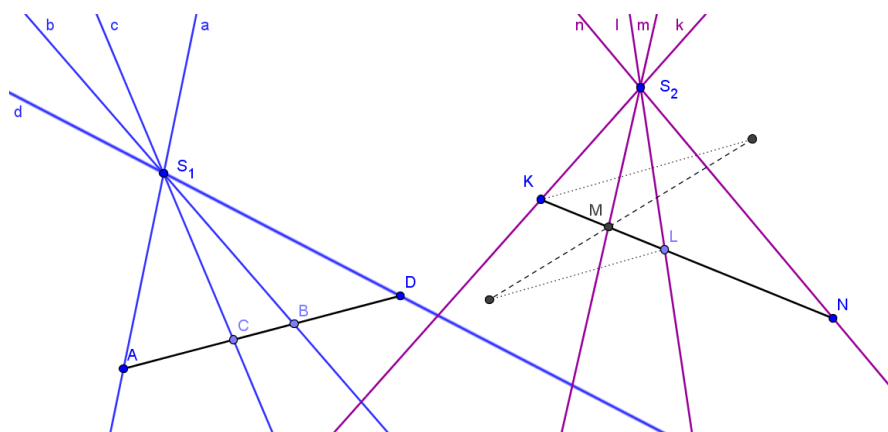
Obrázek 1

3.2 Dvojpoměr

Jsou-li A, B, C, D čtyři různé body na jedné přímce, potom **dvojpoměrem** nazýváme reálné číslo $\delta = (ABCD) = (ABC)/(ABD)$.

3.3 Projektivní čtveřice bodů a přímek (viz obr. 2)

Jsou-li dvě čtveřice bodů na různých přímkách nebo i na téže přímce umístěny tak, že je $(ABCD) = (KLMN)$, nazýváme tyto čtveřice projektivními (jsou stejného dvojpoměru). Projektivními nazýváme i čtveřice přímek z daných svazků, které těmito čtveřicemi bodů procházejí (píšeme $(a, b, c, d) = (k, l, m, n)$).



Obrázek 2

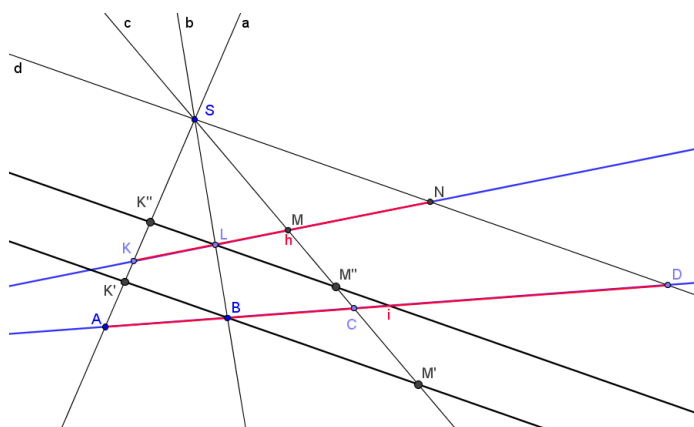
3.4 Perspektivní čtveřice bodů a přímek.

Jsou-li dvě navzájem různé čtveřice bodů na dvou přímkách umístěny tak, že dvojice sobě odpovídajících bodů leží na přímkách téhož svazku, říkáme, že jsou perspektivní.

4 Věty

4.1 Věta (viz obr. 3)

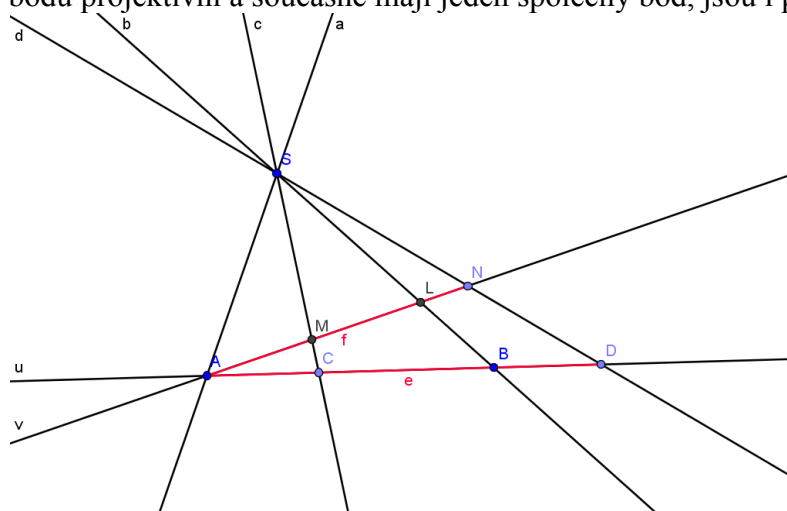
Jsou-li a, b, c, d čtyři navzájem různé přímky téhož svazku, potom protínají každou příčku svazku ve čtveřici bodů téhož dvojpoměru.



Obrázek 3

4.2 Věta (viz obr. 4)

Jsou-li dvě čtveřice bodů projektivní a současně mají jeden společný bod, jsou i perspektivní.

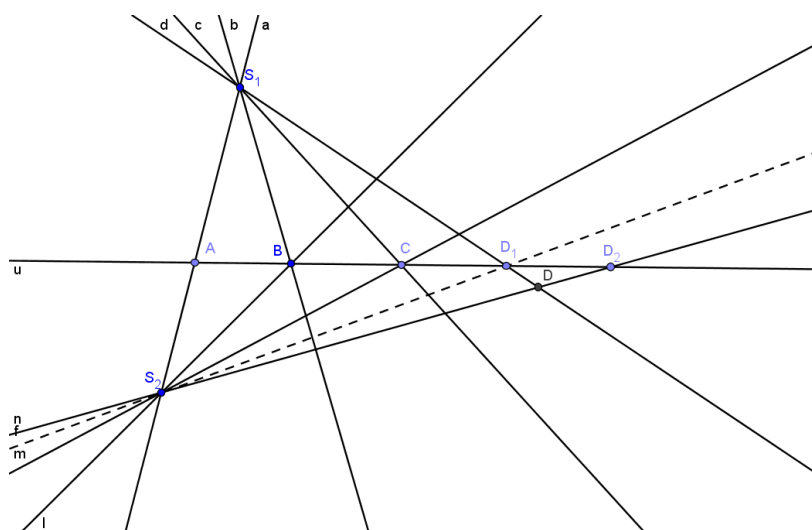


Obrázek 4

4.3 Věta (viz obr. 5)

Jsou-li dvě projektivní čtveřice přímek umístěny tak, že jedna dvojice sobě odpovídajících přímek splývá, jsou tyto čtveřice perspektivní.

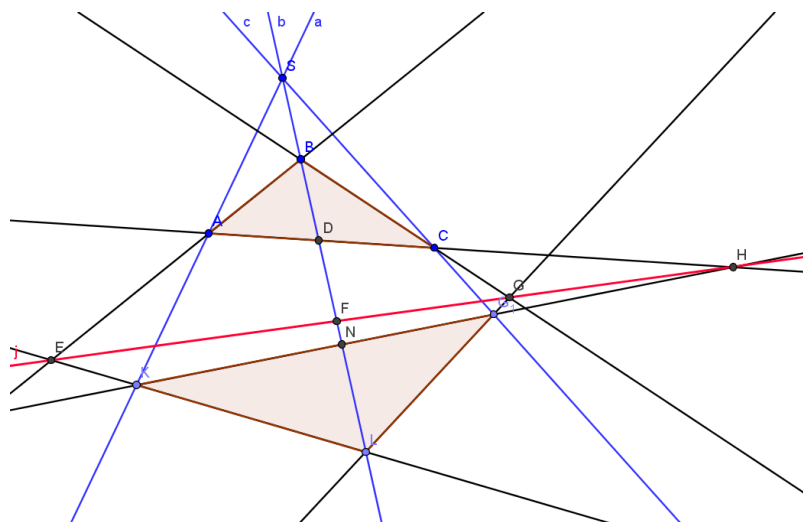
INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ



Obrázek 5

4.4 Věta (Desarguesova o trojúhelnících (viz obr. 6))

Jsou-li trojúhelníky ABC a KLM umístěny v téže rovině tak, že přímky AK , BL , CM procházejí tímž bodem S , potom se sobě odpovídající strany trojúhelníků (AB , KL ; BC , LM ; CA , MK) protínají v bodech jedné přímky.



Obrázek 6

5 Harmonická čtveřice bodů a přímek

5.1 Harmonická čtveřice bodů

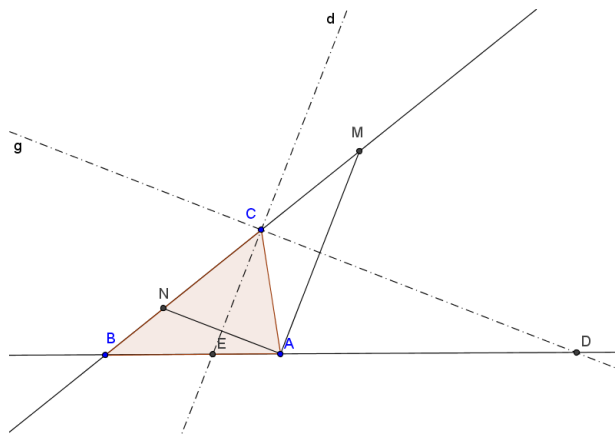
Leží-li body A , B , C , D na téže přímce tak, že platí $(ABCD) = -1$, nazýváme čtveřici harmonickou. Říkáme, že body C a D dělí úsečku AB harmonicky.

5.2 Harmonická čtveřice přímek.

Čtveřice přímek (téhož svazku) je harmonická, jestliže promítá harmonickou čtveřici bodů na přímce.

5.3 Věta (viz obr. 7)

Jsou-li polopřímky a, b ramena daného úhlu, polopřímka c jeho osou a polopřímka d osou úhlu k němu vedlejšího, potom přímky a, b, c, d tvoří harmonickou čtveřici.



Obrázek 7

6 Sdružené póly

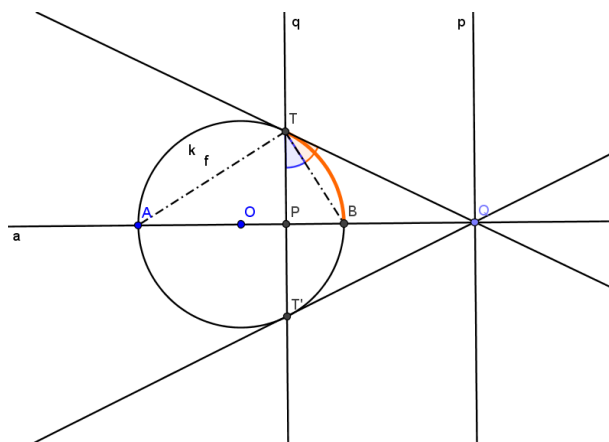
6.1 Sdružené póly, poláry

V kružnici $k(O, r)$ je AB průměr a bod Q leží na prodlouženém průměru za bod B . Tečny vedené z bodu Q ke kružnici k se kružnice dotýkají v bodech T a T' . Označme P průsečík přímek $q=TT'$ a AB .

Body P a Q nazýváme sdruženými póly, přímku p rovnoběžnou s AB jdoucí bodem Q polárou bodu Q a přímku q polárou bodu Q vzhledem ke kružnici k .

6.2 Věta (viz obr. 8)

Mějme kružnici $k(O, r)$ její průměr AB a na přímce AB dvojici sdružených pólů vzhledem ke kružnici k . Potom je $(ABPQ) = -1$.



Obrázek 8

ODBORNÝ KEMP PŘÍRODOVĚDNÝCH OBORŮ MATEMATIKA, FYZIKA

EXKURZE DO NÁRODNÍHO TECHNICKÉHO MUZEA V PRAZE

Naděžda KUBEŠOVÁ

1 Úvod

Národní technické muzeum v Praze je největší českou institucí specializovanou na muzejní exponáty technického charakteru. Bylo založeno [5. července 1908](#).

2 Národní technické muzeum v Praze

Počátky sbírání technických památek na území Čech souvisí se založením podnikatelské organizace Jednota pro povzbuzení průmyslu v Čechách v roce 1833. V rámci vzdělávacích aktivit Jednoty vznikala postupně sbírka různých strojů a přístrojů, která byla přístupná zájemcům o vzdělání. První soukromé, veřejně přístupné technické muzeum založil Vojta Náprstek ze strojů dovezených převážně z USA a Anglie. Jednalo se ale spíše o nové stroje pro inspiraci domácím výrobcům.

V roce 1891, v souvislosti s Jubilejní výstavou, se objevily snahy ponechat část exponátů výstavy ve stálých expozicích. Tato myšlenka ještě nebyla realizována. Vznik vídeňského technického muzea na začátku 20. století ale tyto snahy urychlil. V roce 1907 vznikl přípravný výbor a [5. července 1908](#) proběhla zakládací schůze spolku Technické muzeum království českého. Vznik muzea souvisel i s další velkou průmyslovou výstavou v roce 1908. Část exponátů spolu se sbírkami Jednoty pro povzbuzení průmyslu se staly základem sbírek. První expozice byla otevřena ve Schwarzenberském paláci na Hradčanech [28. září 1910](#).

Nová budova muzea byla plánována už od 20. let 20. století. Architektonická soutěž však byla vypsaná až ve 30. letech a stavba podle vítězného projektu (autor: Milan Babuška) proběhla v letech 1938–1941.

Budova byla pro muzejní účely využita až po válce. První expozice byly zpřístupněny v roce 1947. 1. března 1951 bylo muzeum zestátněno (předtím stále bylo ve vlastnictví zakládajícího spolku). Expozice byly dále rozšiřovány – především o expozici hornictví v letech 1952–1953. V roce 1995 byla z důvodu neutěšeného stavu budovy provedena částečná rekonstrukce.

Rozsáhlé muzejní sbírky obsahují v současné době na šedesát tisíc předmětů, 135 tisíc archiválií a čtvrtmilionu knih a dokumentují vývoj vědy a techniky na území českých zemí.

Množství historických architektonických modelů, plánů, projektů či stavebních artefaktů od 19. do 20. století je umístěno v expozici **architektura, stavitelství a design**. V expozici **astronomie** je prezentován soubor jedinečných astronomických přístrojů z 16.–20. století, doplněný originálními dokumenty, výkresy a mapami. Na funkčních modelech lze

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

pochopit principy historických měřicích a pozorovacích zařízení. Největší chloubou muzea je samozřejmě dopravní hala.





INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

3 Závěr

Národní technické muzeum ukazuje technickou vyspělost našich předků až po současnost. Podporuje u studentů vědomost, že je na co navázat, že jsme národ, který vždy produkoval špičkové výrobky.

4 Použitá literatura

<http://cs.wikipedia.org>

5 Kontakt na autora

PaedDr. Naděžda Kubešová
Gymnázium L. Pika Plzeň, Opavská 21, 312 00 Plzeň
kubesova@gop.pilsedu.cz

ODBORNÝ KEMP PŘÍRODOVĚDNÝCH OBORŮ MATEMATIKA

NEROVNOSTI

Petr TOMICZEK

MOTTO

Galileo Galilei: "Velkou knihu přírody mohou číst jen ti, kteří rozumí jazyku, jimž byla napsána. A tímto jazykem je matematika."

1 Úvod

Odhadnout své finanční možnosti je v současnosti pro mnoho jednotlivců, ale i států, jedna z nejdůležitějších schopností. Tento odhad je ve své podstatě matematická nerovnost.

Tento příspěvek je věnován příkladům matematických olympiád celého světa, ve kterých se řešily nerovnosti. Jednotlivé kapitoly se postupně věnují příkladům s absolutní hodnotou, průměrům (aritmetický, geometrický, harmonický) a Bernoulliově nerovnosti.

2 Absolutní hodnota

Definice 2.1: Zobrazení $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_0^+ = \{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\}$ dané předpisem $f(x) = \max\{x, -x\}$ nazveme **absolutní hodnotou**.

Absolutní hodnotu čísla x značíme $|x|$.

Absolutní hodnotu čísla x můžeme definovat i následujícím způsobem.

Cvičení 2.1: Dokažte: $|x| = \begin{cases} x & x \geq 0 \\ -x & x \leq 0. \end{cases}$

$[x \geq 0 \Rightarrow \max\{x, -x\} = x, \quad x \leq 0 \Rightarrow \max\{x, -x\} = -x.]$

Věta 2.1: (vlastnosti absolutní hodnoty)

Nechť $a, b \in \mathbb{R}$, pak

$$\text{i) } |a| \geq 0, \quad |a \cdot b| = |a| \cdot |b|, \quad \left| \frac{a}{b} \right| = \frac{|a|}{|b|} \quad b \neq 0,$$

$$\sqrt{a^2} = |a|, \quad a \leq |a|,$$

$$\text{iii) } |a + b| \leq |a| + |b| \quad \text{trojúhelníková nerovnost,} \quad (\text{N1})$$

$$\text{iv) } ||a| - |b|| \leq |a - b|, \quad (\text{N2})$$

číslo $|a - b|$ nazýváme **vzdálenost bodů a, b** .

Příklad 2.1: (USA 1982)

Dokažte, že pro reálná čísla a_1, a_2, \dots, a_n a $1 \geq b_1 \geq b_2 \geq \dots \geq b_n \geq 0$ existuje $k \in \{1, 2, \dots, n\}$ takové, že platí

$$\left| \sum_{i=1}^n b_i a_i \right| \leq \left| \sum_{i=1}^k a_i \right|.$$

Řešení: $S = \left| \sum_{i=1}^n b_i a_i \right| = \left| b_1 a_1 + \sum_{i=2}^n b_i (a_i + \dots + a_1) - \sum_{i=2}^n b_i (a_{i-1} + \dots + a_1) \right| =$
 $\left| \sum_{i=1}^n b_i (a_i + \dots + a_1) - \sum_{i=1}^{n-1} b_{i+1} (a_i + \dots + a_1) \right| = \left| \sum_{i=1}^n (b_i - b_{i+1}) (a_i + \dots + a_1) \right|,$
 kde $b_{n+1} = 0$. Nyní položíme $A_i = |a_i + \dots + a_1|$ a $A_k = \max_i A_i$, potom
 $S \stackrel{(\text{N2})}{\leq} \sum_{i=1}^n |(b_i - b_{i+1})| |a_i + \dots + a_1| \leq A_k = \left| \sum_{i=1}^k a_i \right|.$

Příklad 2.2: (Jugoslávie 1972)

Máme reálné číslo M a matice reálných čísel $(a_{ij})_{i,j=1}^n$ splňuje nerovnost

$$\sum_{i=1}^n |a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n| \leq M$$

pro libovolné $x_i \in \{-1, 1\}$. Dokažte, že pak platí

$$|a_{11}| + |a_{22}| + \dots + |a_{nn}| \leq M.$$

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Řešení: Každé z čísel x_i nabývá dvou hodnot, proto také

$$\sum_{\{x_1, \dots, x_n\}} \sum_{i=1}^n |a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n| \leq 2^n M$$

a

$$\sum_{i=1}^n \sum_{\{x_1, \dots, x_n\}} |a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n| \leq 2^n M.$$

Označíme

$$S_i = \sum_{\{x_1, \dots, x_n\}} |a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n|.$$

Pro S_i platí

$$\begin{aligned} S_i &= \sum_{\{x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n\}} |a_{i1}x_1 + \dots + a_{i(i-1)}x_{i-1} + a_{ii} + a_{i(i+1)}x_{i+1} + \dots + a_{in}x_n| \\ &+ \sum_{\{x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n\}} |a_{i1}x_1 + \dots + a_{i(i-1)}x_{i-1} - a_{ii} + a_{i(i+1)}x_{i+1} + \dots + a_{in}x_n| \\ &\stackrel{(N1)}{\geq} \sum_{\{x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n\}} 2|a_{ii}| = 2^n |a_{ii}|. \end{aligned}$$

Odtud již plyne $2^n \sum_{i=1}^n |a_{ii}| \leq \sum_{i=1}^n S_i \leq 2^n M$, což jsme měli dokázat.

Příklad 2.3: (Bulharsko 1982)

Dokažte, že pro čísla $a_1, a_2, \dots, a_n \in [0, 2]$, $n \geq 2$ platí nerovnost

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n |a_i - a_j| \leq n^2.$$

Pro jaké hodnoty nastane rovnost?

Řešení: Zřejmě platí $|a_i - a_j| = |a_j - a_i|$ a můžeme předpokládat, že $a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_n$, pak

$$\begin{aligned} S &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n |a_i - a_j| = 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} |a_j - a_i| \stackrel{a_j \geq a_i}{=} 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} (a_j - a_i) = \\ &2 \left(\sum_{j=2}^n (j-1) a_j - \sum_{i=1}^{n-1} (n-i) a_i \right) = \sum_{i=1}^n (2i - n - 1) a_i. \end{aligned}$$

Součet S bude maximální, pokud $a_i = 2$ pro i takové, že $2i - n - 1 > 0$ a $a_i = 0$ pro i splňující $2i - n - 1 < 0$.

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Pro liché $n = 2k + 1$ je pak $S = 2 \sum_{i=k+2}^n (2i - 2k - 2) 2 = 4k(k + 1) < n^2$.

Pro sudé $n = 2k$ je $S = 2 \sum_{i=k+1}^n (2i - 2k - 1) 2 = 4(k)^2 = n^2$.

Tedy pro n sudé a $a_1 = \dots = a_{\frac{n}{2}} = 0$, $a_{\frac{n}{2}+1} = \dots = a_n = 2$ nastane rovnost.

3 Průměry

Vzdálenost dvou čísel a, b na reálné ose se rovná $|a - b| = \sqrt{(a - b)^2}$. Zřejmě $(a - b)^2 \geq 0$, což je ekvivalentní se základní nerovností

$$2ab \leq a^2 + b^2, \quad \text{popřípadě} \quad ab \leq \frac{a^2 + b^2}{2}, \quad (\text{N3})$$

která se objevuje v mnoha úlohách; například:

Cvičení 3.1: Pro $a, b, c \in \mathbb{R}$ dokažte nerovnosti: $a + b \leq \sqrt{2(a^2 + b^2)}$
a $ab + bc + ac \leq a^2 + b^2 + c^2$.

V 15. ročníku MO kategorie B se objevila úloha

Příklad 3.1:

Je dán kvádr o rozměrech a, b, c , který není krychlí. Dokažte, že součet objemů krychlí o hranách a, b, c je větší než trojnásobek objemu daného kvádru.

Řešení: V podstatě máme dokázat platnost nerovnosti $3abc \leq a^3 + b^3 + c^3$. Platnost této nerovnosti plyne z následující věty.

Věta 3.2: (o průměrech)

Nechť $a_i > 0$, $i = 1, 2, \dots, n$, pak platí

$$\frac{n}{\frac{1}{a_1} + \dots + \frac{1}{a_n}} \leq \sqrt[n]{a_1 \cdot \dots \cdot a_n} \leq \frac{a_1 + \dots + a_n}{n} \leq \sqrt{\frac{a_1^2 + \dots + a_n^2}{n}}. \quad (\text{N4})$$

Definice 3.2: Necht' $a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{R}$, aritmetický průměr se nazývá číslo

$$\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n}.$$

Necht' $a_i \geq 0, i = 1, 2, \dots, n$, geometrický průměr se nazývá číslo

$$\sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_n}.$$

Necht' $a_i > 0, i = 1, 2, \dots, n$, harmonický průměr se nazývá číslo

$$\frac{n}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n}}.$$

Necht' $a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{R}$, kvadratický průměr se nazývá číslo

$$\sqrt{\frac{a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2}{n}}.$$

Důkaz věty 3.2: Nejdříve dokážeme vztah mezi geometrickým a aritmetickým průměrem

$$\sqrt[n]{a_1 \cdot \dots \cdot a_n} \leq \frac{a_1 + \dots + a_n}{n}. \quad (\text{GA})$$

Upravíme (GA) do tvaru $n \leq \frac{a_1 + \dots + a_n}{\sqrt[n]{a_1 \cdot \dots \cdot a_n}}$, a položíme $x_i = \frac{a_i}{\sqrt[n]{a_1 \cdot \dots \cdot a_n}}$, $i = 1, \dots, n$. Potom $x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_n = 1$ a pomocí matematické indukce budeme dokazovat, že $n \leq x_1 + x_2 + \dots + x_n$. Pro $n = 1$ tvrzení zřejmě platí. Z využitím indukčního předpokladu $n \leq x_1 + x_2 + \dots + x_n$ chceme dokázat, že $n + 1 \leq x_1 + x_2 + \dots + x_n + x_{n+1}$, pokud $x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_n \cdot x_{n+1} = 1$. Bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že $x_1 \geq 1$ a $x_2 \leq 1$, potom $(x_1 - 1)(x_2 - 1) \leq 1$, tedy $1 + x_1x_2 \leq x_1 + x_2$ a také

$$1 + x_1x_2 + x_3 + \dots + x_n + x_{n+1} \leq x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_n + x_{n+1}.$$

Pro n čísel $x_1, x_2, x_3, \dots, x_{n+1}$ platí $x_1x_2 \cdot x_3 \cdot \dots \cdot x_{n+1} = 1$ a podle indukčního předpokladu $n \leq x_1x_2 + x_3 + \dots + x_n + x_{n+1}$. Odtud již dostaneme

$$1 + n \leq 1 + x_1x_2 + x_3 + \dots + x_n + x_{n+1} \leq x_1 + x_2 + \dots + x_n + x_{n+1},$$

což jsme měli dokázat.

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Pokud nyní položíme $a_i = \frac{1}{b_i}$, $i = 1, \dots, n$ v nerovnosti (GA), pak dostaneme $\sqrt[n]{\frac{1}{b_1} \cdot \dots \cdot \frac{1}{b_n}} \leq \frac{\frac{1}{b_1} + \dots + \frac{1}{b_n}}{n}$. Odtud již snadno plyne nerovnost mezi harmonickým a geometrickým průměrem

$$\frac{1}{\frac{1}{b_1} + \dots + \frac{1}{b_n}} \leq \sqrt[n]{b_1 \cdot \dots \cdot b_n}. \quad (\text{HG})$$

Nerovnost mezi aritmetickým a kvadratickým průměrem dokážeme také pomocí matematické indukce. Chceme tedy dokázat

$$\frac{a_1 + \dots + a_n}{n} \leq \sqrt{\frac{a_1^2 + \dots + a_n^2}{n}}, \quad (\text{AK})$$

což pro $n = 1$ zřejmě platí.

Za indukčního předpokladu $(a_1 + \dots + a_n)^2 \leq n(a_1^2 + \dots + a_n^2)$, dokážeme platnost $(a_1 + \dots + a_n + a_{n+1})^2 \leq (n+1)(a_1^2 + \dots + a_n^2 + a_{n+1}^2)$.

Platí

$$(a_1 + \dots + a_n + a_{n+1})^2 = (a_1 + \dots + a_n)^2 + 2(a_1 + \dots + a_n)a_{n+1} + (a_{n+1})^2 \stackrel{(N3)}{\leq} n(a_1^2 + \dots + a_n^2) + a_1^2 + a_{n+1}^2 + \dots + a_n^2 + a_{n+1}^2 + a_{n+1}^2 = (n+1)(a_1^2 + \dots + a_n^2 + a_{n+1}^2),$$

což jsme měli dokázat.

Poznamenejme, že rovnost v (N4) nastane pouze pro $a_1 = a_2 = \dots = a_n$.

S nerovnostmi z předchozí věty se často setkáme v úlohách z matematických olympiád.

Příklad 3.2: (2.ročník MO kat. A)

Dokažte, že pro $a_i > 0$, $i = 1, 2, \dots, n$, platí nerovnost

$$(a_1 + a_2 + \dots + a_n) \left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n} \right) \geq n^2.$$

Řešení: Jednoduchou úpravou dostaneme

$$\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} \geq \frac{n}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n}}, \quad (\text{HA})$$

což je nerovnost mezi harmonickým a aritmetickým průměrem, viz (N4).

Řešení však můžeme dostat i jiným postupem s využitím základní nerovnosti (N3).

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

$$(a_1 + a_2 + \dots + a_n) \left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n} \right) = \sum_{i=1}^n a_i \cdot \frac{1}{a_i} + \sum_{\substack{i \neq j \\ i, j=1}}^n a_i \cdot \frac{1}{a_j} =$$

$$n + \sum_{1 \leq i < j \leq n} \underbrace{\frac{a_i}{a_j} + \frac{a_j}{a_i}}_{\geq 2} = n + \binom{n}{2} \cdot 2 = n^2.$$

Příklad 3.3:

Dokažte, že pro trojici kladných čísel a, b, c , platí nerovnost

$$(a + b)(a + c)(b + c) \geq 8abc.$$

Kdy nastane rovnost?

Řešení: Podle (GA) nerovnosti je $a + b \geq 2\sqrt{ab}$, tudíž $(a + b)(a + c)(b + c) \geq 2\sqrt{ab} 2\sqrt{ac} 2\sqrt{bc} = 8abc$, což jsem měli dokázat. Rovnost nastane pouze v případě, kdy $a = b = c$.

Příklad 3.4: (17.ročník MO kat. A)

Dokažte, že pro trojici nezáporných čísel a, b, c , platí nerovnost

$$a(a - \sqrt{bc}) + b(b - \sqrt{ac}) + c(c - \sqrt{ab}) \geq 0.$$

Řešení: Podle (GA) nerovnosti je $\sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2}$, tudíž $a(a - \sqrt{bc}) + b(b - \sqrt{ac}) + c(c - \sqrt{ab}) \geq a(a - \frac{b+c}{2}) + b(b - \frac{a+c}{2}) + c(c - \frac{a+b}{2}) = \frac{1}{2}((a-b)^2 + (b-c)^2 + (a-c)^2) \geq 0$.

Příklad 3.5:

Dokažte, že pro libovolné přirozené číslo n , platí nerovnost

$$n! \leq \left(\frac{n+1}{2} \right)^n.$$

Řešení: Platí $1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$, pak $\left(\frac{n+1}{2} \right)^n = \left(\frac{1+2+\dots+n}{n} \right)^n \stackrel{(GA)}{\geq} n!$.
Poznámka: Lze to dokázat i matematickou indukcí a binomickou větou.

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Příklad 3.6: (22.ročník MO kat. A)

Máme posloupnost (a_n) reálných čísel, která splňuje $a_{n-1} + a_{n+1} \geq 2a_n$,
pro $n > 1$. Označíme $A_n = \frac{a_1 + \dots + a_n}{n}$, dokažte že pak platí nerovnost

$$A_{n-1} + A_{n+1} \geq 2A_n.$$

Řešení: Nerovnost $A_{n-1} + A_{n+1} \geq 2A_n$ přepíšeme do tvaru $A_{n+1} - A_n \geq A_n - A_{n-1}$ a dosadíme z definice A_n . Tedy

$$\frac{a_1 + \dots + a_{n+1}}{n+1} - \frac{a_1 + \dots + a_n}{n} \geq \frac{a_1 + \dots + a_n}{n} - \frac{a_1 + \dots + a_{n-1}}{n-1}.$$

Přechodem na společného jmenovatele dostaneme postupně

$$\frac{n a_{n+1} - a_1 - \dots - a_n}{(n+1)n} \geq \frac{(n-1)a_n - a_1 - \dots - a_{n-1}}{n(n-1)},$$

$$(n-1)[n a_{n+1} - a_1 - \dots - a_n] \geq (n+1)[(n-1)a_n - a_1 - \dots - a_{n-1}],$$

$$(n-1)n(a_{n+1} - a_n) \geq 2(n-1)a_n - 2a_1 - \dots - 2a_{n-1},$$

$$\frac{(n-1)n}{2}(a_{n+1} - a_n) \geq [(n-1)(a_n - a_{n-1}) + (n-2)(a_{n-1} - a_{n-2}) + \dots + (a_2 - a_1)],$$

$$((n-1) + \dots + 1)(a_{n+1} - a_n) \geq [(n-1)(a_n - a_{n-1}) + \dots + (a_2 - a_1)].$$

Z předpokladu $a_{n-1} + a_{n+1} \geq 2a_n$ plyne $a_{n+1} - a_n \geq a_n - a_{n-1}$ i $a_{n+1} - a_n \geq a_{n-1} - a_{n-2}, \dots, a_{n+1} - a_n \geq a_2 - a_1$. Odtud již zřejmě dostaneme platnost dokazované nerovnosti.

Příklad 3.7: (NewYork 75)

Dokažte, že pro dvě libovolná různá kladná čísla a, b platí nerovnosti

$$\sqrt{ab} < \frac{(a-b)^2}{8\left(\frac{a+b}{2} - \sqrt{ab}\right)} < \frac{a+b}{2}.$$

Řešení: Označíme $A = \frac{a+b}{2}$ a $G = \sqrt{ab}$, pak $\frac{(a-b)^2}{8\left(\frac{a+b}{2} - \sqrt{ab}\right)} = \frac{(a-b)^2}{8(A-G)} = \frac{(a+b)^2 - 4ab}{8(A-G)} = \frac{4A^2 - 4G^2}{8(A-G)} = \frac{A+G}{2}$ a zřejmě $G < \frac{A+G}{2} < A$.

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Příklad 3.8: (Jugoslávie 75)

Dokažte, že pro tři libovolná čísla a, b, c větší než 1 platí nerovnost

$$2\left(\frac{\log_b a}{a+b} + \frac{\log_c b}{b+c} + \frac{\log_a c}{c+a}\right) \geq \frac{9}{a+b+c}.$$

Řešení: Platí odhady $2\left(\frac{\log_b a}{a+b} + \frac{\log_c b}{b+c} + \frac{\log_a c}{c+a}\right) \stackrel{(GA)}{\geq} 6\sqrt[3]{\frac{\log_b a \log_c b \log_a c}{(a+b)(b+c)(c+a)}} =$
 $\frac{6}{\sqrt[3]{(a+b)(b+c)(c+a)}} \stackrel{(GA)}{\geq} \frac{18}{(a+b)+(b+c)+(c+a)}.$

Příklad 3.9: (Jugoslávie 76)

Nechť součin třech čísel se rovná jedné a jejich součet je větší než součet jejich převrácených hodnot. Dokažte, že pak právě jedno z těchto čísel je větší než jedna.

Řešení: Platí $abc = 1$ a $a + b + c > \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$.

Potom $a + b + c > \frac{bc+ac+ab}{abc} \stackrel{abc=1}{\Rightarrow} a + b + c - (bc + ac + ab) + abc - 1 > 0 \Rightarrow$
 $a - 1 + b(1 - a) + bc(a - 1) + c(1 - a) > 0 \Rightarrow (a - 1)(1 - b + bc - c) \Rightarrow$
 $(a - 1)(b - 1)(c - 1) > 0$. Odtud již plyne požadované tvrzení.

Příklad 3.10: (ČSSR 59)

Nechť $a + b + c > 0$, $bc + ac + ab > 0$ a $abc > 0$, potom dokažte, že všechna čísla a, b, c jsou kladná.

Řešení: Z předpokladu $abc > 0$ plyne (bez újmy na obecnosti) pro spor, že $a < 0, b < 0, c > 0$. Potom $bc + ac + ab > 0 \Rightarrow c(a + b) > -ab \stackrel{(GA)}{>} -\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 \Rightarrow$
 $c < \frac{a+b}{-4} \Rightarrow -4c - a - b > 0 \stackrel{c \geq 0}{\Rightarrow} -c - a - b > 0$, což je spor s $a + b + c > 0$.

Příklad 3.11: (Balkaniáda 84)

Dokažte, že pro libovolná kladná čísla $a_i, i = 1, \dots, n, n \geq 2$, jejichž součet je jedna, platí

$$\sum_{i=1}^n \frac{a_i}{2 - a_i} \geq \frac{n}{2n - 1}$$

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Řešení: Platí $\sum_{i=1}^n \frac{a_i}{2-a_i} = \sum_{i=1}^n \frac{a_i+2-2}{2-a_i} = \sum_{i=1}^n \left(\frac{2}{2-a_i} - 1\right) = 2 \sum_{i=1}^n \frac{1}{2-a_i} - n \stackrel{(HA)}{\geq}$
 $2 \frac{n^2}{(2-a_1)+\dots+(2-a_n)} - n = \frac{2n^2}{2n-1} - n = \frac{n}{2n-1}.$

Příklad 3.12: (NDR 84, Anglie 76)

Dokažte, že pro libovolná kladná čísla $a_i, i = 1, \dots, n, n \geq 2$ platí

$$\sum_{i=1}^n \frac{a_i}{s-a_i} \geq \frac{n}{n-1}, \quad \text{kde } s = \sum_{i=1}^n a_i.$$

Řešení: Platí $\sum_{i=1}^n \frac{a_i}{s-a_i} = \sum_{i=1}^n \frac{a_i-s+s}{s-a_i} = \sum_{i=1}^n \frac{s}{s-a_i} - n \stackrel{(HA)}{\geq} \frac{sn^2}{(s-a_1)+\dots+(s-a_n)} - n$
 $= \frac{n^2}{n-1} - n = \frac{n}{n-1}.$

Příklad 3.13: (New York 75)

Dokažte, že pro libovolná kladná čísla $a_i, i = 1, \dots, n+1, a_{n+1} = a_1$ platí

$$\sum_{i=1}^n \left(\frac{a_i}{a_{i+1}}\right)^n \geq \sum_{i=1}^n \frac{a_{i+1}}{a_i}.$$

Řešení: Označíme $x_i = \frac{a_i}{a_{i+1}}$, pak platí $\prod_{i=1}^n x_i = 1$. Položíme $x_{n+1} = 1$,
 pak $\sum_{i=1}^{n+1} \frac{1}{x_i} = \sum_{i=1}^{n+1} \prod_{j \neq i} x_j \stackrel{(GA)}{\leq} \sum_{i=1}^{n+1} \frac{1}{n} \sum_{j \neq i} x_j^n = \sum_{i=1}^{n+1} (x_i)^n$. Odtud plyne naše tvrzení.

4 Bernoulliho nerovnost

Máme dokázat, že $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}, x \geq -2$ platí:

$$(1+x)^n \geq 1+nx.$$

1. Pro $n = 1$ nastane rovnost $1+x = 1+x$.
2. Ukážeme, že platí: $(1+x)^{n+1} \geq 1+(n+1)x$. Upravíme uvedenou nerovnost a dostaneme

$$\begin{aligned} (1+x)^n(1+x) &\geq 1+nx+x, \\ (1+x)^n + (1+x)^n x &\geq 1+nx+x. \end{aligned}$$

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Podle indukčního předpokladu je $(1+x)^n \geq 1+nx$ a stačí tedy dokázat, že

$$(1+x)^n x \geq x.$$

Pro $x \geq 0$ nerovnost zřejmě platí.

Pokud $x < 0$ danou nerovnost vydělíme x a dostaneme $(1+x)^n \leq 1$. Tato nerovnost platí pro $-2 \leq x < 0$. Což jsme měli dokázat.

Poznámka: Důkaz nerovnosti $(1+x)^n \geq 1+nx$ pro $x \geq -1$ podal švýcarský matematik Jacob I. Bernoulli (1654-1705).

Věta 4.3: (Bernoulliho nerovnost)

Nechť $x > -1$, $x \neq 0$, pak

$$\begin{aligned} (1+x)^\alpha &< 1+\alpha x, & \text{pro } 0 < \alpha < 1 \\ (1+x)^\alpha &> 1+\alpha x, & \text{pro } \alpha \notin [0, 1] \end{aligned} \quad (\text{BN})$$

Příklad 4.1: (Kanada 82)

Dokažte, že pro $x > 0$, $x \neq 1$, $a < 1$ platí

$$\frac{1-x^a}{1-x} < (1+x)^{a-1}.$$

Řešení: Nejdříve budeme předpokládat, že $x \in (0, 1)$, potom

$$(1+x)^{a-1} - \frac{1-x^a}{1-x} > 0 \Leftrightarrow (1-x)(1+x)^{a-1} - (1-x^a) > 0.$$

Nyní využijeme Bernoulliho nerovnost: $(1-x)(1+x)^{a-1} - (1-x^a) \stackrel{(\text{BN})}{>} (1-x)(1+(a-1)x) - 1+x^a = 1+(a-1)x - x - (a-1)x^2 - 1+x^a = (a-1)(x-x^2) + x(x^{a-1}-1) = (a-1)(x-x^2) + x((1-(x-1))^{a-1}-1) \stackrel{(\text{BN})}{>} (a-1)(x-x^2) + x(1+(a-1)(x-1)-1) = 0.$

Pro $x > 1$ položíme $t = \frac{1}{x}$, pak $t \in (0, 1)$ a využijeme dokázanou nerovnost:

$$\frac{1-x^a}{1-x} = \frac{1-\left(\frac{1}{t}\right)^a}{1-\frac{1}{t}} = t^{1-a} \frac{t^a-1}{t-1} < t^{1-a}(1+t)^{a-1} = \left(1+\frac{1}{t}\right)^{a-1} = (1+x)^{a-1}.$$

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Příklad 4.2: (SSSR 82)

Dokažte, že pro $1 \geq x_1 \geq x_2 \geq \dots \geq x_n \geq \dots > 0$, $a \leq 1$ platí

$$(1 + x_1 + x_2 + \dots + x_n)^a \leq 1 + 1^{a-1}x_1^a + 2^{a-1}x_2^a + \dots + n^{a-1}x_n^a.$$

Řešení: K důkazu použijeme matematickou indukci.

Pro $a < 0$ zřejmě $(1 + x_1 + x_2 + \dots + x_n)^a \leq 1$, tedy platí i naše tvrzení.

Pro $n = 1$ ($x_1 \in (0, 1]$), pak pro $a \in [0, 1]$ platí $(1 + x_1)^a \leq 1 + x_1 \leq 1 + x_1^a$.

V druhém kroku chceme dokázat, že $(1 + x_1 + x_2 + \dots + x_n + x_{n+1})^a \leq 1 + 1^{a-1}x_1^a + 2^{a-1}x_2^a + \dots + n^{a-1}x_n^a + (n+1)^{a-1}x_{n+1}^a$.

Odhadneme $(1 + x_1 + \dots + x_n + x_{n+1})^a - (1 + x_1 + \dots + x_n)^a = (1 + x_1 + \dots + x_n)^a \left(\left(1 + \frac{x_{n+1}}{1 + x_1 + \dots + x_n}\right)^a - 1 \right) \leq (1 + x_1 + \dots + x_n)^{a-1} \cdot x_{n+1} \leq (n+1)^{a-1}x_{n+1}^a$.

Díky indukčnímu předpokladu dostaneme

$$(1 + x_1 + x_2 + \dots + x_n + x_{n+1})^a \leq (1 + x_1 + \dots + x_n)^a + (n+1)^{a-1}x_{n+1}^a \leq 1 + 1^{a-1}x_1^a + 2^{a-1}x_2^a + \dots + n^{a-1}x_n^a + (n+1)^{a-1}x_{n+1}^a.$$

Použitá literatura

Alois Kufner : Nerovnosti a odhady, Škola mladých matematiků(39), Nakladatelství Mladá Fronta, Praha 1975

František Veselý: O nerovnostech a nerovnicích, Škola mladých matematiků(48), Nakladatelství Mladá Fronta, Praha 1982

Konjagin, Tonojan, Šarigin, a jiní: Zaruběžnye matematičeskie olimpiady, M. Nauka, Hlavní redakce fiz.-mat. literatury, 1987

PODPORA TALENTOVANÝCH ŽÁKŮ V PLZEŇSKÉM KRAJI

MATEMATICKÝ KEMP

FUNKCIONÁLNÍ ROVNICE

Josef KRÍŠŤAN

1 Úvod

V příspěvku se zaměříme na základní metody řešení funkcionálních rovnic. Funkcionální rovnice je rovnice v níž jsou neznámé funkce. Tyto funkce je třeba určit.

Řešení funkcionálních rovnic je poměrně náročné (zvláště pro funkcionální rovnice s jednou proměnnou v argumentu) a navíc neexistuje dostatečně obecné pravidlo pro nalezení samotného řešení. Platí tedy co řešení, to originál.

V další části uvedeme zadání všech příkladů a následně jejich detailní řešení.

2 Zadání úloh

Úloha 1. Najděte všechny funkce $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $\forall x, y \in \mathbb{R}$:

$$f(x+y) - 3f(x-y) = x^2(f(y) + 1 - \frac{1}{2}y^2) - 2f(x) + y(4x-y).$$

Úloha 2. Najděte všechny funkce $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_0^+$, $\forall x, y \in \mathbb{R}$:

$$f(x+y) - f(x) = x\sqrt{f(y)} + y(x+y).$$

Úloha 3. Najděte všechny funkce $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$, $\forall x, y \in \mathbb{R}^+$:

$$f(xf(y)) = f(xy) + x.$$

Úloha 4. Najděte všechny spojité funkce $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $\forall x, y \in \mathbb{R}$:

$$f(x+y) = f(x) + f(y).$$

Úloha 5. Najděte všechny funkce $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $\forall x, y \in \mathbb{R}$:

$$f(x+y) = f(x) + f(y),$$

které splňují $f(x) \geq 0$ pro $x \geq 0$.

Úloha 6. Najděte všechny funkce $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$, $\forall x, y \in \mathbb{R}^+$:

$$f(xf(y)) = yf(x)$$

a splňuje podmínku $f(x) \rightarrow 0$ pro $x \rightarrow \infty$.

Úloha 7. Najděte všechny spojité funkce $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $\forall x, y \in \mathbb{R}$:

$$f(x+y) = f(x) + y^2f(f(x)+y).$$

Úloha 8. Najděte všechny funkce $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $\forall x, y \in \mathbb{R}$:

$$f(x) - f(y) \leq 2y(y-x).$$

3 Řešení úloh

Řešení 1. Ukážeme jednu ze základních metod řešení funkcionálních rovnic, metodu *substituční*. Myšlenka je následující: za proměnné volíme vhodné funkce nějaké proměnné (např. t), než dojdeme k soustavě rovnic, ze kterých dokážeme o hledané funkci něco podstatného říci. Např. můžeme explicitně vyjádřit hledanou funkci. Lépe to uvidíme na příkladu.

Předpokládejme, že $f(x)$ je nějaké řešení rovnice

$$f(x+y) - 3f(x-y) = x^2(f(y) + 1 - \frac{1}{2}y^2) - 2f(x) + y(4x-y) \quad (1)$$

a označme $c = f(0)$. Volbou $y = 0$ v rovnici (1) dostáváme

$$f(x) - 3f(x) = x^2(c+1) - 2f(x) \quad \Leftrightarrow \quad 0 = x^2(c+1)$$

pro všechna reálná x . To platí ale jen v případě, když $c = -1$, tedy $f(0) = -1$.

V rovnici (1) položme $x = 0, y = t$ a poté $x = 0, y = -t$. Dostaneme soustavu

$$\begin{aligned} f(t) - 3f(-t) &= 2 - t^2, \\ f(-t) - 3f(t) &= 2 - t^2. \end{aligned}$$

Hodnoty $f(t)$ a $f(-t)$ jsou pro nás neznámé. Vyjádříme $f(t) = -1 + t^2/2$. Jelikož y je libovolné reálné číslo, je t libovolné reálné číslo, tedy jediná funkce, která může být řešením funkcionální rovnice (1) je funkce

$$f(x) = -1 + \frac{1}{2}x^2. \quad (2)$$

U funkcionálních rovnic je *zkouška nutná*. Musíme si uvědomit, že jsem o funkci získali pouze nutné podmínky (nikoli postačující), které musí splňovat. Zkouška se provede dosazením získaného předpisu (2) do zadané funkcionální rovnice.

$$\begin{aligned} L &= -1 + \frac{1}{2}(x+y)^2 - 3\left(-1 + \frac{1}{2}(x-y)^2\right), \\ P &= x^2\left(-1 + \frac{1}{2}y^2 + 1 - \frac{1}{2}y^2\right) - 2\left(-1 + \frac{1}{2}x^2\right) + y(4x-y). \end{aligned}$$

Zřejmě $L = P$ pro libovolné reálné hodnoty x a y . Funkce $f(x) = -1 + x^2/2$ je opravdu jediným řešením rovnice (1).

Řešení 2. Necht' $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_0^+$ je nějaké řešení funkcionální rovnice

$$f(x+y) - f(x) = x\sqrt{f(y)} + y(x+y). \quad (3)$$

pro každé reálné x . U této rovnice si ukážeme, že záleží na definičním oboru a oboru hodnot, na kterém rovnici řešíme. Označme $c = f(0)$.

Zvolíme-li $x = 0, y = t$ dostaneme $f(t) = t^2 + c$ pro každé reálné t . Volbou $x = t, y = 0$ dostaneme $0 = t\sqrt{c}$ pro každé reálné t , a proto $c = 0$. Jediná funkce, která může být řešením rovnice (3) je tedy $f(x) = x^2$ pro každé reálné x .

Provede zkoušku:

$$\begin{aligned} L &= (x+y) - x^2 = y^2 + 2xy, \\ P &= x|y| + xy + y^2. \end{aligned}$$

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Pokud je $f(x) = x^2$ řešením, musí platit $x(y - |y|) = 0$ pro každá reálná x, y , což není ale možné, jak se přesvědčíme volbou $x = 1, y = -1$. Funkcionální rovnice proto nemá řešení.

Poznamenejme, že kdybychom hledali funkci $f: \mathbb{R}_0^+ \rightarrow \mathbb{R}_0^+$ (tj. definiční obor funkce bychom omezili na nezáporná reálná čísla), měla by rovnice (3) jediné řešení $f(x) = x^2$.

Řešení 3. Buď f řešením funkcionální rovnice

$$f(xf(y)) = f(xy) + x \quad (4)$$

Položme $x := f(x)$. Touto substitucí se stane levá strana symetrická vzhledem k záměně x a y a proto

$$f(f(x)f(y)) = f(f(x)y) + f(x) = f(f(y)x) + f(y) = f(f(y)f(x)),$$

neboli (viz (4))

$$f(xy) + y + f(x) = f(xy) + x + f(y)$$

pro každé reálné kladné x a y . Položme např. $y = 1$, pak nutně $f(x) = x + c$, kde $c = f(1)$.

Zkouška:

$$L = f(xf(y)) = f(x(y+c)) = xy + xc + c, \quad P = xy + c + x.$$

$L = P$ pro každá kladná x, y pouze pro $c = 1$. Funkce $f(x) = x + 1$ je jediné řešení.

Řešení 4. Buď $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ spojitá funkce řešící rovnici

$$f(x+y) = f(x) + f(y). \quad (5)$$

pro každé $x, y \in \mathbb{R}$. Na této Cauchyho rovnici si ukážeme Cauchyho metodu. Princip Cauchyho metody hledání *spojitých* řešení funkcionálních rovnic spočívá v tom, že určíme řešení rovnice na nějaké husté podmnožině množiny reálných čísel a ze spojitosti pak plyne tvar každého *spojitého* řešení. Jako vhodná hustá podmnožina se nejčastěji užívá množina racionálních čísel, ovšem další vhodnou množinou je například množina racionálních dyadických čísel, tj. čísla ve tvaru $k/2^n$, kde k je celé a n celé nezáporné číslo.

Určíme řešení rovnice (5) na množině celých čísel. Volbou $x = y = 0$ dostaneme $f(0) = 2f(0)$, neboli $f(0) = 0$. Matematickou indukcí dokážeme, že $f(kx) = kf(x)$ pro každé přirozené k a reálné x . Pro $k = 1$ je vztah identita. Předpokládejme platnost pro nějaké k . Pak

$$f((k+1)x) = f(kx+x) = f(kx) + f(x) = kf(x) + f(x) = (k+1)f(x),$$

kde jsme postupně využili vztah (5) a indukční předpoklad. Rovnost platí i pro $k+1$ a podle principu matematické indukce platí pro každé přirozené k . Volbou $y = -x$ v rovnici (5) dostaneme $0 = f(0) = f(x-x) = f(x) + f(-x)$, neboli $f(-x) = -f(x)$ pro každé reálné x - funkce je lichá. Pak ovšem $f(-kx) = -f(kx) = -kf(x)$. Vztah

$$f(kx) = kf(x) \quad (6)$$

platí proto pro každé celé k a reálné x . Volbou $x = 1$ v rovnici (6) dostaneme $f(k) = kf(1)$ pro každé celé k .

Nyní zobecníme řešení na množinu racionálních čísel. V rovnici (6) volbou $x = 1/k$ dostaneme pro každé celé k

$$f(1) = f\left(k \frac{1}{k}\right) = kf\left(\frac{1}{k}\right) \Rightarrow f\left(\frac{1}{k}\right) = \frac{f(1)}{k}.$$

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Pro celé číslo m a přirozené číslo n nakonec dostaneme

$$f\left(\frac{m}{n}\right) = mf\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{m}{n}f(1).$$

Z předchozího rozboru plyne tvar řešení: $f(q) = qf(1)$ pro každé racionální q . Teď využijeme spojitost funkce a hustotu množiny racionálních čísel v množině reálných čísel. Ke každému reálnému číslu x existuje posloupnost racionálních čísel q_m , která konverguje k číslu x . Ze spojitosti funkce f plyne

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(q_m) = \lim_{n \rightarrow \infty} q_m f(1) = x f(1).$$

Získali jsme řešení na množině reálných čísel. Zkouškou se snadno přesvědčíme, že libovolná funkce tvaru $f(x) = cx$ (pro každé x , $c = f(1)$) je řešením. Zdůrazněme, že bez podmínky na spojitost funkce bychom nemohli funkci rozšířit z množiny racionálních čísel na čísla reálná.

Řešení 5. Necht' $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ je řešení rovnice

$$f(x+y) = f(x) + f(y),$$

kteřé splňuje $f(x) \geq 0$ pro $x \geq 0$. Řešíme v podstatě předchozí příklad, jen jsme podmínku spojitosti nahradili podmínkou na nezápornost funkce pro $x \geq 0$. Víme, že $f(q) = cq$ pro všechna racionální čísla, kde $c = f(1) \geq 0$.

Pro libovolná reálná $x \geq y$ je $x - y \geq 0$ a proto

$$f(x) = f((x-y) + y) = f(x-y) + f(y) \geq f(y),$$

neboť $f(x-y) \geq 0$. Funkce f je tedy rostoucí.

Z hustoty racionálních čísel v množině reálných čísel plyne, že pro každé reálné x existují posloupnosti p_n a q_n ($n = 1, 2, \dots$) racionálních čísel takové, že $p_n \leq x \leq q_n$ a p_n rostou a q_n klesají k x . A protože je funkce rostoucí, platí také

$$cp_n = f(p_n) \leq f(x) \leq f(q_n) = cq_n.$$

Aplikujeme-li nyní limitu $\lim_{n \rightarrow \infty}$ na levou a pravou nerovnost (pro zaslíbené aplikujeme tzv. větu o dvou polícajtech), dostaneme $cx \leq f(x) \leq cx$, neboli $f(x) = cx$ pro všechna reálná x .

Řešením jsou funkce $f(x) = cx$, $c \geq 0$.

Řešení 6. Bud' funkce $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ řešením

$$f(xf(y)) = yf(x) \tag{7}$$

a splňuje podmínku $f(x) \rightarrow 0$ pro $x \rightarrow \infty$. Na této úloze představíme metodu *pevného bodu*. Bod p z definičního oboru funkce f je její pevný bod, pokud $f(p) = p$. Označme \mathbb{P} množinu pevných bodů funkce f .

Položme v (7) $x = y = t$, pak $f(tf(t)) = tf(t)$, tj. bod $tf(t)$ je pro každé t pevný bod a množina pevných bodů je proto alespoň jednoprvková. Pokud zjistíme, že množina pevných bodů je jednoprvková, $\mathbb{P} = \{p\}$, bude $xf(x) = p$ pro každé x .

Bud' $p \in \mathbb{P}$, tj. $p = f(p) > 0$. Pak

$$p = f(p) = f(f(p)) = f(1f(p)) = pf(1) \Rightarrow f(1) = 1 \Rightarrow 1 \in \mathbb{P},$$

kde jsme v prvních dvou rovnostech využili definici bodu $p = f(p)$ a v poslední rovnosti jsme využili rovnici (7).

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Bud' p pevný bod a volme v (7) $x = y = p$. Pak $f(pf(p)) = pf(p)$, neboli $f(p^2) = p^2$. Bod p^2 je také pevný bod. Indukcí snadno dokážeme, že pokud je p pevný bod, je p^m také pevný bod pro každé přirozené m .

Bud' opět p pevný bod a volme tentokrát $x = 1/p, y = p$. Na jednu stranu je

$$f\left(\frac{1}{p}f(p)\right) = f\left(\frac{1}{p}p\right) = f(1) = 1,$$

na druhou stranu plyne z (7)

$$f\left(\frac{1}{p}f(p)\right) = pf\left(\frac{1}{p}\right).$$

Dvojí vyjádření dává $f(1/p) = 1/p$, a $1/p$ je také pevný bod. Indukcí lze snadno ukázat, že pokud je $1/p$ pevný bod, pak $1/p^m$ je také pevný bod pro libovolné přirozené m .

Nyní využijeme druhou podmínku ze zadání. Pokud $p > 1$ je pevný bod, pak

$$\lim_{m \rightarrow \infty} p^m = \infty, \quad \lim_{m \rightarrow \infty} f(p^m) = \lim_{m \rightarrow \infty} p^m = \infty,$$

což by byl spor. Pokud $0 < p < 1$ je pevný bod, pak $1/p > 1$ a můžeme aplikovat předchozí postup, který vede ke sporu. Jediná možnost je proto $p = 1$ a takový bod se skutečně vyskytuje v množině pevných bodů. Je proto $xf(x) = 1$ pro každé kladné reálné x . Zkouškou se přesvědčíme, že $f(x) = 1/x$ je skutečně (jediné) řešení.

Řešení 7. Necht' $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ řeší rovnici

$$f(x+y) = f(x) + y^2 f(f(x)+y).$$

Tento předpis si upravme pro každé x a každé nenulové y do tvaru

$$\frac{f(x+y) - f(x)}{y} = yf(f(x)+y). \quad (8)$$

Výraz na levé straně nápadně připomíná výraz pro výpočet derivace funkce. Spočteme proto limitu $\lim_{y \rightarrow 0}$.

Pro libovolné pevné x plyne ze spojitosti funkce f následující (na podrobnější vysvětlení zde bohužel není místo a čtenáře odkazujeme na vhodnou literaturu o limitách a derivacích)

$$\lim_{y \rightarrow 0} f(f(x)+y) = f(f(x)) \in \mathbb{R}, \quad \lim_{y \rightarrow 0} yf(f(x)+y) = 0,$$

a proto

$$\lim_{y \rightarrow 0} \frac{f(x+y) - f(x)}{y} = 0.$$

Co to pro nás znamená? Derivace funkce f existuje v každém bodě x a je rovna nule.

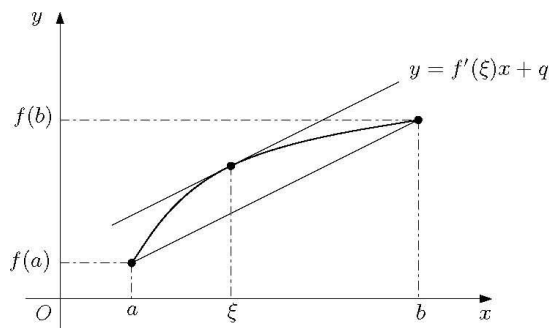
Pomocí Lagrangeovy věty ukážeme, že funkce f musí být konstantní. Formulujme větu.

Lagrangeova věta. *Uvažujme spojitou funkci f na uzavřeném intervalu $[a, b]$, která má pro každé x z intervalu (a, b) derivaci. Pak existuje ξ z intervalu (a, b) takové, že*

$$f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Obrázek objasňuje důsledek Lagrangeovy věty geometricky. Věta dokazuje existenci tečny funkce, která je rovnoběžná s přímkou procházející body $[a, f(a)]$ a $[b, f(b)]$.

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ



Aplikujme Lagrangeovu větu v našem případě. Pro pevný bod x_0 uvažujme libovolný bod $x > x_0$. Protože splňujeme předpoklady věty, víme, že v intervalu (x_0, x) existuje ξ s vlastností

$$f'(\xi) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Víme také, že $f'(\xi) = 0$ a odtud plyne rovnost $f(x) = f(x_0)$. Podobnou úvahu provedeme pro $x < x_0$. Celkově dostaneme $f(x) = f(x_0)$ pro všechna x - funkce je konstantní. Jak se přesvědčíme zkouškou, jediná konstantní funkce, která vyhovuje, je $f(x) = 0$ pro všechna x .

Řešení 8. Necht' $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ řeší nerovnici

$$f(x) - f(y) \leq 2y(y - x). \quad (9)$$

Definujme funkci $g(x)$ předpisem $g(x) = f(x) + x^2$. Dosadíme do nerovnice (9) za funkci f a výraz upravme. Funkce g splňuje nerovnost

$$g(x) - g(y) \leq x^2 - y^2 - 2xy + y^2 = (x - y)^2.$$

Pro libovolné x_0 a y_0 sestrojme posloupnost $z_k = x_0 + (y_0 - x_0)k/n$ pro $k = 0, 1, \dots, n$. Pro dva sousední členy posloupnosti je

$$g(z_{k+1}) - g(z_k) \leq (z_{k+1} - z_k)^2 = \frac{(y_0 - x_0)^2}{n^2}$$

pro $k = 0, 1, \dots, n - 1$. Sečtením všech n takových nerovností dostaneme ($z_0 = x_0, z_n = y_0$)

$$g(x_0) - g(y_0) \leq \frac{(x_0 - y_0)^2}{n}.$$

Provedeme-li limitu $\lim_{n \rightarrow \infty}$, dostaneme $g(x_0) - g(y_0) \leq 0$ pro libovolné x_0 a libovolné y_0 . Zaměníme-li proměnné, dostaneme opačnou nerovnost, a tak nutně $g(x_0) = g(y_0)$ - funkce g je konstantní, $g(x) = c$.

Zkouškou se přesvědčíme, že každá funkce tvaru $f(x) = c - x^2$ je řešením.

4 Závěr

V tomto příspěvku jsme ukázali několik základních metod pro řešení funkcionálních rovnic, a to metodu dosazovací, Cauchyovu, symetrie a pevného bodu. Na další základní metody (např. metodu indukce, monotonie, konečné grupy a pod.) zde bohužel nezbyl prostor. Je třeba poznamenat, že obecné pravidlo pro řešení funkcionálních rovnic neexistuje.

Rád bych poděkoval organizátorům za pozvání na matematický kemp.

5 Použitá literatura

- Davidov L. Funkcionální rovnice, ŠMM 55, ÚVMO, Praha, 1984.
- Korespondenční seminár PRASE, <http://mks.mff.cuni.cz>
- <http://www.kalva.demon.co.uk>

6 Kontakt na autora

RNDr. Josef Křišťan
e-mail: kristan1@email.cz
tel.: +420777944564

PODPORA TALENTOVANÝCH ŽÁKŮ V PLZEŇSKÉM KRAJI

MATEMATICKÝ KEMP

DIOFANTOVSKÉ ROVNICE

Josef KŘIŠŤAN

1 Úvod

V tomto příspěvku si zaměříme na rovnice jejichž obor řešení bude množina celých čísel. Takové rovnice nazýváme diofantovské rovnice.

V další části uvedeme zadání všech příkladů a následně jejich detailní řešení.

2 Zadání úloh

Úloha 1. Najděte všechna přirozená čísla n , jejichž ciferný součin je roven $n^2 - 10n - 22$.

Úloha 2. Najděte všechna celá čísla a, b pro která jsou obě čísla

$$\frac{a+1}{b} + \frac{b+1}{a}, \quad \frac{a^2}{b} + \frac{b^2}{a}$$

také celá.

Úloha 3. Najděte všechna přirozená čísla a, b pro která je číslo

$$\frac{a^2}{2ab^2 - b^3 + 1}$$

také přirozené.

Úloha 4. Pro přirozené číslo n označme $d(n)$ počet kladných dělitelů. Pro jaká n platí $4n = (d(n))^3$?

3 Řešení úloh

Řešení 1. Označme dekadický zápis čísla n jako $n = (c_m c_{m-1} \dots c_1 c_0)$. Ciferný součin s lze odhadnout ze zhora

$$s = c_m \cdot c_{m-1} \cdots c_1 \cdot c_0 \leq c_m 9^m \leq c_m 10^m \leq n,$$

takže musí být $n^2 - 10n - 22 \leq n$, neboli $n(n-11) \leq 22$. Odtud $n < 13$. Pro $n \leq 11$ je $n^2 - 10n - 22 < 0$, takže nutně $n = 12$. Zkouškou se přesvědčíme, že číslo $n = 12$ je skutečně řešení.

Řešení 2. Upravme jednotlivé zlomky na společné jmenovatele:

$$\frac{a+1}{b} + \frac{b+1}{a} = \frac{a^2 + a + b^2 + b}{ab}, \quad \frac{a^2}{b} + \frac{b^2}{a} = \frac{a^3 + b^3}{ab}.$$

Z prvního zlomku vyplývá $b|a^2 + a = a(a+1)$, z druhého $b|a^3$. Takže b dělí i číslo

$$a^3 - a(a+1)(a-1) = a.$$

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Ze symetrie dostaneme $a|b$. Celkem proto $|a| = |b|$.

Pro $a = b$ je první zlomek roven $2(2a+1)/a$, druhý $2a^3/b^2$. Čísla a a $2a+1$ jsou nesoudělná, proto $a|2$, $a \in \{\pm 1, \pm 2\}$.

Pro $a = -b$ je první zlomek roven $2a^2/(-a^2)$, druhý $0/(-a^2)$, což jsou celá čísla pro libovolné celé nenulové a .

Řešením jsou uspořádané dvojice

$$(a, b) = \{(a, a), a = \pm 1, \pm 2\} \cup \{(a, -a), a \in \mathbb{Z} - \{0\}\}.$$

Řešení 3. Označme

$$\frac{a^2}{2ab^2 - b^3 + 1} = k \in \mathbb{N}. \quad (1)$$

Z nezápornosti jmenovatele plyne podmínka $2ab^2 \geq b^3$, tj. $2a \geq b$.

Pokud $2a > b$ (tj. $2a - b \geq 1$) a zlomek v (1) má být přirozené číslo, musí být číselník větší nebo roven jmenovateli, tj.

$$a^2 \geq b^2(2a - b) + 1 > b^2 + 1 > b^2 \Rightarrow a > b.$$

Jinak řečeno, platí implikace

$$a \leq b \Rightarrow 2a = b. \quad (2)$$

Skutečně, implikace $2a > b \Rightarrow a > b$ je ekvivalentní obměně $a \leq b \Rightarrow 2a \leq b$, což dohromady s podmínkou $2a \geq b$ dává v poslední nerovnosti rovnost $2a = b$.

Rovnici (1) píšme jako kvadratickou rovnici vůči neznámé a

$$a^2 - 2akb^2 + k(b^3 - 1) = 0.$$

Kořeny a_1, a_2 splňují Vietovy vztahy

$$a_1 + a_2 = 2kb^2, \quad a_1 a_2 = k(b^3 - 1).$$

Dle předpokladu úlohy je jedno řešení přirozené číslo. Z Vietových vztahů okamžitě vyplývá, že druhý kořen je celé nezáporné číslo. Bez újmy na obecnosti nechť $a_1 \geq a_2$. Pak nutně $a_1 \geq kb^2$ a pro kořen a_2 platí odhady

$$0 \leq a_2 = \frac{k(b^3 - 1)}{a_1} \leq \frac{k(b^3 - 1)}{kb^2} = \frac{b^3 - 1}{b^2} < b.$$

Pokud $a_2 = 0$, pak $b^3 - 1 = 0$, $b = 1$ a $a_1 = 2k$ pro libovolné přirozené k .

Pokud $0 \neq a_2 < b$, pak nutně (viz (2)) $a_2 = b/2$, tj. $b = 2t$, $t \in \mathbb{N}$ a $a_2 = t$, $a_1 = b^4/2 - b/2 = 8t^4 - t$.

Řešením jsou uspořádané dvojice

$$(a, b) = \{(2t, 1), (t, 2t), (8t^4 - t, 2t), t \in \mathbb{N}\}.$$

Řešení 4. Uvažujme prvočíselný rozklad čísla n ve tvaru $n = p_1^{\alpha_1} \cdots p_k^{\alpha_k}$, kde $p_1 < p_2 < \cdots < p_k$ jsou různá prvočísla, $\alpha_i \in \mathbb{N}$ a $k \in \mathbb{N}$. Pak $d(n) = (\alpha_1 + 1) \cdots (\alpha_k + 1)$.

Řešenou rovnici prepíšeme do tvaru

$$2^2 p_1^{\alpha_1} \cdots p_k^{\alpha_k} = (\alpha_1 + 1)^3 \cdots (\alpha_k + 1)^3.$$

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

S ohledem na třetí mocniny na pravé straně vyplývá, že nejmenší prvočíslo musí být 2 a exponenty jsou tvaru

$$\alpha_1 = 3\beta_1 + 1, \alpha_2 = 3\beta_2, \dots, \alpha_k = 3\beta_k.$$

Řešíme nově rovnici

$$2^{\beta_1+1} p_2^{\beta_2} \dots p_k^{\beta_k} = (3\beta_1 + 2)(3\beta_2 + 1) \dots (3\beta_k + 1). \quad (3)$$

Pravá strana není dělitelná třemi, a tak další nejmenší prvočíslo v rozkladu čísla n může být 5, tj. $p_i \geq 5$ pro $i \geq 2$. Z Bernoulliho nerovnosti potom plyne pro $i \geq 2$

$$p_i^{\beta_i} \geq 5^{\beta_i} = (1+4)^{\beta_i} \geq 1+4\beta_i \geq 1+3\beta_i \quad (4)$$

Pak z (3) a (4) dostaneme

$$\frac{3\beta_1 + 2}{2^{\beta_1+1}} = \frac{p_2^{\beta_2}}{3\beta_2 + 1} \dots \frac{p_k^{\beta_k}}{3\beta_k + 1} \geq 1,$$

a proto

$$3\beta_1 + 2 \geq 2^{\beta_1+1}. \quad (5)$$

Rozebereme několik možností. Pokud $\beta_1 = 0$ nebo $\beta_1 = 2$, nastává v (5) a (4) rovnost. Z Bernoulliho nerovnosti pak plyne, že musí být $\beta_i = 0$ pro $i \geq 2$. V prvním případě dostaneme řešení $n = 2$, ve druhém $n = 2^7$.

Pro $\beta_1 = 1$ řešíme

$$\frac{5}{4} = \frac{p_2^{\beta_2}}{3\beta_2 + 1} \dots \frac{p_k^{\beta_k}}{3\beta_k + 1} \Leftrightarrow 4p_2^{\beta_2} \dots p_k^{\beta_k} = 5(3\beta_2 + 1) \dots (3\beta_k + 1), \quad (6)$$

a odtud $p_2 = 5$. Pro $k \geq 3$ je $p_i \geq 7$ ($i \geq 3$), tedy

$$\frac{p_i^{\beta_i}}{3\beta_i + 1} > \frac{5^{\beta_i}}{3\beta_i + 1} \geq \frac{1 + 4\beta_i}{1 + 3\beta_i} \geq \frac{5}{4} \Leftrightarrow \beta_i \geq 1,$$

což nelze s ohledem na první vztah v (6). Tj. je buď $\beta_i = 0$ nebo $\beta_i = 1$. Pokud $\beta_i = 0$, není co řešit. Pro $\beta_i = 1$ je

$$\frac{p_i^{\beta_i}}{3\beta_i + 1} = \frac{p_i}{4} > \frac{5}{4},$$

neboť, jak víme, $p_i \geq 7$. Takže je $k = 2$ a řešíme rovnici $5/4 = 5^{\beta_2}/(3\beta_2 + 1)$, která má řešení $\beta_2 = 1$ a $n = 2^4 5^3$.

Řešením jsou tato čísla $\{2, 2^7, 2^4 5^3\}$.



INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

4 Závěr

V tomto příspěvku jsme ukázali několik základních metod pro řešení diofantovských rovnic. Toto téma je velmi bohaté a zajímavé a doufám, že vás nahlédnutí do této partie matematiky zaujalo.

Rád bych poděkoval organizátorům za pozvání na matematický kemp.

5 Použitá literatura

- <http://www.artofproblemsolving.com>
- <http://www.kalva.demon.co.uk>

6 Kontakt na autora

RNDr. Josef Kříšťan
e-mail: kristan1@email.cz
tel.: +420777944564

ODBORNÝ KEMP PŘÍRODOVĚDNÝCH OBORŮ FYZIKA

VYUŽITÍ KATALOGŮ HVĚZD – HR DIAGRAM

Ota KÉHAR

1. Úvod

Informace, které známe o astronomických objektech, jsou již od starověku shromažďovány v různých katalozích a seznamech. Katalogů máme v současné době velké množství a lze v nich najít spoustu zajímavých údajů. Ve svém příspěvku se zabývám možnostmi, jak využít katalogy astronomických objektů ve výuce. Důraz je kladen na zapojení žáků do praktických činností, takže výsledkem mé práce jsou pracovní listy. Ty obsahují rámcový postup při vypracování úlohy, přičemž jsou doplněny o dílčí otázky, které prohlubují znalosti žáků, a pro učitele představují zpětnou vazbu.

2. Stat'

Staré čínské přísloví praví: „Řekni mi a já zapomenu, ukaž mi a já si zapamatuji, nech mne to udělat a já to pochopím.“ Pro zlepšení motivace žáků je vhodné vytvořit samostatné úlohy a plně se nabízí využití katalogů astronomických objektů, kde mohou žáci smysluplně pracovat s výpočetní technikou. Před samotným vytvářením úloh si musíme položit základní kritéria, které chceme úlohami dosáhnout. Úloha musí smysluplně využívat data z katalogů astronomických objektů a měla by rozvíjet základní kompetence žáků. Měla by obsahovat praktickou činnost žáků, díky ní lze splnit další kritéria – atraktivnost a užitečnost. Výhodou úlohy bude samostatná použitelnost a využití mezipředmětových vztahů.

Praktická úloha spočívá v sestrojení Hertzsprungova-Russellova (HR) diagramu, což je klíčový pojem středoškolské výuky astronomických poznatků. Katalog hvězd obsahuje desítky tisíc objektů vzdálených stovky parseků, bylo by jistě zajímavé srovnat HR diagram hvězd v různých vzdálenostech. Budou se tyto diagramy lišit? Ve vytvořených diagramech lze vyznačit jednotlivé oblasti a popsat je. Pro ilustraci můžeme zaznamenat polohu Slunce a několika nejjasnějších hvězd, přičemž se nám ukáže, o jaké typy hvězd se jedná. V tomto případě se studenti naučí pracovat s velkým množstvím dat a musí se vypořádat s nástrahami (programy mají různá omezení), které to přináší.

Úloha studentům přinese aplikaci následujících astronomických pojmů: (zdánlivá, absolutní) hvězdná velikost, paralaxa (vzdálenost) a Hertzsprungův-Russellův diagram. Okrajově se dotkne typů hvězd a souhvězdí. Z informatiky studenti pracují s prohlížečem (pro práci s katalogem Hipparcos a Glieseho katalogem), tabulkovým procesorem Excel (vzorce a sestrojení bodového grafu). Při analýze výsledků studenti narazí na výběrový efekt. Úlohu lze rozdělit na dvě části. Při sestrovování HR diagramu nejbližších hvězd (do 100 pc) je možné studentům poradit a ukázat jim postup. Zda studenti výklad v první části pochopili, lze aplikovat ve druhé části, kde se studenti pokusí o sestrojení HR diagramu vzdálenějších hvězd, což je s ohledem na omezení v tabulkových procesorech náročnější úloha. I zde mohou studenti uplatnit zpětnou vazbu, z výkladu z hodiny totiž vědí, jak má HR diagram vypadat.



INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

3. Závěr

Studenti bohužel nezvládají základní úkony v tabulkovém procesoru Excel, zejména vložení vzorce do buňky, seřazení dat nebo sestrojení jednoduchého bodového grafu. Uvádějí, že se jedná o náročnou úlohu vyžadující hlubší znalosti PC a že je nutné před zavedením podrobnou výuku v Excelu.

Během výpočtů studenti neřeší jednotky ve vzorcích. Pokud není paralaxa uvedena v úhlových vteřinách (v katalogu Hipparcos je uvedena v úhlových milivteřinách), vzdálenost pak není v parsecích. Může se tak stát, že vzdálenost vyjde v řádu setin parseku. Studenti by ovšem měli zpozornět a uvědomit si, že to není možné (nejbližší hvězda se nachází ve vzdálenosti 1,3 pc). U studentů jsem vyzoroval nepřesnosti ve vyjadřování, např. uvedli, že na svislou osu lze vynášet pozorovanou hvězdnou velikost. Tato odpověď by se dala považovat za správnou pouze za předpokladu, kdyby student uvedl, že jsou hvězdy ve stejné vzdálenosti, jak platí u hvězdokup. Problematickým místem byla i neznalost předpon (např. u milivteřin) a základních jednotek SI.

A několik otevřených otázek na úplný závěr. Jak zlepšit neutěšenou vzdělanost u studentů? Co dělat s tímto neradostným stavem? Byl by právě tento typ úloh vhodný pro motivaci studentů? Bylo by možné použít tyto úlohy jako praktickou úlohu v rámci astronomické olympiády? Nebo na soustředění studentů při různých příležitostech?

4. Použitá literatura

Multimediální učební text Astronomie [online]. c2011, [citováno 22. 8. 2011]. Dostupné z <<http://astronomia.zcu.cz>>

5. Kontakt na autora

Ing. Ota Kéhar
ZČU, FPE, KMT, oddělení fyziky, Klatovská 51, Plzeň
kehar@kmt.zcu.cz

ODBORNÝ KEMP PŘÍRODOVĚDNÝCH OBORŮ FYZIKA

ASTRONOMIE V EXPERIMENTECH

Marek ČESAL, Tomáš MEISER

1. Úvod

I takový obor jakým je astronomie se dá demonstrovat jednoduchými experimenty. Pokud se ještě protkají osou příběhu, může to být pro posluchače zajímavé a zároveň i poučné. Pro astronomické experimenty se jako nejvhodnější jeví příběh o pouti k planetám, ve kterém se dá propojit spousta rozdílných pokusů.

2. Stat'

Pro pout' k planetám je potřeba nejdříve odstartovati ze Země, k tomu je potřeba sestrojít raketu. Pomocí balónků a brček si můžeme sestrojít raketu, na které si dokážeme zákon zachování akce a reakce. Pro raketu je důležité palivo, v testu si tedy vyzkoušíme, jestli se jako pohon naší budoucí rakety dá použít technický líh. Podobně jako ostatní vesmírné agentury si palivo pro naši raketu musíme nejdříve otestovat. Do velkého barelu na vodu nalejeme líh, promícháme a zapálíme sirkou. Tento pokus je dobré provádět v zatemnělé místnosti, aby byl dobře pozorovatelný. Protože lihové páry dobře hoří, můžeme je použít k odpalu naší rakety.

Model rakety si sestrojíme z pet lahve, kterou pověsíme na provázek a ve víčku uděláme 0,5cm otvor. Do pet lahve nalejeme líh, protřepeme a zbytek vylejme zpět do láhve. Zapálené lihové páry odpálí raketu a příběh může pokračovat.

Když už jsme ve vesmíru je potřeba zjistit, zda je Země kulatá, již dříve si mohli lidé tuto teorii potvrdit. Například při zatměních Měsíce, které způsobuje stín vržený Zemí. Pomocí meotaru, talíře a míče si dokážeme pravdivost tohoto tvrzení.

Ve vesmíru se nabízí spousta experimentů od ukázky stavu beztíže, pomocí dírkované pet lahve naplněné vodou, až po ukázky prostorových modelů souhvězdí. Jako velmi vhodný pokus se také jeví ukázka seeingu hvězd, který dokazuje přítomnost atmosféry kolem Země.

Při cestování vesmírem můžeme narazit na planety s velmi hustou atmosférou, k jejich prozkoumání je potřeba radarového snímkování. Radarové paprsky můžeme nasimulovat pomocí svazku špejlí. Můžeme také prolétat kolem planet s velkými vzdušnými víry, k jejich simulaci postačí dvě spojené pet lahve ve kterých se vytvoří vodní vír. Další zastávkou v planetárním systému může být Jupiterův sopečný měsíc Io. Pro simulaci sopky se dají použít běžné domácí suroviny, do vytvořeného modelu sopky si nasypeme sodu a potravinářské barvivo. Na závěr nalejeme do modelu ocet, výsledná reakce ukáže vytékající lávu z vnitra sopky.

Při letu vesmírem je vhodné ukázat prázdnotu mezi planetami, k tomu slouží model Sluneční soustavy v určitém poměru.



INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

3. Závěr

Experimentů pro simulaci dějů ve vesmíru je velké množství, jde jen o to vybrat ty jednoduché a snadno pochopitelné.

4 Použitá literatura

MEISER T., Jednoduché experimenty demonstrující jevy a procesy ve vesmíru, bakalářská práce, 2008

MEISER T., Demonstrace astrofyzikálních procesů a jevů a jejich použití pro žáky základních škol, diplomová práce, 2010

KERROD, Robin, SPARRROW, Giles. Jak funguje Vesmír. Pavel Příhoda, Universum, 2005. 160 s. ISBN 80-242-1373-7.

MIKULÁŠEK, Zdeněk, MIŠ, Leon, RUMLER, Josef. Návod na použití vesmíru [online]. 2004 [cit. 2008-02-02].

Dostupné na internetu: <<http://navod.hvezdarna.cz/navod/konvekce.htm>>.

5 Kontakt na autora

Mgr. Marek Česal, Mgr. Tomáš Meiser
KOF ZČU

mcesal@volny.cz, Makkinen@seznam.cz

ODBORNÝ KEMP PŘÍRODOVĚDNÝCH OBORŮ FYZIKA

SETRVAČNÍKY A JEJICH UŽITÍ

Václav HAVEL

1. Úvod

Přednáška má seznámit posluchače se základy dynamiky tuhého tělesa. Podrobněji je vysvětlen moment setrvačnosti, moment hybnosti, základní rovnice pro otáčení těles a základy zachování momentu hybnosti. Jsou objasněny základní vlastnosti setrvačnicků, Eulerova rovnice. Chování bezsilového setrvačnicku a setrvačnicku pod vlivem stálého silového momentu. Přednáška je doprovázena reálnými experimenty. Užití setrvačnicků.

2. Stat'

Objasnění pojmu moment setrvačnosti a jeho souvislost s momentem hybnosti tuhého tělesa. Zavedení vektorového součinu v souvislosti s momentem hybnosti. Časová změna momentu hybnosti, moment hybnosti v nepřítomnosti momentu síly, zákon zachování momentu hybnosti a jeho demonstrace. Elipsoid setrvačnosti, hlavní osy, pojem volné osy, její demonstrace. Význam pevné souřadnicové soustavy a soustavy spojené s rotujícím tělesem. Sestavení Eulerových rovnic. Setrvačnický a jejich vlastnosti. Chování bezsilového setrvačnicku, regulární precese. Regulární precese Země, Chandlerova perioda. Gyroskopický moment a jeho výpočet. Soubor pokusů se setrvačnický. Orientace osy volného setrvačnicku v prostoru. Setrvačnický pod vlivem vnějšího momentu. Presece. Precese zemské osy pod vlivem gravitace Slunce a Měsíce.

Význam setrvačnicků pro vědu a technickou praxi.

Užití setrvačnicků : a) silové (stabilizace lodí a děl, torpéda, jednokolejná dráha)

b) orientační možnosti užití setrvačnicků (umělý horizont, gyrokompas,

Foucaultův důkaz rotace Země pomocí setrvačnicku, stabilizace stěfel)

Soubor pokusů s užitím setrvačnicků,

3. Závěr

Přednáška má ukázat, že dynamika tuhého tělesa a nauka o setrvačnicích tvoří zajímavou, ale po teoretické stránce obtížnou část mechaniky. Základní vlastnosti setrvačnicků se dají ukázat užitím pomůcek dostupných ve školních kabinetech nebo improvizovanými prostředky. Studenti by měli sami nalézt příklady užití setrvačnicků v praxi.

4. Použitá literatura

LANDAU, L.D., LIFŠIC, J.M. : Úvod do teoretické fyziky, Alfa, Bratislava 1980

GONDA, J. : Technická dynamika, SNTL, Praha 1954

FEYNMAN, R. : Doplňky k Feynmanovým přednáškám z fyziky, Fragment, Praha 2007



evropský
sociální
fond v ČR



EVROPSKÁ UNIE



MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ,
MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY



OP Vzdělávání
pro konkurenceschopnost



INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

5. Kontakt na autora

Václav Havel, doc., dr.

ZČU, FPE, KMT, Klatovská 51, Plzeň

havelv@kmt.zcu.cz

ODBORNÝ KEMP PŘÍRODOVĚDNÝCH OBORŮ FYZIKA

ZAJÍMAVÉ ASTRONOMICKÉ OBJEKTY A ÚKAZY NA OBLOZE

Lumír HONZÍK

1. Úvod

Na obloze lze pozorovat řadu zajímavých kosmických těles a astronomických úkazů. Většinou se jedná o jevy astronomické, v některých případech se ale jedná o úkazy meteorologické, či ve vysoké atmosféře popřípadě o umělá tělesa. Některé z těchto úkazů jsou neobvyklé, jiné lze zase těžko vysvětlit. Řada z nich nás ohromí svojí krásou.

2. Stat'

Přednáška „Zajímavé astronomické objekty a úkazy na obloze“ objasňuje některé více či méně neobvyklé úkazy, které lze spatřit na denní, či noční obloze. Zároveň se zastavuje u těles nebo objektů, kterých tyto úkazy týkají.

V první části přednášky jsou úkazy, které souvisí se Sluncem. Jedny z nejvýraznějších úkazů jsou zatmění Slunce. Posluchač se dozví nejen, jak vznikají jednotlivé typy slunečních zatmění, ale i to, že existují doprovodné jevy (pokles teploty, osvit, vlivy na přírodu apod.). Jsou zmíněny i běžně pozorovatelné projevy aktivity Slunce, a to ve fotosféře (sluneční skvrny, póry, fakulová pole, granulace), v chromosféře (erupční aktivita, protuberance, filamenty, spikule) i v koróně (tvar koróny, koronární paprsky, transienty apod.). Blok končí vlivy sluneční aktivity na planetu Zemi (polární záře, deformační změny magnetického pole Země).

V další části přednášky jsou úkazy související s Měsícem. Blok začíná základními údaji o Měsíci a ukázkou jeho nejvýraznějších povrchových útvarů (pevniny, moře, krátery, pohoří). Následuje informace o vzniku zatmění Měsíce a o typech měsíčních zatmění. Je zmíněno i zabarvení Měsíce během úplného zatmění (rozklad slunečního světla v zemské atmosféře) a vysvětlení optického klamu týkajícího se úhlového průměru Měsíce a Slunce poblíž obzoru a vysoko na obloze.

Další blok se týká úkazů souvisejících s planetami Sluneční soustavy, které jsou pozorovatelné na obloze okem, tedy Merkuru, Venuše, Marsu, Jupiteru a Saturnu. Kromě krátkého představení jednotlivých planet jsou v tomto bloku zmíněny úkazy jako přechody planety přes disk Slunce (Merkur, Venuše), změny úhlového průměru v závislosti na okamžité vzdálenosti, změny fáze a jasnosti u vnitřních planet. U vnějších planet vznikají konjunkce např. s Měsícem či jinými nebeskými objekty. Dále některé události, které se udály v poslední době a které nelze běžně pozorovat okem. Do této kategorie patří např. srážky s kometou (Jupiter a komety), obří bouře na Saturnu apod.

V předposledním bloku jsou zařazeny ukázky typických objektů vzdáleného vesmíru, které lze pozorovat amatérskými dalekohledy nebo triedry. Mezi tyto vzdálené objekty patří otevřené a kulové hvězdokupy, různé typy galaxií (eliptických, spirálních, spirálních s příčkou, nepravidelných) a mezihvězdných mlhovin (difuzních reflexních, difuzních emisních, temných a planetárních).

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Závěrečná část přednášky je ukázkou zajímavých fotografií přeletů umělých těles jako jsou letadla, družice systému Iridium, Mezinárodní kosmické stanice ISS apod. Tuto část doplňují ještě zajímavé diskovité typy oblačnosti připomínající spíše létající talíře a fotografie irizované oblačnosti.

3. Závěr

Přednáška ve svém rozsahu samozřejmě nemůže zdaleka obsáhnout všechna tělesa a jevy na obloze. Jejím cílem je poukázat na nejzajímavější a nejznámější jevy a úkazy. Cílem je také přimět posluchače, aby se zamysleli nad jejich podstatou a třeba i vybudit zájem o astronomii a kosmonautiku.

4. Použitá literatura

Vesmír 1 Sluneční soustava, R. Čeman, E. Pittich, Edice: Rekordy, ISBN 80-8067-072-2
Odhalená tajemství Slunce, R. Kippenhahn, Edice: Kolumbus, Nakl: Ml. Fronta, ISBN 80-204-0805-3

Ilustrovaný slovník termínov Slečno-zemskej fyziky, Slovenské ústredie amatérskej astronomie, Urbanovo 1985

Cesty za poznáním Astronomie 1, David H. Levy, Svojtka&Co, ISBN 80-7237-029-4

Náš vesmír, J. Grygar, Z. Pokorný, J. Dušek, Aventinum, ISBN 80-7151-179-X

Astronomie pro každého, Libor Lenža, Nakladatelství Rubico, ISBN 80-85839-84-9

Zatmění Slunce 11.8.1999 – průvodce pro nejširší veřejnost, A. Dědoch, K. Halíř, M. Větrovcová

Západočeská pobočka ČAS, Praha 1998, ISBN 80-238-3186-0

Zatmění Slunce na konci tisíciletí 11.8.1999, Zsigmond Bődök,

Vydavatelství NAP Kiadó, Dunajská Streda, ISBN: 80-85509-80-6

Jeden den pro Slunce – průvodce úplným zatměním Slunce 11.8.1999, Jiří Dušek, Hvězdárna a planetárium Mikuláše Koperníka v Brně, Brno 1999, ISBN: 80-85882-10-8

<http://sohowww.nascom.nasa.gov/sunspots/>

<http://sohowww.nascom.nasa.gov/data/realtime/realtime-update.html>

<http://astronomia.zcu.cz>

<http://www.aldebaran.cz/astrofyzika/sunsystem/index.html>

<http://planety.astro.cz/soustava/1861-planety-slunecni-soustavy>

<http://www.vesmir.info/asteroidy/>

<http://cs.wikipedia.org/wiki/Asteroid>

<http://www.vesmir.info/komety/>

<http://cs.wikipedia.org/wiki/Kometa>

<http://komety.janmarek.net/drahy-rodiny.html>

<http://mesic.astronomie.cz/zatmeni.htm>

<http://mesic.astronomie.cz/faze-mesice.htm>

http://moon.felk.cvut.cz/~pjv/Jak/_astro/a740/start.html



INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

5. Kontakt na autora

Lumír Honzík

Hvězdárna a planetárium Plzeň

U Dráhy 11, 318 00 Plzeň

Tel.: 377 388 400

Mobil: 605 943 630

e-mail: lumir.honzik@seznam.cz

ODBORNÝ KEMP PŘÍRODOVĚDNÝCH OBORŮ FYZIKA

POČÍTAČOVÉ MODELOVÁNÍ GALAXIÍ A JEJICH INTERAKCÍ

Jakub SCHWARZMEIER

1. Úvod

Jak se vytvořily galaxie? Jak se vyvíjí? Čím je způsoben jejich rozdílný vzhled? Jak se vytvořily galaxie spirální a jak eliptické? Jak v kosmologickém kontextu? Tyto otázky patří k nejdůležitějším a dosud nevyřešeným záhadám, v jejichž rozluštění astronomům pomáhá současná výpočetní technika.

2. Život v osamění?

Dlouhou dobu vše nasvědčovalo tomu, že galaxie jsou opuštěnými poustevníky rozptýlenými po vesmíru. Aby mohl být studován jejich vývoj, musel být vytvořen pro galaxii model, se kterým mohou výpočetní astronomové pracovat. Přijatelným modelem rozložení jednotlivých hvězd v galaxii je jejich nahrazení hmotnými body. Plynu je v galaxii v porovnání se zastoupením hvězd podstatně méně a proto jej můžeme v tomto přiblížení zanedbat.

Relativně brzy v historii galaktické astronomie se zjistilo, že vnější části galaxie ve skutečnosti rotují tak, jakoby se vně zářivé hmoty galaxie nacházela ještě další hmota, kterou však není možné pozorovat v žádné části spektra elektromagnetického vlnění. Model je tedy nutno dále rozšířit o temnou hmotu, která navzdory svému označení neskrývá zlo, ale gravitačně působí na svítivé části galaxie. Tato neviditelná hmota, která galaxii obklopuje, mnohonásobně svou hmotností převyšuje hmotnost svítivé složky tvořenou hvězdami.

Temné halo také několikanásobně zvětšuje rozměry galaxie oproti modelu, kdy počítáme pouze se zářivou složkou. Výsledkem je, že gravitační pole galaxie je větší a více ovlivňuje své okolí. Galaxie se pak nevyvíjejí v izolaci, ale naopak se mohou vzájemně ovlivňovat.

3. Počítačové simulace

Pokud máme nyní sestavený model galaxie a okolního prostředí, můžeme nechat počítače určit její vývoj. Zjištění dynamického vývoje galaxie představuje určení gravitační síly mezi hmotnými body, které zastupují hvězdy a temnou hmotu. Newtonovy pohybové zákony jsou přesně dány a všechny veličiny jsou pouze funkcí vzdálenosti a času. Avšak pokud si uvědomíme, že gravitační síla je skutečně neomezeného dosahu (na rozdíl např. od mezimolekulárních sil) a musíme tak uvažovat s gravitačním polem nejenom několika blízkých hvězd, ale celé galaxie, ukáže se, že časová náročnost takového výpočtu je ohromná. (Zkuste spočítat, kolik matematických operací je nutno provést, když chcete určit gravitační sílu mezi všemi, počítejme 300 miliardami hvězd naší galaxie v trojrozměrném prostoru.)

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Přesto dávno před rozšířením digitálních počítačů, v roce 1941, jako vůbec první provedl simulaci dynamického vývoje hvězdných systémů Erik Holmberg. Ten nahradil každý hmotný bod tvořící galaxii malou žárovkou, jejíž svítivost byla úměrná hmotnosti dané hvězdy. Celkové množství světla dopadající na fotobuňku, pak bylo úměrné hledané gravitační síle.

Jenže teprve poslední dobou je možné určovat vývoj u systémů s velkým počtem těles. K tomuto účelu dnes slouží moderní masivně paralelní počítače. Jako takové stroje se dnes velice často používají výkonné osobní počítače (PC) propojené velmi rychlou počítačovou sítí. Toto řešení je také základem českých superpočítačových center, jež jsou zapojena a hrají důležitou roli v celoevropských výpočetních strukturách.

A zatímco pozorovací astronomie nám poskytuje obrazy různých galaxií v různých okamžicích jejich vývoje, může výpočetní astronomie určovat dynamický vývoj galaxie po celé období její evoluce, jako bychom nasedli do stroje času. Časová rozpětí se kterými se tyto simulace potýkají, jsou v porovnání s naší běžnou zkušeností neuvěřitelně dlouhá a tvoří podstatnou část doby trvání vesmíru.

4. Jak na to?

Modelování dynamiky hvězdných soustav na počítači lze rozložit na tři etapy. Nejprve je nutno vytvořit počáteční podmínky, které popisují výchozí rozložení hvězd v soustavě. Určení počátečních podmínek je extrémně důležitá úloha, protože na ní závisí budoucí vývoj celého systému. Pokud chceme studovat vzájemné ovlivňování více galaxií, je nutné nejprve nechat jednotlivé galaxie vyvinout v izolaci a poté nastavit jejich dráhu například na kolizní kurz.

Po nastavení počátečních podmínek nastává provedení samotného časově náročného výpočtu gravitačních sil mezi všemi tělesy tvořícími systém. Existují však techniky, které umožňují tento čas zkrátit za cenu malého snížení přesnosti výpočtu. Přesto je jeho výsledkem nesmírné množství dat, která nemohou lidé vzhledem k jejich velkému rozsahu přímo zpracovávat a je nutné je převést do nějaké lépe vnímatelné podoby ve formě grafů a obrázků. Pro obecnou veřejnost je pak možné tato data obvykle ještě zpracována do formy divácky přitažlivých a oku lahodících animací.

5. Závěr

Ve skutečnosti je prostředí, ve kterém se galaxie nacházejí ještě mnohem komplikovanější, než jak je popisuje tento model. Galaxie jsou většinou sdruženy do velkých společenství, v nichž se dlouhodobě ovlivňují, a výpočet těchto systémů je ještě daleko náročnější. Zejména při interakcích galaxií začne větší roli hrát také plyn a následná tvorba hvězd.

6. Kontakt na autora

PhDr. Jakub Schwarzmeier, Ph.D.
jschwarzmeier@kerio.com

ODBORNÝ KEMP PŘÍRODOVĚDNÝCH OBORŮ FYZIKA

PRAKTICKÉ CVIČENÍ Z ASTROFOTOGRAFIE A ZPRACOVÁNÍ ASTROFOTOGRAFIÍ

Josef JÍRA

1. Úvod

Motivace astronomické fotografie spočívá až v magickém kouzlu povedených astronomických snímků, které dokážou detailně zachytit jak barevnou mlhovinu, tak i potmělou noční krajinu osvětlenou pouze svitem Měsíce. Snad každý nad takovými astronomickými fotografiemi vysloví tajné přání „tak bych chtěl také umět fotografovat“.

2. Stat'

Startrails (hvězdná dráha) je velmi jednoduchá astrofotografická technika fotografování noční oblohy. K fotografování potřebujeme fotoaparát s širokoúhlým objektivem, drátěnou spoušť a fotografický stativ. V okamžiku, kdy exponujeme část hvězdné oblohy několik desítek minut či hodin, můžeme zachytit na snímku pohyb hvězd po obloze, který je způsoben rotací Země kolem své osy. Na fotografii lze zachytit krásné kruhové výseče, jejichž velikost je závislá na délce expozice. Teoreticky, kdyby byla expozice dlouhá více než 23 h 56 m, tak by na fotografii hvězdy vykreslily krásné kružnice. Tyto extrémně dlouhé expozice jsme si ale mohli dovolit pouze u klasických fotografických materiálů, které se vyznačují velkým dynamickým rozsahem (schopností zachytit různé intenzity světla, aniž by došlo ke ztrátě informace). Bohužel současné elektronické snímače obrazu, které se používají v digitálních zrcadlovkách, trpí celou řadou nedostatků, které neumožňují využití tak dlouhých expozic, jako je tomu u klasické fotografie, proto se startrails fotografují pomocí série krátkých snímků a následně se tyto snímky skládají v počítači pomocí programu Startrails.

Program Startrails si můžeme zdarma stáhnout z webových stránek www.startrails.de. Do počítače si uložíme zabalený soubor o velikosti 200 kB. Není nutná klasická instalace. Soubor rozbálíme a umístíme na požadované místo v počítači. Program je určený pro operační systémy Windows XP a Win 2000. Pro nové operační systémy použijeme emulátory.

Pro používání programu Startrails si můžeme vybrat anglickou nebo německou jazykovou verzi. Díky jednoduchému grafickému rozhraní a intuitivnímu ovládní zvládne práci s tímto programem každý i ten kdo neovládá německý či anglický jazyk.



Program podporuje snímky ve formátu JPG a RAW. Přes ikonu Open vybereme snímky pro skládání a případně je doplníme o tzv. dark snímky, které se používají pro odstranění šumu vzniklého termickou emisí elektronů v polovodiči. Tento šum vzniká teplotní závislostí snímače a zvýrazní se především při použití dlouhých expozic. Jedna z možností, jak tento druh šum odstranit, je pořízení temných snímků, které se následně odečtou při skládání fotografií v programu. Temný snímek vytvoříme tak, že objektiv zakryjeme a exponujeme stejně dlouhé expozice za stejných teplotních podmínek jako fotografie hvězdného pole.

Program zvládne zpracovat i několik stovek snímků najednou. Můžeme si vybrat dva rozdílné výstupy. Buď složení jedné fotografie, nebo využít možnosti

vytvoření videosekvence. Pro video je však nutné nastavit parametry formátu a kvality. Během skládání fotografií můžeme sledovat na monitoru vznikající výsledný snímek, který je možné v průběhu skládání i zastavit. Složenou fotografii lze uložit do formátu JPG, BMP nebo TIFF, případně tento formát upravit v libovolném grafickém editoru.

Program nabízí ještě jednu možnost jak potlačit šum ve fotografii. A tou je možnost před samotným skládáním fotografií zprůměrovat několik snímků. Pomocí tohoto řešení dojde k potlačení šumu pozadí výsledné fotografie snímku. Pro využití této funkce si zvolíme ikonu SIGMA.

3. Závěr

S programem Startrails pracuji několik let a s jeho pomocí lze velmi jednoduchou metodou pořídit velmi zajímavé fotografie hvězdné oblohy, viz příložené snímky.



INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

4. Použitá literatura

CHARLES, Jeffrey R. – PRACTICAL ASTROPHOTOGRAPHY, Springer – Verlag London Limited 2000, Printed in Great Britain, ISBN 1-85233-023-6

REEVES Robert – Wide-Field Astrophotography, Published by Willmann-Bell, Inc. P. O. BOX 35025, Richmond, Virginia 23235, Secon Printing June 2001, ISBN 0-943396-64-6

5. Kontakt na autora

Bc. Josef Jíra,
J. Knihy 69, Rokycany
josef.jira@seznam.cz

ODBORNÝ KEMP PŘÍRODOVĚDNÝCH OBORŮ FYZIKA

ALGORITMY NUMERICKÉ MATEMATIKY

NÁHRADA FUNKCE SPECIÁLNÍM POLYNOMEM

Václav KOHOUT

1. Úvod

V této části se budeme zabývat užitečnou třídou algoritmů, jde o skupinu algoritmů numerické matematiky. Samozřejmě, že se nebudeme zabývat celou škálou těchto úloh, ale zvolíme vhodné reprezentanty.

2. Náhrada funkce speciálním polynomem

a) Lagrangeův interpolační polynom. Pomocí tohoto polynomu řešíme úlohu proložení polynomu nejnižšího stupně, který prochází obecně zadanými body o souřadnicích $[x_1, y_1], \dots, [x_n, y_n]$. Celý polynom je nejvýše stupně $n-1$, kde n je počet bodů, které máme k dispozici.

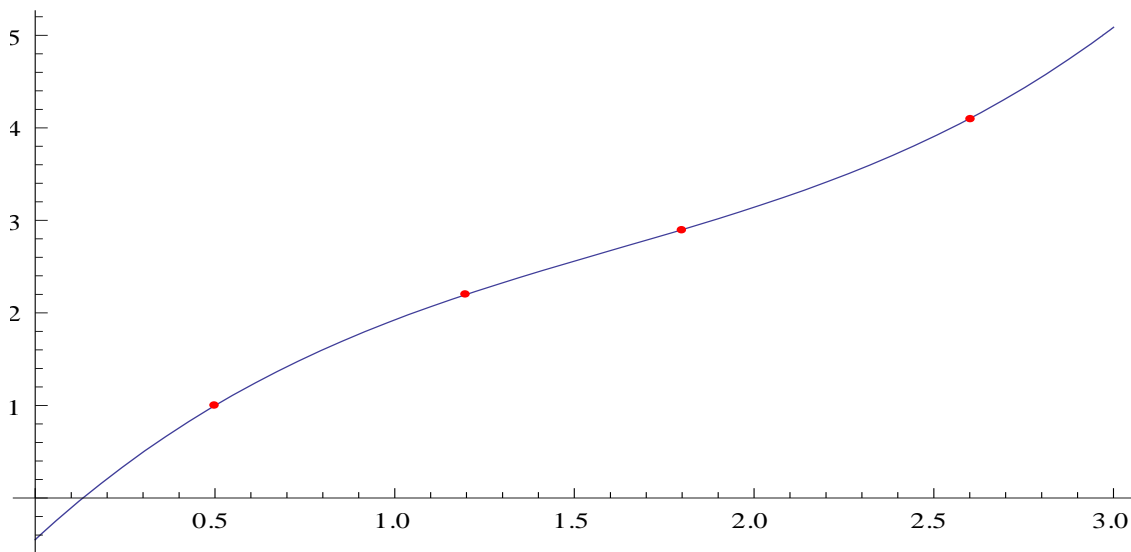
Tento polynom $L(x)$ je součtem elementárních polynomů $L_j(x)$ stupně $n-1$, které můžeme vyjádřit následovně: $L_j(x) = \frac{(x-x_1)\dots(x-x_{j-1})(x-x_{j+1})\dots(x-x_n)}{(x_j-x_1)\dots(x_j-x_{j-1})(x_j-x_{j+1})\dots(x_j-x_n)}$. Potom je

Lagrangeův polynom roven:

$$L(x) = \sum_{j=1}^n L_j(x).$$

Z povahy předchozího je celkem ihned zřejmý i zápis tohoto algoritmu do programu. Níže je uveden příklad proložení Lagrangeova polynomu body $[0,5;1]$, $[1,2;2]$, $[1,8;2,8]$; $[2,6;4]$. Například polynom $L_1(x) = 2,93878 - 5,21193x + 2,9304x^2 - 0,523286x^3$. Samotný Lagrangeův polynom $L(x) = 0,142857 + 1,88828x - 0,393773x^2 + 0,0915751x^3$. Dále je uveden obrázek polynomu s daty.

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ



Nevýhodou této interpolace je to, že přidání dalšího bodu, kterým chceme vést polynom vede opět k novým výpočtům. Tento problém odstraňuje následující typ interpolace.

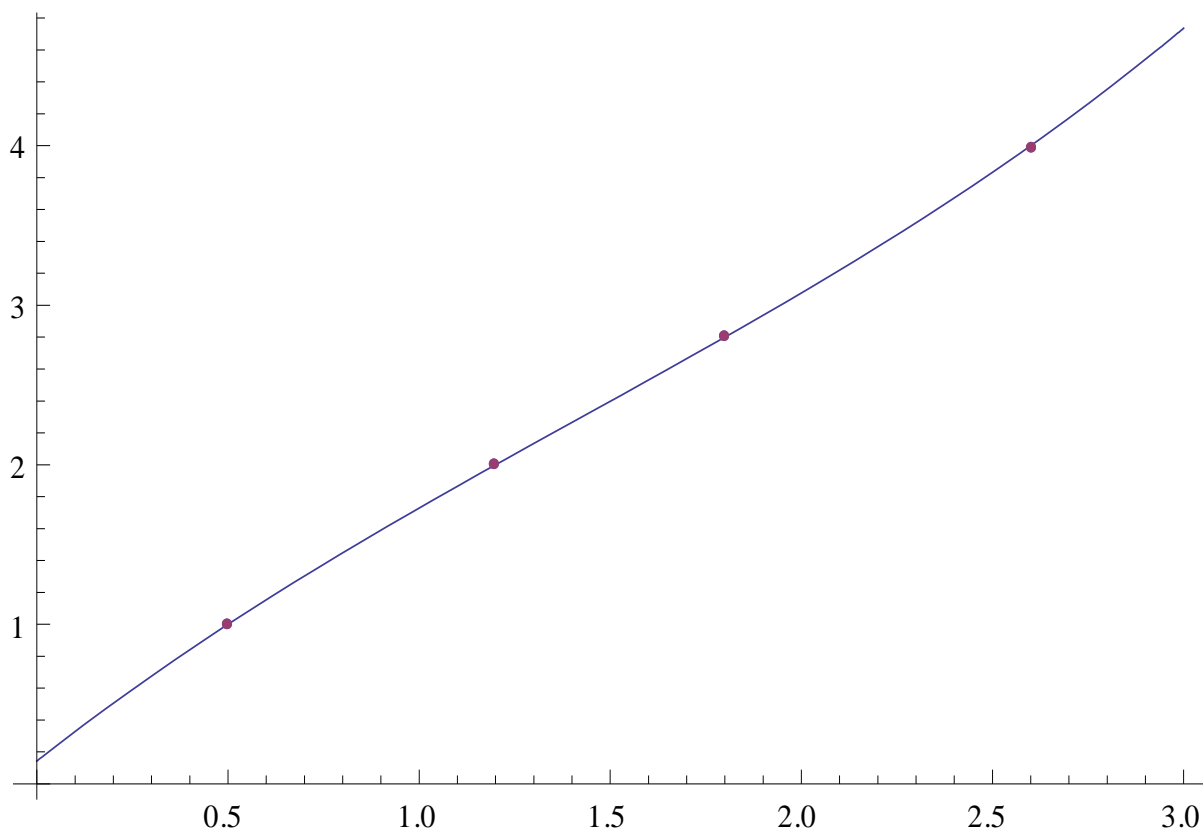
b) Newtonův interpolační polynom $N(x)$. Jde o speciální zápis polynomu, kdy nemusíme počítat $n-1$ základních mnohočlenů, ale vytváříme daný polynom najednou. Celý vtíp je v zápisu tohoto polynomu. Mějme tedy opět k dispozici body $[x_1, y_1], \dots, [x_n, y_n]$. Newtonův polynom budeme konstruovat následovně:

$$N(x) = a_0 + a_1 \cdot (x - x_1) + a_2 \cdot (x - x_1)(x - x_2) + \dots + a_n \cdot (x - x_1) \dots (x - x_n).$$

Z tvaru polynomu je zřejmé, že vypočítat neznámé hodnoty a_0, \dots, a_n není tak obtížné, jako v předchozím případě, protože jsou jednoduše závislé na známých hodnotách y_i . Pro ilustraci spočteme Newtonův interpolační polynom pro předchozí případ našich známých údajů.

Podle předchozího známe body $[0,5;1]$, $[1,2;2]$, $[1,8;2,8]$; $[2,6;4]$. Proložíme jimi podle předchozího návodu polynom. Jeho hodnota bude $N(x) = 1 + 1,42857 (-0,5+x) - 0,0732601 (-1,2+x) (-0,5+x) + 0,0915751 (-1,8+x) (-1,2+x) (-0,5+x)$. Po úpravě máme tvar tohoto polynomu rovnu $N(x) = 0,142857 + 1,88828 x - 0,393773 x^2 + 0,0915751 x^3$. Zobrazíme tento polynom i s body graficky:

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ



Při porovnání obou metod vidíme, že oba polynomy jsou totožné, avšak postup výpočtu Newtonova polynomu je podstatně jednodušší.

3. Závěr

Metoda náhrady funkce jednoduchými polynomy se vyskytuje v rámci celé numerické matematiky. Umožňuje práci i s takovými funkcemi, které mají neobvyklé vlastnosti.

4. Použitá literatura

WROBLEWSKI, P. Algoritmy. Datové struktury a programovací techniky. 1. vyd. Brno: Computer Press, 2004. 351 s. ISBN 80-251-0343-9 7178-463-X.

TOPFER P., Algoritmy a programovací techniky. Praha: Grada Publishing a. s., 2007. 322 s. ISBN 9788071963509

RALSTON A.: Základy numerické matematiky. Academia, Praha 1978, 635 s.

STOER, J. - BULIRCH, R., Introduction to numerical analysis. 1. vyd. New York - Heidelberg - Berlin : Springer-Verlag, 1980. 609 s. IX. ISBN 0-387-90420-4

5. Kontakt na autora

Václav Kohout RNDr.

ZČU, FPE, katedra matematiky, Klatovská 51, Plzeň

kohout@kmt.zcu.cz

ODBORNÝ KEMP PŘÍRODOVĚDNÝCH OBORŮ FYZIKA

VYUŽITÍ EXCELU K ŘEŠENÍ FYZIKÁLNÍCH ÚLOH

Pavel MASOPUST

1. Úvod

Přednáška ukázala, jak je možné řešit úlohy vedoucí k diferenciálním rovnicím i bez důkladné znalosti matematického aparátu v pozadí. K řešení byla použita Eulerova metoda a řešení bylo vizualizováno v MS EXCEL. Vzorově byla řešena úloha volného pádu s uvažovaným odporem prostředí.

2. Stat'

Řešení fyzikálních úloh s sebou nese nutnost použití rozličných matematických metod. Matematické znalosti studentů středních škol jsou limitované a tím je omezen i výběr úloh jež, lze při výuce použít. Jsme často svědky toho (ačkoli to se týká spíše až VŠ kurzu fyziky), že úlohy nejsou „dotaženy do konce“. Vyučující konstatuje, že jsme našli řešení úlohy (např. v podobě nějaké matematické funkce), a že tedy můžeme postoupit k dalšímu příkladu. Velká většina studentů si však řešení není schopna představit a neví tak, co vlastně spočítali a z pouhého pohledu na matematický zápis funkce nedokáží odhadnout reálné fyzikální důsledky řešení. To je jistě chyba.

Diskuze získaného řešení je stejně tak důležitá jako postup vedoucí k jeho zisku. Nakreslení průběhu na tabuli a do sešitu je sice jistou možností, avšak z didaktického hlediska stále není ideální. K diskusi výsledku patří i možnost „pohrát“ si s parametry úlohy. Tím je myšleno mít vizualizované řešení a mít možnost řešení ovlivňovat, např. změnou vstupních parametrů. Takovýto „komfort“ nám může poskytnou vizualizace řešení na osobním počítači. Ačkoli lze použít celou škálu specializovaných programů, jako např. MATLAB, je to nákladné jak na čas (potřebný k ovládnutí programu), tak na finance k pořízení licence programu.

Cílem tedy bude použít standardní počítačový program s jehož ovládnutím jsme obeznámeni a který již, velmi pravděpodobně, máme v počítači nainstalován. Výhodou je i to, že naši práci formálně, diferenciální rovnice studentům představit, nelze předpokládat hlubší pochopení vzájemných souvislostí. Studenti mohou intuitivně pochopit co znamenají diferenciální přírůstky proměnných atd., ale o úplném pochopení hovořit nelze.

Pomocí numerického výpočtu však lze provést řešení takovýchto úloh bez nutnosti zavádět aparát vyšší matematiky. Postup budeme demonstrovat na řešení základní úlohy z mechaniky – volném pádu tělesa.

Na středoškolské úrovni se úloha obvykle nekomplikuje zaváděním odporu prostředí a úloha může být zadána takto:

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Úloha: Těleso je vrženo svisle vzhůru (dolů) s počáteční rychlostí v_0 v tíhovém poli s tíhovým zrychlením g . Určete průběhy rychlosti a polohy vrženého tělesa jako funkce času.

Řešení: Jedná se o rovnoměrně zrychlený pohyb počáteční rychlostí v_0 , okamžitá rychlost tedy bude popsána studentům známým vzorcem $v = v_0 + gt$ a poloha $y = v_0t + \frac{1}{2}gt^2$.

Při úvodu do mechaniky jsou studenti seznámeni s Newtonovým zákonem síly $F = ma$. Tedy příčinou změny rychlosti tělesa (zrychlení) je síla. Lze si tedy představit takovou posloupnost:

$F \dots a \dots v \dots x$

Síla je příčinou zrychlení, zrychlení je příčinou změny rychlosti a poloha se mění v závislosti na rychlosti. Pozn. nad každou trojtečku by bylo možné napsat znak integrace, ale jelikož se tomuto pojmu v tomto postupu vyhýbáme, nepíšeme ho.

Na začátku je síla a zrychlení. Klasickým analytickým postupem vyjdeme z určeného tvaru zrychlení a řešením obyčejných diferenciálních rovnic určujeme rychlost a polohu jako funkci času. Pokud je již zrychlení závislé na např. rychlosti nebo poloze je takové řešení matematicky náročné, někdy i analyticky neřešitelné.

V našem jednoduchém případě je řešení snadné a bylo již uvedeno. Numerické řešení budeme demonstrovat opět na příkladu volného pádu, nyní ovšem se započítáním odporu prostředí. Celková síla která na padající těleso působí je $F = mg - kv$. Pro analytické řešení je potřeba řešit obyčejnou diferenciální rovnici $m \frac{dv}{dt} = mg - kv$, kde kv popisuje vliv odporu prostředí.

Řešením této rovnice je funkce $v = \frac{m}{k} \left(g - \left(g - \frac{m}{k} v_0 \right) e^{-\frac{k}{m}t} \right)$, v_0 je počáteční rychlost. Ačkoli řešení této diferenciální rovnice není složité, studentům středních škol není dostupné. Řešme nyní problém numericky.

Řešení je možné rozdělit na krátké časové okamžiky Δt (dt). Jednotlivé okamžiky označíme indexem i . Rychlost v čase t_{i+1} je ovlivněna zrychlením a rychlostí v čase t_i , tedy $v_{i+1} = v_i + a_i \Delta t$. Toto je již zápis vhodný pro Excel. Schematicky v tabulce:

t [s]	a [ms^{-2}]	v [ms^{-1}]
0	a_0	v_0
0+dt	a_1	$v_1 = v_0 + a_0 \cdot dt$
0+dt+dt	a_2	$v_2 = v_0 + a_0 \cdot dt + a_1 \cdot dt$
...

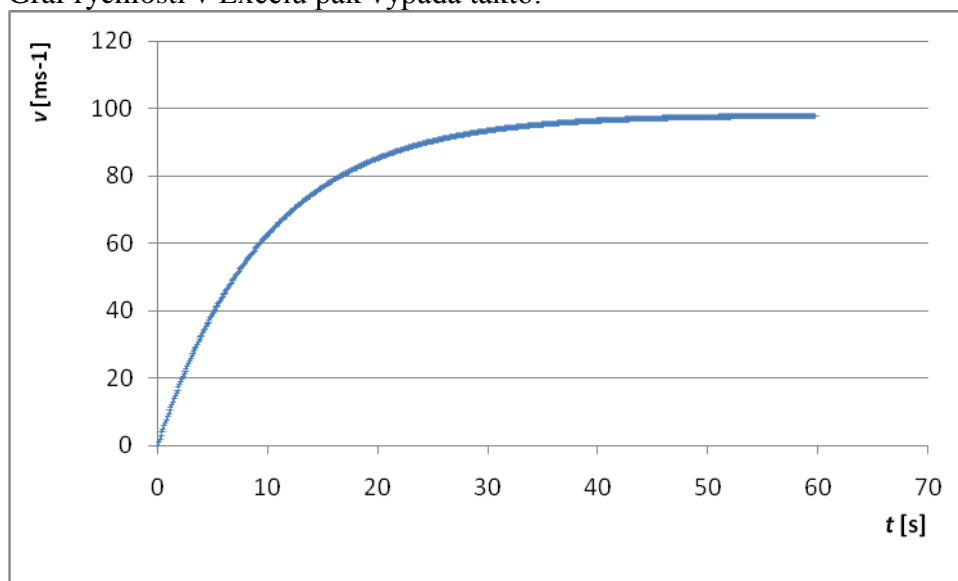
Tvoříme takovou tabulku – v prvním sloupci přibývá čas od nuly po kroku dt , v druhém sloupci je velikost zrychlení (v případě volného pádu bez odporu prostředí by zde bylo tíhové zrychlení g) a v třetím sloupci je rychlost, která je v každém kroku rovna předchozí rychlosti plus přírůstek – zrychlení v předchozím kroku krát dt . Tabulka pro řešení našeho příkladu (svislý vrh v prostředí s odporem kv) by vypadala následovně.

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

t [s]	a [ms^{-2}]	v [ms^{-1}]
0	$a_0 = g$	v_0
0+dt	$a_1 = g - k/m \cdot v_0$	$v_1 = v_0 + a_0 \cdot dt$
0+dt+dt	$a_2 = g - k/m \cdot v_1$	$v_2 = v_0 + a_0 \cdot dt + a_1 \cdot dt$
...

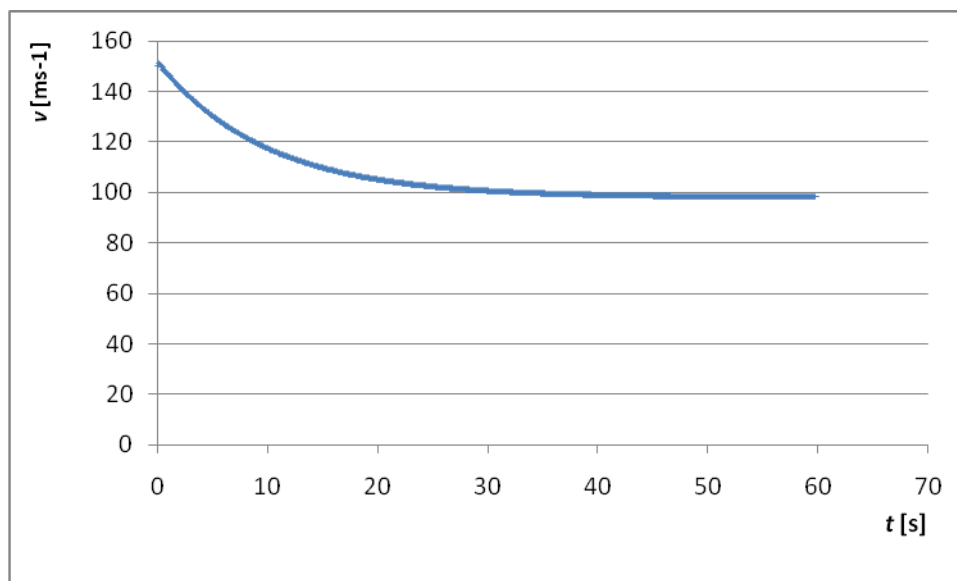
Pro získání dostatečného počtu kroků musí mít tabulka velký počet řádek. Pokud například $dt = 0,1$ s a potřebujeme 20 sekund řešení, musí mít tabulka 200 řádek.

Graf rychlosti v Excelu pak vypadá takto:



Ve shodě s analytickým řešením se funkce asymptoticky blíží k jisté hraniční rychlosti. Tuto rychlost snadno nalezneme uvědomíme-li si, že po dostatečně dlouhé době se odporová síla kv vyrovná s gravitační silou mg . Tedy: $mg = kv_{\max}$ a $v_{\max} = \frac{mg}{k}$. Pro graf na obrázku byly použity hodnoty $k = 0,1 \frac{Ns}{m}$, $m = 1kg$, $g = 9,81 ms^{-2}$, tedy hraniční rychlost $v_{\max} = \frac{9,81}{0,1} ms^{-1} = 98,1 ms^{-1}$, což je ve shodě s grafem. Pokud nakreslíme stejný graf s počáteční rychlostí překračující hraniční rychlost vypadá graf následovně:

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ



Rychlost tělesa se tak blíží k hraniční rychlosti „shora“. Popsaná metoda numerické řešení je takzvaná Eulerova metoda. Je metodou patrně nejjednodušší a současně i „nejprimitivnější“. Pro přesnější nebo rychlejší řešení bychom museli použít pokročilejší metody, např. metodu Runge-Kutta.

3. Závěr

Numerické řešení diferenciální rovnice může být snadnou cestou jak vyřešit analyticky obtížně řešitelné úlohy. Studenti si tak sami mohou ověřit správnost sestavení diferenciální rovnice popisující fyzikální systém a ověřit si své předpokládané chování systému. Řešení této úlohy přímo jako soubor .xls lze nalézt na <http://home.zcu.cz/~pmasop/kemp.xls>

4. Použitá literatura

TOPFER P., Algoritmy a programovací techniky . Praha: Grada Publishing a. s., 2007. 322 s. ISBN 9788071963509

5. Kontakt na autora

Pavel Masopust PhDr.
ZČU, FPE , katedra matematiky, fyziky a technické výchovy
Klatovská 51, Plzeň
pmasop@kmt.zcu.cz

ODBORNÝ KEMP PŘÍRODOVĚDNÝCH OBORŮ FYZIKA

VYUŽITÍ MATEMATIKY PŘI ŘEŠENÍ FYZIKÁLNÍCH ÚLOH – KVADRATICKÉ, EXPONENCIÁLNÍ A GONIOMETRICKÉ ROVNICE

Petr MAZANEC

1. Úvod

V přednášce bylo ukázáno využití matematického řešení kvadratických, exponenciálních a goniometrických rovnic při řešení fyzikálních úloh.

2. Stat'

Příklad 1

Kaskadér o hmotnosti $m=90$ kg, přivázaný k pružnému lanu, používanému na bungee-jumping, o tuhosti $k=50\text{N/m}$ a délce v nezátíženém stavu $l=30\text{m}$, skáče z vrcholu mostu, který je ve výšce h nad hladinou přehrady. Určete tuto výšku, jestliže ho pružné lano při pádu zastaví těsně nad hladinou a pak ho vymrští zpět nahoru. Zanedbejte odpor vzduchu při prvním pádu a předpokládejte, že lano při deformaci vyhovuje Hookovu zákonu.

Řešení:

Úlohu vyřešíme užitím zákona zachování mechanické energie, který platí při zanedbání odporu vzduchu.

Polohová energie kaskadéra v tíhovém poli Země na začátku pádu v poloze 1 se přemění na polohovou energii deformovaného lana v nejnižší poloze 2 při pádu brzděném natahujícím se pružným lanem. Nulovou hladinu polohové energie v tíhovém poli země volíme v poloze 2. V obou polohách je kinetická energie kaskadéra nulová.

Tedy platí:

$$E_1 = E_2$$

$$mgh = \frac{kx^2}{2}$$

Z geometrie obou poloh vyplývá vztah $h = l + x$, jehož dosazením do předchozí rovnice dostaneme kvadratickou rovnici pro prodloužení lana x při deformaci v poloze 2.

$$kx^2 - 2mgx - 2mgl = 0$$

Podmínka pro neznámé prodloužení x je

$$x > 0$$

Obecně můžeme řešení vyjádřit ve tvaru

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

$$x_{1,2} = \frac{mg \pm \sqrt{m^2 g^2 + 2mgkl}}{k}$$

Číselně vychází při dosazení $g = 9,81 \text{ ms}^{-2}$

$$x_1 = 54,7\text{m} \quad x_2 = -19,4\text{m}$$

Záporné řešení nesplňuje podmínku pro prodloužení a nemá fyzikální smysl, protože lano se nemůže při kmitu směrem vzhůru zkracovat.

Tedy maximální prodloužení lana je $x = 54,7\text{m}$ a výška mostu
 $h = l + x = 30\text{m} + 54,7\text{m} = 84,7\text{m}$.

Příklad 2

Odpor termistoru v digitálním teploměru s měřicím rozsahem $t \in \langle 0^\circ\text{C}; 100^\circ\text{C} \rangle$ je funkcí termodynamické teploty čidla T v kelvinech podle vztahu

$$R = R_B \cdot e^{\frac{B}{T}}$$

kde B a R_B jsou konstanty pro daný polovodičový materiál. Při teplotě 25°C jsme naměřili odpor termistoru 100Ω a při teplotě 25°C odpor 40Ω . Vypočítejte :

- konstanty B a R_B
- odpor termistoru při teplotě 100°C
- teplotu ve $^\circ\text{C}$, při které má termistor odpor 50Ω

Řešení:

Využijeme funkční předpis a matematického vztahu $\ln(e^x) = x$.

$$R_0 = R_B \cdot e^{\frac{B}{T_1}} \quad T_1 = 273,15\text{K}$$

$$R_{25} = R_B \cdot e^{\frac{B}{T_2}} \quad T_2 = 298,15\text{K}$$

$$R_{100} = R_B \cdot e^{\frac{B}{T_3}} \quad T_3 = 373,15\text{K}$$

$$R = R_B \cdot e^{\frac{B}{T}} \quad T \in \{273,15\text{K}; 373,15\text{K}\} \quad t = T - 273,15$$

Vydělením první a druhé rovnice dostaneme

$$\frac{R_0}{R_{25}} = e^x \quad \text{kde } x = \frac{B \cdot (T_2 - T_1)}{T_2 \cdot T_1}$$

Řešením této exponenciální rovnice logaritmováním obou stran rovnice přirozeným logaritmem podle výše uvedeného matematického vztahu dostaneme

$$x = \ln\left(\frac{R_0}{R_{25}}\right)$$

$$B = \frac{T_2 \cdot T_1}{T_2 - T_1} \cdot \ln\left(\frac{R_0}{R_{25}}\right)$$

Číselně vychází $B = 2985\text{K}$.

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Užitím B z první rovnice vyjádříme pomocí vztahu $\frac{1}{e^x} = e^{-x}$

$$R_B = \frac{R_0}{\frac{B}{e^{\frac{-B}{T_1}}}} = R_0 \cdot e^{\frac{-B}{T_1}}$$

Číselně vychází $R_B = 1,795 \cdot 10^{-3} \Omega$.

Dosazením B a R_B do třetí rovnice vypočítáme $R_{100} = 5,3 \Omega$.

Z funkčního předpisu vyjádříme

$$\frac{R}{R_B} = e^x \text{ kde } x = \frac{B}{T}$$

Řešením této exponenciální rovnice dostáváme

$$x = \ln\left(\frac{R}{R_B}\right)$$

$$T = \frac{B}{\ln\left(\frac{R}{R_B}\right)}$$

$$t = \frac{B}{\ln\left(\frac{R}{R_B}\right)} - 273,15$$

Číselně pro $R=50\Omega$ dostaneme $t = 18,5^\circ\text{C}$.

Příklad 3

Za jakou dobu t od počátku pádu se kaskadér v příkladu 1 dostane do nejnižší polohy, jestliže opět v tomto časovém intervalu zanedbáme odpor vzduchu?

Řešení:

Pád můžeme rozdělit na 2 úseky – volný pád na dráze $l = 30\text{m}$ než se napne lano za dobu t_1 a na něj navazující část netlumeného kmitu na dráze $x_1 = 54,7\text{m}$ za dobu t_2 . Celková doba pádu $t = t_1 + t_2$.

Ze vztahu pro dráhu volného pádu dostaneme

$$l = \frac{gt_1^2}{2}$$

$$t_1 = \sqrt{\frac{2l}{g}} = 2,47\text{s}$$

Těsně před napnutím lana má okamžitou rychlost $v_1 = gt_1 = 24,26\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$.

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Kmity kaskadéra se díky odporu vzduchu nakonec utlumí, a zůstane v klidu viset v rovnovážné poloze s prodloužením lana x_0 . V této poloze je tíhová síla svisle dolů v rovnováze se silou pružiny svisle vzhůru. Z toho odvodíme velikost x_0 .

$$F_G = F_P$$

$$mg = kx_0$$

$$x_0 = \frac{mg}{k} = 17,7m$$

V této rovnovážné poloze je okamžitá výchylka y z této polohy při kmitání nulová. Pokud orientujeme osu y svisle vzhůru, můžeme okamžitou výchylku y v čase t od začátku kmitu vyjádřit $y = x_0 - x$, kde x je okamžitě prodloužení v čase t .

Považujeme-li část kmitu z polohy $x = 0$ do polohy $x = x_1 = 54,7m$ za netlumený kmit přes rovnovážnou polohu $x = x_0 = 17,7m$, potom jeho amplituda výchylky je $y_m = x_1 - x_0 = 37m$.

Perioda netlumeného kmitu je

$$T = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{m}{k}} = 8,43s$$

a úhlová frekvence netlumených kmitů $\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{\sqrt{5}}{3} \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$.

Počáteční výchylka kmitajícího kaskadéra v čase $t = 0$ je $y_0 = x_0 = 17,7m$ a počáteční rychlost kmitání $v_0 = -v_1 = -24,26m \cdot \text{s}^{-1}$ (v_1 má opačný směr než osa y , a proto je záporná!).

Amplituda rychlosti $v_m = \omega y_m = 27,58m \cdot \text{s}^{-1}$.

Pro okamžitou výchylku y a okamžitou rychlost v kaskadéra při netlumeném kmitání platí tyto vztahy v závislosti na čase t :

$$y = y_m \cdot \sin(\omega t + \varphi_0)$$

$$v = v_m \cdot \cos(\omega t + \varphi_0)$$

Dosazením $t = 0$ a počátečních podmínek kmitu y_0 a v_0 dostaneme soustavu goniometrických rovnic pro počáteční fázi kmitu φ_0 .

$$\sin\varphi_0 = \frac{y_0}{y_m} = 0,4784 \quad \cos\varphi_0 = \frac{v_0}{v_m} = -0,8796$$

Řešení této soustavy leží v intervalu $(\frac{\pi}{2}; \pi)$ a je rovno přibližně $\varphi_0 = 2,64 \text{ rad}$.

Nyní již můžeme počítat dobu kmitu t_2 od okamžiku $t = 0$ do nejnižší polohy, kde $y = -y_m = -37m$ a $v = 0$. Pro tyto hodnoty okamžité výchylky a rychlosti dostáváme soustavu goniometrických rovnic s neznámou t a t_2 je nejmenší kladné řešení libovolné z těchto rovnic. Pro jednodušší výpočet si vybereme okamžitou rychlost, která je nulová v nejnižší poloze. Proto platí:

$$\cos(\omega t + \varphi_0) = 0$$

$$\omega t + \varphi_0 = \frac{\pi}{2} + k\pi \quad k \in \mathbb{Z}$$

Nejmenší kladné řešení dostaneme pro $k = 1$:

$$\omega t_2 + \varphi_0 = \frac{3\pi}{2}$$

$$t_2 = \frac{3\pi - 2\varphi_0}{2\omega} = 2,78s$$

Celková doba pádu do nejnižšího bodu je $t = t_1 + t_2 = 2,47s + 2,78s = 5,25s$.

3. Závěr

Ve třech příkladech bylo ukázáno využití matematického řešení kvadratických, exponenciálních a goniometrických rovnic ve fyzikálních úlohách.

4 Použitá literatura:

ŠEDIVÝ, P.: Teplotní závislosti fyzikálních veličin, knihovnička FO, studijní text

5 Kontakt na autora

Mgr. Petr Mazanec
Základní škola Sušice, Komenského 59
mpetr@seznam.cz

ODBORNÝ KEMP PŘÍRODOVĚDNÝCH OBORŮ FYZIKA

ÚLOHY ZE ŠKOLNÍCH KOL FO

Petr MAZANEC

1 Úvod

V přednášce bylo ukázáno řešení úloh z minulých ročníků fyzikální olympiády.

2 Stat'

Příklad 1 (51.ročník FO kategorie A – školní kolo)

Automobil (za jízdy po přímé trati)

Automobil má motor o maximálním výkonu $P_m = 95 \text{ kW}$ a jeho hmotnost s jednou osobou je $m = 1000 \text{ kg}$. K uvedení do pohybu odbrzděného automobilu se zařazeným neutrálem na vodorovné silnici musel přivolaný pomocník vyvinout ve vodorovném směru sílu o velikosti $F_0 = 120 \text{ N}$. Předpokládejte, že velikost odporové síly je popsána funkcí

$$F_t = Av^2 + F_0,$$

kde A je konstanta a v je velikost okamžité rychlosti.

- Řidič provedl experiment: vyjel na vrchol kopce, z něhož se přímočarý vozovka svažuje pod stálým úhlem $\alpha = 4,0^\circ$. Automobil po rozjezdu z kopce a po zařazení neutrálu dosáhl stálé rychlosti $v_1 = 72 \text{ km/h}$. Určete konstantu A .
- Jaký musí být výkon P_1 motoru, aby se automobil pohyboval stálou rychlostí $v_1 = 72 \text{ km/h}$ po vodorovné vozovce?
- Při jízdě stálou rychlostí musí motor pracovat se stálým výkonem. Sestrojte graf závislosti výkonu P motoru na rychlosti v a určete maximální rychlost v_m při výkonu P_m .

Řešení:

- Auto jelo rovnoměrně přímočaře stálou rychlostí z kopce dolů, protože složka tíhové síly $F = mgsin \alpha$ je v rovnováze s odporovou silou F_t .

$$F = F_t$$

$$mgsin \alpha = Av_1^2 + F_0$$

$$A = \frac{mgsin \alpha - F_0}{v_1^2} = 1,41 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-1}$$

- Okamžitý výkon $P_1 = F_t v_1 = (Av_1^2 + F_0) \cdot v_1 = v_1 mgsin \alpha = 14 \text{ kW}$

- Výkon motoru $P = F_t v = (Av^2 + F_0) \cdot v = Av^3 + F_0 v$ je kubickou funkcí rychlosti v .

Pomocí grafu funkce a její tabulky můžeme numericky zjistit, že

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

$$P = P_m = 95 \text{ kW}$$

$$\text{při maximální rychlosti } v = v_m = 40 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} = 144 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1} .$$

Příklad 2 (51.ročník FO kategorie B – školní kolo)

2. Pohyby v planetární soustavě

O planetě Mars zjistili astronomové na základě měření z povrchu Země, že siderická doba oběhu Marsu je $T_M = 1,881$ roku. V úloze vystačíme při řešení problémů s modelem, v němž se obě planety pohybují po kružnicích, jejichž střed splývá se středem Slunce.

- Určete poloměr kružnice, po níž se pohybuje střed Marsu, a rychlost pohybu středů obou planet při jejich pohybu kolem středu Slunce.
- Z údajů o pohybu Marsu kolem Slunce určete hmotnost Slunce.
- Jestliže se středy Slunce, Země a Marsu dostanou přibližně do téže polo-přímky, pak právě o půlnoci začneme naše pozorování. Za jak dlouho se tato situace bude opakovat? Tato doba se nazývá synodická oběžná doba.

Řešení:

- Podle 3. Keplerova zákona platí

$$\left(\frac{r_m}{r_z}\right)^3 = \left(\frac{T_m}{T_z}\right)^2$$

$$r_m = r_z \cdot \left(\frac{T_m}{T_z}\right)^{\frac{2}{3}} = 1,524 \text{ AU}$$

$$v_m = \frac{2\pi r_m}{T_m} = 24,1 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1}$$

$$v_z = \frac{2\pi r_z}{T_z} = 29,8 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1}$$

- Gravitační síla, kterou působí Slunce o hmotnosti M na Mars o hmotnosti m je silou dostředivou, která způsobuje pohyb Marsu po kružnici o poloměru $r = r_m$ stálou rychlostí $v = v_m$.

$$F_g = F_d$$

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

$$\frac{\kappa m M}{r^2} = \frac{m v^2}{r}$$

$$M = \frac{v^2 r}{\kappa} = 1,99 \cdot 10^{30} \text{ kg}$$

- c) Synodická úhlová rychlost je rovna rozdílu úhlových rychlostí Země a Marsu při oběhu kolem Slunce. Synodická oběžná doba odpovídá této úhlové rychlosti a je to perioda dvou po sobě jdoucích opozic nebo konjunkcí Marsu a Země se Sluncem, kterou naměří pozorovatel na Zemi.

$$\omega_s = \omega_z - \omega_m$$

$$T_s = \frac{T_z \cdot T_m}{T_m - T_z} = 2,135 \text{ roku}$$

Příklad 3 (51.ročník FO kategorie C – školní kolo)

1. Macocha

Z okraje vyhlídkové plošiny Macochy vrhl chlapec svisle dolů kámen s počáteční rychlostí o velikosti $5,0 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$. Za dobu $5,20 \text{ s}$ od začátku vrhu byl slyšet dopad kamene na vodní hladinu. K vrhu došlo při teplotě vzduchu $20 \text{ }^\circ\text{C}$, při níž se zvuk ve vzduchu šíří rychlostí $343 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$. Určete

- výšku horního okraje propasti nad vodní hladinou a dobu od začátku vrhu, za kterou dopadl kámen na vodní hladinu,
- velikost rychlosti, s jakou dopadl kámen do vody.

Odpor vzduchu zanedbejte.

Řešení:

Kámen při pádu s počáteční rychlostí v_0 padal do propasti po dobu t_1 na dráze $s = h$ a při dopadu do vody měl rychlost v . Pro jeho dráhu a rychlost platí:

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

$$v = v_0 + gt_1$$

$$s = h = v_0 t_1 + \frac{gt_1^2}{2}$$

Po nárazu kamene na hladinu vody se šíří vlny rychlostí v_1 rovnoměrně přímočaře po stejné dráze

$$s = h = v_1 \cdot t_2$$

kde t_2 je doba pohybu zvukové vlny k chlapci.

Ze zadání plyne, že $t_1 + t_2 = t = 5,20s$.

Matematickým řešením výše uvedených rovnic (3 lineární a 1 kvadratická) vypočteme všechny neznámé veličiny:

$$t_1 = 4,80s \quad t_2 = 0,40s \quad h = 140m \quad v = 52m \cdot s^{-1} = 187km \cdot h^{-1}$$

3 Závěr

Bylo provedeno řešení tří fyzikálních úloh, zadaných v 51. ročníku této soutěže v kategoriích A, B a C ve školním kole.

4 Použitá literatura:

Zadání školního kola FO v 51.ročníku této soutěže, [www-stranky ÚV FO](http://www-stranky.uvfo.cz)

5 Kontakt na autora

Mgr. Petr Mazanec
Základní škola Sušice, Komenského 59
mpetr@seznam.cz

ODBORNÝ KEMP PŘÍRODOVĚDNÝCH OBORŮ FYZIKA

INTELIGENTNÍ MĚŘICÍ PŘÍSTROJE

Josef PETŘÍK

1 Úvod

Cílem příspěvku je ukázat, že je možné vysvětlit alespoň základní principy funkce digitálních i inteligentních virtuálních přístrojů například pouze ze znalostí ohmova zákona nebo i jen logickými úvahami.

2 Stat'

Digitálně-analogový převodník

Prvním zařízením které tvoří součást moderních počítači řízených výukových systémů je tzv. digitálně analogový převodník (zkráceně D/A).

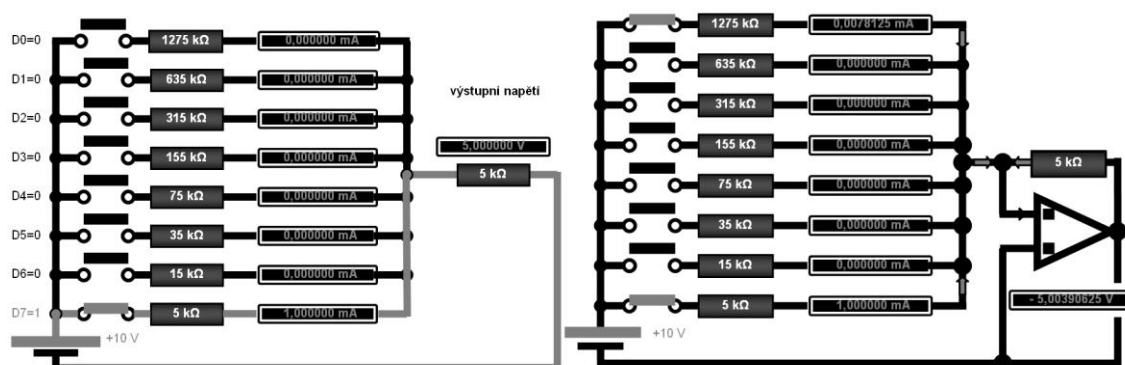
Jde o zařízení, které v *nejjednodušším případě* vytvoří na svém výstupu stejnosměrné elektrické napětí požadované polarity úměrné zadanému číslu. Je to vlastně programovatelný inteligentní regulovatelný zdroj stejnosměrného napětí.

Toto číslo se může zadat buď přímo přes klávesnici napsáním velikosti požadovaného napětí, nebo například pomocí myši posuvem jezdce tzv. scrollbaru na obrazovce monitoru.

Ale je v současné době technicky možné zadat velikost požadovaného napětí i hlasově, tj. uživatel řekne, že požaduje napětí plus 12 V a na výstupu digitálně analogového převodníku se toto napětí skutečně objeví.

V přednášce je ukázáno, jakým způsobem se realizuje toto kouzlo, že se z napsaného nebo vysloveného čísla stane elektrické napětí.

Na obrázku je principální schéma převodníku.

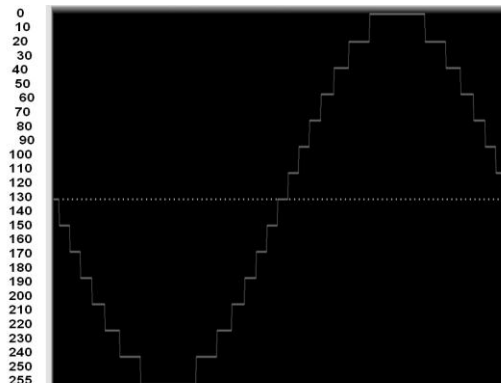
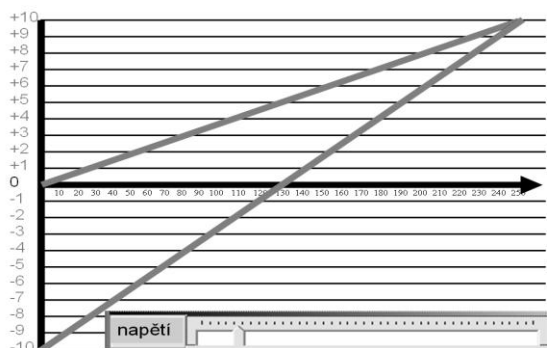


D/A převodník jako generátor funkcí

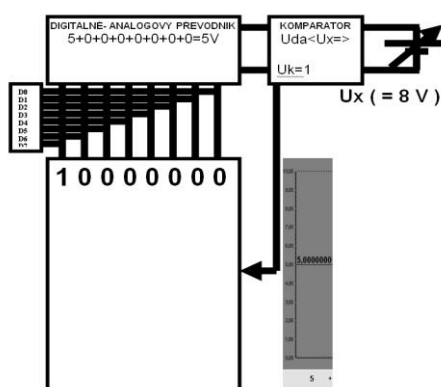
Vypočtením funkčních hodnot pro určité velikosti nezávisle proměnné harmonického (sinusového) průběhu s určitou amplitudou (např. 128) lze po zaokrouhlení a převodu do binární soustavy je posílat postupně po určitých časových okamžicích na vstup D/A převodníku a tím získat zdroj harmonického napětí. Změnou časové prodlevy mezi jednotlivými vzorky lze nastavovat frekvenci vytvářeného napětí. „Zuby“ na průběhu lze

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

vyhladit tzv. restitučními filtry. Lze vytvářet i jiné než harmonické průběhy pokud je dovedeme analyticky vyjádřit.



Analogově-digitální převodník pracující metodou postupné aproximace



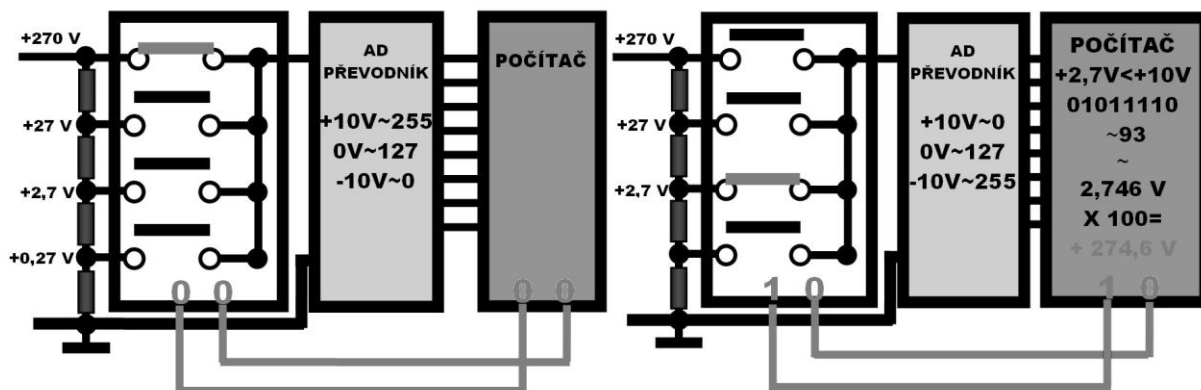
Obrácený postup tj. převést elektrické napětí na číslo odpovídající jeho velikosti se děje v zařízeních nazývaných analogově digitální převodníky (zkráceně A/D) a lze jej realizovat několika způsoby. Jedna z možných metod je tzv. postupná aproximace, česky postupné přibližování.

Blokové schéma převodníku obsahuje již dříve uvedený D/A převodník, jehož digitální vstupy jsou spojeny s tzv. registrem postupných aproximací, který podle určitého pravidla generuje binární čísla do D/A převodníku. Výstup D/A převodníku je přiveden do jednoho vstupu obvodu nazývaného komparátor (česky

dostí strašidelně porovnávač), do druhého vstupu pak měřené napětí, které chceme převést na číslo. Výsledkem porovnání je logický signál, který je veden do registru postupných aproximací. V přednášce bude vysvětlen princip převodu metodou postupné aproximace.

Inteligentní měřicí přístroje

Na základě znalosti čísla úměrného měřenému napětí je možné vytvořit například inteligentní voltmetr s automatickým přepínáním rozsahů, automatickým určením měření stejnosměrného nebo střídavého napětí, automatickým určením polarity při měření ss napětí a výpočtem skutečné (pravdivé) efektivní hodnoty napětí případně frekvence při měření st napětí.



INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Blokové schéma zařízení je na obrázku a obsahuje v našem případě dvoubitový analogový multiplexer s napět'ovým děličem ve funkci přepínače rozsahů, vlastní A/D převodník s upravenou převodní charakteristikou kde napětí -10 V odpovídá číslo získané převodem 255, napětí 0 V číslo 128 a napětí $+10\text{ V}$ číslo 0. Číslo v binární soustavě je přivedeno do počítače, který jej vyhodnocuje a na základě jeho velikosti ovládá vstupní multiplexer (přepínač rozsahů).

Na základě znalosti čísla úměrného měřenému napětí je možné vytvořit také inteligentní osciloskop s automatickým přepínáním rozsahů, automatickým určením správné stupnice na svislé ose, automatickým určením časové stupnice a měřením frekvence.

3 Závěr

Na středních školách se studenti setkávají s digitálními měřicími přístroji a nebo s počítači řízenými virtuálními měřicími přístroji jako v systémech ISSSES, PHYWE, NTL a dalších, které se ve stále větší míře používají ve výuce fyziky.

Naprostá většina studentů (vyjma studentů odborných a středních škol technického směru), nemá žádnou představu o principech těchto zařízení, nikdo jim nevysvětlil, jak se z elektrického napětí stane číslo, které vyjadřuje přímo velikost měřené fyzikální veličiny, tedy například napětí nebo proudu.

Panuje totiž obecně představa, že se jedná o zařízení, která jsou tak složitá, že je není možné na úrovni základních a hlavně středních škol rozumně vysvětlit na základě znalostí, které žáci a studenti dosud mají.

Cílem příspěvku je ukázat, že tomu tak není, že je možné vysvětlit alespoň základní principy jejich funkce například pouze ze znalosti ohmova zákona nebo i jen logickými úvahami.

4 Použitá literatura

Čtvrtník V.: Elektronické měřicí systémy I,-II, VŠSE Plzeň 1991

Kocourek, P.: Číslíkové měřicí systémy, ČVUT PRAHA 1994

5 Kontakt na autora

Josef Petřík.

ZČU, FPE, KMT, Klatovská 51, Plzeň

Patrik@kmt.zcu.cz

ODBORNÝ KEMP PŘÍRODOVĚDNÝCH OBORŮ FYZIKA

FYZIKA VE VĚDECKOFANTASTICKÉM FILMU

Jan PLZÁK

1 Úvod

V přednášce je kladen důraz na kritické fyzikální myšlení studentů. V některých soudobých filmech zabývajících se sci-fi či fantasy tématikou lze nalézt spoustu fyzikálních nepřesností či naprostých absurdit.

Během přednášky je puštěno několik ukázek s následným rozбором.

2 Stat'

V ukázce z filmu Počátek (Inception, Christopher Nolan, 2010) je popisován vliv změny tíhové energie na lidské vnímání. Je zde také popsán vliv perspektivy a nepřesnost ve filmovém zpracování díla. V poslední části je popisován vliv akcelerace při výbuchu bomby na osoby ve výtahu.

V ukázce Riddick: Kronika temna (The Chronicles of Riddick, David N. Twohy, 2004) je rozebráno chlazení vesmírné lodi na oběžné dráze s porovnáním při přistání. Ve filmové ukázce je přehnan vliv záření slunce. V druhé ukázce je popisován elektromagnetický vliv záření a na atmosféru se světelnými efekty. Následuje ukázka tepelných účinků slunce na lidské tělo při skoku a pohybu na přivrácené straně. Skok je rozebírán i z pohledu zákona zachování energie a hybnosti, kterou filmová ukázka popírá. Poslední část je věnována závěrečnému boji, kde jsou některé bojové scény vytvořeny pro efekt a popírají možnosti rozsahu lidských kloubů.

V ukázce z filmu Wanted (Wanted, Timur Bekmambetov, 2008) je ukázána nesmyslnost scény s výstřelem do kruhu, neboť po vystřelení kulky z hlavně pistole na kulku již dále nepůsobí žádné síly (krom odporové). Scéna s výskokem z okna je rozebrána jak z pohledu nadsazené počáteční rychlosti tak z pohledu trajektorie skoku.

V ukázce z filmu Avatar (Avatar, James Cameron, 2009) je nastíněno možné fyzikální řešení létajících skal a neustálé vytékající vody. Samotná existence Pandory jakožto měsíce obří planety je probrána z astronomického hlediska s důrazem na délku trvání dne, noci a případných zatmění.

V ukázce z filmu Barva kouzel (The Colour of Magic, Terry Pratchett, Vadim Jea, 2008) je rozebráno gravitační působení na zeměploše s jeho fyzikálními důsledky a dále pak rozbor optických jevů na okraji zeměplochy, kde je ve filmové ukázce chybně vytvořená duha.

3 Závěr

V současnosti je divák brán jako pasivní konzument předkládaných děl filmových společností. Je velmi důležité k filmům nepřistupovat zcela pasivně, neboť tak je možné divákovi předložit chybný či pokroucený pohled na svět. Na filmových dílech je možné si cvičit svůj postřeh a učit se kritickému myšlení, které může mladému člověku do budoucna podhalit leccos skrytého a nevědomky tak většinou společnosti přijímaného.



INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

4 Kontakt na autora

Mgr. Ing. Jan Plzák
ZČU, FPE ,KMT , Klatovská 51, Plzeň
janplzak@kmt.zcu.cz

ODBORNÝ KEMP PŘÍRODOVĚDNÝCH OBORŮ FYZIKA

ZÁKLADY ZPRACOVÁNÍ FYZIKÁLNÍCH MĚŘENÍ

Jan PLZÁK

1 Úvod

Přednáška je rozdělena na dvě části.

První část je věnována výpočtu chyb kvantitativně naměřených výsledků. V této části se studenti seznámí s matematickým aparátem používaným při zpracování výsledků naměřených hodnot.

Druhá část je věnována prezentaci výsledků. Zde se studenti seznámí s technikou správné prezentace a s kompozicí laboratorního měření.

2 Stat'

Při jakémkoliv měření vždy dochází k chybám a to buď k chybám náhodným, nebo k chybám systematickým. Náhodná chyba je taková, která vzniká působením velmi rozmanitých přesně nedefinovatelných vlivů. Tím mohou být nedokonalosti tvarové měřeného objektu, či nedokonalosti měřících zařízení. Naproti tomu chyby systematické ovlivňují výsledek zcela určitým způsobem a jsou často pravidelné.

Je třeba již během příprav měření rozlišit a zjistit, které chyby mohou být systematické. Tyto chyby je leckdy velmi obtížné odstranit.

Naproti tomu odstranit náhodné chyby je většinou v moci matematické statistiky. K tomuto se využívá výpočtu relativních chyb a průměrných hodnot. U více rozměrných měření pak korelací a aproximací. U těchto měření je velmi důležité mít na paměti, že korelační koeficient musí být velmi malý, jinak naměřené hodnoty spolu nemusí vůbec souviset. Velmi často je vhodné výpočty pomocí statistické matematiky dělat na počítači v tabulkovém procesoru, neboť tím si můžeme ušetřit spoustu času. Excel či Calc jsou právě k tomuto vhodnými nástroji.

Pomineme-li matematické zpracování, je snad ještě důležitější umět správně formálně zapisovat výsledky.

Zde je důležitá jak správná kompozice obsahu laboratorní práce tak i formální správnost zápisu jednotek, proměnných a hodnot. Po formální stránce je důležité držet se norem.

3 Závěr

U studentů je v dnešní době největší důraz kladen na formální správnost prezentace výsledků. Tento příspěvek je koncipován právě tak, aby byl student poučen jak se vyvarovat některým chybám při psaní laboratorní zprávy jak po formální tak i po obsahové stránce.



INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

4 Použitá literatura

Vybíral Bohumil. *Zpracování dat fyzikálních měření*. [on-line]. [cit. 20.8.2011]. Dostupné z: <http://fo.cuni.cz/texty/mereni.pdf>

Grendel Milan. *Ako správne písať matematické vzťahy, fyzikálne veličiny a jednotky, chemické značky a rovnice*. [on-line]. [cit. 20.8.2011]. Dostupné z:

http://www.studentmatematiky.own.cz/ako_pisat_matematicke_znacky.pdf

5 Kontakt na autora

Mgr. Ing. Jan Plzák

ZČU, FPE ,KMT , Klatovská 51, Plzeň

janplzak@kmt.zcu.cz

ODBORNÝ KEMP PŘÍRODOVĚDNÝCH OBORŮ FYZIKA

FYZIKA A POČÍTAČE

NĚKTERÉ JEVY VLNOVÉ OPTIKY – HOLOGRAFIE

Jitka PROKŠOVÁ

1 Úvodní poznámky

Přednáška se zabývá obecnými poznatky z vlnové optiky (jevy interference, difrakce a polarizace), dále některými méně známými jevy (např. Quételetovy kruhy) a problematikou holografie.

Důraz je kladen také na průchod světla prostředím – tzn. na jevy týkající se absorpce, rozptylu a rozkladu světla.

2 Světlo jako elektromagnetická vlna

Účastníci kempu (studenti SŠ různých ročníků) jsou vyzváni, aby vysvětlili, co je světlo. Jejich pohled na tuto problematiku ovlivňuje dosavadní výuka fyziky i vlastní zkušenosti. Následuje rozbor historických ideí a především důkazy, proč současné hledisko vystihuje nejlépe tzv. duální model. Světlo lze v určitých jevech chápat jako vlnu (makroskopické jevy spojené se šířením světla prostředím) a v jiných jako částici (fotoefekt aj. – především jevy spojené s interakcí světla a látky)

2.1 Polarizace světla

Na několika experimentech s polarizačními fóliemi, turmalínovými klíšťkami, krystalem islandského vápence a celofánovou hvězdicí je studentům prokázána základní vlastnost viditelného záření – příčné povaha světelných vln. (1)

2.2 Interference světla

Na vybraných experimentech s laserem, štěrbinami (pevnými i nastavitelnými), jsou studentům prokázány jevy, které vznikají v důsledku skládání (interference) světelných vln. Jako zajímavost je v této části uveden pokus, který dokazuje přítomnost tzv. Quételetových kruhů. (2)

2.3 Difrakce světla

Ohyb na překážce je dalším jevem, který vypovídá o vlnové povaze světla. Jsou vysvětleny příčiny vzniku ohybu na štěrbině, dvojštěrbině a mřížce, dále na drátu a hraně. Všechny popsané jevy jsou demonstrovány prakticky.

Jako příklady konkrétních vlnových vlastností světla jsou zmíněny také některé jevy atmosférické optiky: halové jevy, duha, glórie, perleťová oblaka a mnoho dalších

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

atmosférických jevů. Účastníci kempu se seznámí s podstatou zmíněných jevů, budou detailně rozebrány příčiny jejich vzniku a barevnosti. (1)

2.4 Úvod do holografie

Holografie je jednou z nejvíce se rozvíjejících oblastí vlnové optiky. Účastníci kempu se seznámí s teoretickým rozbohem různých typů hologramů (transmisní, reflexní, duhový, aj.) a s možnostmi jejich uplatnění v praxi. Kromě jiných experimentů jsou předvedeny i ukázky reflexního hologramu. (2)

3 Závěr

Cílem přednášky je seznámit účastníky kempu s vlastnostmi a vlnovou podstatou světla a na vybraných experimentech ukázat některé jevy polarizace, difrakce a interference. Konkrétní příklady pak jsou demonstrovány na holografických jevech a některých jevech atmosférické optiky.

4 Použitá literatura

- (1) FUKA, B., HAVELKA, F. Optika a atomová fyzika I. Optika, SPN Praha 1961
- (2) MALÝ, P.: Optika, Nakladatelství Karolinum Praha 2008

5 Kontakt na autora

Jitka Prokšová, RNDr. Ph.D.
OF KMT FPE ZČU
proksovj@kmt.zcu.cz

ODBORNÝ KEMP PŘÍRODOVĚDNÝCH OBORŮ FYZIKA

NEJVĚTŠÍ TELESKOPY

Ondřej TRNKA

1 Úvod

Dalekohled je základní a hlavní pomůckou praktické astronomie. Od jeho objevu a prvního použití v astronomii uběhlo již více než 400 let a dalekohledy si velmi rychle vydobily zásadní a nezastupitelné postavení mezi astronomickými přístroji. Postupem času se vyvíjely, zdokonalovaly a specializovaly.

2 Stat'

2.1 Mezníky ve vývoji optických dalekohledů

Původní **Galileův** (či **holandský**) **dalekohled** byl brzy nahrazen dokonalejším **Keplerovým dalekohledem**. V roce 1668 Isaac Newton konstruuje první **zrcadlový dalekohled** (dnes **Newtonův**), který je bez barevné vady a o čtyři roky později Laurent Cassegrain vyrábí **Cassegrainův dalekohled**.

Čočkové dalekohledy postupně prochází dalšími úpravami. okolo 1730 Chester Moore Hall vyrábí první dvojčočkový objektiv, který kombinací dvou druhů skel potlačuje barevnou vadu, říká se mu **achromát** později jsou vyvinuty i složitější varianty (**aplanát**, **apochromát**, atd.). V roce 1886 Lord Rayleigh poprvé potahuje čočky **antireflexními vrstvami** a zvyšuje tím optickou propustnost skla. Pro zlepšení komfortu pozorovatele je v roce 1883 v paříži postaven první lomený **dalekohled „Coudé“**, jeho objektiv se otáčí za oblohou, ale okulár a s ním i pozorovatel zůstávají na jednom místě.

K dalekohledům se připojuje také řada dalších přístrojů. Veliký význam přinesl **spektroskop**, s jehož pomocí v letech 1814 – 1815 Joseph von Fraunhofer objevil spektrální čáry a dal základ moderní spektroskopii. Po vynálezu **fotografické emulze** se fotoaparáty začaly používat i v astronomii a dalekohledy se staly jejich objektivy. Fotografie znamenala veliký zlom v astronomii, pro její účely byla navržena i řada speciálních fotografických dalekohledů: 1030 – **Schmidtova komora**, 1941 – **Maksutova komora**. V roce 1934 byl vynalezen elektronkový **fotonásobič**, jež dokázal zaznamenat i světlo velmi slabých zdrojů. Od roku 1983 jsou pak používány známé **CCD senzory**, vynalezené v roce 1969 při vývoji nových počítačových pamětí.

Od poloviny 20. století se vyvíjejí také nové druhy zrcadel velikých dalekohledů. Nejdříve bylo vyrobeno odlehčené **žebrované zrcadlo**, dále pak **tenká zrcadla** a **zrcadla segmentová**, oboje musí být vybavena **systémem aktivní optiky**. Zvláštní místo mají **tekutá zrcadla**, která jsou levná, ale mají řadu nevýhod.

Jedněmi z posledních vymožeností nejnovějších observatoří jsou **systémy adaptivní optiky**, korigující vady atmosféry, **optické interferometry**, spojující více dalekohledů dohromady

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

kvůli zlepšení rozlišovací schopnosti a systémy **víceobjektové spektroskopie**. Elegantní, ale také drahé řešení je vypuštění **robotický dalekohled** umístěný **nad hranicí atmosféry**.

2.2 Velké dalekohledy minulosti i současnosti

Velké dalekohledy byl vždy výjimečné. Nejen že na nich se uplatňovaly téměř všechny zásadní technické novinky ve vývoji dalekohledů, ale díky jejich parametrům to byly a jsou přístroje předurčené k zásadním objevům. Aplikace technických novinek právě na největších přístrojích jasně prokazovala jejich výhody, či nedokonalosti.

V úvodu části jsou zmíněny historické dalekohledy **Heveliův**, **Herschelův**, **Clarkův refraktor**, **Hookerův 100 palcový reflektor** a **Haleův 200 palcový reflektor**. Některé z těchto dalekohledů jsou dosud používány, ovšem až po technické renovaci.

Z moderních dalekohledů zmiňme Ruský **Balšoj Teleskop Azimutalnyj (BTA)**, **New Technology Telescope NTT** (La Silla v Chile), **Švédský sluneční dalekohled SST** (La Palma, Kanárské ostrovy), **Hubbleův vesmírný dalekohled HST**, kroužící na oběžné dráze okolo Země, dvojice **Keckových dalekohledů** na vrcholku sopky Mauna Kea na Havaji, dvojice identických dalekohledů **Gemini North** (Mauna Kea, Havaj) a **Gemini South** (Cerro Pachón, Chile), komplex čtveřice velkých dalekohledů **VLT** (Cerro Paranal, Chile), **Velký binokulární dalekohled LBT** (Mt. Graham, USA), **Hobby-Eberlův dalekohled HET** (McDonald observatory, Texas), jeho téměř dvojice **Jihoafrický veliký dalekohled SALT** (Sutherland, JAR) a dosud největší samostatný optický dalekohled **Grand telescopio Canaria GTC** (La Palma, Kanárské ostrovy). Tyto dalekohledy umožňují získávat informace o našem vesmíru v takové kvalitě, o které se lidstvu ještě před několika desítkami let ani nesnilo. Většina z nich patří do skupiny tzv. velkých dalekohledů, budovaných od 90. let minulého století. Jejich průměr se pohybuje okolo 8 – 12 metrů a mohou obvykle vykonávat různé druhy pozorování rozličnými přístroji.

2.3 Na co se můžeme těšit

V následujících 10 – 15 letech by měla vzniknout skupina ještě větších a výkonnějších dalekohledů, kterým se bude říkat velmi veliké, aby se odlišily od těch, kterým dnes říkáme veliké. Půjde o dalekohledy s průměrem objektivů od 20 do 40 metrů. Očekáváme, že tyto obří přístroje způsobí další revoluci v našem poznání vesmíru, neboť jejich výkon bude mnohonásobně převyšovat i ty největší dalekohledy dneška. Vzhledem k jejich obrovské ceně a celkové náročnosti obsluhy těchto dalekohledů nebude mnoho. Nyní je celkem jisté, že bude postaven **Velký Magelanův dalekohled GMT** (Las Campanas Observatory, Chile). Jeho hlavním investorem je USA, plocha objektivu bude odpovídat jednomu zrcadlu o průměru 21,4 m a Průměr bude odpovídat 24,5 m. Dále bude postaven **Evropský Extrémě veliký dalekohled E-ELT** (Cerro Amazonas, Chile), jehož primární zrcadlo bude mít průměr 39,3 m. Bude se tak jednat o zdaleka největší optický dalekohled světa.

Chystá se i stavba řady menších, ovšem výkonných dalekohledů, například **Large survey synoptic telescope LSST**, s průměrem přes 8 metrů, jež bude schopen propátrat celou oblohu během tří nocí. Měl by se stát jedním z hlavních přístrojů pro vyhledávání komet a planetek.



INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

3 Závěr

Přednáška slouží jako náhled do přístrojové techniky optické astronomie, rozhodně si neklade za cíl výčet všech velkých dalekohledů, či podrobné vysvětlení jejich funkce.

4 Použitá literatura

GREGO, P. – MANNION, D. Galileo and 400 Years of Telescopic Astronomy. New York – Dordrecht – Heidelberg – London : Springer 2009. 300 s. ISBN 978-1-4419-5570-8

5 Kontakt na autora

Ondřej Trnka Bc.

Hvězdárna a planetárium Plzeň, U Dráhy 11, Plzeň

trnka@plzen.eu

ODBORNÝ KEMP PŘÍRODOVĚDNÝCH OBORŮ FYZIKA

MEZINÁRODNÍ FYZIKÁLNÍ OLYMPIÁDA

Martin BUCHÁČEK

V červenci letošního roku bylo thajské hlavní město Bangkok dějištěm 42. mezinárodní fyzikální olympiády. Soutěže se zúčastnilo 397 studentů z 86 států světa. Českou republiku reprezentovalo pět soutěžících, z nichž dva byli zástupci Plzeňského kraje:

- **Ondřej Bartoš**, Gymnázium ve Žďáru nad Sázavou
- **Martin Bucháček**, Gymnázium Lud'ka Pika v Plzni
- **Stanislav Fořt**, Gymnázium Pierra de Coubertina v Táboře,
- **Hynek Kasl**, Gymnázium v Plzni, Mikulášské náměstí
- **Jakub Vošmera**, Gymnázium Matyáše Lercha v Brně

Doprovázeli nás dva pedagogičtí vedoucí, pracovníci Univerzity Hradec Králové: **Prof. Ing. Bohumil Vybíral, CSc.** a **RNDr. Jan Kříž, Ph.D.** Na mezinárodní olympiádu jsme byli vybráni na základě výsledků krajských kol, celostátního kola a výběrového soustředění, které se konalo v dubnu v Hradci Králové.

V sobotu 9.7. jsme se sešli v terminálu ruzyňského letiště. Čekala nás dlouhá cesta – celkem 11,5 hodiny v letadle s přestupem ve Vídni. Někomu se v průběhu desetihodinového letu do Bangkoku podařilo usnout, jiní si krátili čas četbou, hraním her nebo sledováním filmů, které umožňoval počítač zabudovaný v každém sedadle v letadle.

Po dlouhých hodinách letu jsme konečně přistáli na letišti *Suvarnabhumi*. Ihned po výstupu z letadla nás v bezcelním prostoru přivítali thajští organizátoři, kteří nám pomohli rychle se zorientovat na letišti a zajistili bezproblémový průchod celní a pasovou kontrolou. Zavazadla našťěstí dorazila v plném počtu a krátce po jejich vyzvednutí jsme potkali našeho průvodce, který se nám představil jako *Thanat Narm Hiranprueck*. Našťěstí jsme ho mohli nazývat i jeho thajskou přezdívkou, která zněla jako „Nám“.

Nám byl celému týmu k dispozici 24 hodin denně, mohli jsme se na něj obrátit s jakýmkoliv problémem. Doprovázel nás na soutěž, výlety po městě i do okolí Bangkoku. Dokonce pro nás často smlouval na bangkockých tržištích.

Trasu z letiště do hotelu jsme absolvovali v typicky asijsky přezdobených autobusech. Během téměř hodinové cesty do centra Bangkoku nás Nám učil několika základním thajským frázím. Okny jsme mohli pozorovat kontrast typický pro jihovýchodní Asii – vedle stometrových mrakodrapů, v nichž sídlí banky nebo počítačové společnosti, se rozprostíraly chudinské čtvrti, kde lidé často bydlí v chatrčích postavených z vyřazených vagonů. Mezi mrakodrapy se potom důmyslně proplétaly mnohoproudé silnice, auta po nich projížděla nad

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

běžnou městskou zástavbou – stavitelé zvolili jedinou možnou cestu, jak zrychlit dopravu ve více než desetimilionové metropoli. Ani tak se velkoměstu nevyhýbají dopravní zácpy; i my jsme v nich několikrát uvízli.

Po výstupu z autobusu jsme naplno poznali místní klimatické podmínky – teplotu kolem 32 °C a 90% vlhkost vzduchu. Naštěstí byl čtyřhvězdičkový hotel *Montien*, ve kterém jsme bydleli, plně klimatizovaný. Pedagogičtí vedoucí, kteří s námi z důvodu utajení úloh nebyli až na několik oficiálních událostí ve styku, bydleli dokonce v pětihvězdičkovém hotelu *Pathumwan Princess*.



Den po příjezdu následovalo slavností zahájení v aule *Chulalongkornské univerzity*. Univerzitní kampus je doslova zelenou oázou v centru města. Dominují mu upravené parky a úhledné budovy v tradičním thajském stylu. Zahájení se zúčastnila i thajská princezna *Maha Chakri Sirindhorn*, třetí nejstarší potomek současného thajského krále *Ramy IX*. Pro nás Evropany byla až zarážející absolutní úcta projevovaná celé královské rodině. Během ceremonie přicházely jednotlivé týmy a princezně se musely poklonit.

Po slavnostním zahájení následoval banket, kde nám bylo nabídnuto thajské, čínské, vietnamské, japonské a muslimské jídlo. Pro toho, kdo by si snad z pestré asijské nabídky nevybral, byl ještě připraven stánek se „západní“ kuchyní.

Večer pedagogičtí vedoucí všech států spolu s thajskými autory úloh rozebírali a upravovali navržené teoretické úlohy. Poté, co se dohodli na jejich finálním znění, je museli přeložit do jazyků svých soutěžících.

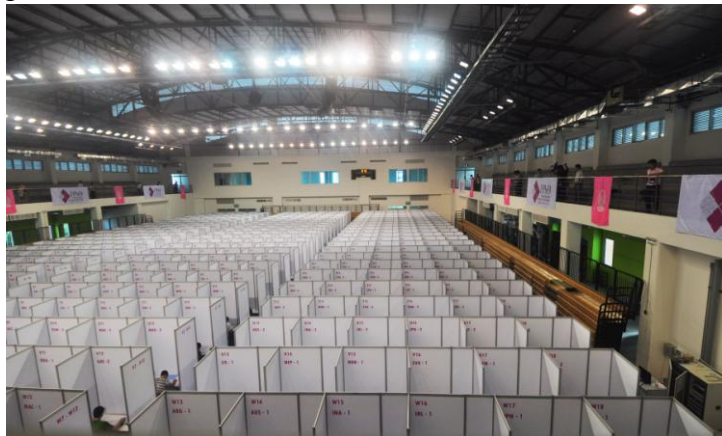
Pro letošní rok byly vytvořeny tyto teoretické úlohy:

- **Problém tří těles a gravitační interferometr LISA.** Jednalo se o úlohu z mechaniky. Řešili jsme vzájemné gravitační působení tří těles za předpokladu, že hmotnost jednoho z nich je zanedbatelná ve srovnání se zbývajícími tělesy.
- **Elektricky nabitá mýdlová bublina.** V této zajímavé úloze představující kombinaci termodynamiky, mechaniky a elektrostatiky jsme řešili podmínky existence nabité mýdlové bubliny a jejího vznášení se ve vzduchu.
- **Připomenutí 100 let Rutherfordova atomového jádra: rozptyl iontu na neutrálním atomu.** Úkolem soutěžících v této úloze bylo pomocí poznatků elektrostatiky popsat pohyb iontu kolem neutrálního atomu a určit, za jakých mezních podmínek dojde ke srážce.

Následující den jsme měli 5 hodin na řešení těchto úloh. Soutěž se konala ve sportovní hale Chulalongkornské univerzity, kde byly za tímto účelem rozestavěny plastové boxy, které každému soutěžícímu zajišťovaly dostatek soukromí. Večer prvního soutěžního dne jsme

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

strávili spolu s pedagogickými vedoucími v budově thajského královského námořnictva, kde probíhala slavností večere.



Podle pravidel mezinárodní olympiády musí mít soutěžící mezi dvěma soutěžními dny alespoň jeden den volna. Zatímco středu strávili naši pedagogičtí vedoucí opět diskuzí a překladem úloh, tentokrát experimentálních, my jsme celý den poznávali thajskou kulturu ve skanzenu *Rose Garden*. Měli jsme možnost vyzkoušet si tradiční thajská bojová umění, výrobu vonných svíček,

květinových ozdob, případně ochutnat tradiční thajský salát. U poslední zmíněné atrakce jsme si nejprve postěžovali, že předložený vzorek je málo pálivý. Paní kuchařka proto do další várky přidala i několik chilli papriček a spolu s dalšími přísadami vše rozdrtila. Ti odvážnější z nás, kteří ochutnali, na to po následujících několik desítek minut rozhodně nemohli zapomenout. Pomohl nám až vychlazený bylinkový čaj podávaný na vedlejším stánku.

Pro nadcházející experimentální část olympiády vymysleli organizátoři dvě obtížné, avšak nápadité úlohy:

- **Elektrická černá skříňka.** Na základě měření závislosti kapacity kondenzátoru na délce překryvu jeho desek jsme určovali tvar desek kondenzátoru a jejich rozměry.
- **Mechanická černá skříňka.** Zde nám byl předložen dutý válec, ve kterém byla pevně upevněna kulička. Podle výsledků měření periody kmitů válce v závislosti na vzdálenosti osy otáčení od jeho okraje bylo naším úkolem určit poměr hmotností válce a kuličky a gravitační zrychlení.

Po čtvrtěčním experimentu jsme si mohli konečně oddechnout – celá soutěž byla za námi. Večer jsme opět strávili s pedagogickými vedoucími na slavnostní večeři a zhlédli jsme představení tradičního thajského tance, boxu a bojových umění.

Program dalších dnů olympiády byl skutečně velkolepý. V pátek jsme poznávali krásy Královského paláce – jedná se o sídlo královské rodiny, rozlehlý komplex chrámů a svatyní. Důležitosti místa musí být přizpůsobeno i oblečení návštěvníků – kraťasy, minisukně nebo odhalená ramena byly nepřijatelné. Do chrámů jsme mohli vstupovat pouze bez bot a samozřejmě jsme se nemohli ničeho dotýkat. Toto porušil jeden člen německého týmu, který si sedl na trůn, kde při slavnostních



INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

příležitostech sedává sám král. Okamžitě byl ochrankou vyveden.

V sobotu následoval celodenní výlet k moři. Ačkoliv je Bangkok od vod Thajského zálivu vzdálen jen 20 km, cesta trvala přes tři hodiny. Vydali jsme se totiž do turisticky atraktivnější lokality *Sattahip* blízko známého letoviska *Pattaya*. Po prohlídce želví farmy a výborném obědě jsme se již nemohli dočkat koupání v thajském moři. Předtím jsme ale ještě museli půl hodiny jet do muzea thajské přírody, absolvovat jeho prohlídku a dojet zpět na pláž poblíž restaurace.

Doslova kulinářským vyvrcholením celé olympiády byla vynikající večeře na břehu moře. Čerstvě vylovené a opečené krevety, makrely, mušle a další thajské speciality ocenili především milovníci exotických pokrmů. Příjemný večer nám trochu kazila pouze nejistota před vyhlášením výsledků celé soutěže.

Pedagogičtí vedoucí strávili celý pátek a sobotu opět pracovně. Opravovali naše úlohy a potom s thajskými organizátory diskutovali o udělených bodech. Tato tzv. moderace úloh je velice důležitou součástí olympiády; často je při ní soutěžícímu dodatečně přiznán takový počet bodů, který může ovlivnit druh získaného ocenění. Pro letošní ročník byly nastaveny tyto bodové hranice:

- min. 41,10 bodů pro zlatou medaili,
- min. 34,50 bodů pro stříbrnou medaili,
- min. 24,62 bodů pro bronzovou medaili,
- min. 18,00 bodů pro čestné uznání.

Ačkoliv již v sobotu večer byly známy výsledky, naši pedagogičtí vedoucí nám je po telefonu nesdělili a chtěli nás držet v napětí až do vyhlášení v nedělního večera. V neděli dopoledne ovšem výsledky unikly na internet a celý tým se tak dozvěděl, jak dopadl:

- Stanislav Fořt: 35,90 bodů, stříbrná medaile,
- Jakub Vošmera: 35,80 bodů, stříbrná medaile,
- Martin Bucháček: 35,00 bodů, stříbrná medaile,
- Ondřej Bartoš: 31,45 bodů, bronzová medaile,
- Hynek Kasl: 24,70 bodů, bronzová medaile.

Maximálně mohl soutěžící získat 30 bodů v teoretické části a 20 bodů v experimentu. Medaile a čestná uznání předávala opět thajská princezna. Vše bylo perfektně zorganizováno a předem nacvičeno. Byli jsme důrazně varováni, abychom se při přebírání medailí Její Královské Výsosti nedotkli, nebo na ni dokonce nepromluvili – za to by hrozilo i vězení.

Absolutním vítězem olympiády se stal student Tsu-Ming Hsu z Taiwanu. V neoficiálním pořadí států se Taiwan rovněž umístil na prvním místě a předběhl tak Čínskou lidovou republiku, která vyhrála mnoho předchozích ročníků soutěže. Česká republika se v žebříčku států umístila na 24. místě, mezi státy Evropské unie byla 6.

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Příští ročník mezinárodní fyzikální olympiády se bude konat v estonských městech Tallin a Tartu, v roce 2014 bude pořadatelem soutěže Dánsko. Nezbývá než popřát českým studentům v nadcházejících ročnících soutěže hodně štěstí a doufat, že Plzeňský kraj bude mít v týmu opět své zástupce.



Česká výprava na 43. MFO po vyhlášení výsledků, zleva: RNDr. Jan Kříž, Ph.D, Hynek Kasl, Ondřej Bartoš, Martin Bucháček, Jakub Vošmera, Stanislav Fořt, Prof. Ing. Bohumil Vybíral, CSc.

Další informace:

- oficiální stránky 42. MFO – <http://www.ipho2011.org/>
- stránky MFO, zadání a řešení minulých ročníků – <http://ipho.phy.ntnu.edu.tw/>
- stránky české Fyzikální olympiády – fo.cuni.cz

Kontakt na autora:

Martin Bucháček
martinbuchacek@email.cz

ODBORNÝ KEMP PŘÍRODOVĚDNÝCH OBORŮ FYZIKA

STELLARIUM

Marek ČESAL

1 Úvod

Základy počítačového programu Stellarium, který se dá využít na hvězdárnách a planetáriích i školách jako náhrada skutečného planetária.

2 Stat'

Open sourceový program Stellarium zobrazující realistickou 3D oblohu umožňuje zobrazení noční oblohy, jako skutečné planetarium, ale na rozdíl od něj není finančně náročný. V aktuální verzi 0.10.6.1 je již dokonce možné stáhnout i katalogy s 210 milióny hvězdami. Dá se využít pro simulaci většiny jevů na obloze od zatmění Slunce přes přechod Venuše přes sluneční disk.

Přes nastavení souřadnic a času se dají nasimulovat úkazy v jakémkoliv časovém okamžiku, v posledních verzích je již možnost si dané úkazy nechat přehrát pomocí skriptů.

Program zvládá zobrazení tvarů, hranic a uměleckých představ souhvězdí. Dokáže zobrazit i deep sky objekty a planety, ke každému objektu je v pravém horním rohu programu dosti informací o jeho souřadnicích, magnitudě, vzdálenosti, spektrální třídě (u hvězd), paralaxe či velikosti. Jako ve většině programů zde funguje vyhledávání objektů s možností vystředění na daný objekt. Velmi zdařilá je i funkce vypnutí atmosféry, nebo horizontu. Horizont umožňuje planetarium měnit a tak se dá použít i panoramatická fotografie okolí školy.

Pro odbornější práci jsou pak k dispozici dva základní souřadnicové systémy ekvatoriální a azimutální a protože se dají zobrazit najednou je tak snaží jejich pochopení a rozdíly (ekvatoriální systém používá rektascenzi a deklinaci a má střed v severním nebeském pólu, nedaleko hvězdy Polárky, naproti tomu azimutální systém používá hodinový úhel a azimut a jeho střed se nachází v nadhlavníku).

3 Závěr

Počítačové planetarium Stellarium patří mezi velmi kvalitní software využitelné jak pro školní výuku tak doma pro amatérské astronomy.

4 Použitá literatura

Webová adresa programu: www.stellarium.org

5 Kontakt na autora

Marek Česal

Západočeská pobočka České astronomické společnosti

mcesal@volny.cz

ODBORNÝ KEMP PŘÍRODOVĚDNÝCH OBORŮ FYZIKA

SPEKTROSKOPIE HVĚZD – úvod

Eva JÍROVÁ, Josef JÍRA

1 Úvod

Duha (spektrum) byla nejen pro svoji krásu, ale i pro svoji vzácnost vždy zajímavým objektem objevujícím se na nebeské klenbě. Zmínku o ní najdeme nejen v mnohých mytologiích, ale také v Bibli. Pro křesťany je duha smlouvou s Bohem, který stvořil duhu jako znamení, že již nepošle na zem potopu, která by zničila všechno živé.

2 Stat'

Tento zajímavý optický jev se stal předmětem studia mnohých učenců, avšak prvním fyzikem, který tento optický jev vědecky popsal, byl francouzský fyzik **René Descartes (1596–1650)**. Naopak **Isaac Newton (1643–1727)** je považován za prvního fyzika, který se zabýval původem jednotlivých barev duhy.

Podstata spektra byla objevena tedy v roce 1666, když Isaac Newton vedl sluneční paprsek hranolem a na stěně v místnosti se objevila duha – spektrum. Spektrum je termín, který je připisován právě Newtonovi (z lat. obraz). Isaac Newton tento úkaz vysvětlil správně: bílé světlo se skládá z více barev. Zároveň si správně uvědomil, že při průchodu světla hranolem dochází k větší či menší refrakci (lomu) jednotlivých barev.

Nezávisle na Newtonovi se disperzi světla hranolem věnoval také český fyzik a polyhistor doby pobělohorské **Jan Marek Marci (1595–1667)**. Jelikož však poznatky Jana Marka Marciho byly zapomenuty, je dnes za zakladatele spektroskopie považován spíše Isaac Newton. Nicméně dílo Jana Marka Marciho je pro nás velmi významné. Byl vynikajícím lékařem, zajímal se o filozofii, přírodovědu, chemii. Je považován za prvního českého fyzika, ve svých dílech se věnoval mechanice či zákonům optiky, mimo jiné zkoumal duhu.

Počátkem 19. století byla viditelná složka slunečního záření rozšířena o oblasti infračervených a ultrafialových vlnových délek. Infračervené záření objevil **William Herschel (1738–1822)**, anglický fyzik a objevitel planety Uran. William Herschel roku 1800 provedl pokus, při kterém si rozložil rtuťové teploměry do jednotlivých barevných pásem spektra a zjistil, že teploměry ukazují různou teplotu, přičemž teplota stoupá směrem k červené barvě. Změřil tedy teplotu i za hranou červené barvy a zjistil překvapivou věc, že teploměr ukazuje nejvyšší hodnotu. Toto záření pro svoje účinky nazval tepelným.

Objevení ultrafialového záření bylo nasnadě a bylo učiněno roku 1801 německým fyzikem **Johannem Ritterem (1776–1810)**. Rittera na objev ultrafialového záření přivedla jeho víra v polaritu přírodních jevů. Věřil, že existuje-li něco za červenou hranou viditelného spektra, musí existovat také nějaké neviditelné záření za modrou hranou viditelného spektra. Ultrafialové záření objevil při pokusech s chloridem stříbrným (AgCl), kdy zjistil, že reakce zčernání chloridu stříbrného proběhne nejrychleji právě působením neviditelného záření za modrou hranou viditelné části spektra. Toto záření se zpočátku nazývalo chemické a až později získalo název ultrafialové.

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Významným objevem, který posunul spektroskopii zase o kousek blíže k tomu, aby se stala významnou vědní disciplínou, která nám pomáhá nahlížet hlouběji do vesmíru, bylo objevení tmavých čar ve spektru Slunce. To se podařilo v roce 1802 anglickému chemikovi a fyzikovi **Williamu Hyde Wollastonovi (1766-1828)**, ten však objevené tmavé „nitky“ ve slunečním spektru považoval spíše za přechody mezi jednotlivými barvami.

O několik let později (1814) je nezávisle na Williamu Wallastonovi objevil také německý fyzik a optik **Joseph von Fraunhofer (1787-1826)**, který je zpočátku připisoval nedokonalosti svých brýlí v „propustnosti“ barev. Jelikož při dalších pokusech objevil stejné čáry také ve spektru Měsíce nebo planet sluneční soustavy, uvědomil si, že tmavé čáry pochází skutečně ze světla nebeských těles a začal je systematicky studovat a pečlivě přeměřovat jejich vlnové délky, přičemž výraznější čáry označil písmeny abecedy. Ve své době však tento vynikající německý optik neměl ponětí o původu těchto čar, a proto písmena nemají žádnou spojitost s chemickými prvky, např. linie H a K, což jsou nejjasnější spektrální čáry Slunce, jsou vytvořeny ionizovaným vápníkem (Ca⁺). Již sám Fraunhofer si však při pozorování spekter jednotlivých hvězd všiml, že spektra hvězd v porovnání se spektrem Slunce jsou rozdílná, a uvědomil si, že pochopení spektra Slunce znamená nahlédnutí do nitra ostatních hvězd. Na jeho počest jsou tyto spektrální čáry dodnes nazývány Fraunhoferovy čáry. Dnes již víme, že sluneční spektrum je absorpční a právě tyto tmavé absorpční čáry ve spektru Slunce, kterých Fraunhofer napočítal 574, vznikají pohlcením daných vlnových délek ve fotosféře. Avšak vysvětlení jejich vzniku muselo počkat ještě další čtyři desetiletí.

Myšlenka rozdílného chemického složení ukazovala správným směrem, ale tajemství kolem černých čar ve spektru vyřešil až německý fyzik **Gustav Kirchhoff (1824-1887)** a německý chemik **Robert Bunsen (1811-1899)**, kteří vytvořili metodu k identifikaci těchto čar. Bunsen a Kirchhoff zkoumali spektrum světla plamene různých sloučenin a zjistili, že každá sloučenina či prvek mají charakteristický obraz spektrálních čar. Podařilo se jim objevit i emisní čáry, resp. prvky, které nebyly dosud známé, a nazvali je cesium (nebesky modrý, spektrální čára v oblasti modré barvy) a rubidium (červený, spektrální čára v oblasti červené barvy).

Na rozdíl od německého chemika se Gustav Kirchhoff s tímto výsledkem nespokojil a nadále zkoumal jednotlivá spektra prvků, která s Bunsenem naměřili, a porovnával je s obrazem spektra Slunce. Zjistil, že ve slunečním spektru jsou dvě tmavé čáry, které odpovídají jasným spektrálním čarám sodíku. Nechal tedy procházet sluneční světlo plamenem sodíku a zjistil, že obě tyto linie, které Fraunhofer označil písmenem „D“, se překrývají. Tyto čáry oproti Kirchhoffově očekávání ztmavly, z čehož správně usoudil, že někde po cestě bylo sluneční světlo pohlceno sodíkem.

3 Závěr

Tato metoda spektrální analýzy, která spočívá na exaktním proměřování linií, jejich intenzity, šířky a tvaru, byla okamžitě využita pro astronomii a v principu zůstává stejná dodnes. V dnešní době se spektrální analýza využívá nejen v astrofyzice, ale v analytické chemii, v průmyslu, lékařství či kriminalistice.



INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

4 Použitá literatura

WROBLEWSKI, P. Algoritmy. Datové struktury a programovací techniky. 1. vyd. Brno: Computer Press, 2004. 351 s. ISBN 80-251-0343-9 7178-463-X.

TOPFER P., Algoritmy a programovací techniky. Praha: Grada Publishing a. s., 2007. 322 s. ISBN 9788071963509

RALSTON A.: Základy numerické matematiky. Academia, Praha 1978, 635 s.

STOER, J. - BULIRCH, R., Introduction to numerical analysis. 1. vyd. New York - Heidelberg - Berlin : Springer-Verlag, 1980. 609 s. IX. ISBN 0-387-90420-4

5 Kontakt na autora

Mgr. Eva Jírová

Bc. Josef Jíra,

J. Knihy 69, Rokycany

josef.jira@seznam.cz

eva.jirova@yahoo.com

ODBORNÝ KEMP PŘÍRODOVĚDNÝCH OBORŮ FYZIKA

LED TELEVIZE

Ota Kéhar

1 Úvod

Televizní technika prochází posledním desetiletím dramatickým a nezadržitelným vývojem. Od obrazovek tvořených katodovými trubicemi se postupně přešlo k plochým displejům, které lze dále rozdělit na PDP (plazmová obrazovka) a LCD (displej z tekutých krystalů). Skloňované jsou i zkratky LED a DVB. Tento příspěvek by měl studentům tyto pojmy objasnit a poodhalit, zda se za nimi neskrývá jen reklamní trik výrobců nebo skutečné vylepšení kvality výrobku pro zákazníka.

2 Stat'

Princip přenosu obrazu na dálku je znám od poloviny devatenáctého století, přičemž bylo nutné rozložit obraz na řádky a body, jednotlivé body převést na elektrické impulsy a naopak a rozklad a následné skládání musí probíhat synchronizovaně. Prakticky využitelné technické řešení na sebe nechalo čekat do dvacátého století, které znamenalo první revoluci v televizní technice, od černobílého vysílání s 30 řádky jsme se postupně dopracovali na barevné vysílání v normě PAL s 625 řádky. Počátek 21. století nám přinesl digitální vysílání s možností vysílat ve vysokém rozlišení, naopak nám vzal možnost sledovat záření z vesmíru! Co je, resp. co bylo k tomu potřeba? Analogová televize s 50 Hz řádkováním. Naladíte mezi kanály v UHF nebo VHF pásmu a tím se vám na obrazovce objeví zrnění, které tvoří šum přijímaný anténou – většinu šumu tvoří ostatní pozemní vysílání, zbytek je ovšem elektromagnetické záření z vesmíru – méně než 1 % je pozůstatek z období nedlouho po velkém třesku, tzv. reliktní záření. Maximum reliktního záření je 160 GHz (0,2 mm), některé fotony mají méně než 0,1 GHz a televizní anténa je tímto signálem bombardována.

Realitní záření je záření, které se od hmoty oddělilo 384 000 let po vzniku vesmíru, elektrony začaly vytvářet atomární obaly kolem holých jader vodíku a helia, končí éra volných elektronů a silná provázanost elektromagnetického záření na hmotu. Méně volných elektronů má za následek, že vesmír je pro elektromagnetické záření průhlednější. Dnes má záření teplotu 2,73 K, v 1 m³ máme zhruba 1 miliardu reliktních fotonů. Předpověď oddělení záření od hmoty uskutečnili v roce 1948 pánové Gamow, Alpher, Herman. Nicméně až v roce 1965 jej čistě náhodou objevili pánové Penzias a Wilson, kdy měřili intenzitu rádiových vln vyzařovaných z naší Galaxie anténou, kde měli problémy se šumem.

Vraťme se zpátky k tématu, vývoj moderní televize lze rozdělit do několika stupňů. Vše začíná specifikací televize, definování toho, co všechno televize musí umět, co od ní očekáváme. Na základě toho dojde k výběru obvodu a technického řešení. To už je jen krůček k nakreslení schématu a návrhu plošného spoje. Vyrobí se první vzorky a ty se testují, testují a pro změnu testují. Po důkladném otestování se předají do výroby, kde dojde k dalšímu testování a následné hromadné výrobě, cestě do obchodu a k zákazníkovi.

3 Závěr

Několik poznámek na závěr? V poslední době se rozmáhá označení „LED televizory“, což byl i název mého příspěvku a chtěl bych vše uvést na pravou míru. Princip fungování LCD televizoru je silně závislý na podsvícení, které začínalo na katodových zářivkách. Těmto televizorům se běžně říkalo LCD televize. Později se přešlo na podsvícení pomocí LED (svítivých diod) a i označení televize se změnilo na LED televizory. Samotný princip fungování displeje z tekutých krystalů ovšem zůstal zachován, změnilo se pouze podsvícení. Proč se těmto televizorům změnilo označení? Nejedná se jen o reklamní tah výrobců?

Podobně by se dalo jistě pokračovat, např. rozdíl mezi dynamickým a statickým kontrastem, spotřeba LCD a PDP televizorů, spotřeby v pohotovostním režimu u televizorů a set-top-boxů nebo počet barev a čtyřbarevná revoluce jednoho nejmenovaného výrobce televizorů. Podrobnosti o těchto tématech by ovšem byly nad rozumnou délku tohoto psaného příspěvku, takže si o nich popovídejme jindy.

4 Použitá literatura

Virtual Museum of Panasonic Displays [online]. c2011, [citováno 22. 8. 2011]. Dostupné z <<http://www.panasonic.net/avc/viera/museum/index.html>>

How Television Works [online]. c2011, [citováno 22. 8. 2011]. Dostupné z <<http://electronics.howstuffworks.com/tv1.htm>>

Jak funguje DVB-T [online]. c2011, [citováno 22. 8. 2011]. Dostupné z <<http://tutorialy.digizone.cz/jak-funguje-dvb-t/>>

KULHÁNEK, P. *Reliktní záření*. Astropis 2, 2001.

Quattron Technology [online]. c2011, [citováno 22. 8. 2011]. Dostupné z <http://www.aquos-world.com/en/product/quattron_technology.html>

Materiály firmy Panasonic

5 Kontakt na autora

Ing. Ota Kéhar

ZČU, FPE, KMT, oddělení fyziky, Klatovská 51, Plzeň

kehar@kmt.zcu.cz

ODBORNÝ KEMP PŘÍRODOVĚDNÝCH OBORŮ FYZIKA

HISTORIE A ELEMENTÁRNÍ ZÁKLADY TEORIE BAREV

Václav KOHOUT

1 Úvod

Fakt, že lidské oko je schopno vnímat barvy, je jedním z důležitých předpokladů přežití člověka jako živočišného druhu v průběhu jeho druhového a historického vývoje. Člověk v minulosti musel mít schopnost, pomocí které dokázal rozeznat „špatné“ a „dobré“ ovoce, mimo jiné podle jeho barvy, a tato schopnost mohla znamenat až rozdíl mezi životem a smrtí. V současnosti však schopnosti lidského oka a zejména intuitivní popis barvy předmětů narážejí v mnoha oborech lidské činnosti na hranice možného. Ukazuje se, že již není vhodné a dostatečné popisovat barvy jen prostým slovním označením oranžová, meruňková, lososová apod. Do obrovského množství barev, které je schopen člověk vnímat, je nutno vnést nějaký řád a také nějakou kvantifikaci.

2 Isaac Newton a jeho přínos k nauce o barvách

Isaac Newton zjistil, že bílé světlo může být rozděleno na jednotlivé základní barvy. Pás těchto základních barev pojmenoval spektrum a popsal pořadí těchto barev – oblast červenou, oranžovou, žlutou, zelenou, modrou, indigovou a fialovou. K popisu barev si vybral pouze těchto sedm základních oblastí, i když bylo i jemu zřejmé, že existuje bezpočet dalších barev, které leží mezi nimi. Podstatné je zejména to, že Newton definuje barvu jako vlastnost světla. Bílé světlo v sobě obsahuje všechny barvy. Pokud se nám povrch jeví „žlutý“, pak to znamená, že tento povrch nějakým způsobem změnil původně bílé světlo, které se od něj odrazilo. Není-li světlo, nejsou ani barvy.

3 Souvislost mezi vlnovou délkou světla, barvou a spektrem

Důkladné základy pro vlnovou teorii světla vybudoval až J. C. Maxwell (1831–1879). Maxwell se zabýval jiným odvětvím fyziky, které z jeho pohledu nesouviselo bezprostředně se světlem a s barvami, snažil se najít základy jednotné teorie elektřiny a magnetismu, které nyní říkáme teorie elektromagnetického pole. Podařilo se mu však mimo jiné také dokázat, že světlo je pouze jednou z forem elektromagnetické energie a může být popsáno pomocí standardních rovnic elektromagnetických vln.

Vlnová délka světla se pohybuje ve stovkách nanometrů, zhruba mezi 380 a 770 nm. Elektromagnetické vlnění o vlnových délkách pod 380 nm a nad 770 nm je pro lidské oči neviditelné. Uvedené hraniční vlnové délky mohou být pro různé lidi mírně odlišné. Newtonův pokus, při kterém vznikne barevné spektrum po průchodu bílého světla optickým hranolem, můžeme popsat také tak, že světelné vlny s kratší vlnovou délkou se lámou více než vlny s delší vlnovou délkou.

4 Vyzařování a odraz světla, průchod světla látkou

Zatím jsme dospěli k tomu, že barva světla souvisí s jeho vlnovou délkou a jednotlivé barvy můžeme pozorovat ve spektru. Je třeba si však uvědomit, že v přírodě se vyskytuje mnohem více barev, než se nachází ve spektru. Kde se berou tyto další barvy a jak souvisí s vlnovou délkou světla? Jsou dva způsoby, jak mohou objekty v přírodě ovlivňovat, z jakých vlnových délek je složeno dané světlo – tělesa mohou světlo vyzařovat (emitovat) nebo pohlcovat (absorbovat).

5 Spektrální data a spektrální křivky

Spektrální křivka každého objektu popisuje, jakým způsobem tento objekt ovlivňuje světlo jednotlivých vlnových délek. U objektu odrážejícího světlo můžeme popsat jeho spektrální odrazivost (reflektanci) – pro jednotlivé vlnové délky stanovíme intenzitu odraženého světla v procentech dopadajícího světla. Přístroje, pomocí kterých můžeme zkoumat spektrální křivky pro libovolné objekty na základě měření spektrálních dat, tj. množství světla odraženého nebo propuštěného objektem pro jednotlivé vlnové délky, se nazývají spektrofotometry.

U objektů, které světlo propouštějí, můžeme zkoumat jejich spektrální propustnost – intenzitu prošlého světla pro jednotlivé vlnové délky udávanou opět v procentech dopadajícího světla.

6 Spektrální data – kompletní popis barvy

Nyní máme k dispozici první přijatelný model pro popis vlastnosti, kterou běžně nazýváme „barva objektu“. Běžné světlo obsahuje směs jednoduchých spektrálních světél různých vlnových délek. Přesné zastoupení konkrétních vlnových délek je dáno vlastnostmi světelného zdroje. Pokud se takové světlo odráží od povrchu tělesa nebo prochází průhledným či průsvitným tělesem, jako je film nebo vrstva inkoustu, zastoupení jednotlivých vlnových délek ve světle se změní. Světlo některých vlnových délek je absorbováno více než světlo jiných vlnových délek. Výsledná kombinace vlnových délek je informací, které v běžném jazyce říkáme barva. Spektrální data jsou kompletním a jednoznačným popisem barevné informace. Povrch má nějakou barvu, protože pohlcuje světlo některých vlnových délek, které na něj dopadá, zatímco odráží (propouští) světlo zbylé.

7 RGB, CMY(K), tristimulus a jeho objev

Maxwell, Young a Helmholtz

Jak bylo uvedeno dříve, J. C. Maxwell ukázal, že světlo je elektromagnetické vlnění a popsal souvislost barvy světla s jeho vlnovou délkou. Maxwell se však také zabýval vnímáním barev lidským okem a roku 1861 sestavil přístroj, pomocí kterého ověřil teorii, že všechny viditelné barvy je možné popsat pomocí tří základních (primárních) barev. S touto teorií přišel již roku 1801 Thomas Young (1773–1829) na základě úvahy, že oko nemůže obsahovat specifické receptory pro všechny existující barvy vnímaného světla. Nezpochybnitelné zásluhy na popisu tříbarevného vnímání lidského oka má také Herman von Helmholtz (1821–1894), který dřívější poznatky systematizoval, poprvé podrobně popsal myšlenku receptorů červené, zelené a modré barvy v lidském oku a první načrtl průběhy jejich spektrálních křivek.

8 Barvy RGB

Postupně se dostáváme k popisu barvy pomocí hodnot RGB, které jsou známé zejména z práce na počítači. Červená (red = R), zelená (green = G) a modrá (blue = B) jsou aditivní primární barvy. To jinými slovy znamená, že můžeme nasimulovat každou barvu od černé po bílou přidáváním odpovídajícího množství červeného, zeleného a modrého světla (aditivní = související se sčítáním, skládáním). Bílou získáme, pokud je množství červeného, zeleného a modrého světla vyvážené a má maximální intenzitu.

9 Barvy CMY a doplňující barva K

Pokud přijmeme RGB jako nejjednodušší model barev, pak CMY je jeho přímý protiklad. CMY vychází z opačného předpokladu než RGB. Nyní nezačínáme s neosvětlenou (černou) projekční plochou a přidáváním barevných RGB světél z ní nedostáváme bílou, ale máme bílý papír a snažíme se z něj udělat černý. Jedná se o základní postup, který je využíván při barevném tisku a v malířství.

Z původní bílé barvy musíme odečíst odpovídající množství primární červené, zelené a modré. V případě barevného tisku odečteme červenou z bílé stránky pomocí pigmentu, nazývaného často také inkoust, který propustí všechny barvy s výjimkou červené. Jak vypadá „nečervený“ inkoust? Jedná se o barvu, kterou nazýváme azurová (cyan = C). Analogicky můžeme purpurovou (magenta = M) označit jako „nezelený“ inkoust a žlutou (yellow = Y) za „nemodrý“ inkoust.

10 Pojem tristimulus a barvový prostor

RGB a CMY jsou příklady zápisu libovolné barvy spektra pomocí tří hodnot. Jsou to příklady zápisu barvy pomocí tzv. tristimulu. Toto slovo je při měření barev jedním ze základních pojmů. Prakticky každý způsob měření nebo vnímání barev včetně pozorování lidským okem je založen na nějakém tristimulu. Jedinou podstatnou výjimkou jsou spektrální data.

Jednou z výhod popisu barvy pomocí tristimulu je, že barva může být zobrazena ve třech rozměrech. Každá barva pak může být reprezentována jednoznačným místem v prostoru, pokud použijeme hodnoty tří stimulů jako souřadnice ve třech osách. Takový prostor nazýváme barvový prostor. Mezi jednotlivými barvovými prostory je možné barvy převádět pomocí matematických transformací. Barvový prostor je jedním z typů ještě obecnějšího konceptu – barvového modelu.

11 HSB a související popisy barev

V této kapitole se budeme zabývat barvovým modelem HSB, který popisuje barvu pomocí hodnot odstín (hue = H), sytost (saturation = S) a jas (brightness = B). Nejdříve se však budeme věnovat historickému předchůdci modelu HSB, kterým je katalogizační systém barev Alberta Munsella – Hue / Value / Chroma (odstín / hodnota / barevnost).

12 Systém Alberta Munsella

Zatímco Helmholtz se zabýval měřením spektrální odezvy lidských fotoreceptorů a sestrováním prvních spektrálních křivek pro tři typy barevných receptorů v lidském oku, umělec Albert H. Munsell (1858–1918) zaujal k nauce o barvách zcela jiný přístup. Munsell se nezabýval fyziologií barevného vnímání, ale zanalyzoval vztahy mezi jednotlivými barvami. Sestavil systém třídění a popisu barev založený na lidském vnímání rozdílů a vztahů

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

mezi barvami. Vyvinul ucelený systém, pomocí něhož je možné pracovat s takovými pojmy, jako jsou doplňkové barvy, vyvážení barev a barevné kombinace.

13 Barvy HSB

V nejrůznějších současných softwarových aplikacích se často využívají zápisy barev podobné Munsellovu systému odstín / hodnota / barevnost (hue / value / chroma = HVC). Hlavním důvodem je to, že RGB popis barvy se sice ideálně hodí pro počítačové periferie, jako jsou monitory či skenery, ale není příliš intuitivní pro přímou práci s barvami, pro editaci barev uživatelem. Je poměrně náročné pomocí přímé volby hodnot R, G a B namíchat barvu typu „broskvová“ nebo „hořčicová“.

14 CIE – Commission Internationale de l’Eclairage

V předchozích kapitolách jsme viděli několik typů tristimulů, tj. definic barev založených na třech hodnotách. Jednalo se o RGB, CMY (s odvozenou formou CMYK) a HSB (s jeho variantami HVC, HSL a dalšími). Všechny tyto barvové prostory mohou být odvozeny z RGB a všechny proto také mají základní nedostatek RGB. Každé zařízení – lidské oko, skener, monitor, tiskárna atd. – má mírně odlišné tři primární barvy a tím také odlišnou definici celého barvového prostoru RGB. Existují stovky různých barvových prostorů, každý z nich je optimálně vhodný k danému účelu, je poměrně jednoduché převádět hodnoty barev z jednoho do druhého, ale žádný z nich není možné označit jako obecný standard pro všeobecné využití.

15 Dva mezníky v práci CIE – 1931 a 1976

Jednou z klíčových schůzek v historii CIE bylo setkání v září 1931 v Cambridge v Anglii. Z tohoto roku pochází první komplexní pokus využít velké množství nejrůznějších dosud naměřených dat a vytvořit z nich systém, který systematicky popisuje světelné a pozorovací podmínky, za kterých má být do budoucna prováděno sledování a měření barev.

Mimo jiné specifikuje 1931 CIE systém následující:

Standardní pozorovatel – definice průměrného lidského pozorovatele,

Standardní osvětlení – specifikace některých světelných zdrojů, které mají být používány pro porovnávání barev,

Primární systém XYZ – systém imaginárních primárních barev souvisejících s RGB, ale vhodnějších jako standard pro výpočty,

Barvový prostor xyY – barvový prostor odvozený od XYZ, který odděluje souřadnice x a y závislé na barevném odstínu od souřadnice Y závislé na jasu barvy,

Chromatický diagram – graf, který přehledně zobrazuje viditelné barvy a vztahy mezi nimi.

Dalším klíčovým rokem je pro CIE a vědecký popis barev rok 1976. V tomto roce CIE zaměřila svoji pozornost zejména na toto:

Perceptuálně uniformní barvové prostory – barvové prostory Lab a Luv bližší lidskému vnímání barev, vhodné pro posuzování „vzdáleností“ barev,

Barvná difference – definice vztahu pro barevnou diferenci (ΔE), který umožňuje číselně popsat „vzdálenost“ nebo „rozdíl“ dvou barev.

16 XYZ – hodnoty tristimulu CIE

Barvový prostor CIE XYZ definuje všechny barvy pomocí tří imaginárních primárních barev X, Y a Z založených na lidském vidění. Tento barvový prostor se v běžném životě

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

téměř nepoužívá. Je využíván pro kolorimetrické zpracování barev a interně také v některých počítačových aplikacích pro transformace barev. Přesto je základem systému CIE.

Existuje mnoho popisů barev založených na třech primárních barvách, např. mnoho různých RGB prostorů, a všechny mají stejnou platnost. Je možné barvy mezi nimi libovolně transformovat, a proto je možné zvolit za základní libovolný soubor primárních barev. Komise CIE zvolila soubor primárních barev X, Y a Z.

17 xyY – chromatický diagram CIE

Barvový prostor xyY je odvozený přímo z XYZ a je určen především ke grafickému znázornění barev ve dvojrozměrném prostoru nezávisle na světlosti barvy. Hodnota Y je shodná s hodnotou Y, která je součástí tristimulu XYZ a představuje světlost nebo jas barvy. Hodnoty xyY je možné zobrazit ve velice užitečném grafu nazývaném chromatický diagram. Tento diagram významným způsobem zpřehledňuje poměrně komplikovaný systém barev zavedený CIE a činí ho srozumitelným i laikům. Poskytuje názorný náčrt všech viditelných barev a zobrazuje vztahy mezi nimi.

Pokud převedeme na chromatické souřadnice xy čisté spektrální barvy, dostaneme v chromatickém diagramu tvar podkovy, známý jako spektrální locus. Protože všechny viditelné barvy jsou definované jako směs těchto čistých spektrálních barev, musí se nacházet uvnitř této křivky. Čára, která spojuje koncové body podkovy, se nazývá purpurová linie nebo purpurová hranice.

18 Lab a Luv – perceptuálně uniformní barvové prostory

CIE Lab a Luv jsou barvové prostory, které mají za cíl být perceptuálně uniformní. Perceptuálně uniformní systém (barvový prostor) je takový, ve kterém číselná vzdálenost mezi libovolnými dvěma barvami v barvovém prostoru odpovídá pozorovatelem vnímané „blízkosti“ nebo „vzdálenosti“ těchto barev.

19 ΔE – rozdíl barev

Nejpodstatnější vlastností perceptuálně uniformních barvových prostorů, jako jsou CIE Lab a Luv, je, že nám umožňují vypočítat hodnotu, které vyjadřuje, jak „blízko“ jsou navzájem dvě dané barvy. Tato hodnota se označuje ΔE a nazývá se rozdíl barev. V praxi se používá zejména ΔE vypočtené v prostoru Lab.

Vzhledem k tomu, jak jsou tyto barvové prostory definovány, bude vypočtené číslo odpovídat tomu, jak jsou barvy „podobné“. Hodnoty ΔE jsou využívány všude tam, kde je zapotřebí přesně vyjádřit barevnou toleranci nějakého zařízení. Otázkou zůstává, jaká hodnota ΔE odpovídá ještě stále přijatelné toleranci. Obecně platí, že rozdíl barev $\Delta E = 1$ je minimální hodnota, kterou je lidské oko schopné rozlišit. Byly zpracovány statistické studie, které naznačují, že rozdíl barev $\Delta E = 6$ nebo 7 je ještě považován za přijatelný u běžných tištěných materiálů. Je nutno zdůraznit, že se jedná o pokus kvantifikovat vlastnost, která je ze své podstaty poměrně subjektivní.

20 Použitá literatura

BUNTING, F. et al. *Colortron: User Manual*. 1st Edition. Larkspur (California, USA): Light Source Computer Images, Inc., 1994. 752 p.

FRASER, B. – MURPHY, C. – BUNTING, F. *Správa barev: Průvodce profesionála v grafice a pre-pressu*. 1. vydání. Brno: Computer Press, 2003. 522 s. ISBN 80-722-6943-7.



INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

GIORGIANNI, E. J. – MADDEN T. E. *Digital Color Management: Encoding Solutions*. 2nd Edition. Chichester (West Sussex, England, GB): John Wiley & Sons Ltd., 2008. 416 p. ISBN 978-0-470-51244-9.

HUNT, R. W. G. *The reproduction of Colour*. 6th Edition, Chichester (West Sussex, England, GB): John Wiley & Sons Ltd., 2004. 726 p. ISBN 0-470-02425-9.

KANG, H. R. *Computational Color Technology*. 1st Edition, Bellingham (Washington, USA): SPIE – The International Society for Optical Engineering, 2006. 512 p. ISBN 0-8194-6119-9.

21 Kontakt na autora

Václav Kohout, Mgr.

Nakladatelství Fraus, s.r.o., Edvarda Beneše 72, Plzeň, 301 00

kohout@fraus.cz

ODBORNÝ KEMP PŘÍRODOVĚDNÝCH OBORŮ FYZIKA

ZAJÍMAVÉ EXPERIMENTY S CAMEROU OBSCUROU

Zdeňka KIELBUSOVÁ

1 Úvod

Camera obscura, neboli dírková komora je: „temná místnost, později skříňka mající v jedné stěně malý otvor, kterým procházejí světelné paprsky zvenku a vytvářejí na protilehlé stěně poněkud nejasný obrácený obraz předmětu; starobylý, ale značně nedokonalý předchůdce dnešního fotografického aparátu.“ (Klimeš, 1995) Tyto řádky si můžeme přečíst ve slovníku cizích slov.

2 Camera obscura

2.1 Historie camery obscury

S obrazem, který je vytvořen malinkou dírkou se můžeme setkat nejen v přírodě, ale i v běžném životě. Snad od pradávna jej pozorovali lidé v různých koutech světa.

Mezi první dochované popisy a záznamy patří nález z 5. století př. n. l., který zapsal čínský filosof Muo Ti.

Jen o století později se v Řecku Aristoteles zabírá problémy: Proč sluneční světlo procházející čtyřúhelným otvorem, například mezerou v proutěném předmětu, nevytváří hranatý obraz? Proč obraz zatmění slunce, který prochází skrz síto, listy stromů či mezery přes sebe křížem položených prstů vytváří na zemi srpek?

Další kdo studoval převrácený obraz vytvořený malou dírkou (Cameru obscuru) a poukazoval na přímočaré šíření světla, je arabský fyzik a matematik Abu Ali al-Hasan, známý jako Alhazen. který žil v 10. století n. l.

Ve středověku zná a používá princip camery obscury anglický vědec, filosof a mnich Roger Bacon.

První detailní popis Camery obscury nalezneme kolem roku 1485 v rukopise *Codex atlanticus* italského umělce a vynálezce Leonarda da Vinci, který ji často používal ke studiu perspektivy.

2.2 Vývoj camery obscury

Camera obscura byla nejdříve reálnou místností, kde byl obraz promítán na protější stranu, než byla malá dírka ve stěně. Byla hojně využívána k pozorování zatmění slunce a ke zkoumání zákonů zobrazování.

Později byla camera obscura vylepšena spojnou čočkou a stal se z ní přenosný přístroj. Takto upravená camera obscura byla často využívána jako kreslířská pomůcka a stála na zrodu dějin fotografie, kde se stala základem konstrukce fotoaparátu.

Camera obscura si našla své místo i v moderní vědě, protože v polovině 20. století vědci objevili, že se dá využít k fotografování rentgenového záření a paprsků gama, které normální

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

objektiv absorbuje. Camera obscura se díky tomu dostala na palubu kosmických lodí a do vesmíru.

2.3 Fotografie

První fotografii camerou obscurou pořídil roku 1850 skotský vědec sir David Brewster. Bohužel se camera obscura začala více prosazovat až koncem 19. stol., kdy byla velice kladně hodnocena její měkkí kresba oproti dokonalým ostře kreslícím objektivům. Později začala upadat do zapomnění, až v 60. letech zažila opětovný rozmach, který v mírných vlnách trvá dodnes.

2.4 Princip a vlastnosti

Obraz v kameře obscuře vzniká na základě přímočarého šíření světla. Každý bod na povrchu osvětleného předmětu odráží světelné paprsky všemi směry. Část těchto paprsků dírka propustí. Paprsky pokračují ve své dráze, až narazí na průmětnu, kde vytvoří převrácený obraz předmětu. Bod se proto nezobrazuje jako bod, ale jako malý kroužek, což je příčinou nepatrné neostrosti. Z tohoto výkladu by se zdálo, že čím menší dírka, tím ostřejší obraz. Světlo je ale vlnění, a proto jakmile je rozměr dírky srovnatelný s rozměrem vlnové délky použitého světla, uplatní se ohyb. Pro každou obrazovou vzdálenost existuje optimální velikost dírky pro dosažení co nejostřejšího obrazu. Výpočet pro optimální průměr dírky, navrhl již Josef Petzval a později jej zdokonalil britský držitel Nobelovy ceny Lord Rayleigh. Na vzorci pracoval 10 let a je dodnes platný, publikoval jej ve své knize *Nature* v roce 1891. Výpočet navržený Rayleighem upravený tak, aby výsledkem byl průměr, nikoli poloměr, můžeme zapsat takto:

$$d = 1,9 \cdot \sqrt{f \cdot l},$$

d – průměr dírky

f – obrazová vzdálenost

l – vlnová délka světla (často se používá vlnová délka žlutozeleného světla 0,00055 mm)

Obraz vytvořený camerou obscurou má vlastnosti, které u klasické fotografie s objektivem nenajdeme. Jelikož jde o reálný středový průmět, mají obrázky v kameře obscuře dokonalé perspektivní podání.

Další pozoruhodnou vlastností je úplná hloubka ostrosti, která umožní na jednom snímku zachytit stejně ostře jak předměty velmi blízké tak i velmi vzdálené.

Camera obscura vykreslí extrémně široký úhel. Paprsky světla pak ale mají ke krajům negativu mnohem delší cestu než ke středu, snímek je tedy na okraji méně exponovaný, a proto se ztmavuje.

2.5 Návod na kameru obscuru

Pomůcky:

2 ks A3 černý karton, nůžky, lepidlo, špendlík, černá lepenka, pravítko, fotopapír, pozitivní vývojka, ustalovač, destilovaná voda, 4 fotomisky, odměrný válec

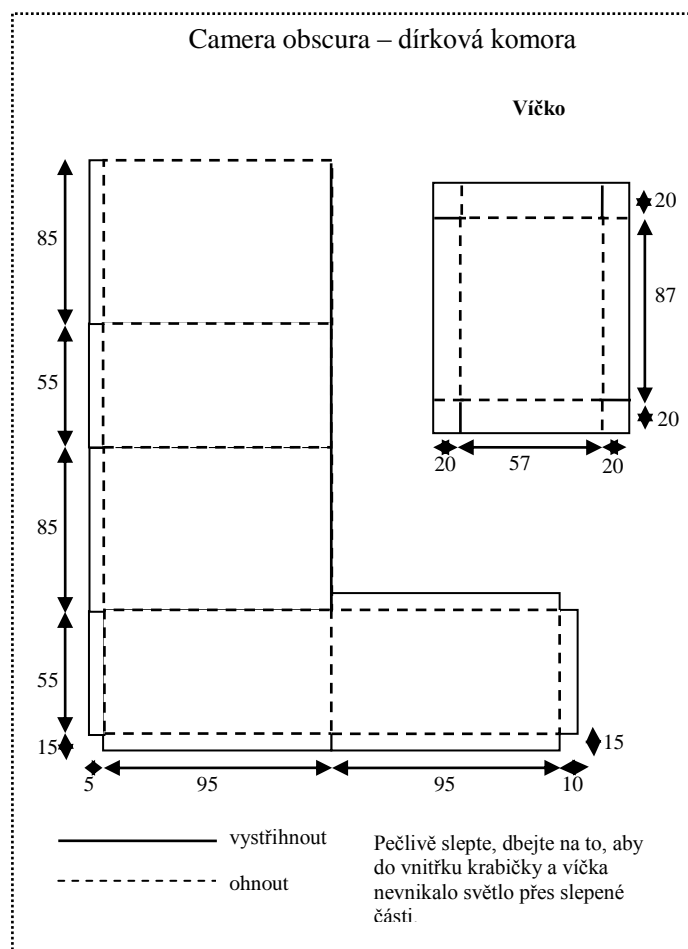
Postup:

Podle nákresu narýsujeme, vystříháme a slepíme krabičku (kameru obscuru). Na střed dna krabičky uděláme malou dírku, kterou překryjeme krytkou (kousek černého kartonu s izolepou). V temné místnosti vložíme do víčka fotopapír a přiklopíme jej na spodek krabičky. Černou lepenkou přichytíme víčko ke spodku krabičky tak, aby dovnitř nevnikalo žádné světlo. Vybereme vhodný objekt k fotografování a umístíme kameru obscuru do vhodné

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

pozice. Odkryjeme krytku, počkáme stanovený čas a opět díрку zakryjeme krytkou. V temné místnosti si připravíme roztoky na vyvolání fotografií. V pořadí pozitivní vývojka, destilovaná voda, ustalovač a poslední je opět destilovaná voda. V temné místnosti vyndáme fotonapíj a postupně jej ponořujeme do připravených roztoků.

Nákres:



3 Použitá literatura

RENNER, E.: *Pinhole Photography: Rediscovering a Historic Technique*, 1995, Focal Press, Butterworth-Heinemann, Newton, MA, USA ISBN 0-240-80237-3

BALIHAR, D.: Co je dírková komora (cit. 20.8.2010) Dostupné na internetu:

<http://www.pinhole.cz/cz/pinholecameras/whatis.html>

What is a camera obscura? 8/2004 (cit. 20.8.2010) Dostupné na internetu:

<http://brightbytes.com/cosite/what.html>

4 Kontakt na autora

Jméno a příjmení s tituly: PhDr. Zdeňka Kielbusová

Název instituce: Západočeská univerzita v Plzni, Fakulta pedagogická, katedra obecné fyziky

E-mail: kielbus@kof.zcu.cz

ODBORNÝ KEMP PŘÍRODOVĚDNÝCH OBORŮ FYZIKA

ALGORITMY NUMERICKÉ MATEMATIKY

NULOVÉ BODY FUNKCE, POLYNOMU

Václav KOHOUT

1 Úvod

V této části se budeme zabývat užitečnou třídou algoritmů, jde o skupinu algoritmů numerické matematiky. Samozřejmě, že se nebudeme zabývat celou škálou těchto úloh, ale zvolíme vhodné representanty.

2 Numerické algoritmy

V této části se budeme zabývat definicí algoritmu a vytyčením jeho základních vlastností. Většinu základních tvrzení, definic, poznámek budeme zároveň ilustrovat příklady, které nás budou nutit k procesu algoritmizace úloh.

2.1 Hledání nulových bodů funkce, polynomu

V této části budeme obecně řešit úlohu nalezení nulových bodů polynomu $f(x)$, které obecně nazýváme kořeny polynomu. Půjde tedy o určení hodnot x takových, že $f(x) = 0$.

První metodou, kterou se budeme zabývat je **metoda půlení intervalu**. Jedná se o vždy konvergentní a můžeme říci univerzální metodu, kterou lze aplikovat ve většině praktických případů.

Aby bylo možno metodu užít, musí být splněny dvě podmínky. První je požadavek, aby funkce f byla spojitá pro $x \in \langle a; b \rangle$. Druhou podmínkou je, aby funkční hodnoty v krajních bodech zvoleného intervalu měly opačná znaménka tj. aby platilo $f(a) \cdot f(b) < 0$. Pokud jsou obě tyto podmínky splněny, pak tato metoda vždy konverguje. Spojitost většinou zajišťuje realizátor, v rámci algoritmu musíme rozhodnout, která ze dvou dvojic $a, \frac{a+b}{2}$ nebo

$\frac{a+b}{2}, b$ splňuje podmínku metody. Touto dvojicí nahradíme vstupní dvojici a, b . Algoritmus je ukončen, když například vzdálenost intervalu při n -tém dělení je menší než předem daná malá hodnota ε .

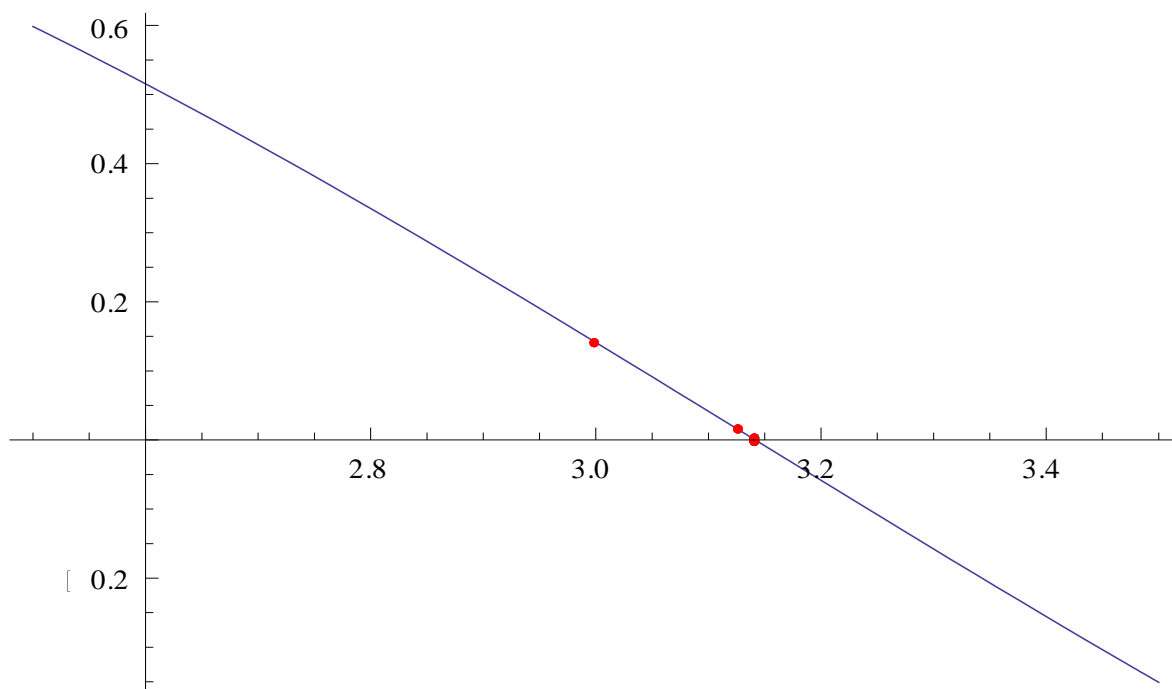
Pokusíme se podle této metody nalézt nulový bod funkce sinus na intervalu $(2,5; 3,5)$. Je dobře známo, že tímto bodem je číslo π . Provedeme – li tento algoritmus 18 x získáme následující výsledky:

{1, 3., 3.5},
{2, 3., 3.25},

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

{3, 3.125, 3.25},
 {4, 3.125, 3.1875},
 {5, 3.125, 3.15625},
 {6, 3.14063, 3.15625},
 {7, 3.14063, 3.14844},
 {8, 3.14063, 3.14453},
 {9, 3.14063, 3.14258},
 {10, 3.14063, 3.1416},
 {11, 3.14111, 3.1416},
 {12, 3.14136, 3.1416},
 {13, 3.14148, 3.1416},
 {14, 3.14154, 3.1416},
 {15, 3.14157, 3.1416},
 {16, 3.14159, 3.1416},
 {17, 3.14159, 3.14159},
 {18, 3.14159, 3.14159}

Je zřetelné, že již 17 – tá iterace dává celkem dobrou představu o čísle π . Problémem metody je pomalost konvergence. Níže je uveden obrázek dané situace včetně jednotlivých iterací:



Proto se při hledání kořenů rovnic více používá univerzální metoda, která se jmenuje Newtonova metoda. Někdy se jí také říká metoda tečen. Princip tvorby posloupnosti bodů, které konvergují k řešení $f(x)=0$, je ten, že jako další přiblížení (další bod posloupnosti) je chápán průsečík tečny v bodě posloupnosti s osou x . Jestliže je $(x_i; f(x_i))$ bod ležící na grafu funkce $y=f(x)$, potom je rovnice tečny v tomto bodě určena takto:

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

$$y - f(x_i) = f'(x_i) \cdot (x - x_i)$$

Průsečík této přímky s osou x určíme jednoduše tak, že položíme hodnotu $y=0$. Tedy :

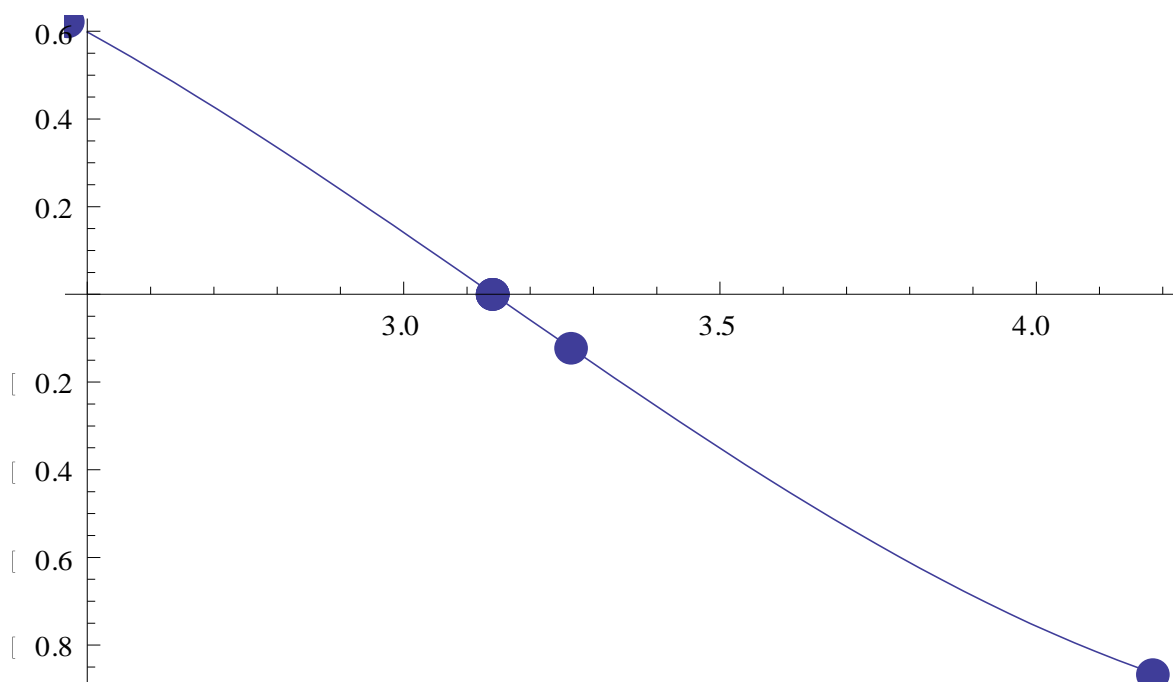
$$0 - f(x_i) = f'(x_i) \cdot (x - x_i) \Rightarrow \frac{-f(x_i)}{f'(x_i)} = x - x_i \Rightarrow x = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)}$$

Budeme proto volit posloupnost takto: $x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)}$. Odtud jsou zřejmé i požadavky na funkci f , kromě spojitosti musí být i spojitě diferencovatelná (musí jít v každém bodě grafu funkce sestrojít tečna).

Pokusíme se dále řešit stejný úkol jako části věnované metodě půlení intervalu.:Chceme tedy najít v intervalu $(2,5 ; 3,5)$ číslo x takové, že $\sin(x)=0$. Dále uvedeme výsledky :

- {1., 4.18504},
- {2., 2.46789},
- {3., 3.26619},
- {4., 3.14094},
- {5., 3.14159},
- {6., 3.14159},
- {7., 3.14159}

Je vidět, že již pátá iterace vede k stejným výsledkům jako 17. iterace u metody půlení intervalů.





INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

3 Závěr

V rámci této části jsme si osvojili některé základní postupy při získávání nulových hodnot jak polynomiálních rovnic, tak i prostých rovnic typu $f(x) = 0$.

4 Použitá literatura

WROBLEWSKI, P. Algoritmy. Datové struktury a programovací techniky. 1. vyd. Brno: Computer Press, 2004. 351 s. ISBN 80-251-0343-9 7178-463-X.

TOPFER P., Algoritmy a programovací techniky. Praha: Grada Publishing a. s., 2007. 322 s. ISBN 9788071963509

RALSTON A.: Základy numerické matematiky. Academia, Praha 1978, 635 s.

STOER, J. - BULIRCH, R., Introduction to numerical analysis. 1. vyd. New York - Heidelberg - Berlin : Springer-Verlag, 1980. 609 s. IX. ISBN 0-387-90420-4

5 Kontakt na autora

Václav Kohout RNDr.

ZČU, FPE, katedra matematiky, Klatovská 51, Plzeň

kohout@kmt.zcu.cz

ODBORNÝ KEMP PŘÍRODOVĚDNÝCH OBORŮ FYZIKA

SOUČASNÁ KOSMOLOGIE

Martin TOMÁŠ

1 Úvod

Jen málo oborů lidské činnosti zažívá tak mohutný rozkvět jako kosmologie. Jedná se o obor, ve kterém se prolíná mnoho dalších vědních disciplín a který popisuje chování našeho vesmíru jako celku. Kosmologie zkoumá objekty mikroskopických i makroskopických rozměrů. Předmětem tohoto oboru jsou například nicotná neutrina a zároveň obrovské kupy galaxií. Tak široký záběr činí tento obor relativně náročným. Zároveň je však zřejmé, že výzkum našeho vesmíru a poznání role člověka v něm je téma velmi atraktivní.

2 Vznik teorie Velkého třesku a její experimentální podpora

Počátky kosmologie jsou spojeny s díly antických myslitelů. Rozvoj oboru můžeme pozorovat ve středověku, kdy člověk začíná pozorovat oblohu dalekohledem. Nejvýznamnější pokrok však lidstvo udělalo ve 20. století. Na cestě k dnešní úrovni poznání můžeme pozorovat i nejrůznější kuriózní hypotézy (např. myšlenka o duté Zemi populární v Německu před II. světovou válkou).

Počátkem 20. století jsou ztotožněny vzdálené mlhoviny s galaxiemi podobnými té naší. Tato myšlenka však není zcela nová, stejný závěr učinil již I. Kant. Ve stejné době je zjištěno, že tyto galaxie se od nás v drtivé většině vzdalují. Zásadní obrat pak přináší Einsteinova obecná teorie relativity aplikovaná na vesmír jako celek. Po II. světové válce přichází na scénu Gamowova domněnka o časovém počátku našeho vesmíru (Velký třesk). V této době je stále přirozenou myšlenkou statický vesmír, a proto trvá ještě několik let, než je Gamowova teorie přijata. Důsledky jsou však dalekosáhlé a zcela pozměnily naše nazírání na vesmír. Postupně je teorie rozpracována a precizována. Významným příspěvkem je teorie kosmické inflace (A. Gutha) a její následné revize (A. Linde).

S rozvojem pozorovací techniky jsou pak objeveny podivné objekty, které vznikají v závěrečných fázích života hvězd (neutronové hvězdy, černé díry apod.). Tyto objevy obohatí naše znalosti o možnost lépe předvídat možné scénáře vývoje našeho vesmíru. Objev zcela zásadní pak učiní A. Penzias a R. Wilson. V roce 1964 zachytí jejich anténa určená k průzkumu intenzity rádiových vln v naší Galaxii neodstranitelný šum. O správnou interpretaci tohoto šumu se postarali P. J. E. Peebles a další badatelé z Princetonu. Šum je ztotožněn s reliktním elektromagnetickým záření, pozůstatkem Velkého třesku. Zajímavostí je, že toto záření bylo předpověděno již 20 let před objevem, detekce však byla na hraně tehdejší techniky. Přesto mnozí označují tak dlouhé čekání na objev za selhání spolupráce mezi experimentátory a teoretiky. Podrobná měření reliktního záření provedla v roce 1989 sonda COBE. Bylo zjištěno, že reliktní záření není homogenní a vykazuje fluktuace intenzity. Z charakteru těchto fluktuací můžeme určit křivost našeho vesmíru či jeho celkovou (globální) topologii. Vidíme tedy, jak zásadní informace může tento výzkum přinést. Zpřesnění výsledků provedla sonda WMAP a v současnosti mapuje fluktuace reliktního záření sonda Planck.

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Významný pokrok učinila kosmologie i v souvislosti s výzkumem struktury vesmíru. Při zkoumání galaxií našel F. Zwicky v roce 1933 nesrovnalosti v rotaci hmoty uvnitř těchto objektů. Možným vysvětlením je existence hmoty na okrajích galaxií, kterou nepozorujeme. Proto byla tato hmota nazvána *temnou hmotou*. O jejím charakteru mnoho nevíme, ale existuje několik nadějných kandidátů. Pravděpodobně se jedná o exotické částice (axiony, wimpy aj.), které se snad v budoucnosti podaří úspěšně detekovat.

Během studia maximální jasnosti vzdálených supernov Ia byla zjištěna zrychlující expanze našeho vesmíru. Takový výsledek nikdo nečekal a možné příčiny zrychlování jsou dodnes zahaleny tajemstvím. Zrychlená expanze je způsobena působením *temné energie*, o jejíž podstatě není téměř nic známo. Je možné, že se jedná o energii vakua, ale výsledky měření a teoretická hodnota se rozcházejí o neuvěřitelných 120 řádů. Nacházíme se tedy ve stejné situaci jako na počátku 20. století, kdy problém vyzařování absolutně černého tělesa (ultrafialová katastrofa) vedl ke zrodu kvantové mechaniky. Slovy Franka Wilczeka: „Za dveřmi je cosi nového.“

3 Závěr

Kosmologie v současnosti řeší velké záhady. Z pozorování temné hmoty a temné energie vyplývá, že vesmír je tvořen ze 74% temnou energií, z 22% temnou hmotou a pouze 4% běžné hmoty atomárního charakteru. Kosmologie musí tedy urazit ještě dlouhou cestu, aby naše poznání bylo úplné. Možná k úplnému cíli nikdy nedojde. Snad nás k němu přiblíží některé nové teorie (bránová teorie, teorie superstrun apod.), ale rozhodně nás čeká ještě mnoho překvapení.

4 Použitá literatura

- BARROW, D.J.: *Teorie všeho*. Praha: Mladá fronta, 2003. 272 s. ISBN 80-204-0602-6
GRYGAR, J.: *Vesmír, jaký je*. Praha: Mladá fronta, 1997. 224 s. ISBN 80-204-0637-9
HAWKING, S.: *Černé díry a budoucnost vesmíru*. Praha, Mladá fronta, 2002. 184 s. ISBN 80-204-0515-1
HAWKING, S.: *Stručná historie času*. Praha, Mladá fronta, 1997. 192 s. ISBN 80-204-0169-5
WEINBERG, S.: *První tři minuty*. Praha, Mladá fronta, 2000. 200 s. ISBN 80-204-0700-6

5 Kontakt na autora

PhDr. Martin Tomáš

ZČU, FPE, katedra matematiky, fyziky a technické výchovy, Klatovská 51, Plzeň

marty01@kmt.zcu.cz

ODBORNÝ KEMP PŘÍRODOVĚDNÝCH OBORŮ FYZIKA

KIRCHHOFFOVY ZÁKONY 2

Pavel MASOPUST

1 Úvod

Přednáška ukázala, jak pomocí Kirchhoffových zákonů řešit základní úlohy teorie obvodů.

O zákonech lze nalézt mnoho informací jak v odborné literatuře, tak na internetu. V použité literatuře je seznam počítaných příkladů i teorie v množství dostatečném k dokonalému pochopení přednesené problematiky. Především [1] obsahuje množství multimediálních materiálů a komentovaných příkladů.

2 Použitá literatura

- [1] Reichl J., *Kirchhoffovy zákony*, [Online], [cit. 1. 9. 2011],
URL <http://fyzika.jreichl.com/index.php?page=257&sekce=browse>
[2] Smilek J., *Kirchhoffovy zákony*, [Online], [cit. 2. 9. 2011],
URL <http://www.jsmilek.cz/priklady/priklad%20blah%202-3%20kirchhoffovy%20zakony%20-%20reseni.pdf>
[3] Wikipedie, *Kirchhoffovy zákony*, [Online], [cit. 2. 9. 2011],
URL http://cs.wikipedia.org/wiki/Kirchhoffovy_z%C3%A1kony

3 Kontakt na autora

Pavel Masopust PhDr.
ZČU, FPE , katedra matematiky, fyziky a technické výchovy
Klatovská 51, Plzeň
pmasop@kmt.zcu.cz

ODBORNÝ KEMP PŘÍRODOVĚDNÝCH OBORŮ FYZIKA

DIFERENCIÁLNÍ ROVNICE VEDOUcí K EXPONENCIÁLNÍ ZÁVISLOSTI VELIČIN

Petr MAZANEC

1 Úvod

V přednášce bylo ukázáno několik příkladů fyzikálních dějů s exponenciální závislostí.

2 Stat'

Příklad 1 (teplotní délková roztažnost tyče)

Odvoďte závislost délky l tyče na její teplotě t , jestliže při teplotě t_0 má tyč délku l_0 .

Řešení:

Změna délky tyče Δl je přímo úměrná změně teploty Δt a původní délce tyče l .

$$\Delta l = \alpha l \Delta t$$

Koeficient přímé úměrnosti α je součinitel teplotní délkové roztažnosti materiálu tyče. Tento vztah platí pro malé změny obou veličin ($\Delta l \rightarrow 0$ $\alpha \Delta t \rightarrow 0$). V tomto případě můžeme změny nahradit diferenciály a dostaneme diferenciální rovnici, kterou vyřešíme separací proměnných a dvěma určitými integrály:

$$dl = \alpha \cdot l \cdot dt$$

$$\int_{l_0}^l \frac{dl}{l} = \alpha \cdot \int_{t_0}^t dt$$

$$[\ln l]_{l_0}^l = \alpha \cdot [t]_{t_0}^t$$

$$\ln l - \ln l_0 = \alpha(t - t_0) = \alpha \Delta t$$

$$\ln \left(\frac{l}{l_0} \right) = \alpha \Delta t = x$$

Veličina x je bezrozměrná veličina.

$$\frac{l}{l_0} = e^x$$

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Hledaná závislost tedy je exponenciální a rostoucí (tyč se při zahřívání prodlužuje a při ochlazování zkracuje).

$$l = l_0 \cdot e^x = l_0 \cdot e^{\alpha \Delta t}$$

Součinitel $\alpha \approx 10^{-5} K^{-1}$ a pro $\Delta t = \Delta T \in \langle -100K; +100K \rangle$ je $x \in \langle -0,001; 0,001 \rangle$.

Protože je $x \rightarrow 0$, bude platit velmi dobře i původní rovnice pro změny

$$\Delta l = l - l_0 \quad \alpha \Delta t = t - t_0$$

$$l - l_0 = \alpha l_0 \Delta t$$

Úpravou dostaneme jednoduchý vztah lineární

$$l = l_0 \cdot (1 + \alpha \Delta t) = l_0 \cdot (1 + x)$$

Porovnáním přesné exponenciální a přibližné lineární závislosti dostáváme

$$e^x \approx 1 + x \quad \text{pro } x \rightarrow 0$$

Přímka o rovnici $y = 1 + x$ je tečnou exponenciální křivky $y = e^x$ v bodě $x = 0$.

Kvadr má při teplotě t_0 objem $V_0 = a_0 b_0 c_0$. Potom při teplotě t má objem

$$V = abc = a_0 \cdot e^x \cdot b_0 \cdot e^x \cdot c_0 \cdot e^x = V_0 \cdot e^{3x}$$

$$V = V_0 \cdot e^{3\alpha \Delta t} = V_0 \cdot e^{\beta \Delta t} \quad \beta = 3\alpha$$

Pro malé teplotní změny objemu můžeme odvodit jednodušší vztah:

$$e^{3x} = (e^x)^3 \approx (1 + x)^3 = 1 + 3x + 3x^2 + x^3 \approx 1 + 3x$$

Vyšší mocniny x můžeme zanedbat ($x \rightarrow 0 \Rightarrow x^2 \rightarrow 0 \Rightarrow x^3 \rightarrow 0$).

Přímka o rovnici $y = 1 + 3x$ je tečnou exponenciální křivky $y = e^{3x}$ v bodě $x = 0$.

Tyto dva výsledky jdou zobecnit na větu:

Přímka o rovnici $y = 1 + kx$ je tečnou exponenciální křivky $y = e^{kx}$ v bodě $x = 0$.

$$e^{kx} \approx 1 + kx \quad \text{pro } x \rightarrow 0 \text{ a pro } k \in R$$

Pro malá x tedy platí:

$$V = V_0 \cdot (1 + \beta \Delta t) \quad \beta = 3\alpha$$

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Příklad 2 (radioaktivní rozpad jader atomů)

Odvoďte závislost počtu nerozpadlých jader N radioaktivního materiálu na čase t , jestliže na začátku pozorování v čase $t = 0$ byl počet nerozpadlých jader ve vzorku N_0 a poločas rozpadu je T .

Řešení:

Za poločas rozpadu klesne původní počet jader na poloviční počet, protože druhá polovina jader se rozpadla rozpadem α nebo β . Potom platí:

$$t = 0 \rightarrow N = N_0$$

$$t = T \rightarrow N = \frac{N_0}{2}$$

$$t = 2T \rightarrow N = \frac{N_0}{4}$$

$$t = 3T \rightarrow N = \frac{N_0}{8}$$

$$t = kT \quad \Rightarrow \quad N = \frac{N_0}{2^k} = N_0 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^k = N_0 \cdot 2^{-k} \quad k = \frac{t}{T}$$

Po dosazení dostaneme zákon radioaktivního rozpadu:

$$N = N_0 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{T}} = N_0 \cdot 2^{-\frac{t}{T}}$$

Počet nerozpadlých jader exponenciálně klesá s časem. Počet rozpadlých jader x v čase t je $x = N_0 - N = -\Delta N$.

Teď odvodíme stejný zákon řešením diferenciální rovnice. Počet x rozpadlých jader za malý časový interval Δt je přímo úměrný původnímu počtu jader a délce časového intervalu.

$$x = -\Delta N = \lambda \cdot N \cdot \Delta t$$

λ je rozpadová konstanta radionuklidu.

Tento vztah opět platí pro malé změny obou veličin ($\Delta N \rightarrow 0$ a $\Delta t \rightarrow 0$). V tomto případě můžeme změny nahradit diferenciály a dostaneme diferenciální rovnici, kterou vyřešíme separací proměnných a dvěma určitými integrály:

$$dN = -\lambda \cdot N \cdot dt$$

$$\int_{N_0}^N \frac{dN}{N} = -\lambda \cdot \int_0^t dt$$

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

$$[\ln N]_{N_0}^N = -\lambda \cdot [t]_0^t$$

$$\ln\left(\frac{N}{N_0}\right) = -\lambda t = -x$$

$$N = N_0 \cdot e^{-x} = N_0 \cdot e^{-\lambda t}$$

Dostali jsme vyjádření rozpadového zákona pomocí přirozené exponenciální funkce. Platí tedy exponenciální rovnost pro $t > 0$.

$$N_0 \cdot 2^{-\frac{t}{T}} = N_0 \cdot e^{-\lambda t}$$

$$2^{-\frac{t}{T}} = e^{-\lambda t}$$

Obě strany rovnosti zlogaritmujeme přirozeným logaritmem:

$$\ln\left(2^{-\frac{t}{T}}\right) = \ln(e^{-\lambda t})$$

$$-\frac{t}{T} \cdot \ln 2 = -\lambda t$$

$$\lambda = \frac{\ln 2}{T}$$

Úpravou jsme dostali vztah mezi poločasem rozpadu a rozpadovou konstantou.

$$\text{Závěr: } N = N_0 \cdot 2^{-\frac{t}{T}} = N_0 \cdot e^{-\lambda t} \quad \lambda = \frac{\ln 2}{T}$$

3 Závěr

Na příkladech teplotní roztažnosti a radioaktivního rozpadu jsme ukázali rostoucí a klesající exponenciální závislost mezi fyzikálními veličinami a řešení diferenciální rovnice $dy = k \cdot y \cdot dt$ separací proměnných.

4 Použitá literatura:

časopis Kvant, číslo 12, ročník 1972

5 Kontakt na autora:

Mgr. Petr Mazanec
Základní škola Sušice, Komenského 59
mpetr@seznam.cz

ODBORNÝ KEMP PŘÍRODOVĚDNÝCH OBORŮ FYZIKA

VYUŽITÍ MATEMATIKY PŘI ŘEŠENÍ FYZIKÁLNÍCH ÚLOH - součet nekonečné řady a určitý integrál ve fyzice

Mgr. Petr MAZANEC

1 Úvod

V přednášce byla ukázána na několika úlohách souvislost součtu nekonečné řady a určitého integrálu.

2 Stat'

Příklad 1

Závislost okamžité rychlosti rovnoměrně zrychleného pohybu na čase je lineární funkcí

$$v = v_0 + at$$

V čase $t = 0$ jsou počáteční podmínky $v = v_0$ a $s = 0$.

Odvoďte funkční závislost dráhy s na čase t .

Řešení:

a) Součtem nekonečné řady

Časový interval $\langle 0; t \rangle$ rozdělíme na n intervalů o délce $\Delta t = \frac{t}{n}$ ($n \in \mathbb{N}$).

Pokud je n dostatečně velké přirozené číslo ($n \rightarrow \infty$), pak můžeme předpokládat že v těchto krátkých intervalech se rychlost téměř nezmění. Označme k pořadí intervalu od začátku pohybu ($k \in \{1, 2, 3, \dots, n\}$).

Určíme rychlosti v_k a dráhy $s_k = v_k \cdot \Delta t$ v těchto intervalech.

$$k = 1 \quad t = \Delta t \quad v_1 = v_0 + a\Delta t \quad s_1 = v_1 \cdot \Delta t$$

$$k = 2 \quad t = 2\Delta t \quad v_2 = v_0 + 2a\Delta t \quad s_2 = v_2 \cdot \Delta t$$

$$k = k \quad t = k\Delta t \quad v_k = v_0 + ka\Delta t \quad s_k = v_k \cdot \Delta t$$

$$k = n \quad t = n\Delta t \quad v_n = v_0 + na\Delta t \quad s_n = v_n \cdot \Delta t$$

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Celkovou dráhu $s(n)$ v intervalu $\langle 0; t \rangle$ pro zvolené dělení n intervalu vypočteme

$$s(n) = s_1 + s_2 + \dots + s_k + \dots + s_n = \sum_{k=1}^n s_k = \Delta t \cdot \sum_{k=1}^n v_k$$

$$\sum_{k=1}^n v_k = \sum_{k=1}^n (v_0 + ka\Delta t) = \sum_{k=1}^n v_0 + a\Delta t \cdot \sum_{k=1}^n k = nv_0 + a\Delta t \cdot \frac{n(n+1)}{2}$$

Při výpčtu předchozího součtu jsme využili známý vzorec pro součet přirozených čísel od 1 do n :

$$\sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}$$

Z výše odvozených vztahů plyne:

$$s(n) = nv_0\Delta t + a(\Delta t)^2 \cdot \frac{n(n+1)}{2}$$

Po dosazení za $\Delta t = \frac{t}{n}$ a úpravě dostaneme

$$s(n) = v_0 t + at^2 \cdot \frac{n+1}{2n}$$

Výsledek bude tím přesnější, čím bude číslo n větší (v limitě se musí blížit k ∞).

Tedy celková dráha $s = \lim_{n \rightarrow \infty} s(n) = v_0 t + at^2 \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{2n} = v_0 t + at^2 \cdot \frac{1}{2}$

Matematicky jsme provedli součet nekonečné řady pomocí limity poslounosti

$$f(n) = \frac{n+1}{2n} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2n}$$

Z předchozí úpravy a z toho, že $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$ vyplývá, že $\lim_{n \rightarrow \infty} f(n) = \frac{1}{2}$.

$$\text{Závěr: } s = v_0 t + \frac{at^2}{2}$$

Tato úvaha o součtu nekonečných řad velmi malých kladných čísel blížících se k nule dovedla Isaaca Newtona k objevu integrálního počtu.

b) Pomocí určitého integrálu

V zápise určitého integrálu je $dt = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \Delta t$. Určitý integrál funkce $v(t)$ v mezích od 0 do t (v intervalu $\langle 0; t \rangle$) je roven součtu nekonečné řady v řešení a).

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

$$s = \int_0^t v \cdot dt = \int_0^t (v_0 + at) \cdot dt = v_0 \cdot \int_0^t dt + a \cdot \int_0^t t \cdot dt = v_0 \cdot [t]_0^t + a \cdot \left[\frac{t^2}{2} \right]_0^t$$

Závěr: $s = v_0 t + \frac{at^2}{2}$

Využili jsme pravidla a vzorce pro výpočet určitého integrálu, při jejichž znalosti velmi rychle dojdeme ke stejnému výsledku.

Příklad 2

Tenká tyč o hmotnosti m a délce l leží na ose x s levým krajním bodem v počátku soustavy souřadnic a začne se otáčet kolem osy z úhlovou rychlostí ω , že je stále kolmá na osu z (z je pevná osa otáčení a počátek je pevný bod tyče při otáčení). Určete kinetickou energii tyče při otáčení.

a) Součtem nekonečné řady

Délkový interval tyče $x \in \langle 0; l \rangle$ rozdělíme na n intervalů o délce $\Delta x = \frac{l}{n}$ ($n \in \mathbb{N}$).

Pokud je n dostatečně velké přirozené číslo ($n \rightarrow \infty$), pak můžeme předpokládat že jsme tyč rozdělili na n hmotných bodů o stejné hmotnosti $\Delta m = \frac{m}{n}$. Označme k pořadí hmotného bodu od počátku soustavy souřadnic ($k \in \{1, 2, 3, \dots, n\}$).

Určíme rychlosti v_k a poloměry otáčení r_k a kinetické energie E_k těchto hmotných bodů.

$$k = 1 \quad r_1 = \Delta x \quad v_1 = r_1 \omega \quad E_1 = \frac{\Delta m v_1^2}{2}$$

$$k = 2 \quad r_2 = 2\Delta x \quad v_2 = r_2 \omega \quad E_2 = \frac{\Delta m v_2^2}{2}$$

$$k = k \quad r_k = k\Delta x \quad v_k = r_k \omega \quad E_k = \frac{\Delta m v_k^2}{2}$$

⋮
⋮
⋮

$$k = n \quad r_n = n\Delta x \quad v_n = r_n \omega \quad E_n = \frac{\Delta m v_n^2}{2}$$

Celkovou kinetickou energii $E(n)$ tyče **pro zvolené dělení tyče na n hmotných bodů** vypočteme jako součet

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

$$E(n) = \sum_{k=1}^n E_k = \frac{\Delta m}{2} \cdot \sum_{k=1}^n v_k^2 = \frac{\Delta m \omega^2}{2} \cdot \sum_{k=1}^n r_k^2 = \frac{\Delta m \omega^2 \cdot (\Delta x)^2}{2} \cdot \sum_{k=1}^n k^2$$

Pro součet druhých mocnin přirozených čísel od 1 do n platí vzorec

$$\sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

Užitím vzorce dostaneme

$$E(n) = \frac{\Delta m \omega^2 \cdot (\Delta x)^2 \cdot n(n+1)(2n+1)}{12}$$

Po dosazení za Δm a Δx z výše uvedených vztahů dostaneme po úpravě:

$$E(n) = \frac{m \omega^2 l^2}{12} \cdot \frac{(n+1)(2n+1)}{n^2}$$

Výsledek bude tím přesnější, čím bude číslo n větší (v limitě se musí blížit k ∞).

Tedy celková kinetická energie $E = \lim_{n \rightarrow \infty} E(n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{m \omega^2 l^2}{12} \cdot \frac{(n+1)(2n+1)}{n^2}$

$$E = \frac{m \omega^2 l^2}{12} \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)(2n+1)}{n^2} = \frac{m \omega^2 l^2}{12} \cdot 2 = \frac{m \omega^2 l^2}{6}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)(2n+1)}{n^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right) \left(2 + \frac{1}{n}\right) = (1+0)(2+0) = 2$$

$$\text{Závěr: } E = \frac{m \omega^2 l^2}{6}$$

b) Pomocí určitého integrálu

Poloměr otáčení hmotného bodu o hmotnosti $dm = \lim_{\Delta m \rightarrow 0} \Delta m$ a délce

$dx = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta x$ v poloze o souřadnici x je $r = x$. Jeho rychlost $v = r\omega = x\omega$.

Diferenciál hmotnosti můžeme vyjádřit vztahem $dm = \frac{m}{l} \cdot dx$ pomocí diferenciálu délky.

Diferenciál kinetické energie $dE = \lim_{\Delta E \rightarrow 0} \Delta E$ můžeme vyjádřit pomocí diferenciálu hmotnosti:

$$dE = \frac{dm \cdot v^2}{2}$$

Po dosazení výše uvedených vztahů a úpravě dostaneme vztah mezi diferenciály dE a dx .

$$dE = \frac{m\omega^2}{2l} \cdot x^2 \cdot dx$$

Určitý integrál diferenciálu dE v mezích od 0 do l (v intervalu $x \in \langle 0; l \rangle$) je roven součtu nekonečné řady v řešení a) a tedy celkové kinetické energii tyče.

$$E = \int_0^l dE = \frac{m\omega^2}{2l} \cdot \int_0^l x^2 \cdot dx = \frac{m\omega^2}{2l} \cdot \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^l = \frac{m\omega^2}{2l} \cdot \frac{l^3}{3} = \frac{m\omega^2 l^2}{6}$$

Opět jsme velmi rychle došli ke správnému výsledku pomocí určitého integrálu.

3 Závěr

Bylo provedeno řešení dvou fyzikálních úloh, na kterých byl ilustrován určitý integrál jako součet konvergentní nekonečné řady, pomocí které je definován v matematické analýze.

4 Použitá literatura:

Časopis Kvant, číslo 10, ročník 1983

5 Kontakt na autora

Mgr. Petr Mazanec
Základní škola Sušice, Komenského 59
mpetr@seznam.cz

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

**ODBORNÝ KEMP PŘÍRODOVĚDNÝCH OBORŮ
FYZIKA****ŘEŠENÍ OBTÍŽNĚJŠÍCH ÚLOH Z TERMIKY**

Petr MAZANEC

1 Úvod

Na třech příkladech z klasické termodynamiky bylo ukázáno využití základních zákonů termodynamiky a matematické řešení těchto úloh.

2 Obsah

Příklad 1 – teplotní roztažnost

Dilatometr, na kterém je vyznačen objem $V_1 = 100 \text{ cm}^3$ a vztažná teplota $t_1 = 20 \text{ °C}$, je vyroben ze skla SIMAX, jehož teplotní součinitel délkové roztažnosti je $\alpha_s = 3,7 \cdot 10^{-6} \text{ K}^{-1}$. Při teplotě $t_2 = 26 \text{ °C}$ byl naplněn měřenou kapalinou a na stupnici kapiláry byl odečten objem $V_{k2} = 0,3 \text{ cm}^3$. Po zvětšení teploty na $t_3 = 61 \text{ °C}$ byl na stupnici kapiláry odečten objem $V_{k3} = 5,6 \text{ cm}^3$. Určete teplotní součinitel objemové roztažnosti měřené kapaliny β .

Řešení:

Teplotní součinitel objemové roztažnosti skla je $\beta_s = 3\alpha_s = 11,1 \cdot 10^{-6} \text{ K}^{-1}$.

$$V = (V_1 + V_k)[1 + \beta_s(t - t_1)] \quad (1)$$

Podle vzorce (1) vypočítáme objemy kapaliny při teplotách t_2 a t_3 :

$$V_2 = 100,30668 \text{ cm}^3, \quad V_3 = 105,64806 \text{ cm}^3.$$

Platí:

$$V_2 = V_1 [1 + \beta(t_2 - t_1)], \quad V_3 = V_1 [1 + \beta(t_3 - t_1)],$$

kde V_1 je objem měřené kapaliny při teplotě t_1 . Úpravou dostaneme:

$$\beta = \frac{V_3 - V_2}{V_2 \cdot (t_3 - t_1) - V_3 \cdot (t_2 - t_1)} = 1,54 \cdot 10^{-3} \text{ K}^{-1}$$

Zjednodušené řešení:

Zanedbáme-li teplotní roztažnost samotné kapiláry, můžeme napsat

$$V_k = V_{k3} - V_{k2} = V_1\beta \Delta t - V_1\beta_s \Delta t = V_1(\beta - \beta_s)(t_3 - t_2) \approx V_1\beta(t_3 - t_2)$$

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

$$\beta \approx \frac{V_{k3} - V_{k2}}{V_1 \cdot (t_3 - t_2)} = 1,51 \cdot 10^{-3} \text{ K}^{-1}$$

Oba výsledky se v mezích přesnosti měření shodují. Měřená kapalina má teplotní součinitel objemové roztažnosti $\beta \approx 1,5 \cdot 10^{-3} \text{ K}^{-1}$.

Příklad 2 – ohřívání ledu s vodou

V zimě nabral turista do rychlovarné konvice vodu s ledem o teplotě $0 \text{ }^\circ\text{C}$, vody bylo 900 g, ledu 600 g. Za jak dlouho se bude voda vařit při středním výkonu konvice 2,0 kW a účinnosti 85 % ?

Řešení:

Hmotnost vody $m_1 = 0,90 \text{ kg}$, hmotnost ledu $m_2 = 0,60 \text{ kg}$, teplota $t_1 = t_2 = 0 \text{ }^\circ\text{C}$, výsledná teplota $t = 100 \text{ }^\circ\text{C}$. Měrná tepelná kapacita vody $c = 4200 \text{ J/kg} \cdot \text{ }^\circ\text{C}$, měrné skupenské teplo tání ledu $l_t = 332 \text{ kJ/kg}$, $P = 2,0 \text{ kW}$, účinnost $\eta = 85 \%$, hledaná doba je τ .

Teplo na roztátí ledu $Q_2 = m_2 \cdot l_t$, teplo na ohřátí vody $Q_1 = (m_1 + m_2) \cdot c \cdot (t - t_1)$.

$Q = P \cdot \eta \cdot \tau$ je teplo dodané konvicí za dobu τ .

Sestavíme kalorimetrickou rovnici pro tepelnou výměnu:

$$Q = Q_1 + Q_2$$

$$P \cdot \eta \cdot \tau = m_2 \cdot l_t + (m_1 + m_2) \cdot c \cdot (t - t_1)$$

Odtud pak dostaneme

$$\tau = \frac{m_2 \cdot l_t + (m_1 + m_2) \cdot c \cdot (t - t_1)}{P \cdot \eta} = 488 \text{ s} = 8,1 \text{ min}$$

Voda se bude vařit asi za 8 minut.

Příklad 3 – klasický aerostat

Navrhněte balón kulového tvaru plněný heliem (klasický aerostat), který má sloužit k výstupu do výšky $h = 1\,500 \text{ m}$. Předpokládaná hmotnost konstrukce balónu (bez plynové náplně) a zátěže je $m_b = 1\,200 \text{ kg}$. Balón bude mít ve spodní části otvor, který umožní vyrovnávání tlaku s okolním atmosférickým tlakem (jinak by mohl aerostat po výstupu působením přetlaku prasknout).

Pro zjednodušení předpokládejte, že teplota vzduchu $t_0 = 20,0 \text{ }^\circ\text{C}$ se s výškou nemění a tlak se mění podle barometrické rovnice z počáteční hodnoty $p_{a0} = 1,01 \cdot 10^5 \text{ Pa}$ na hodnotu $p_a = 0,85 \cdot 10^5 \text{ Pa}$.

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

a) Určete potřebný objem V balonu, jeho poloměr r a hmotnost $m_{\text{He}0}$ heliové náplně pro výšku $h_0 = 0$ m.

b) Jaký bude relativní úbytek hmotnosti helia po výstupu do výšky h , jestliže ve výšce $h_0 = 0$ m byl celý objem V balonu vyplněn heliem o tlaku $p_{a0} = 1,01 \cdot 10^5$ Pa a teplotě $t_0 = 20$ °C okolního vzduchu?

Při řešení předpokládejte, že termodynamické děje, při nichž se bude rovnoměrně vyrovnávat tlak helia s tlakem okolního vzduchu, probíhají dostatečně pomalu, a že přitom nebude do balonu vnikat vzduch.

Molární hmotnost vzduchu $M_m = 28,96 \cdot 10^{-3}$ kg.mol⁻¹, molární hmotnost helia $M'_m = 4,003 \cdot 10^{-3}$ kg.mol⁻¹. Předpokládejte konstantní tíhové zrychlení $g = 9,81$ m.s⁻². Molární plynová konstanta $R = 8,314$ J · mol⁻¹ · K⁻¹.

Řešení:

a) Ve výšce h musí nastat rovnováha tíhových sil se vztlakovou silou.

Označíme-li m_v hmotnost vzduchu vytlačeného balónem o objemu V ve výšce h a m_{He} hmotnost heliové náplně v této výšce, musí z rovnováhy sil a podle Archimédova zákona platit

$$F_{vz} - F_{g\text{He}} - F_{gb} = 0$$

$$(m_v - m_{\text{He}} - m_b)g = 0.$$

$$m_b = m_v - m_{\text{He}}$$

Hmotnosti plynů ve výšce h určíme užitím stavové rovnice:

$$m_v = \frac{p_a \cdot V \cdot M_m}{R \cdot T_0}$$

$$m_{\text{He}} = \frac{p_a \cdot V \cdot M'_m}{R \cdot T_0}$$

$$T_0 = t_0 + 273,15 = 293,15 \text{ K}$$

Pak z podmínky rovnováhy sil vychází

$$m_b = \frac{V \cdot (M_m - M'_m) \cdot p_a}{R \cdot T_0}$$

neboli potřebný objem balonu je

$$V = \frac{m_b \cdot R \cdot T_0}{(M_m - M'_m) \cdot p_a} = 1380 \text{ m}^3$$

a jeho poloměr je

$$r = \sqrt[3]{\frac{3 \cdot V}{4\pi}} = 6,91 \text{ m.}$$

Hmotnost helia ve výšce $h_0 = 0$ m je dána stavovou rovnicí pro vypočtený objem V :

$$m_{\text{He}0} = \frac{p_{a0} \cdot V \cdot M'_m}{R \cdot T_0} = 229 \text{ kg.}$$

b) Úbytek hmotnosti helia ve výšce h bude úměrný úbytku tlaku:

$$\Delta m_{\text{He}} = m_{\text{He}} - m_{\text{He}0} = \frac{V \cdot M'_m \cdot (p_a - p_{a0})}{R}$$

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Relativní úbytek hmotnosti helia je

$$\frac{\Delta m_{\text{He}}}{m_{\text{He}0}} = \frac{P_a - P_{a0}}{P_{a0}} \approx -0,158 = -15,8\%.$$

3 Závěr

Ve třech úlohách bylo ukázáno využití zákonů termodynamiky při kvantitativním popisu fyzikálních dějů v látkách všech skupenství (teplotní roztažnost kapalin a pevných látek, tlak plynu) a při skupenských přeměnách a změnách teploty při tepelné výměně.

4 Použitá literatura

ŠEDIVÝ P. Teplotní závislosti fyzikálních veličin, knihovnička FO, studijní text

VYBÍRAL B. Mechanika ideálních plynů, knihovnička FO, studijní text

5 Kontakt na autora

Mgr. Petr Mazanec

Základní škola Sušice, Komenského 59

mpetr@seznam.cz

ODBORNÝ KEMP PŘÍRODOVĚDNÝCH OBORŮ FYZIKA

ŘEŠENÍ VYBRANÝCH ÚLOH Z TERMIKY 2

Jitka PROKŠOVÁ

1 Úvodní poznámky

Soubor příkladů, který slouží k procvičení složitějších situací z kalorimetrie, termodynamiky a molekulové fyziky je uveden níže.

Výsledky řešení jsou ve většině případů v závorce za příkladem.

2 Příklady na procvičení

1. Na digitálním Fahrenheitově teploměru se ukazuje číslo dvakrát větší než u Celsiova. Při jaké teplotě může tato situace nastat?
2. Do kalorimetru o tepelné kapacitě $70 \text{ J} \cdot (\text{kg} \cdot \text{K})^{-1}$, ve kterém se nacházela voda a ledové kostky, bylo ponořeno topné tělísko o výkonu 50 W . V čase 5 min po zapnutí proudu byla v kalorimetru stále teplota 0°C . V čase 10 min byla naměřena teplota $3,1^\circ\text{C}$, v čase 15 min teplota $13,6^\circ\text{C}$. Určete hmotnost m ledu a hmotnost M vody v kalorimetru na počátku děje.
($0,077 \text{ kg}$, $0,247 \text{ kg}$)
3. Ocelová tyč má průřez 2 cm^2 a její koeficient tepelné roztažnosti je $\alpha = 12 \cdot 10^{-6} \text{ }^\circ\text{C}^{-1}$. Tyč zahřejeme z teploty 0°C na teplotu 50°C , a pak ji prudce ochladíme na původní teplotu. Vypočítejte, jakou nejmenší silou (působící ve směru osy tyče) je třeba tyč natahovat, aby se při ochlazení nezkrátila. Youngův modul pružnosti E určete z průměrné tabulkové hodnoty pro ocel (pro jednoduchost předpokládejte, že v tomto teplotním intervalu není E funkcí teploty).
(25 kN)
4. Můžeme změřit zvětšení průměru mosazného válce způsobené zahříváním, provádíme-li měření mikrometrem, který měří přesně na $0,01 \text{ mm}$? Měříme při teplotách 5°C a 35°C . Při 5°C byl průměr válečku $20,45 \text{ mm}$.
5. Mosazná koule ($\beta = 56,2 \cdot 10^{-6} \text{ }^\circ\text{C}^{-1}$) má při teplotě 15°C průměr 4 cm . Oč je nutné zvýšit její teplotu, aby neprošla otvorem o průměru $4,04 \text{ cm}$?
(o 540°C)
6. Ocelová kolejnice má délku 15 m . O kolik se prodlouží při ohřátí o 30°C ? Kolik činí prodloužení na trati dlouhé 100 km ? (Předpokládejte, že: $\alpha = 16,3 \cdot 10^{-6} \text{ }^\circ\text{C}^{-1}$)
($7,3 \text{ mm}$; $48,9 \text{ m}$)

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

7. Ocelový předmět o hmotnosti 0,9 kg a teplotě 300 °C byl vložen do vody o hmotnosti 2,5 kg a teplotě 15 °C. Jaká je teplota předmětu a vody po dosažení rovnovážného stavu? Měrná tepelná kapacita oceli je $452 \text{ J} \cdot (\text{kg} \cdot \text{K})^{-1}$.
8. Parovodní potrubí průměru 60 cm a délky 1 km je vyrobeno z oceli tloušťky 1 cm. Součinitel tepelné vodivosti užitého materiálu je $\lambda = 50 \text{ W} \cdot (\text{m} \cdot \text{K})^{-1}$. Stanovte energetické ztráty při jeho užívání po dobu 30 dnů, víte-li, že venkovní teplota se ustálila na 17,8 °C a teplota dodávané páry byla 373 K. (2000 TJ)
9. K určení průměrné teploty tavicí pece byla do ní vložena platinová koule o hmotnosti 100 g. Po vytažení byla koule ponořena do 1 kg vody o teplotě 10 °C. Jak vysoká byla teplota v peci, stoupla-li teplota vody na 14 °C a předpokládáme-li, že měrná tepelná kapacita platiny byla konstantní a rovna $152 \text{ J} \cdot (\text{kg} \cdot \text{K})^{-1}$. (1114 °C)
10. Kolik tepla propustí za hodinu skleněná tabule 4 mm silná o obsahu 2 m², je-li venku –10 °C a teplota uvnitř místnosti je 20 °C? Předpokládejte, že součinitel tepelné vodivosti užitého materiálu je $\lambda = 0,924 \text{ W} \cdot (\text{m} \cdot \text{K})^{-1}$

3 Závěr

K řešení je možné užít základní poznatky z kalorimetrie a termodynamiky, které obsahuje uvedená doporučená literatura.

4 Použitá literatura

SVOBODA, E., BAKULE, R. Molekulová fyzika. Academia Praha 1992

5 Kontakt na autora

Jitka Prokšová, RNDr. Ph.D.
KOF FPE ZČU v Plzni
proksovj@kof.zcu.cz

ODBORNÝ KEMP PŘÍRODOVĚDNÝCH OBORŮ FYZIKA

ŘEŠENÍ VYBRANÝCH ÚLOH Z OPTIKY 1

Jitka PROKŠOVÁ

1 Úvodní poznámky

Soubor příkladů, který slouží k procvičení složitějších situací z optického zobrazování, je uveden níže.

Výsledky řešení jsou vždy v závorce za příkladem.

2 Příklady na procvičení

1. Obraz předmětu umístěného před spojkou je vzpřímený a třikrát zvětšený. Vzdálenost mezi předmětem a obrazem je 40 cm. Určete ohniskovou vzdálenost čočky. (30 cm)

2. Vzdálenost mezi předmětem a stínítkem je 30 cm. Čočka umístěná mezi nimi dá ostrý obraz předmětu ve dvou polohách, jejichž vzdálenost je 10 cm. Určete Z obrazu v obou těchto polohách. (-2; -0,5)

3. Tenká ploskovypuklá čočka ($R = 10$ cm) z korunového skla o indexu lomu 1,5 má být kombinována v těsném spojení s ploskodutou tenkou čočkou z flintového skla o indexu lomu 1,75 tak, aby soustava působila jako spojka s optickou mohutností 0,5 dioptrie. Jaký má mít rozptylka poloměr křivosti? Jakou má optickou mohutnost každá z obou čoček?

$$\left(-\frac{1}{6} \text{ m}, 5\text{D}, -4\frac{1}{2} \text{ D}\right)$$

4. Jak daleko je reálný předmět od spojky o ohniskové vzdálenosti 30 cm, když má od svého zdánlivého obrazu vzdálenost 40 cm? (20 cm)

5. Obraz předmětu je spojkou dvojnásobně zvětšen a je vzpřímený. Vzdálenost mezi předmětem a obrazem je 22,5 cm. Určete ohniskovou vzdálenost spojky. Ověřte konstrukci (v měřítku). (45 cm)

6. Určete polohu obrazového ohniska tlusté čočky, víte-li, že obrazová ohnisková vzdálenost první kulové plochy je 15 mm, předmětová ohnisková druhé plochy je 25 mm a tloušťka čočky je 38 mm. (18,75 cm)

7. Optická soustava je tvořena spojkou o ohniskové vzdálenosti 30 cm a rovinným zrcadlem, které je umístěno 15 cm za čočkou. Předmět se nalézá 15 cm před čočkou. Určete polohu obrazu. Ověřte konstrukci (v měřítku).

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

8. Pozorovatel si prohlíží určitý předmět postupně dvěma lupami. První lupa má menší ohniskovou vzdálenost než druhá. Kterou lupou vidí předmět pod větším zorným úhlem? Ověřte náčrtkem.

9. Dvě spojné čočky o ohniskových vzdálenostech 10 mm a 20 mm jsou umístěné ve vzdálenosti 120 mm. První čočka je použita jako objektiv a druhá jako okulár mikroskopu. Nalezněte jeho zvětšení. (112,5)

10. Dokažte, že nejmenší vzdálenost mezi předmětem a jeho skutečným obrazem je při zobrazování spojkou $4f$.

3 Závěr

K řešení je možné užít i teoretické závěry přednášky o maticové optice, ale jednodušší je řešení pomocí zobrazovací rovnice tenké čočky a vrcholové rovnice kulových zrcadel.

4 Použitá literatura

FUKA, B., HAVELKA, F. Optika a atomová fyzika I. Optika, SPN Praha 1961
MALÝ, P.: Optika, Nakladatelství Karolinum Praha 2008

5 Kontakt na autora

Jitka Prokšová, RNDr. Ph.D.
KOF FPE ZČU v Plzni
proksovj@kof.zcu.cz

ODBORNÝ KEMP PŘÍRODOVĚDNÝCH OBORŮ FYZIKA

ŘEŠENÍ VYBRANÝCH ÚLOH Z OPTIKY 2

Jitka PROKŠOVÁ

1 Úvodní poznámky

Soubor příkladů, který slouží k procvičení složitějších optických situací z vlnové optiky, je uveden níže.

Výsledky řešení jsou vždy v závorce za příkladem.

2 Příklady na procvičení

1. Monochromatický paprsek světla dopadá na průhlednou látku o indexu lomu 1,7. Určete, kolik procent z celkové intenzity dopadajícího paprsku představuje intenzita úplně polarizovaného světla při odrazu. (12,5%)
2. Jaký úhel musí svírat dopadající paprsek monochromatického světla se skleněnou destičkou umístěnou ve vodě, má-li být odražený paprsek úplně polarizovaný? (41°38')
3. Na skleněnou vrstvu o indexu lomu 1,7 dopadá ze vzduchu nepolarizovaná světelná vlna pod úhlem 72°. Určete, kolik % odraženého světla je polarizováno v rovině dopadu a kolmo k ní. (11%,89%)
4. Index lomu kanadského balzámu je 1,53 a index lomu islandského vápence je pro "o" 1,658 a pro "e" 1,486. Který z paprsků se úplně odrazí ve vápenci na kanadském balzámu a za jakých podmínek? (o)
5. Při Youngově pokusu byla vzdálenost štěrbin od stínítka 50 cm. Jejich vzájemná vzdálenost byla 0,1 mm. Vypočítejte, jak daleko se nachází 3. jasný proužek fialového světla od centrálního maxima. (6 mm)
6. Na olejovou skvrnu (tloušťky 0,2 μm) na vodní hladině dopadá kolmo bílé světlo. Určete, jaká barva se nebude odrážet a která se odrazí nejvíce. Předpokládejte, že rychlost šíření světla v oleji je $2 \cdot 10^8 \text{ ms}^{-1}$. (max - modrá, min - žlutá)
7. Mýdlová blána o indexu lomu 1,33 se při kolmém dopadu světla jevila jako modrá ($\lambda = 450 \text{ nm}$). Jakou měla tloušťku? (84 nm)
8. Při osvětlení Newtonových skel monochromatickým paprskem o vlnové délce 589,3 nm byly zjištěny tyto hodnoty průměrů dvou po sobě jdoucích tmavých kroužků: 2 mm a 2,236 mm. Určete poloměr křivosti čočky. (42,4 cm)
9. Určete index lomu skleněné fólie tloušťky $5,4 \cdot 10^{-7} \text{ m}$, je-li osvětlena kolmo bílým světlem a odpovídá-li v odraženém světle vlnová délka 480 nm maximu 3. řádu. (1,56)

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

10. Na optickou mřížku (100 vrypů na 1 mm) dopadá kolmo svazek bílého světla. Pomocí spojky ($f = 30$ cm), kterou umístíme těsně za mřížku, se vytvoří na stínítku spektrum. Vypočítejte, v jaké vzdálenosti je od sebe červená a fialová barva ve spektru 2. řádu.
(22–23 mm)
11. Sodíkové světlo dopadá kolmo na neznámou ohybovou mřížku. Na stínítku umístěném 25 cm od mřížky vznikají dvě maxima 1. řádu, jejichž vzájemná vzdálenost je 3,6 cm. Určete parametry mřížky.
(1200 vrypů na 1 cm)
12. Kolmo na štěrbinu dopadá světlo o vlnové délce 450 nm a na stínítku se objeví střed 2. tmavého proužku pod úhlem $5^{\circ}14'$. Určete, pod jakým úhlem bude možné pozorovat střed 4. tmavého proužku při světle o vlnové délce 760 nm.
(18°)
13. Ohybová mřížka je osvětlena kolmo svazkem bílého světla. Zjistěte, zda se může některá barva ze spektra 1. řádu úplně překrývat s některou barvou spektra 2. řádu.
14. Určete největší řád spektra, který ještě vznikne při ohybu žlutozeleného světla mřížkou, která má 2000 vrypů na 1 cm délky.
(9)
15. Ohybová mřížka dává sodíkovou čáru ve spektru 3. řádu pod úhlem 12° . Vypočítejte vlnovou délku světla, jehož maximum ve stejném řádu spektra odpovídá úhel 10° .
(492 nm)

3 Závěr

K řešení většiny příkladů je možné užít teoretické závěry přednášky o vlnové optice.

4 Použitá literatura

FUKA, B., HAVELKA, F. Optika a atomová fyzika I. Optika, SPN Praha 1961
MALÝ, P.: Optika, Nakladatelství Karolinum Praha 2008

5 Kontakt na autora

Jitka Prokšová, RNDr. Ph.D.
KOF FPE ZČU v Plzni
proksovj@kof.zcu.cz

ODBORNÝ KEMP PŘÍRODOVĚDNÝCH OBORŮ FYZIKA

FÁZE MĚSÍCE

Miroslav RANDA

1 Úvod

Fáze Měsíce patří mezi nejnápadnější jevy na obloze. Přestože je jejich podstata (osvětlení různých částí přivrácené části Měsíce Sluncem) předmětem školní výuky na 1. stupni v předmětu přírodověda, na 2. stupni v předmětech fyzika a zeměpis, tedy několikrát za dobu povinné školní docházky, setká se nejednou člověk s neznalostí tohoto jevu i u vysokoškolsky vzdělaných lidí, kteří díky světelnému znečištění ve městech například ani netuší, že by mohl být Měsíc nad obzorem nejen v noci, ale i ve dne.

2 Střídání fází Měsíce v našich zeměpisných šířkách

Základní střídání fází Měsíce, tedy nov, první čtvrt', úplněk, poslední čtvrt', je předmětem výuky již na základním stupni vzdělávání. Doplnění této posloupnosti o názorné vysvětlení poloh Země, Slunce a Měsíce a z toho vyplývající dobu, kdy je Měsíc nad obzorem, je důležité pro komplexní pochopení problematiky.

3 Fáze Měsíce v jiných místech na Zemi

Pozorujeme-li střídání fází Měsíce v jiných zeměpisných šířkách, zjistíme, že i když se postupně střídá nov, první čtvrt', úplněk, poslední čtvrt' jako u nás, vypadá Měsíc jinak. Například v jižních zeměpisných šířkách, kde se pohybuje Měsíc (i další nebeská tělesa) na obloze doprava, má dorůstající Měsíc v první čtvrti tvar písmene C a v poslední čtvrti, kdy „couvá“, tvar písmene D. Ještě složitější jsou tvary Měsíce v rovníkových oblastech, kde Měsíc vystupuje vysoko nad obzor, a tak v první i poslední čtvrti může mít tvar písmene U a převráceného U.

V souvislosti s různými tvary Měsíce v rozličných zeměpisných šířkách je dobré si uvědomit i doby, kdy je Měsíc nad obzorem.

4 Pravidlo dorůstá–couvá a jeho obdoby v jiných jazycích

Pro rozeznání Měsíce v první a poslední čtvrti se od 19. století v českých zemích (a také na Slovensku, v Polsku) používá geniální pravidlo dorůstá–couvá, které nahradilo latinské „Luna vertex“ (Měsíc lže).

Ukazuje se, že s podobným pravidlem se můžeme setkat rovněž ve francouzštině (première–dernière) a němčině (zunehmen–abnehmen).

5 Použitá literatura

RAUNER, K. a kol. Fyzika 7. Plzeň: Nakladatelství Fraus, 2006. 128 s.



evropský
sociální
fond v ČR



EVROPSKÁ UNIE



MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ,
MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY



OP Vzdělávání
pro konkurenceschopnost



INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

6 Kontakt na autora

RNDr. Miroslav Randa, Ph.D.
Západočeská univerzita v Plzni
randam@kmt.zcu.cz

ODBORNÝ KEMP PŘÍRODOVĚDNÝCH OBORŮ FYZIKA

KEPLEROVY ZÁKONY

Miroslav RANDA

1 Úvod

Keplerovy zákony jsou základními zákony, které popisují pohyb těles ve sluneční soustavě, ale také pohyby dvojhvězd a pohyby hvězd v galaxiích.

2 Využití Keplerových zákonů

Keplerovy zákony umožňují určit základní charakteristiky pohybu těles sluneční soustavy, zejména planet, trpasličích planet, planetek a komet, ale rovněž pohyb měsíců a pohyb družic a sond.

Protože se Keplerovy zákony probírají obvykle až na střední škole, skládá se lekce ze dvou částí.

V první části jsou Keplerovy zákony podrobně prodebatovány včetně různých způsobů formulace zákonů, a to jak pro případ problému jednoho tělesa, tak i v případě problému dvou těles (využívaného například pro dvojhvězdy).

Ve druhé části jsou řešeny úlohy z předchozích ročníků fyzikální a astronomické olympiády, dále úlohy ze sbírek úloh z astronomie a astrofyziky (Široký, Široká, 1973 a Štefl, Krtička, 2002) a ze studijních textů FO (Ungermann, Volf, 1985 a Volf, Jarešová, 2009).

3 Použitá literatura

ŠIROKÝ, J., ŠIROKÁ, M. Základy astronomie v příkladech. 2. vyd. Praha: Státní pedagogické nakladatelství, 1973. 158 s.

ŠTEFL, V., KORČÁKOVÁ, D., KRTIČKA, J. Úlohy z astrofyziky. 1. vyd. Brno: Masarykova univerzita, 2002. 82 s.

UNGERMANN, Z., VOLF, I.: Pohyb tělesa v radiálním gravitačním poli. Praha: SPN, 1985.

VOLF, I., JAREŠOVÁ, M. Fyzika je kolem nás (Pohyby těles v planetární soustavě). 1. vyd. Hradec Králové. MAFY, 2009.

4 Kontakt na autora

RNDr. Miroslav Randa, Ph.D.

Západočeská univerzita v Plzni

randam@kmt.zcu.cz

ODBORNÝ KEMP PŘÍRODOVĚDNÝCH OBORŮ FYZIKA

POHYBOVÉ ROVNICE A JEJICH VYUŽITÍ PŘI ŘEŠENÍ ÚLOH

Miroslav RANDA

1 Úvod

Pohybové rovnice spojují příčiny pohybu (silová působení) s charakteristikami pohybu. Jsou tedy spojujícím článkem mezi dynamikou a kinematikou. Z rozboru působících sil umožňují určit zrychlení těles, následně pak i jejich rychlosti a dráhy. U rotačních pohybů podobným způsobem umožňuje ze znalosti působících momentů sil určit charakteristiky rotačního pohybu.

2 Využití pohybových rovnic

V rámci fyzikálního kempu jsou řešeny úlohy z předchozích ročníků fyzikální a astronomické olympiády, dále úlohy ze sbírek úloh z fyziky a ze studijních textů FO (Vybíral, 2000, Horáková, 2002 a Volf, Jarešová, 2008).

3 Použitá literatura

VOLF, I., JAREŠOVÁ, M. Fyzika je kolem nás (Pohyb a síla). 1. vyd. Hradec Králové.

MAFY, 2008.

HORÁKOVÁ, R.: Pohyb soustavy těles spojených vlákem. 1. vyd. Hradec Králové. MAFY, 2002.

VYBÍRAL, B.: Kinematika a dynamika tuhého tělesa. 1. vyd. Hradec Králové. MAFY, 2000.

4 Kontakt na autora

RNDr. Miroslav Randa, Ph.D.

Západočeská univerzita v Plzni

randam@kmt.zcu.cz

ODBORNÝ KEMP PŘÍRODOVĚDNÝCH OBORŮ FYZIKA

ZÁKONY ZACHOVÁNÍ VE FYZIKÁLNÍCH ÚLOHÁCH

Miroslav RANDA

1 Úvod

Zákony zachování jsou nejobecnějšími fyzikálními zákony. Jak vyplývá z teorie relativity, jsou vyjádřením základních symetrií fyzikálních zákonů. Zákony zachování umožňují určit výsledek fyzikálního procesu bez podrobné znalosti fyzikálních charakteristik v průběhu tohoto procesu; umožňují tak získat výsledek procesů, které klasickou cestou získat není možné.

2 Využití zákonů zachování v mechanických úlohách

V mechanice jsou nejpoužívanějšími zákony zachování hybnosti, energie a momentu hybnosti. Přestože všechny platí v izolovaných soustavách, ze zkušenosti víme, že v dané situaci je někdy vhodné použít zákon zachování hybnosti (a zákon zachování mechanické energie použít nelze), jindy naopak využíváme zákon zachování mechanické energie (a použití zákona zachování hybnosti by bylo chybou). Obsahem krátkého teoretického úvodu proto je poukázání na specifika jednotlivých zákonů zachování a upozornění na to, proč v daných situacích je použití zákonů zachování determinováno typem situace, i tím, že si u zákona zachování energie pomáháme zavedením potenciální energie.

V rámci fyzikálního kempu jsou dále řešeny úlohy z předchozích ročníků fyzikální a astronomické olympiády, dále úlohy z ruského časopisu Kvant, ze sbírek úloh z fyziky a ze studijních textů FO (Prachař, Trnka, 2006, Šedivý, Volf, 2003).

3 Použitá literatura

PRACHAŘ, J., TRNKA, J.: Úlohy z mechaniky III (Zákony zachování). Knihovnička FO č. 72. MAFY, Hradec Králové 2006.

ŠEDIVÝ, P., VOLF, I.: Práce – výkon – energie. Knihovnička FO č. 47. MAFY, Hradec Králové 2003.

KVANT.

4 Kontakt na autora

RNDr. Miroslav Randa, Ph.D.
Západočeská univerzita v Plzni
randam@kmt.zcu.cz

ODBORNÝ KEMP PŘÍRODOVĚDNÝCH OBORŮ FYZIKA

FYZIKA V POHÁDKÁCH

Karel RAUNER

1 Úvod

Zájem o studium fyziky vykazuje celosvětově klesající tendenci, což je v rozporu s potřebami hospodářství. Cílem přednášky je ukázat všudypřítomnost fyziky a její spojení i s tak zdánlivě odtažitým tématem, jakým jsou pohádky. Dalším cílem je ukázka humoru ve fyzice a představení numerického způsobu řešení fyzikálních problémů.

2 Fyzika v pohádkách

V přednášce jsou rozebrány možnosti řešení čtyř příhod z filmových pohádek Mrazík, Tři oříšky pro Popelku a Císařův pekař, Pekařův císař. První scénou, která je fyzikálně řešena je vrh svislý vzhůru v nehomogenním gravitačním poli. Jde o scénu, ve které Ivan vyhazuje klacky loupežníků, aby o několik měsíců později spadly na totéž místo.

Druhá scéna, rovněž z filmu Mrazík ukazuje tři možná fyzikální řešení scény, ve které Nastěnka vrací slunce za obzor, aby stačila doplést punčochu.

Třetí scéna z dvojfilmu Císařův pekař – Pekařův císař vysvětluje fyzikální řešení výroby zlata z olova, kterou předvádí alchymista v podání Josefa Kemra.

Čtvrtá scéna z filmu Tři oříšky pro Popelku je situací, ve které Popelka škrábe jinovatku z okna tanečního sálu. Fyzikální chybou je, že jinovatka je na vnější straně oken.

2.1 Vrh svislý vzhůru v nehomogenním gravitačním poli

Ve známé scéně vyhazuje Ivan klacky loupežníků. Nejprve jeden, pak dva, nakonec čtyři najednou. Klacky nepadají a Ivan na otázku odpovídá: „Počkejte do zimy, spadnou“. V další scéně klacky padají na hlavy loupežníků (vedlejší zajímavostí je, že jich není sedm ale deset) ve vhodné chvíli, ve které jsou Nastěnka i Ivan zajati loupežníky.

Na základě obecně známých scén je sestaven fyzikální příklad: Jakou rychlostí musí být vyhozeny klacky, aby na 56. stupni severní šířky a v nadmořské výšce 200 metrů dopadly za 200 dnů. Středoškolské řešení pomocí známých vzorců pro vrh svislý vzhůru v homogenním tíhovém poli přináší nesmyslnou hodnotu: rychlost 86 400 km/s. Je tady zjevný rozpor s hodnotou druhé kosmické rychlosti, nad kterou by se klacky nevrátily nikdy.

Následně je sestavena diferenciální rovnice pro pohyb nehomogenním tíhovém poli, ve které se využívá gravitačního zákona. Po převodu gravitační konstanty a hmotnosti Země na tíhové zrychlení je převedena rovnice do integrodiferenciálního tvaru pro rychlost a je stručně vysvětlen její význam. Rovnice se převede do rekurentního vztahu pomocí jednodukové Eulerovy metody. Jsou nalezeny vstupní hodnoty: tíhové zrychlení $9,815\ 83\ \text{m/s}^2$ a vzdálenost od středu Země 6 375 000 m. Počítačové řešení hledá první hodnotu rychlosti, která je nulové nebo záporná. Při vstupní hodnotě počáteční rychlosti se tak nalezne doba letu vzhůru, která je požadována 100 dní. Postupně se upravuje vkládaná počáteční rychlost, až se dosáhne požadované doby. Originalita počítačového řešení je v proměnném kroku integrace, který je zpočátku 200 μs , na konci asi 100 s. Nalezená potřebná rychlost je 11 174,823 7 m/s. Citlivost

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

na přesnost je taková, že kdyby se 7 na konci změnila na 6, klacky by dopadly o 5 minut dříve. Kontrolou přesnosti výpočtu je ověření druhé kosmické rychlosti. Ta pro dané místo vychází neuvěřitelně přesně: teoreticky 11 187,13 m/s, výpočtem 11 187,12 m/s.

Následně je vypočítána i „ukrutná“ síla, kterou musí Ivan působit na klacky: 1,2 GN a ještě neuvěřitelnější výkon: $7 \cdot 10^{12}$ W.

Na závěr jsou konstatovány nedostatky idealizovaného výpočtu: ve vzduchu by klacky při dané rychlosti shořely, Země se otáčí, muselo by se proto počítat i s Coriolisovou silou a synchronizací s rotační periodou a klacky se dostanou až do vzdálenosti 2,88 milionu km od Země, kde již na klacky mohou působit další tělesa sluneční soustavy. Protože by klacky stejnou rychlostí dopadaly, nedá se očekávat, že loupežníci po dopadu budou pouze kroutit očima, ale zbyl by po nich poměrně velký kráter.

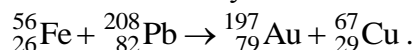
2.2 Pohyb těles ve sluneční soustavě, refrakce

V další známé scéně prosí Nastěnka slunce, aby zašlo za obzor, protože potřebuje doplést punčochu, aby ji macecha nevytrhala vlasy. Je představeno jedno z možných řešení: zastavit rotaci Země, roztočit ji opačným směrem (z filmové ukázky plyne, že úhlová rychlost musí být 42krát větší než obvyklá hodnota), opět ji zastavit a znovu roztočit do původního směru původní rychlostí. I když celková bilance energie je nulová, musíme někde vzít energii k roztočení Země 42krát větší rychlostí. Tato energie je obudná: $3,8 \cdot 10^{32}$ J. Dále jsou fyzikálně diskutovány problémy se zachováním momentu hybnosti a s unášivou rychlostí, která překonává rychlost únikovou. Je konstatováno, že takovýto krok by znamenal zkázu lidstva. Dále je diskutována možnost posunu Slunce. Bohužel vychází potřebná rychlost přesunu větší než rychlost světla ve vakuu. Ani třikrát pomalejší posunutí nepřináší řešení: potřebná energie by vyžadovala anihilovat pětinu Slunce.

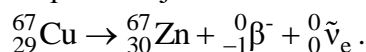
Třetí představené řešení je nejpříjemnější. Dalo by se využít refrakce, která způsobuje, že vlivem lomu v atmosféře vidíme slunce o několik minut dříve, než je geometricky nad obzorem. Stačilo by v trajektorii lomeného paprsku odstranit vzduch a slunce by nebylo vidět. Na 56 stupni s. š. by tak slunce vyšlo o 5 minut později.

2.3 Výroba zlata jadernou reakcí železa a olova

Alchymistická metoda popsána ve filmu Císařův pekař – Pekařův císař představuje výrobu zlata bušením železné palice do oloveného bloku. Fyzikální možností je jaderná reakce



Je zjištěno, že tato energie je exoenergetická, vedlejším produktem by proto mohla být energie. Dalším vedlejším produktem je měď, která je však nepříjemně radioaktivní. S poměrně krátkým poločasem se však přeměňuje na stabilní zinek:



Dále je vypočítána rychlost, kterou by musela mít železná palice, aby dostala atomy železa a zlata do vzdálenosti, na které již působí jaderné síly. Vychází obrovská rychlost 30 000 km/s. Dále jsou navržena řešení problému atmosféry a radioaktivity mědi. Bohužel se taková výroba zlata ukazuje nemožná, neboť vypočítaná energie palice dosahuje při potřebné rychlosti energie dvacetinásobku jaderné pumy svržené na Hirošimu.

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

2.4 Vztah rosného bodu, relativní vlhkosti a teploty

Hrubou fyzikální chybou filmu Tři oříšky pro Popelku je to, že Popelka po příchodu k budově, ve které se koná ples, škrábe a dýchá na jinovatku, která je na okně zvenku. Na základě diagramu mezi teplotou, relativní vlhkostí a rosným bodem je dokázáno, že pokud venku bylo -5 °C a 50% relativní vlhkost, muselo být v sále maximálně -15 °C . Není pravděpodobné, že by plesové šaty mohly při této teplotě ochránit účastníky před omrzlinami.

3 Závěr

Přednáška byla připravena pro všechny účastníky fyzikálního kempu. Kromě úkolů představených v úvodu byli účastníci seznámeni i s matematickými metodami při řešení reálných fyzikálních příkladů, byla jim stručně vysvětlena derivace, integrace a numerické řešení diferenciální rovnice.

4 Použitá literatura

ALEXANDR ROU, Mrazík, film, Sovětský Svaz, 1964

MARTIN FRÍČ, Císařův pekař – Pekařův císař, film, ČSR, 1951

VÁCLAV VOŘÍŠEK, Tři oříšky pro Popelku, film, ČSSR, 1973

5 Kontakt na autora

doc. Dr. Ing. Karel Rauner

Fakulta pedagogická Západočeská univerzita v Plzni

rauner@kmt.zcu.cz

ODBORNÝ KEMP PŘÍRODOVĚDNÝCH OBORŮ FYZIKA

FYZIKÁLNÍ ODHAD A NĚKTERÉ PARADOXNÍ PŘÍPADY

Karel RAUNER

1 Úvod

Přednáška je zaměřena na pěstování fyzikálního odhadu i v případech, kdy nás mohou smysly a „zdravý lidský rozum“ zklamat.

2 Chybné odhady způsobené smyslově nepostřehnutelnými rozměry

V první části přednášky jsou demonstrovány případy nespolehlivosti lidských smyslů: jsou představeny některé základní optické klamy a vysvětlen původ chybných závěrů.

Druhá část je věnována problémům s fyzikálními odhady v případě smyslově nepostřehnutelných rozměrů. Na modelech je demonstrována všeobecně mylná představa o rozměrech těles v sluneční soustavě a jejich vzdálenostech, podobně je demonstrován smysly neuchopitelný rozměr naší Galaxie. Ve světě extrémně malých rozměrů je ukázána obrovská velikost Avogadrova čísla a obrovská koncentrace volných elektronů v kovech. Druhý příklad vede na neočekávaně malou rychlost, kterou se translačně pohybují elektrony ve vodičích při vedení elektrického proudu. Další ukázky z této oblasti chybných odhadů: Jak dlouho by trval pád Měsíce na Zemi, kdyby se Měsíc zastavil, jakou hmotnost má krychlový milimetr neutronové hvězdy.

3 Chybné odhady způsobené chybně interpretovaným objemem

Třetí část ukazuje neschopnost lidského mozku odhadnout objemy těles, které rostou s třetí mocninou rozměru. Jako příklad je uveden odhad doby, za kterou by vytekl krychlový kilometr vody, bude-li vytékat každou sekundu 1 litr.

4 Vliv rotace Země a jejího tvaru

Velmi mnoho chybných odhadů je založeno na tom, že Země je rotující soustava (kolem osy a kolem Slunce). Posluchači jsou vyzváni k následujícím úvahám: jak vypadá zatmění Měsíce Slunce pozorované z přivrácené a odvrácené strany Měsíce, možnost pozorování východu Země na Měsíci,. Další dotazy jsou směřovány na počet oběhů Měsíce kolem Země za jeden rok, na počet východů Měsíce nad obzor za jeden rok.

Odhady vyžadované v páté části, která vyhodnocuje kulatý tvar Země jsou: Na které světové straně vychází Slunce na jižní polokouli, Kde je Slunce v poledne v jižní Africe, Na které světové straně vychází Slunce na severním pólu, Kde na Zemi ukazuje kompas oběma konci na sever, Kde všude na Zemi ukazuje kompas severním pólem na jih, Kde všude na Zemi je někdy vidět slunce na severu.

5 Nelineární závislosti

Šestá část je věnována nelineárním závislostem a nelinearitě zpravování fyzikálních veličin lidskými smysly.



INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

6 Chybné odhady v neinerciálních soustavách

V další části je ukázáno, jak chybě člověk vnímá souvislost trajektorie a působící síly. Jsou rovněž probrány problémy s přímočarými a křivočarými pohyby včetně působení zdánlivých sil. Chybné odhady se vyskytují i u řešení některých problémů v neinerciálních soustavách, hlavně v soustavách rotujících.

7 Použitá literatura

HALLIDAY, DAVID; RESNICK, ROBERT; WALKER, JEARL; MUSILOVÁ, JANA; OBDRŽÁLEK, JAN; DUB, PETR. Fyzika : vysokoškolská učebnice obecné fyziky. Část 1, Mechanika. Brno : VUTIUM, 2000. ISBN 80-214-1868-0.

HALLIDAY, DAVID; RESNICK, ROBERT; WALKER, JEARL; OBDRŽÁLEK, JAN; DUB, PETR. Fyzika : vysokoškolská učebnice obecné fyziky. Část 2, Mechanika - Termodynamika. Brno : VUTIM, 2000. ISBN 80-214-1868-0.

HALLIDAY, DAVID; RESNICK, ROBERT; WALKER, JEARL; ŠTRUNC, MARIAN; OBDRŽÁLEK, JAN; DUB, PETR. Fyzika : vysokoškolská učebnice obecné fyziky. Část 3, Elektřina a magnetismus. Brno : VUTIM, 2000. ISBN 80-214-1868-0.

HALLIDAY, DAVID; RESNICK, ROBERT; WALKER, JEARL; KOMRSKA, JIŘÍ; OBDRŽÁLEK, JAN; DUB, PETR. Fyzika : vysokoškolská učebnice obecné fyziky. Část 4, Elektromagnetické vlny - Optika - Relativita. Brno : VUTIM, 2001. ISBN 80-214-1868-0.

8 Kontakt na autora

doc. Dr. Ing. Karel Rauner

Fakulta pedagogická Západočeská univerzita v Plzni

rauner@kmt.zcu.cz

ODBORNÝ KEMP PŘÍRODOVĚDNÝCH OBORŮ FYZIKA

NOVÉ PRINCIPY ZOBRAZOVAČŮ

Karel RAUNER

1 Úvod

Přednáška je zaměřena na představení a fyzikální podstatu nových zobrazovačů. Hlavní pozornost je přitom zaměřena na dnes velmi rozšířené obrazovky a monitory LCD a plasma. V krátkém důvodu je definován zobrazovač a jejich dělení na pasivní a aktivní zobrazovače. Je nastíněn historický vývoj zobrazovačů až k před 15 lety dominujícímu typu CRT obrazovky.

2 Plasmová obrazovka a DMM

V další části jsou popsány základní principy, na kterých je založena plasmová obrazovka. Je popsána struktura pixelu, jsou uvedeny výhody i nevýhody tohoto zobrazovače. Pozornost je věnována i špičkovému zařízení v projekčních přístrojích obvodu DMM. Je popsán systém mikrozrcadel i jejich natáčení. Jsou uvedeny frekvence a možné způsoby barevné projekce. Jsou porovnány rozlišovací schopnosti s projektory založenými na LCD.

3 Struktury LCD

Principům zobrazovačů na bázi kapalných krystalů je věnována další část. Je popsána základní buňka i struktura obrazovky. Opět jsou zdůrazněny výhody a nevýhody, hlavně v porovnání s plasmovou obrazovkou. Přednáška se věnuje i modernizaci tohoto zobrazovače použitím technologie TFT.

4 Zobrazovače OLED – s organickými svítivými diodami

Další část je věnována perspektivním zobrazovačům založeným na technologii organických svítivých diod – OLED. Jsou popsány principy a první projekty v oblasti televize, displejů ma mobilních telefonech, fotoaparátech a tiskárnách. Je zdůrazněna výhoda – ultratenkého zobrazovače v několika použitích. Jsou zdůrazněny i nevýhody: menší životnost, velký pixel.

V závěru přednášky jsou zmíněny další možnosti vývoje: obrazovka se studeným plošným emitorem elektronů – SED a laserová televize.

5 Použitá literatura

STARKE, L.: Grosse Bildschirme ohne Röhren. Elektrotechnik (ch), 2002, č. 3, s. 57-61.
<http://www.ewh.ieee.org/soc/cpmt/presentations/cpmt0401a.pdf>
[p://eng.625-net.ru/content/2002_09/refl.htm](http://eng.625-net.ru/content/2002_09/refl.htm)



evropský
sociální
fond v ČR



EVROPSKÁ UNIE



MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ,
MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY



OP Vzdělávání
pro konkurenceschopnost



INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

6 Kontakt na autora

doc. Dr. Ing. Karel Rauner

Fakulta pedagogická Západočeská univerzita v Plzni

rauner@kmt.zcu.cz

ODBORNÝ KEMP PŘÍRODOVĚDNÝCH OBORŮ FYZIKA

CHEMIE VE FYZICE ANEB FYZIKA V CHEMII

Václav SOUKUP

1 Úvod:

Fyzika a chemie jsou vědní obory, mezi kterými existuje mnoho souvislostí a návazností. Jejich pochopení a vědomé využívání vede k důslednému a hlubokému pochopení řady přírodních jevů a procesů. Je tomu nejen ve „školní“ fyzice a chemii, ale bylo a je tomu i v rámci plnohodnotné vědy. Fyzikové využívají znalostí chemiků a chemici se též v mnoha případech neobejdou bez fyzikálního vysvětlení řady jevů.

2 Stat:

V 19. století byla chemie ještě samostatnou vědou vycházející z atomové teorie, čistě chemických zákonů zachování hmotnosti látek, stálých poměrů slučovacíh a ze zákonitostí plynoucích z periodického zákona a **periodické soustavy prvků**.

Dmitrij Ivanovič Mendělejev je objevitelem periodického zákona z roku 1869. **Vlastnosti prvků a jejich sloučenin jsou periodicky závislé na jejich relativní atomové hmotnosti**. Tato formulace ale vždy přesně neplatí **K(39,09), Ar(39,94)**.

Sestavená tabulka prvků byla neúplná, obsahovala 63 tehdy známých prvků. Mendělejev vynechal místa pro předpovězené prvky, u 10 z nich stanovil předem jejich vlastnosti. K nejslavnějším objevům předpovězených prvků patřil objev eka-aluminia (Ga), eka-boru (Sc) a zejména eka-silicia (Ge), jehož vlastnostem Mendělejev věnoval nejvíce pozornosti. Germanium objevil roku 1886 Clemens Winkler při analýze nerostu argyroditu. Objev germania se stal triumfem periodického zákona.

Objev elektronu a práce na vytvoření modelu atomu znamenaly zlom a nástup fyziky. Po objevu jádra (fyzikálními prostředky) je (opět fyzikálně) řešena struktura elektronového obalu. Vzájemné silové působení nabitých částic uvnitř atomu má za následek i různé vnější chování atomů. Větší náboj jádra např. znamená zmenšení atomového poloměru a obtížnější odštěpení elektronů z atomu, naopak atom snáze do svého elektronového obalu elektron zachytí. V chemických vlastnostech to znamená, že látka složená z těchto atomů se chová jako oxidační činidlo. Při vzniku chemické vazby takového atomu s atomem opačného chování je rozložení elektronové hustoty nesymetrické, vzniká polární vazba. Ta se projevuje vznikem dipólového momentu molekuly, což má vliv na rozpustnost ve vodě a organických rozpouštědlech, na teplotu varu a tání látek a ne jejich povrchové napětí.

Popis struktury elektronového obalu, stanovení vlnové funkce a její popis pomocí kvantových čísel je dílem fyziků. Rozložení pravděpodobnosti výskytu vazebných elektronových párů zase umějí chemici využívat při předpovídání fyzikálních vlastností látek

Druhy vazeb v krystalech přímo určují skupenství, pevnost, teplotní roztažnost, tepelnou a elektrickou vodivost.

Jedním z oborů, kde si vzájemně fyzika a chemie vypomáhají je problematika polovodičů. Jako polovodiče lze označit prvky, které se nacházejí ve střední části PSP, jsou přechodem mezi kovy a nekovy (kovaletní vazba). Fyzikálně mají daleko blíže k izolantům, většina jejich valenčních

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

elektronů je vázána ve vazbách. Dodáním energie se z nich mohou snadno uvolnit a způsobovat vedení el. proudu (**polovodiče s vlastní vodivostí** - s teplotou roste jejich vodivost).

Ještě snazší je uvolnit elektron, který ve vazbě vůbec není (příměsová **vodivost typu N**, do krystalu Si atomy prvku z 5. skupiny PSP), nebo naopak ve struktuře chybí (příměsová **vodivost typu P**, do krystalu Si atomy prvku ze 3. skupiny PSP).

Samostatnou kapitolou souvislosti chemie a fyziky je vedení elektrického proudu v kapalinách a plynech. Vedení el. proudu v kapalinách a plynech je založeno na tvorbě a pohybu iontů v elektrickém poli. Ionty v kapalných vodičích (elektrolytech) vznikají disociací sloučenin iontového charakteru v polárních rozpouštědlech. Zpětnému spojování iontů brání jejich solvatace (obklopení molekulami rozpouštědla). Ionty putují roztokem vlivem elektrických sil, na elektrodách se vybíjí.

Na katodě probíhá **redukce** $X^{v+} + v e \rightarrow X$

na anodě **oxidace** $Y^{v-} \rightarrow Y + v e$

Přítom dochází

a) k vylučování látek (usazování kovů na elektrodě, uvolňování plynů). Reakci s elektrodami zabráníme chemicky málo reaktivním materiálem elektrod (uhlík, platina).

b) k reakci s elektrodou

c) reakci s elektrolytem

Faradayův zákon:

Souvislost mezi přeneseným nábojem a hmotností vyloučené látky.



$$Q = N \cdot v \cdot e \quad N = (m/M_m) \cdot N_a$$

$$m = M_m \cdot Q / v \cdot F \quad F = e \cdot N_a$$

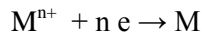
Významu pozbývá pojem elektrochemický ekvivalent se ztrátou významu chemický ekvivalent.

Galvanické články:

Původně stejné elektrody (např. C) se v průběhu elektrolýzy pokrývají vrstvou produktů elektrolýzy a vzniká galvanický článek (polarizace elektrod). Opačná polarita vůči vnějšímu zdroji způsobuje, že proud elektrolytem prochází až po zvýšení vnějšího napětí nad **napětí rozkladné**. Jevu se využívá při nabíjení článků a akumulátorů.

Galvanické články vznikají též jako kombinace dvou různých elektrod a elektrolytu. Velikost napětí je určena rozdílem potenciálů elektrod.

Ponoříme-li kov do roztoku jeho soli, dochází vytváření rovnováhy mezi elektrodou a ionty kovu v roztoku.



Děje probíhají u kovů různě ochotně. Čím probíhá snáze první reakce, je kov je méně ušlechtilý. U ušlechtilých kovů naopak převažuje reakce druhá. Schopnost odevzdávat elektrony je vyjádřena postavením v **Beketovově řadě kovů**, zleva doprava klesá a číselně je vyjádřena **standardním elektrodoým potenciálem**.

Kov	Na	Mg	Al	Zn	Fe	H	Cu	Ag	Hg	Au
E/V	- 2,71	- 2,37	- 1,66	- 0,76	- 0,44	0,00	0,16	0,79	0,80	1,52

Elektroda s nižší hodnotou potenciálu bude katodou a elektroda s vyšší hodnotou potenciálu bude anodou článku. Napětí článku lze přibližně (vliv má též koncentrace roztoku a teplota) určit jako rozdíl elektrodoých potenciálů obou elektrod.

$$U = E(A) - E(K)$$

Podobně lze s elektrodoými potenciály pracovat i u článků, kde se na elektrodách vylučují např. plyny. $2 Cl^- \rightarrow Cl_2 + 2 e$, $2 O^{2-} \rightarrow O_2 + 4 e$, $2 H^+ + 2 e \rightarrow H_2$

Magnetické vlastnosti látek:

Látky dělíme na diamagnetické, paramagnetické a feromagnetické. Odlišnost chování je dána strukturou elektronového obalu. Rotující nabitá částice vytváří magnetické pole. Pokud si takto přestavíme elektron, jsou magnetické momenty elektronů v atomech se spárovanými elektrony vykompenzovány (látky diamagnetické) i chemickou vazbou. Naopak, jsou-li v el. obalu nespárované elektrony, látka je paramagnetická nebo feromagnetická.

Paramagnetismus kyslíku vedl k vzniku nových teorií chemické vazby.

Optické vlastnosti látek:

Podstatou barevnosti látek je schopnost atomů pohltit záření určité vlnové délky. V odraženém světle tyto vlnové délky chybějí a látka se jeví barevná. V případě, že látka záření vyzařuje, vnímáme barvu podle vyzařovaných vlnových délek. Atomy přijímají a uvolňují energii ve formě záření v důsledku přechodu elektronů mezi jednotlivými kvantovými stavy. Jsou-li energetické rozdíly stavů nízké, dochází k vyzařování (pohlcování) záření infračerveného (látky nejsou barevné) nebo viditelného (jsou barevné). Jedná se většinou o přechody ve vnějších slupkách elektronových obalů. Při průchodech mezi vnitřními slupkami jsou energetické rozdíly velké, dochází k vyzařování ultrafialového (Hg) nebo rentgenového (princip rentgenky) záření.

Barevnost sloučenin ovlivňuje struktura molekuly. Např. v organické chemii jsou barevné sloučeniny s rozsáhlým systémem delokalizace elektronů (analogie kovové vazby). Ta podporuje i elektrickou vodivost molekul a využití nanotechnologií v molekulárních el. obvodech.

Optická aktivita látek.

Opticky aktivní látky stáčí rovinu polarizovaného světla. Jedná se o sloučeniny, které mají nesymetrickou molekulu, nejčastěji látky organické. Snadno se poznají podle asymetrického (chirálního) uhlíku se čtyřmi různými skupinami. např. sacharidy.

Úhel stočení je závislý na koncentraci roztoku.

3 Závěr:

Dobrý fyzik se pozná i podle toho, že dokáže aktivně využívat poznatky z chemie a chemikovi může operativně nabídnout své fyzikální znalosti a dovednosti.

4 Použitá literatura

- LEPIL O.: Elektřina a magnetismus. 1. vyd. SPN Praha:, 1992. 398 s. ISBN 80-04-26093-4.
SOUKUP V., VESELÝ J., Maturitní otázky z fyziky . Fragment Praha, 2007. 196 s. ISBN 987-80-253-0501-0.
VACÍK J.: Obecná chemie. SPN Praha 1986, 302 s.

5 Kontakt na autora

Václav Soukup, RNDr.
Masarykovo gymnázium Plzeň, Petáková 2
soukup@mgplzen.cz

ODBORNÝ KEMP PŘÍRODOVĚDNÝCH OBORŮ FYZIKA FYZIKÁLNĚ-CHEMICKÉ EXPERIMENTY A VÝPOČTY

Václav SOUKUP

1 Úvod

Fyzika a chemie jsou vědní obory, mezi kterými existuje mnoho souvislostí a návazností. Fyzikální měření mohou napomoci k popisu a identifikaci chemických dějů. K mnoha úspěšným fyzikálním výpočtům je nezbytná znalost chemické nomenklatury a základních pojmů.

2 Stat'

Experimenty:

Spektroskopie

Struktura elektronového obalu se promítá do struktury spektra.

Základní princip: Rozklad světla vycházející z kahanu (výbojové trubice) spektroskopem, identifikace prvků podle tabulky spekter. Využití při chemické analýze látek.

Provedení: Spektroskop upevníme do stojanu do výšky nesvítivého plamene kahanu.

Vyžiháme platinový drátek - ve spektroskopu pozorujeme spojité spektrum.

Nabereme na drátek sůl Na, Li, Ca vneseme do plamene. Ve spektroskopu pozorujeme soustavu spektrálních čar. Porovnáme s tabulkou spekter.

Úkol: Rozlište pomocí spektrálních čar sůl lithia a stroncia.

Konduktometrická (vodivostní) titrace

Spojení principů vedení elektrického proudu v látkách se stanovením složení roztoků.

Základní princip: Titrace, při které je měřena vodivost roztoku (procházející proud) v závislosti na průběhu reakce a z této závislosti je určen bod ekvivalence.

Provedení: Neutralizace $\text{Ba}(\text{OH})_2$ pomocí H_2SO_4 . Na začátku reakce velká vodivost (značné množství iontů), postupnou reakcí ubývání iontů, v bodu ekvivalence minimum, pak nárůst (ionty z nadbytečné H_2SO_4).

Termochemické měření:

Experiment spojuje teorii tepelné výměny s chemickou reakcí. Umožňuje popsat energetické poměry chemické reakce.

Základní princip: Neutralizace NaOH a HCl je exotermní reakce. Na základě měření uvolněného tepla lze určit molární reakční teplo.

Provedení: Připravíme roztoky NaOH a HCl známé koncentrace ($c = 0,1 \text{ mol/dm}^3$) o stejné teplotě. Tuto teplotu změříme. Odměříme stejné objemy V obou roztoků a slijeme (látky reagují v poměru látkových množství 1:1). Změříme zvýšení teploty Δt .

Výpočet: Uvolněné teplo $Q = c \cdot V \cdot Q_m = m \cdot c_k \cdot \Delta t = 2 \cdot \rho \cdot V \cdot c_k \cdot \Delta t$

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

$$Q_m = \frac{2 \cdot \rho \cdot c_k \cdot \Delta t}{c}$$

ρ je hustota výsledné reakční směsi, při nízké koncentraci lze položit rovnu hustotě vody (v kg/dm^3 !), c_k je měrná tepelná kapacita výsledné reakční směsi, při nízké koncentraci lze položit rovnu měrné tepelné kapacitě vody (4200 J/kgK). Z odvození plyne, že přírůstek teploty nezávisí na velikosti objemů reagujících roztoků, což lze experimentálně potvrdit. Při měření reakčního tepla jiných reakcí, je nutné smíchat vždy taková množství roztoků, aby látky spolu právě zreagovaly. V případě reakce H_2SO_4 s NaOH reagují látky v poměru látkových množství 1:2. Odměříme-li tedy objem V roztoku kyseliny sírové ($c = 0,1 \text{ mol/dm}^3$), objem roztoku NaOH ($c = 0,1 \text{ mol/dm}^3$) musí být $2V$ a celkový objem reakční směsi bude $3V$.

Elektrolýza, galvanické články:

Experiment ukazuje závislost napětí článku na charakteru elektrod. Ukazuje principiální nabíjení článku.

1. Sestavte elektrický obvod ze stejnosměrného zdroje, roztoku NaCl , do kterého jsou ponořeny dvě uhlíkové elektrody a ampérmetru. Po uzavření obvodu nechte dvě minuty protékat proud. Pokuste se určit produkty elektrolýzy. Rozpojte obvod a k elektrodám připojte voltmetr. Proč ukazuje napětí?
2. Sestavte galvanické články z měděné, zinkové a železné elektrody a síranů měďnatého, zinečnatého a železnatého. Roztoky propojte solným můstkem. Změřte napětí článků a porovnejte s tabulkovými hodnotami redoxních potenciálů. Proč napětí během měření klesá?

Fyzikálně-chemické výpočty:

1. Určete molární hmotnost plynu, který má při teplotě 27°C a tlaku 10^5 Pa hustotu $0,64 \text{ kg/m}^3$.
2. Jaký objem bude mít vodní pára vzniklá při výbuchu 1 g vodíku při tlaku 10^5 Pa a teplotě 627°C ?
3. Určete mřížkový parametr niklu v jeho plošně centrované kubické mřížce, je-li jeho hustota 8900 kg/m^3 a relativní atomová hmotnost je $58,7$.
4. Určete jaká energie je třeba na výrobu 1 t hliníku z Al_2O_3 elektrolýzou taveniny, je-li na elektrodách napětí 12 V a relativní atomová hmotnost hliníku je 27 .
5. Jaké napětí na elektrodách způsobí samostatný výboj v plynu, je-li vzdálenost elektrod 10 cm , ionizační energie plynu jsou 2 eV a střední volná dráha 10 mm ?

3 Závěr

Dobry fyzik se pozná i podle toho, že dokáže aktivně využívat poznatky z chemie a chemikovi může operativně nabídnout své fyzikální znalosti a dovednosti.

4 Použitá literatura

- LEPIL O.: Elektřina a magnetismus. 1. vyd. SPN Praha:, 1992. 398 s. ISBN 80-04-26093-4.
SOUKUP V., VESELÝ J., Maturitní otázky z fyziky . Fragment Praha, 2007. 196 s. ISBN 987-80-253-0501-0.
VACÍK J.: Obecná chemie. SPN Praha 1986, 302 s.



evropský
sociální
fond v ČR



EVROPSKÁ UNIE



MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ,
MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY



OP Vzdělávání
pro konkurenceschopnost



INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

5 Kontakt na autora

Václav Soukup, RNDr.

Masarykovo gymnázium Plzeň, Petáková 2

soukup@mgplzen.cz

ODBORNÝ KEMP PŘÍRODOVĚDNÝCH OBORŮ FYZIKA

ŘEŠENÍ FYZIKÁLNÍCH ÚLOH – ELEKTŘINA A MAGNETISMUS 1

Zuzana SUKOVÁ

1 Úvod

V příkladech fyzikální olympiády se studenti kategorií E a F často setkávají s úlohami z elektřiny a magnetismu - Ohmův zákon, spojování spotřebičů za sebou a vedle sebe, apod. A právě těmito příklady je inspirován můj příspěvek.

2 Stat'

Žáci si nejprve zopakují Ohmův zákon, možnosti zapojení více rezistorů (sériové, paralelní či kombinací obou), schéma obvodů se sérioparalelním zapojováním rezistorů a výpočet výsledného odporu při sériovém a paralelním zapojení.

První úloha je věnována obvodu, kde místo rezistoru je použit odporový drát. Další úlohy jsou pojaty jako laboratorní práce, kdy žáci nejen počítají výsledný odpor a napětí na jednotlivých rezistorech a jejich výkon, ale i navrhnou všechna možná zapojení daných rezistorů. V poslední úloze je slovně popsán obvod se sérioparalelním zapojením a žáci jej mají schématicky zakreslit a následně vypočítat hodnoty hledaných veličin.

3 Závěr

Můj příspěvek si klade za úkol připomenout studentům jednoduché fyzikální úlohy z oblasti elektřiny a magnetismu. Žáci si zopakují schématické znázorňování elektrických obvodů a výpočty některých fyzikálních veličin.

4 Použitá literatura

LEPIL, O. Fyzika pro gymnázia. Elektřina a magnetismus. 6. vyd. Praha: Prometheus, 2010. 342 s. ISBN 978-80-7196-385-1.

Fyzikální olympiáda. Archiv zadání a řešení soutěžních úloh FO 1997–2010 [online].

Dostupné na <http://fo.cuni.cz/archiv/zadani-a-reseni>

5 Kontakt na autora

Zuzana Suková Mgr.

ZČU, FPE, katedra matematiky, Klatovská 51, Plzeň

zsukova@students.zcu.cz

ODBORNÝ KEMP PŘÍRODOVĚDNÝCH OBORŮ FYZIKA

ŘEŠENÍ FYZIKÁLNÍCH ÚLOH – ELEKTŘINA A MAGNETISMUS 2

Josef VESELÝ

1 Úvod

V první části budeme řešit úlohy z elektrostatiky s důrazem na přesné rozlišení pojmů a diskuze podmínek, za jakých lze uvedené postupy použít.

Ve druhé části použijeme zákon o elektromagnetické indukci s využitím diferenciálního počtu a dále úlohy integrující poznatky z dynamiky, poznatky o pružnosti a elektromagnetismu.

Mezi základní pojmy řadíme elektrický náboj Q a elektrickou sílu F_e , dále často používáme zkušební náboj q .

Definujeme intenzitu elektrického pole v daném místě $E = F_e / q$ a definujeme elektrický potenciál v daném bodu $\phi = E_p / q$. Definice lze použít v každém elektrickém poli.

2 Příklady a úlohy

Příklad 1 – elektrický potenciál

Odvodte vzorec pro výpočet elektrického pole ve vzdálenosti r od bodového náboje Q .

Řešení: Potenciální energie E_p Zkušební náboje q je dána prací, kterou musíme vykonat při přenesení tohoto náboje z „nekonečna“ do vzdálenosti r od bodového náboje. Pro jednoduchost předpokládejme, že jsou oba náboje kladné.

$$E_p = W = - \int_{\infty}^r F_s dx = \int_r^{\infty} k \cdot \frac{Qq}{r^2} dx = k \cdot Q \cdot q \cdot \left[-\frac{1}{r} \right]_r^{\infty} = k \cdot \frac{Q \cdot q}{r}$$

$$\varphi = \frac{E_p}{q} = k \cdot \frac{Q}{r}$$

Příklad 2 – napětí

Válec a čtvercový rámeček v jednom místě nevodivě přerušeny tenkou mezerou jsou upevněny na tenké pevné vodorovné ose otáčení. Na válci je navinut tenký provázek se závažím, které uvádí soustavu do otáčivého pohybu. Rámeček se nachází v homogenním magnetickém poli o indukci B . Indukční čáry jsou kolmé k ose otáčení. Hmotnost závaží je m_1 , hmotnost válce m_2 , poloměr válce r , hmotnost jedné strany rámečku je m_3 a její délka l . Určete:

- úhlové zrychlení válce a rámečku,
- okamžité napětí indukované v rámečku v čase t .

Řešení: a) Sestavíme pohybovou rovnici pro posuvný ohyb závaží a pohybovou rovnici pro otáčivý pohyb soustavy válce a rámečku: $F_G - F_p = m_1 \cdot a$

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

$$\underline{F_p \cdot r = M \cdot \varepsilon}$$

$F_G = m_1 \cdot g$, F_p je síla napínající provázek,

$$M = \frac{1}{2} m_2 \cdot r^2 + 2 \cdot \frac{1}{12} m_3 l^2 + 2 \cdot m_3 \left(\frac{l}{2}\right)^2 = \frac{1}{2} \cdot r^2 + m_2 \frac{7}{6} m_3 l^2$$

Odtud $\varepsilon = \frac{m_1 g r}{m_1 - M}$, pro úhel otočení platí $\varphi = \frac{1}{2} \varepsilon t^2$

Úhlové zrychlení válce a rámečku je $\frac{m_1 g r}{m_1 - M}$.

b) Indukované napětí určíme podle Faradayova zákona o elektromagnetické indukci:

$$u(t) = -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{d(BS \cos \varphi)}{dt} = -\frac{d\left(BS \cos\left(\frac{1}{2} \varepsilon t^2\right)\right)}{dt} = 2BS\varepsilon t \cos\left(\frac{1}{2} \varepsilon t^2\right)$$

V rámečku se v čase t indukuje napětí $2BS\varepsilon t \cos\left(\frac{1}{2} \varepsilon t^2\right)$.

Úloha 1 – měření

Lze změřit velikost elektrického proudu pomocí posuvného měřítka?

K dispozici je pevný vodič a nad ním rovnoběžně zavěšený vodič na pružinách známé tuhosti. Oběma vodiči prochází stejný proud. Navrhněte způsob měření.

Úloha 2 – vodič

Dva vodiče tvoří nakloněnou rovinu. Třetí vodič je na ně položen kolmo tak, že může po vodičích klouzat, součinitel smykového tření je f . Soustava je umístěna v homogenním magnetickém poli, jehož indukční čáry směřují svisle dolů.

- Při jakém směru proudu ve třetím vodiči může třetí vodič ztratit se zbylými vodiči kontakt? (zakreslete)
- Určete velikost proudu (I_M), který by způsobil odtržení vodiče.
- Určete zrychlení vodiče pro proud menší než I_M . Uvažujte oba směry proudu.
- Při jakém proudu bude zrychlení vodiče nulové?

3 Závěr

Řadu úloh můžeme s výhodou řešit užitím diferenciálního a integrálního počtu. Vždy je třeba dbát na přesné vymezení pojmů.

4 Použitá literatura

KVASNICA J. Matematický aparát fyziky, Academia, Praha 1989
ISBN 80-200-0088-7
SVOBODA E. Přehled středoškolské fyziky, 1. vydání SPN Praha
ISBN 80-04-22435-0

5 Kontakt na autora

Josef Veselý Mgr.
Gymnázium J. Vrchlického Klatovy, Národních mučedníků 347
jvesely@gymkt.cz

ODBORNÝ KEMP PŘÍRODOVĚDNÝCH OBORŮ FYZIKA

SONDA SDO A AKTIVITA SLUNCE

Jakub TOMAN

1 Slunce a vliv na Zemi

Slunce je naší nejbližší hvězdou. Poznatky z výzkumu aktivity Slunce můžeme vztahovat na vzdálené hvězdy, které mají stejný spektrální typ jako Slunce. Aktivita Slunce se projevuje v jednotlivých vrstvách atmosféry Slunce specifickými jevy (např. ve fotosféře pozorujeme sluneční skvrny, v chromosféře odhalíme aktivní oblast, kde může vzplanout erupce).

Při velkých erupcích dochází výronu energie z atmosféry Slunce směrem k Zemi, kde dochází k polárním zářím. V extrémních případech může být vyvolána elektromagnetická bouře, která může ohrozit chod satelitů na oběžné dráze.

2 Možnosti pozorování Slunce

K amatérskému pozorování Slunce postačuje malý dalekohled s filtrem pro pozorování fotosféry a speciálním filtrem pro pozorování chromosféry. Vědecká pozorování se provádí na specializovaných observatořích. Pozemské velké dalekohledy jsou ovlivněny chvěním atmosféry - seeingem, ale pomocí aktivní a adaptivní optiky je obraz kvalitní. Sluneční observatoře jsou spojeny do projektu GONG, který umožňuje neustále pozorování Slunce. Výzkum Slunce z oběžné dráhy začala roku 1973 vypuštěním stanice Sylab, kde byl umístěn rentgenový dalekohled. První snímky ukázaly Slunce v RTG a UV záření. Na snímání Slunce na stanici Sylab navázaly později družice SOHO, STEREO a HINODE až do koróny.

3 Pozorování Slunce

Nejnovější sonda z projektu Living with a star. Sonda SDO studuje dynamické jevy v atmosféře Slunce. Napozorovaná data mají vědcům pomoci odhalit proces vzniku slunečních erupcí a vzniku slunečních magnetických polí.

První snímky Slunce ve vysokém rozlišení pořídila družice v březnu 2010. Sonda SDO překonává ostatní sondy SOHO a STEREO vysokým rozlišením snímků, počtem vlnových délek, ve kterých je Slunce snímáno a frekvencí pořizování jednotlivých snímků (snímek Slunce každých 10 sekund).

Snímky pořízené během jednoho dne zaberou 1,5 TB. Na internetových stránkách sondy jsou zveřejňovány snímky Slunce v rozmezí 20 minut. Od pořízení snímku až po okamžik zveřejnění na internetu uplyne 90 minut, ale i tak je to krátká doba. Můžeme tak Slunce pozorovat „on-line“. Data umístěná v archivu mohou pomoci amatérským pozorovatelům Slunce porovnat svá pozorování se skutečností.



INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

4 Přínos družice SDO

Nepřetržité snímkování Slunce umožňuje téměř v reálném čase sledovat děje v atmosféře Slunce (průběhy velkých erupcí a protuberancí). Mezi nejzajímavější a jedinečné záběry patří vypaření komety nad povrchem Slunce (5. července 2011).

Na základě dat, které sonda pořídila, mohou vědci předpovídat výskyt aktivních oblastí a slunečních skvrn. Analýzou snímků a záznamů z helioseismologie lze odhalit vznik slunečních skvrn v hloubce 60 000 km pod povrchem Slunce.

5 Použitá literatura a zdroje

SDO: Solar dynamics observatory [online]. 2010 - 2011 Dostupný z WWW:

<<http://sdo.gsfc.nasa.gov/>>

SpaceWeather.com [online] 2010 - 2011 Dostupný z WWW:

<<http://www.spaceweather.com/>>

Slunce a jeho pozorování [online] 2011 Dostupný z WWW: <<http://slunce.astronomie.cz>>

6 Kontakt na autora

Jakub Toman

jakub.toman@seznam.cz

ODBORNÝ KEMP PŘÍRODOVĚDNÝCH OBORŮ FYZIKA

ŘEŠENÍ FYZIKÁLNÍCH ÚLOH Z MECHANIKY 1

Josef VESELÝ

1 Úvod

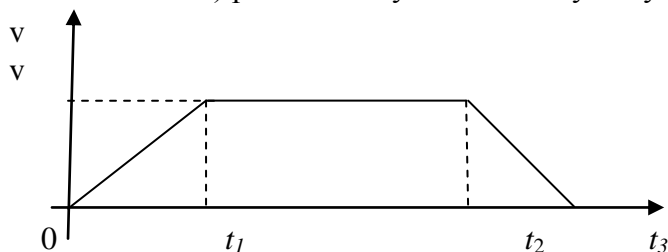
Úlohy z kinematiky přímočarého pohybu rovnoměrného a rovnoměrně zrychleného lze řešit s využitím grafů závislosti rychlosti na čase, kde plocha ohraničená grafem představuje dráhu. Touto metodou je možné řešit úlohy o rovnoměrně zrychleném pohybu bez použití kvadratických výrazů a funkcí. Dále byly zařazeny úlohy o skládání rychlostí a skládání sil s využitím znalostí o pravoúhlém trojúhelníku.

2. Příklady a úlohy

Příklad 1 – motocykl

Motocyklista se rozjíždí z klidu a svoji rychlost rovnoměrně zvětšuje po dobu t_1 na velikost v . Touto rychlostí se pohybuje až do doby t_2 . Potom rychlost rovnoměrně zmenšuje, až zastaví v čase t_3 . Určete: a) celkovou dráhu,

b) průměrnou rychlost motocyklisty.



Řešení: a) Nakreslíme graf závislosti rychlosti na čase

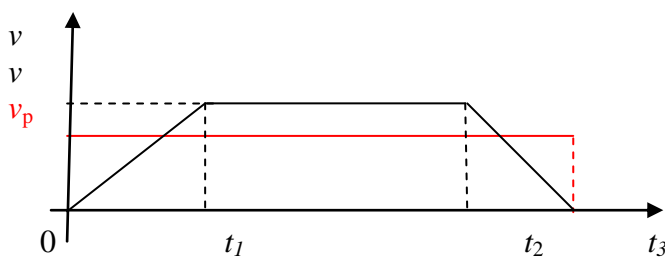
Nyní využijeme toho, že „plocha pod grafem rychlosti“ představuje dráhu. Zde počítáme obsah lichoběžníku.

Motocyklista urazí celkovou dráhu $s = \frac{t_3 + (t_2 - t_1)}{2} \cdot v$

b) Průměrná rychlost

$$v_p = \frac{s}{t} = \frac{t_3 + (t_2 - t_1)}{2t_3} \cdot v$$

Jiné řešení – přímé určení průměrné rychlosti z grafu:



Bude-li se těleso stále pohybovat průměrnou rychlostí, urazí stejnou dráhu, tj. plocha „černého“ lichoběžníku je stejná jako plocha „červeného“ obdélníku:

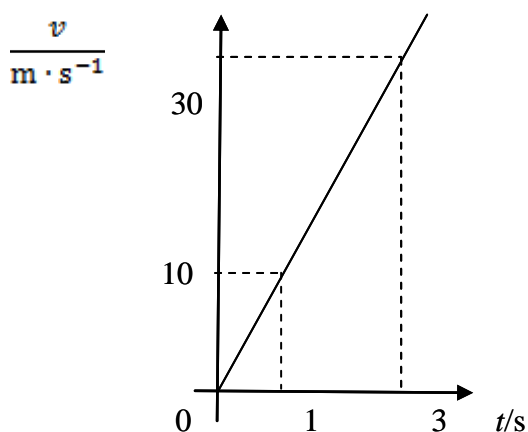
$$v_p \cdot t_3 = \frac{t_3 + (t_2 - t_1)}{2} \cdot v$$

$$\text{Průměrná rychlost motocyklisty } v_p = \frac{t_3 + (t_2 - t_1)}{2t_3} \cdot v$$

Příklad 2 - volný pád

Olovená kulička padala 3 s volným pádem. Z jaké padala výšky?

Řešení: Při volném pádu se rychlost tělesa za každou sekundu zvýší o $10 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$. Výšku (dráhu) opět určíme jako plochu v „grafu rychlosti“.



Jestliže se za první sekundu zvětší rychlost kuličky o $10 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$, bude její rychlost na konci první sekundy $10 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$, na konci třetí sekundy bude rychlost $30 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$.

Výška je pak dána plochou velkého trojúhelníka:

$$h = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 30 \text{ m}$$

Kulička padala z výšky 45 m.

Příklad 3 – člun

Člun, jehož rychlost vzhledem k vodě je $2,5 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$, vypluje kolmo od břehu řeky, jejíž proud je ve všech místech $2 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$, a druhého břehu dosáhne za 40 sekund. Vypočítejte:

a) jak je široká řeka, b) o kolik metrů proud snese člun, c) jaký úhel by musela svírat osa člunu s kolmicí ke břehu, aby člun doplul přímo do protilehlého bodu, d) jak dlouho trvá plavba v posledním případě.

Řešení: Označíme $v_1 = 2,5 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$, $v_2 = 2 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$, $t = 40 \text{ s}$, šířka řeky $s = ?$, $d = ?$, $\alpha = ?$, $t_2 = ?$

a) $s = v_1 \cdot t = 100 \text{ m}$

b) $d = v_2 \cdot t = 80 \text{ m}$

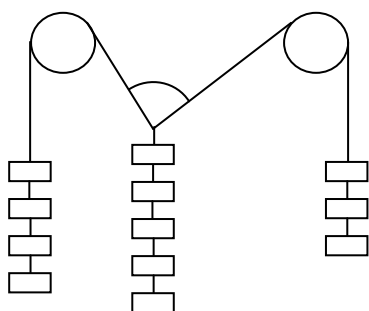
c) $\sin \alpha = \frac{v_2}{v_1} = \frac{2}{2,5} \Rightarrow \alpha = 53^\circ$

d) $t_2 = \frac{s}{v_1 \cdot \cos \alpha} = \frac{t}{\cos \alpha} = 67 \text{ s}$

a) Řeka je široká 100 m, b) proud snese člun o 80 m, c) požadovaný úhel je asi 53° , d) plavba trvá asi 67 s.

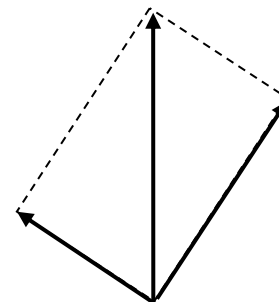
Příklad 4 - závaží

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ



Přes dvě pevné kladky jsou zavěšena čtyři a tři stejná závaží. Kolik závaží je třeba zavěsit mezi kladky, aby nastala rovnováha a aby vnitřní závěsy svíraly pravý úhel? (viz obr.)

Řešení: Složením F_1 a F_2 , kterými působí čtyři a tři závaží, vznikne síla opačná k síle, kterou působí hledaná skupina závaží. Podle Pythagorovy věty je třeba zavěsit pět závaží.



3 Závěr

Grafy a obrázky usnadňují řešení mnoha úloh.

4 Použitá literatura

Čerpáno z archivu autora a nové úlohy.

BEDNAŘIK M., ŠIROKÁ M. Fyzika pro gymnázia, mechanika, 3. vydání, Prometheus
ISBN 978-80-7196-176-5

5 Kontakt na autora

Josef Veselý Mgr.

Gymnázium J. Vrchlického Klatovy, Národních mučedníků 347

jvesely@gymkt.cz

ODBORNÝ KEMP PŘÍRODOVĚDNÝCH OBORŮ FYZIKA

ŘEŠENÍ FYZIKÁLNÍCH ÚLOH Z MECHANIKY 2

Josef VESELÝ

1 Úvod

Byly řešeny obtížnější úlohy o posuvném i valivém pohybu na nakloněné rovině, na kulové ploše a ve válcové rampě. Byly hledány podmínky pro valení bez prokluzování, byla porovnávána rychlost posuvného a valivého pohybu. Dále byl řešen pohyb soustavy těles spojených vláknem jak na nakloněné rovině, tak s využitím kladek. V některých úlohách byl využíván integrální počet. Dále uvádíme ukázky z probíraných příkladů a úloh.

2 Příklady a úlohy

Příklad 1 – závody

Po nakloněné rovině klouže kvádr a valí se válec bez prokluzování. Obě tělesa byla vypuštěna ve stejné výšce, obě mají stejnou kvalitu povrchu. Které těleso opustí nakloněnou rovinu dříve a větší rychlostí? Které těleso se bude pohybovat s větším zrychlením?

Řešení: Všechny tři otázky mají stejnou odpověď, stačí tedy vyřešit jednu z nich.

Prozkoumejme nejdříve podmínky, za kterých se uvedené pohyby uskuteční.

Kvádr:

Bude klouzat se zrychlením, pokud složka tíhové síly rovnoběžná s nakloněnou rovinou bude větší než síla třecí:

$m \cdot g \cdot \sin \alpha > f \cdot m \cdot g \cdot \cos \alpha$, kde m je hmotnost kvádrů, g tíhové zrychlení, α sklon nakloněné roviny, f součinitel smykového tření

$$f < \operatorname{tg} \alpha$$

Válec:

Potřebuje k roztáčení třecí sílu, ta musí být tak veliká, aby platilo $\varepsilon = a/r$, kde ε je úhlové zrychlení válce, a je jeho dráhové zrychlení a r poloměr. Použijeme pohybové rovnice pro otáčivý a pro posuvný pohyb válce: $M = J \cdot \varepsilon$ a $F = m \cdot a$

Z první rovnice: $r \cdot f \cdot m \cdot g \cdot \cos \alpha = 1/2 m \cdot r^2 \cdot \varepsilon$

$$f \cdot g \cdot \cos \alpha = 1/2 r \cdot \varepsilon$$

$$\varepsilon = 2f \cdot g \cdot \cos \alpha / r$$

Ze druhé rovnice: $m g \sin \alpha - f m g \cos \alpha - (\xi/r) m g \cos \alpha = m a$

$$a = g(\sin \alpha - f \cos \alpha - (\xi/r) \cos \alpha)$$

Z čehož $2f \cdot g \cdot \cos \alpha = g(\sin \alpha - f \cos \alpha - (\xi/r) \cos \alpha)$

$$2f \cdot \cos \alpha = \sin \alpha - f \cos \alpha - (\xi/r) \cos \alpha$$

$$3f = \operatorname{tg} \alpha - (\xi/r)$$

$$f \geq \frac{1}{3} \operatorname{tg} \alpha - \frac{\xi}{3r}, \text{ zanedbáme-li valivý odpor } f \geq \frac{1}{3} \operatorname{tg} \alpha$$

Uvedené pohyby se uskuteční, pokud pro součinitel smykového tření f platí

$$\frac{1}{3} \operatorname{tg} \alpha \leq f < \operatorname{tg} \alpha. \dots(1)$$

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Zrychlení kvádrů $a_1 = g \cdot (\sin \alpha - f \cos \alpha)$,

Zrychlení válce a_2 dostaneme řešením soustavy rovnic: $mgs \sin \alpha - F_t = ma_2$

$$\frac{F_t r = 1/2 m r^2 \cdot \epsilon}{a_2 = 2/3 g \cdot \sin \alpha}$$

Při splnění podmínky (1) bude váleček rychlejší, pokud $\sin \alpha - f \cos \alpha < 2/3 \sin \alpha$, tj. $f > 1/3 \tan \alpha$, to znamená vždy.

Příklad 2 – kvádr

Malý kvádr klouže ve válcové rampě. Za jakých podmínek doklouže až do nejnižšího bodu?

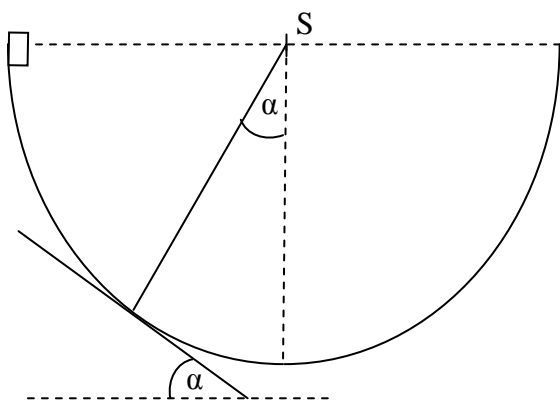
Jakou tam bude mít rychlost?

Řešení: Pro řešení použijeme zákon zachování a přeměny mechanické energie:

$$E_P = E_K + W$$

Kvádr se zastaví ve chvíli, kdy $W = E_P$

Práci W , kterou kvádr vykoná při překonávání třecí síly, vypočteme užitím určitého integrálu:



$$W = - \int_{90}^{\alpha} F_t r d\alpha = \int_{\alpha}^{90} f m g r \cos \alpha d\alpha = f m g r [\sin \alpha]_{\alpha}^{90} = f m g r (1 - \sin \alpha)$$

$$E_P = m g h, h = r \cos \alpha$$

$$f m g r (1 - \sin \alpha) = m g h$$

$$f r (1 - \sin \alpha) = r \cos \alpha$$

Užitím goniometrického vzorce $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$ a substituce vyřešíme kvadratickou rovnici. Ta má řešení pro $f \leq \sqrt{2}$, což bývá splněno. Vybereme řešení $\sin \alpha = \frac{f + \sqrt{2 - f^2}}{2}$.

Úloha 1: Vypočítejte úhel pro zastavení kvádrů pro $f = 0,2$. [53°]

Úloha 2: Pro jaký součinitel smykového tření bude $\alpha = 90^\circ$.

Příklad 3 – soustava

Vypočítejte rychlost soustavy válce a kvádrů spojených lehkými vlákny, ve chvíli, kdy váleček opustí nakloněnou rovinu, jestliže se váleček valil z výšky h . Valivý odpor válce neuvažujte, součinitel smykového tření je f a sklon nakloněné roviny je α . Váleček je umístěn pod kvádrem, vlákna jsou upevněna k ose válce.

Řešení: Využijeme zákon zachování a přeměny mechanické energie:

$$E_{K1} + E_{R1} + E_{K2} + W = E_{P1} + E_{P2}$$

$$\frac{1}{2} m_1 v^2 + \frac{1}{4} m_1 v^2 + \frac{1}{2} m_2 v^2 + f m_2 g \frac{h}{\sin \alpha} \cos \alpha = (m_1 + m_2) g h$$

$$v = \sqrt{\frac{g h (m_1 + m_2 + \frac{f m_2}{\tan \alpha})}{\frac{3}{4} m_1 + \frac{1}{2} m_2}}$$

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Úloha 3: Vypočítejte výšku, která je zapotřebí k dosažení rychlosti $2 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$ v ději z předchozího příkladu. Hmotnost válce je 2 kg , hmotnost kvádru 1200 g , součinitel smykového tření je $0,15$, sklon nakloněné roviny je 45° .

3 Závěr

Uvedené příklady a úlohy pomohou žákům při řešení při řešení soutěžních úloh fyzikální olympiády.

4 Použitá literatura

BEDNÁŘIK M., ŠIROKÁ M. Fyzika pro gymnázia, mechanika, 3. vydání, Prometheus

ISBN 978-80-7196-176-5

SVOBODA E. Přehled středoškolské fyziky, 1. vydání SPN Praha

ISBN 80-04-22435-0

5 Kontakt na autora

Josef Veselý Mgr.

Gymnázium J. Vrchlického Klatovy, Národních mučedníků 347

jvesely@gymkt.cz

ODBORNÝ KEMP PŘÍRODOVĚDNÝCH OBORŮ FYZIKA

ŘEŠENÍ ÚLOH Z HYDROMECHANIKY 1

Josef VESELÝ

1 Úvod

Pozornost budeme věnovat zejména statice kapalin s použitím Pascalova a Archimédova zákona. V úlohách bude řešeno pumpování v hydraulickém zvedáku s užitím páky, využití siloměru a kapaliny pro měření hustoty tuhého tělesa, experimentálně i teoreticky plování a potápění těles s překvapením („cvičené“ zápalky).

Byly však zařazeny i úlohy o proudění kapaliny, vytékání otvorem a odporu prostředí. Některé úlohy byly řešeny jen kvalitativně.

2 Příklady, úlohy a pokusy

Příklad 1 – hustota

Zavěsíme-li dané závaží na siloměr ve vzduchu, ukáže siloměr sílu 12 N. Ponoříme-li závaží do vody, naměříme 8 N. Určete hustotu závaží.

Řešení: $F_G = 12 \text{ N}$, $F_G - F_{VZ} = 8 \text{ N}$, $\rho_K = 1000 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$, $\rho_T = ?$

Ve vzduchu měříme tíhovou sílu F_G působící na závaží (vztlaková síla vzduchu je zanedbatelná), ve vodě pak rozdíl mezi tíhovou silou a vztlakovou silou F_{VZ} .

Ze vztahů $F_G = m \cdot g$, $m = \rho_T \cdot V$, $V = F_G / g \cdot \rho_T$ a $F_{VZ} = \rho_K \cdot V \cdot g$ máme

$$F_G - F_{VZ} = \frac{\rho_T - \rho_K}{\rho_T} \cdot F_G, \text{ dále}$$

$$\rho_T = \frac{\rho_K \cdot F_G}{F_G - (F_G - F_{VZ})} = 3000 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$$

Hustota závaží je $3000 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$.

Příklad 2 – zvedák

Hydraulickým zvedákem máme zvednout břemeno o hmotnosti 2000 kg o 30 cm. Malý píst má průřez o obsahu 2 cm^2 , velký 30 cm^2 . Malý píst je ovládán jednozvrtnou pákou o délce 40 cm, píst je upevněn 3 cm od osy otáčení páky. Jeden zdvih konce páky je 25 cm. Vypočítejte, jakou silou je třeba působit na konci páky a kolik zdvihů je třeba provést při pumpování oleje pod velký píst.

Řešení: $g = 10 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$, $m = 2000 \text{ kg}$, $h = 30 \text{ cm}$, $S_1 = 2 \text{ cm}^2$, $S_2 = 30 \text{ cm}^2$, $l = 40 \text{ cm}$, $l_1 = 3 \text{ cm}$, $s = 25 \text{ cm}$, $F = ?$, $N = ?$

Na velký píst musí olej působit silou F_2 o velikosti mg , malý píst na olej silou F_1 , pro jejíž velikost z Pascalova zákona platí:

$$F_1 = \frac{F_2}{S_2} \cdot S_1 = \frac{m \cdot g}{S_2} \cdot S_1, \text{ podle pravidla rovnováhy na páce platí } F \cdot l = F_1 \cdot l_1 \text{ a dále}$$

$$F = \frac{m \cdot g}{S_2} \cdot S_1 \cdot \frac{l_1}{l} = \frac{m \cdot g \cdot S_1 \cdot l_1}{S_2 \cdot l} = \frac{2000 \cdot 10 \cdot 2 \cdot 3}{40 \cdot 30} \text{ N} = \underline{100 \text{ N}}$$

Olej je nestlačitelný, proto $N \cdot s_1 \cdot S_1 = h \cdot S_2$, kde s_1 je zdvih malého pístu a platí $s_1 = \frac{s \cdot l_2}{l}$, dále

$$N = \frac{h \cdot S_2 \cdot l}{s \cdot l_1 \cdot S_1} = \frac{30 \cdot 30 \cdot 40}{25 \cdot 3 \cdot 2} = 240$$

Je třeba působit silou 100 N a provést 240 zdvihů.

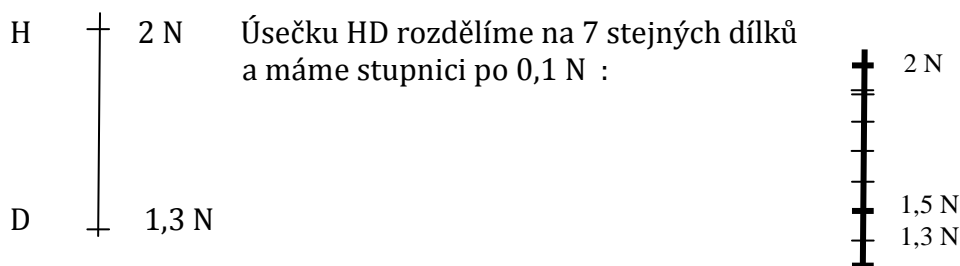
Příklad 3 – siloměr

Je třeba ocejchovat siloměr. Vedle siloměru je k dispozici hliníkové závaží o hmotnosti 200 g a kádinka s vodou.

Postup: Nejprve na siloměr zavěšíme závaží a uděláme značku (horní H). Této značce přísluší síla o velikosti $F_G = m \cdot g = 0,2 \cdot 10 \text{ N} = 2 \text{ N}$.

Potom závaží ponoříme do vody a uděláme druhou značku (dolní D). Této značce přísluší síla o velikosti

$$F = F_G - F_{VZ} = m \cdot g - \rho_K \cdot V \cdot g = m \cdot g - \rho_K \cdot m / \rho_T \cdot g = m \cdot g \cdot (1 - \rho_K / \rho_T) = 0,2 \cdot 10 \cdot (1 - 1000 / 2700) \text{ N} = 1,26 \text{ N}, \text{ zaokrouhlíme na } 1,3 \text{ N}.$$

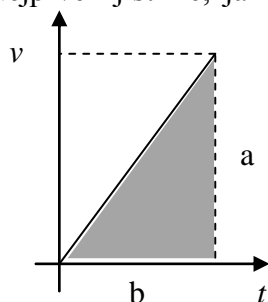


Příklad 4 – hadice

Určete rychlost vody ve vodorovně upevněné hadici o průřezu 6 cm^2 , ze které stříká voda tryskou o průřezu $1,5 \text{ cm}^2$ do vzdálenosti 2 m na vodorovný trávník. Osa hadice je ve výšce 125 cm.

Řešení: $S_1 = 6 \text{ cm}^2$, $S_2 = 1,5 \text{ cm}^2$, $d = 2 \text{ m}$, $h = 125 \text{ cm} = 1,25 \text{ m}$, $v_1 = ?$

Nejprve zjistíme, jak dlouho voda „padá“ volným pádem z výšky 1,25 m. Tato výška se číselně rovná obsahu trojúhelníku v „grafu rychlosti“, je tedy 1,25 (viz obr).



$$\frac{a}{b} = \frac{10}{1} \Rightarrow a = 10b$$

$$\frac{1}{2} \cdot a \cdot b = 1,25$$

$$5b^2 = 1,25$$

$$b = 0,5 \Rightarrow t = 0,5 \text{ s}$$

$$\text{Voda z trysky vytéká rychlostí } v_2 = d/t = 2/0,5 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} = 4 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

Dále platí rovnice kontinuity $S_1 \cdot v_1 = S_2 \cdot v_2$

$$v_1 = \frac{S_2 \cdot v_2}{S_1} = \frac{1,5 \cdot 4}{6} \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} = 1 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Voda v hadici teče rychlostí $1 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$.

Experiment – potápěč

Udělejte ze zápalky potápěče a vysvětlete jeho chování.

Provedení: Připravíme si skleněnou láhev (nebo zkumavku) s úzkým hrdlem naplněnou až po okraj vodou. Zápalku zkrátíme na délku asi 4 mm tak, aby průměrná hustota zápalky (dřevo + hlavička) byla jen nepatrně menší než hustota vody. Tuto malou část (s hlavičkou) vložíme do láhve a silně zatlačíme palcem. Pалеc musí zakrývat celý otvor.

Zápalka-potápěč začne klesat ke dnu. Povolíme-li stlačení, zápalka se opět vynořuje.

Vysvětlení: Palcem zvyšujeme tlak ve vodě, její objem a hustota se však nemění. Objem dřeva zápalky se při zvýšení tlaku poněkud zmenšuje, hustota se tím zvětšuje a „potápěč“ klesá ke dnu. Při snížení tlaku se hustota našeho „potápěče“ vrací na původní hodnotu a on stoupá vzhůru.

Poznámka: Necháme-li zápalku příliš dlouhou, nepotopí se, bude-li naopak příliš krátká, klesne ke dnu.

3 Závěr

Uvedené příklady, úlohy a pokusy umožnily přitažlivou formou prohloubit znalosti a dovednosti žáků v oblasti hydromechaniky.

4 Použitá literatura

Čerpáno z archivu autora a nové úlohy.

BEDNAŘIK M., ŠIROKÁ M. Fyzika pro gymnázia, mechanika, 3. vydání, Prometheus
ISBN 978-80-7196-176-5

5 Kontakt na autora

Josef Veselý Mgr.

Gymnázium J. Vrchlického Klatovy, Národních mučedníků 347

jvesely@gymkt.cz